MATEMATICKÉ MODELÝ PRO ANALYTICKÝ VÝPOČET ENERGOPÍLOT

MATHEMATICAL MODELS FOR ANALYTICAL CALCULATION OF ENERGYPILES

Jakub Oravec¹, Ondřej Šíkula¹

¹Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Veveří 331/95, 602 00 Brno, Česká republika

Abstrakt

Súčasným trendom je znižovanie energetickej náročnosti budov využívaním alternatívnych zdrojov vykurovania a chladenia. Jedným z najperspektívnejších a zdrojov vykurovania a chladenia je využitie energie zeme pomocou tepelne aktivovaných základových pilót budovy, takzvaných energetických pilót. Príspevok sa zaoberá prehľadom a porovnaním analytických modelov energetických pilót. Jednotlivé analytické modely sú porovnávané (kategorizované) z hľadiska ich fyzickej náročnosti, výpočtovej náročnosti a tým aj využiteľnosti pre účely optimalizácie energetických pilót alebo hodnotenia dlhodobej energetickej efektívnosti poľa energetických pilót. Vybrané matematické modely boli algoritimizované a získané výsledky boli porovnané s robustnejším numerickým riešením modelovaným pomocou softvéru CalA 4.

Klíčová slova

Epilota, g-funkcia, tepelný odpor, numerický model, analytický model

Abstract

A current trend is to reduce the energy performance of buildings by using alternative sources for heating and cooling. One of the most promising, and so far unprecedented sources of heating and cooling, is the use of energy from the earth using the thermally-activated foundation piles of a building, the so-called energy piles. The paper deals with an overview and comparison of computer-aided analytical models of energy piles. The individual analytical models are compared (categorized) from the point of view of their physical complexity, computational costs, and thus their usability for the purpose of optimizing energy-pile equipment or assessing the long-term energy efficiency of an energy pile field. Selected mathematical models were algorithmized, and the results obtained were compared with a more robust numerical solution performed using CalA 4 software.

Key words

Epile, g-function, thermal resistance, numerical model, analytical model

1 ÚVOD

Epilota – tepelne aktivovaná pilota – je vertikálna základová konštrukcia v ktorej je umiestnený zemný výmenník tepla pomocou ktorého dochádza k odoberaniu (predávaniu) tepla medzi zemínou a teplonosnou látkou. Hlavnou výhodou je využitie geotermálnej energie, ktorá patrí medzi obnoviteľné zdroje tepla a oproti často používaným geotermálnym vrtom je ich využitie cenovo efektívne u budov, kde sú nutné pilotové základy. Obecne existujú dva spôsoby modelovania tepelných dejov prebiehajúcich v epilote – pomocou analytických modelov a pomocou numerických modelov. Analytické modely obsahujú viacero zjednodušení vďaka čomu sa výrazne znižuje ich výpočtová náročnosť. Oproti tomu numerické modely dokážu pomerne presne simulovať tepelné deje odohrávajúce sa v pilote a okolitej zemine ale tým pádom výrazne stúpa ich výpočtová náročnosť. Väčšina doteraz realizovaného výskumu sa zaoberá vrtmi ale oveľa menej sa ich zaoberá tepelne aktivovanými pilotami. Cieľom tohto článku bolo porovnať vybrané analytické modely, pôvodne vyvinuté pre modelovanie vrtov, s numerickým riešením a určiť, či je možné ich efektívne využívať na modelovanie epilot.

2 ANALYTICKÉ MODELY

Teoretický základ pre väčšinu konvenčných analytických modelov vychádza z Kelvin's theory of heat sources, Laplace transform method a Duhamel's theorem [1], [2]. Pri modelovaní epilot je obecné prenos tepla modelovaný v 2 oblastiach – v zemine a v pilote, ktoré sú zjednodušene považované za homogénne médium. Všetky modely využívajú zjednodušujúce predpoklady, medzi najbežnejšie patria:

- zemina je považovaná za nekonečnú alebo polo nekonečnú,
- jednotná počiatková konštantná teplota,
- okrajová podmienka pre stenu piloty alebo potrubia je konštantný tepelný tok alebo konštantná teplota,
- zemina je považovaná za materiál s ekvivalentnou tepelnou vodivosťou.

Hľadanou veličinou pri modelovaní týchto tepelných dejov je tepelný tok q [W/m] medzi teplotnosnou látkou a zeminou ako funkcia času pri určitom teplotnom rozdiely medzi teplotnosnou látkou a zeminou a je závislý na celkovom tepelnom odpore medzi nimi $R(t)$ [m.K/W].

$$q = \frac{T_f(t) - T_0}{R(t)} = \frac{T_f(t) - T_0}{R_p + G(x, t)} \quad (1)$$

Stredná teplota teplotnosnej látky a teplota zeminy sú známe veličiny, analytické modely sa zaoberajú hľadaním vzťahov na určenie celkového tepelného odporu $R(t)$. Celkový tepelný odpor býva v analytických modeloch rozdelený na 2 zložky – časovo závislú a časovo nezávislú. Časovo závislá zložka býva označovaná ako G -funkcia – $G(x, t)$ - je teplotná odozva zeminy vzhľadom na jednotkovú zmenu tepelného toku. G -funkcia popisuje tepelné deje odohrávajúce sa v zemine mimo piloty. Časovo nezávislá zložka celkového tepelného odporu - R_p – popisuje tepelné deje odohrávajúce sa v samotnej pilote a vyjadruje, že nestacionárne vedenie tepla v pilote sa zanedbáva. Je to teda tepelný odpor medzi cirkulujúcou teplotnosnou látkou a vonkajšou stenou piloty [3].

3 TEPELNÝ ODPOR ENERGOPILOTY

Základným predpokladom pre zisťovanie tepelného odporu piloty R_p je, že tepelné procesy v pilote sú v ustálenom stave. Tento stav je definovaný ako (t_p [m] je polomer piloty) [3] :

$$t > 5 \cdot (r_p^2 / a_p) \quad (2)$$

V čase t [s] je teda možné považovať tepelný tok v pilote za ustálený a teplotný rozdiel medzi teplotnosnou látkou a stenou piloty je konštantný. Modely pre R_p a tým pádom aj pre G -funkcie sú použiteľné len pri dorážaní tohto kritéria. Tepelný odpor piloty R_p závisí hlavne od konfigurácie potrubia a tepelných vlastností výplňových materiálov piloty a okolitej pôdy. Tento lokálny tepelný proces má tri zložky:

- R_f tepelný odpor pri konvekčnom prestupe tepla medzi cirkulujúcou tekutinou a vnútorným povrchom rúrky výmenníku;
- R_{pw} je tepelný odpor pri kondukčnom prenose tepla cez stenu rúrky výmenníku;
- R_c je tepelný odpor pri kondukčnom prenose tepla cez výplňový materiál.

Celkový tepelný odpor môže byť definovaný ako súčet týchto troch zložiek. Modely na výpočet R_p môžeme rozdeliť na empirické a teoretické. Empirické modely sa široko používajú kvôli ich jednoduchosti a boli využité aj v našom porovnaní. Použitý empirický 1D model zjednodušuje reálne kruhové potrubie vinuté v tvare U na jedno potrubie s ekvivalentným priemerom. Tento zjednodušuje dvojrozmernú geometrickú oblasť na koncentrickú prstencovú oblasť, vďaka čomu sa komplikovaný mnohorozmerný problém obmedzuje na jednoduchý jednorozmerný [4].

$$R_p = \frac{1}{2\pi\lambda_p} \ln\left(\frac{r_p}{r_{\text{pipe}}} \sqrt{\frac{r_{\text{pipe}}}{D}}\right) \quad (3)$$

4 VÝPOČET G-FUNKCIE

Modely pre výpočet G -funkcie vychádzajú z teoretických základov, ktoré navrhol Ingersoll [1]. V svojej práci prezentoval Infinite line source model, ktorý umožňuje teplotné pole v zemi zapísať ako funkciu závislú od času

a polomeru okolo líniového zdroja pri konštantnom tepelnom toku v rovine kolmej na verikálnu os piloty v nekonečnej pevnej látke. Tento model bol vyvinutý pre výpočet vrtov, ktoré majú polomer zvyčajne niekoľko centimetrov a v porovnaní s jeho dĺžkou je polomer veľmi malý. Tento veľmi tenký vrt teda možno považovať za líniu nekonečnej dĺžky bez objemu, ktorý odovzdáva (odoberá) teplo do (alebo z) okolitej pôdy.

$$G(r, t) = \frac{1}{4\pi\lambda_s} \int_0^\infty r_p^2 / 4a_s t \frac{\exp(-u)}{u} du = \frac{1}{4\pi\lambda_s} E_1\left(\frac{r_p^2}{4a_s t}\right) \quad (4)$$

Exponenciálny integrál E_1 môže byť pre veľké hodnoty parametru (at/r^2) , kde a [m²/s] je súčiniteľ teplotnej vodivosti, zjednodušený na:

$$E_1\left(\frac{r_p^2}{4a_s t}\right) = \ln\left(\frac{4a_s t}{r_p^2}\right) - \gamma \quad \frac{a_s t}{r_p^2} \geq 5. \quad (5)$$

Infinite line source model sa považuje za zjednodušenie Cylindrical source model (Obr. 1), v ktorom je do úvahy braný aj radiálny rozmer piloty. Používané sú rovnaké vstupné parametre ako u Infinite line source model. Cylindrical source model považuje prenos tepla mimo piloty za vedenie tepla v nekonečnom priestore vnútorne ohraničenom stenou piloty, na ktorú môže byť použitá okrajová podmienka konštantného tepelného toku alebo teploty [1]. Riešenie problému popisuje rovnica:

$$G(r, t) = \frac{1}{4\pi\lambda_s} \int_0^\infty (e^{-a_s u^2 t} - 1) \frac{J_0(ur_p)Y_1(ur_p) - Y_0(ur_p)J_1(ur_p)}{u^2[J_1^2(ur_p) + Y_1^2(ur_p)]} du \quad (6)$$

Symbole J_0, J_1, Y_0, Y_1 v rovnici predstavujú Besselove funkcie prvého a druhého rádu. Rovnica môže byť pre veľké hodnoty parametru (at/r^2) zjednodušená na:

$$G(r, t) = \frac{1}{4\pi\lambda_s} \left[\ln\left(\frac{4a_s t}{r_p^2}\right) - \gamma + \frac{r_p^2}{2a_s t} \left(\ln\left(\frac{4a_s t}{r_p^2}\right) - \gamma + 1 \right) \right] \quad (7)$$

Obr. 1 Okrajové podmienky analytických modelov.

Kvôli využitiu predpokladu líniového zdroja je vzorec nevhodný pre malé časové kroky, pretože tento predpoklad môže spočiatku oddialiť teplotnú odozvu na stene vrtu. S relatívnou chybou menšou ako 10% medzi týmito dvoma modelmi môžu byť použité pri časovom kroku [3]:

$$t \geq \frac{5r_p^2}{a_s} \quad (8)$$

A s relatívnou chybou menšou ako 2 % pri časovom kroku [3]:

$$t \geq \frac{20r_p^2}{a_s} \quad (9)$$

Dodržanie časového kroku s minimálnou hodnotou podľa rovnice (10) sa vyžaduje, pri použití ktorejkoľvek z týchto G-funkcií v spojení s ktorýmkoľvek z modelov pre Rb.

Rovnice nemožno použiť pre výpočty na veľmi dlhé obdobie blížiacemu sa k hodnote [3]:

$$t = \frac{H^2}{4a_s} \quad (10)$$

Toto obmedzenie vzniká z dôvodu zanedbania vplyvu povrchu zeme. To je spoločná nevýhoda všetkých modelov, ktoré predpokladajú, že pôda je nekonečným médium.

Dalším možným riešením, ktoré berie do úvahy teplotu na povrchu zeminy je Finite line source model [5]. Zemina je braná ako homogénne polo-nekonečné médium ktoré má počiatočnú jednotnú teplotu a jeho termofyzikálne vlastnosti sa nemenia so zmenou teploty. Hranica média, predstavujúca povrch zeminy si udržuje konštantnú teplotu počas celého výpočtu.

Model využíva predpoklady Line source modelu a teda radiálny rozmer piloty je zanedbaný. Povrch zeme sa považuje za odrazovú rovinu a existuje zrkadlová obrazová línia chladičov (heat sinks). Symetrické rozdelenie líniového zdroja a chladičov môže udržiavať teplotu povrchu zeme na konštantnej hodnote. Ako reprezentatívna teplota pre celú pilotu môže byť zvolená teplota v strede steny piloty, ktorá dosahuje ustálený stav v čase blížiacom sa k nekonečnu. Pre praktické aplikácie definujeme nominálny ustálený stav v čase kedy dosiahneme určitý zvolený limit, v tomto prípade 98 % ustáleného stavu. Pomocou lineárnej regresie môžeme aproximovať Fourierovo kritérium pre tento stav ako [5]:

$$Fo_s = 3,8 \cdot \frac{r_p}{H} + 0,29 \quad 0,001 \leq \frac{r_p}{H} \leq 0,7 \quad (11)$$

Ak sa čas blíži k nekonečnu je možné riešenie problému redukovat' na [5]:

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\lambda_s} \ln \left[\frac{\sqrt{(H-z)^2 + \rho^2} + H - z}{\sqrt{(H+z)^2 + \rho^2} + H + z} \cdot \frac{2z^2 + 2z\sqrt{\rho^2 + z^2} + \rho^2}{\rho^2} \right] \quad (12)$$

V prípade, keď je polomer piloty r_b v porovnaní s jej hĺbkou H [m] oveľa menší ($r_b/H \ll 1$), je možné vzťah v ustálenom stave v strede steny vrtu zjednodušiť na [5]:

$$G(r) = \frac{1}{2\pi\lambda_s} \ln \frac{H}{\sqrt{3}r_b} \quad (13)$$

Pretože sa teplota pozdĺž steny piloty zásadne mení, nie je ideálne používať vzorec ktorý využíva teplotu v strede steny piloty. Doporučené je použitie integrálnej strednej teploty pozdĺž piloty z čoho dostávame vzťah, získaný lineárnou regresiou, pre výpočet G-funkcie definovaný ako [5]:

$$G(r) = \frac{1}{2\pi\lambda_s} \ln \frac{H}{2,2r_b} \quad (14)$$

5 POROVNANIE ANALYTICKÝCH MODELOV

Porovnávané boli Infinite line source model (4), Cylindrical source model (6) a Finite line source model (12),(13) s numerickým riešením. Prenos tepla bol modelovaný pomocou stacionárnych a dynamických simulácií. Analytické modely boli spočítané vo vlastnom výpočtovom programe, ktorý umožňuje stacionárny a nestacionárny výpočet výkonu q [W/m] pre pilotu ľubovoľného tvaru, pričom sú overené všetky vyššie spomínané podmienky výpočtu. Numerické riešenie bolo získané simuláciou v programe CalA 4 [6], tento program umožňuje stacionárny a nestacionárny výpočet vedenia tepla pomocou metódy kontrolných objemov na 2D ortogonálnej sieti, ktorú je možné riešiť ako rotačne symetrickú. Vo všetkých simuláciách boli termofyzikálne vlastnosti materiálov považované za konštantné, izotropné a nezávislé na teplote. Schéma simulovanej piloty spolu s materiálovými vlastnosťami a okrajovými podmienkami je možné vidieť na Obr. 2a. Celkovo bolo simulovaných 100 dní prevádzky piloty, počas ktorých bolo nepretržite odoberané teplo zo zeminy. Časový krok pre analytické modely bol zvolený podľa (3) na 96 hodín. Numerický model bol spočítaný v hodinovom kroku. Schéma numerického modelu a okrajových podmienok je možné vidieť na Obr. 2b. Stacionárne výpočty boli spočítané pre čas získaný zo vzťahu (12) a pre Finite line source model pomocou Fourierovho kritéria (13), pre tento model bola zisťovaná len hodnota výkonu v ustálenom stave.

Obr.2 a) schema modelovaného prípadu, b) okrajové podmienky numerického modelu.

Obr. 3 Porovnanie tepelných tokov analytických modelov a numerických modelov.

Z výsledkov dynamických simulácií môžeme pozorovať značný rozdiel v dosahovaných tepelných výkonoch. Najväčšie rozdiely medzi analytickým a numerickým výpočtom sú zaznamenané pri počiatočných časových krokoch, s postupujúcim časom sa rozdiely znižujú – Obr. 3. V tomto čase sú zaznamenané odlišnosti vo výkonoch až do takmer 30 W/m . Zo statických simulácií, ktoré udávajú výkon v ustálenom stave piloty, bola zistená relatívna chyba voči numerickému modelu ktorá sa pohybuje v rozsahu od 25 % do 38 %.

Celkovo vykazuje najlepšiu zhodu z numerickým modelom Cylindrical source model, ale aj u tohto modelu je rozdiel vo výkone (25 %) stále pomerne veľký.

6 ZÁVĚR

Analytické modely, pôvodne navrhnuté na výpočet vrtov boli aplikované na tepelne aktivované piloty, z dosiahnutých výsledkov môžeme vidieť pomerne veľké nepresnosti dosiahnutých výsledkov v porovnaní s numerickým modelom. Medzi hlavné nevýhody týchto modelov (IFLSM, CSM) patrí, že vo výpočte nezohľadňujú vplyv pôsobenia povrchu zeme, čo je u pilot ktoré sú obecné kratšie ako vrty zásadné. Tento problém čiastočne rieši FLSM rozdelením na polopriestor, ale ani u neho nie je možné nastaviť rozdielnu okrajovú

podmienku pre povrch zeminy a samotnú zeminu. Tieto modely majú, kvôli rozdielnej geometrii piloty oproti vrtu, väčšie obmedzenia minimálneho časového kroku (8) - rádovo v dňoch. A obdobne aj celkového výpočtového času (10), ktorý je kratší ako u vrtov.

Tieto analytické modely sú obecné vhodné, keď potrebujeme rýchlo s malou výpočtovou náročnosťou určiť približný výkon pilot. Pre fyzikálne podrobné riešenie sú vhodnejšie numerické modely. Do budúcnosti by bolo vhodné navrhnúť analytický model ktorý dokáže vyriešiť vyššie spomenuté nedostatky.

Poděkování

Příspěvek vznikl s podporou projektu FAST-J-21-7438 Optimalizace tepelně-aktivovaných konstrukcí pomocí algoritmů strojového učení.

Použité zdroje

- [1] Ingersoll LR. Heat Conduction - With Engineering and Geological Application. DODO Press; 2007.
- [2] CARSLAW, H.S. and J.C. JAEGER. Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- [3] LI, Min and Alvin C.K. LAI. Review of analytical models for heat transfer by vertical ground heat exchangers (GHEs): A perspective of time and space scales. Applied Energy. 2015, 151, 178-191. DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.04.070. ISSN 03062619.
- [4] Gu Y, O'Neal DL. Development of an equivalent diameter expression for vertical U-tubes used in ground-coupled heat pumps. ASHRAE Transactions, vol. 104, Texas A&M Univ, College Station, US: 1998, pp. 347-355.
- [5] Zeng HY, Diao NR, Fang ZH. A finite line-source model for boreholes in geothermal heat exchangers. Heat Transfer - Asian Research 2002;31:558-567. doi:10.1002/htj.10057.
- [6] Sikula O, Plasek J. Software CalA 4.0 (Calculation Area). version 4.0 Edu. 2015/10/05. doi:10.13140/RG.2.1.1501.7689.