SPRACOVANIE MERANÍ S RÔZNOU MIEROU NEISTOTY

PROCESSING OF MEASUREMENTS WITH DIFFERENT LEVELS OF UNCERTAINTY

Lubomíra Gerhátová¹

Abstrakt

V geodetickej praxi sa často stretávame s tým, že na bodoch geodetickej siete potrebujeme vykonať rôzne druhy geodetických meraní (z hľadiska meračských postupov aj presnosti) a v rámci procesu spracovania ich vhodne kombinovať. Najčastejšie používaná metóda najmenších štvorcov je síce jednoduchá, ale v rámci postupu spracovania kombinuje danú apriórnu presnosť meraní (jednotlivých meraní aj ich skupín) spolu s meraniami samotnými. V prípade, že apriórna presnosť jednej metódy (resp. skupiny meraní), je výrazne nadhodnotená, resp. podhodnotená voči inej metóde (skupine meraní), výsledok až tak neodzrkadľuje realitu. Metóda odhadu variančných komponentov je jedna z metód, ktorá ukazuje, ako sa s takouto situáciou vysporiadať.

Abstract

In geodetic practice, we often encounter the fact that at the points of the geodetic network we need other types of geodetic measurements (in terms of measurement procedures and accuracy) and it is appropriate to combine them within the processing process. The most commonly used method of least squares is simple, but within the processing process it combines the given a priori accuracy of measurements (individual measurements and their groups) together with the measurements themselves. If the a priori uncertainty of one method (or group of measurements) is significantly overestimated, resp. underestimated against another method (group of measurements), the result does not reflect reality. The method of estimation of variance components is one of the methods that shows how to deal with such a situation.

Kľúčové slová

Metóda odhadu variančných komponentov, metóda najmenších štvorcov

Keywords

Method of estimation of variance components, method of least squares

1 Úvod

V súčasnej geodetickej praxi často vykonávame na geodetických bodoch merania klasickými aj družicovými metódami. Závisí to od účelu siete a požadovanej presnosti, od rozmiestnenia bodov a podmienok na nich, aká metóda merania je vhodná a použiteľná. Pri spracovaní heterogénnych meraní býva často problém určiť správny apriórny odhad presností jednotlivých techník, resp. správne určenie ich váh v rámci kombinácie. V niektorých prípadoch existuje možnosť stanoviť na základe spracovania heterogénnych meraní aposteriórne charakteristiky presnosti samostatne pre každú skupinu meraní pomocou odhadu tzv. variančných komponentov. Túto metódu rozpracovalo viacero autorov, informácie o nej nájdeme napr. v

¹ Lubomíra Gerhátová, Ing., PhD., Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky, Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Radlinského 11, 810 05, Bratislava, e-mail: lubomira.gerhatova@stuba.sk

[5], [6] [2], [1], [4] atď. V publikácii [4] je prezentovaný vplyv zmien variančných komponentov na aposteriornu jednotkovú smerodajnú odchýlku s ďalším využitím na určenie odhadu variančných komponentov numerickým spôsobom.

2 Metóda variančných komponentov

Majme m súborov nameraných údajov, pričom každý z nich bol získaný inou technológiou. Globálna kovariančná matica všetkých uskutočnených meraní $\mathbf{x}$ má potom tvar podľa [1]:

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \text{var} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{\Sigma}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Sigma}^{(m)} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{(1)} + \mathbf{V}^{(2)} + \dots + \mathbf{V}^{(m)}, \quad (1)$$

kde pre každú maticu $\mathbf{V}^{(j)}$ môžeme napísať:

$$\mathbf{V}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}^{(j)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Tento zápis vyjadruje, že jednotlivé čiastkové bloky $\mathbf{\Sigma}^{(j)}$ globálnej kovariančnej matice $\mathbf{\Sigma}_x$, ktoré sa vzťahujú k príslušnému vektoru realizácií meraní $\mathbf{x}^{(j)}$, sú stanovené spoľahlivo a odpovedajú reálnej presnosti j -tej techniky použitej v rámci kombinácie ($j = 1, 2, \dots, m$). Vo všeobecnosti však môžeme tvar globálnej kovariančnej matice modifikovať do nasledujúcej podoby:

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Sigma}_x(\boldsymbol{\vartheta}) = \vartheta_1 \mathbf{V}^{(1)} + \vartheta_2 \mathbf{V}^{(2)} + \dots + \vartheta_m \mathbf{V}^{(m)} = \sum_{j=1}^m \vartheta_j \mathbf{V}^{(j)}, \quad (3)$$

kde $\vartheta_j > 0$ sú tzv. variančné komponenty. Jedná sa o násobné faktory, ktoré korigujú apriórne informácie o presnosti jednotlivých súborov meraní. Blokové matice $\mathbf{V}^{(j)}$ majú rovnaký rozmer ako $\mathbf{\Sigma}_x$ a obsahujú ako jeden blok kovariančnú maticu $\mathbf{\Sigma}^{(j)}$.

V prípade, že metódu variančných komponentov aplikujeme na druhý lineárny model (nepriame meranie vektorového parametra), potom na základe vektora realizácie všetkých meraní $\mathbf{x}$ a jeho globálnej kovariančnej matice v tvare $\text{var}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Sigma}_x(\boldsymbol{\vartheta})$ je našim cieľom odhadnúť parameter $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ takým spôsobom, aby bola rešpektovaná rozličná váha meraní $\mathbf{x}^{(j)}$ vyjadrená variančnými komponentmi ϑ_j , ktoré sú taktiež predmetom odhadu [1].

Riešenie uvedenej situácie sa uskutočňuje v dvoch krokoch: 1) odhad vektora variančných komponentov $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ a následné vytvorenie modifikovanej kovariančnej matice $\mathbf{\Sigma}_x(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$, 2) odhad neznámych parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ s využitím modifikovanej kovariančnej matice $\mathbf{\Sigma}_x(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$.

Základný vzťah na odhad variančných komponentov je [1]

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{S}_{(\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{M})^+}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \quad (4)$$

pričom $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \vartheta_0 \mathbf{V}^{(1)} + \vartheta_0 \mathbf{V}^{(2)} + \dots + \vartheta_0 \mathbf{V}^{(m)}$, kde $\vartheta_0 = 1$, $\mathbf{S}_{(\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{M})^+}$ je matica rozmerov $m \times m$, ktorej regulárnosť je nevyhnutná na odhad komponentov $\boldsymbol{\vartheta}$. Vektor $\boldsymbol{\gamma}$ je m -rozmerný vektor, ktorého komponenty γ_j sú vo vzťahu k j -tej skupine nameraných údajov.

Vyčíslenie matice $\mathbf{S}_{(\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{M})^+}$ a vektora $\boldsymbol{\gamma}$ spočíva v riešení nasledovných vzťahov [1]:

$$\gamma_j = \mathbf{x}^T (\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{M})^+ \mathbf{V}^{(j)} (\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{M})^+ \mathbf{x}, \quad (5)$$

kde matica $\mathbf{M}$ je daná výrazom:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (6)$$

Pre Moore-Penroseovu pseudoinverziu (zovšeobecnenú inverziu) matice $(\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})$ platí:

$$(\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})^+ = \Sigma_0^{-1} - \Sigma_0^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Sigma_0^{-1}. \quad (7)$$

Overenie riešiteľnosti je možné vykonať ešte pred uskutočnením meraní, vychádzame zo štruktúry matíc $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}^{(j)}$. Situácia je riešiteľná, ak je zabezpečená regulárnosť matice $\mathbf{K}$, ktorej prvky $\{\mathbf{K}\}_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m$) sú dané vzťahom ($\text{Tr}(\cdot)$ je stopa matice) [1]:

$$\{\mathbf{K}\}_{i,j} = \text{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{V}^{(i)}\mathbf{M}\mathbf{V}^{(j)}). \quad (8)$$

Regulárnosť riešenia overujeme splnením podmienky $\det(\mathbf{K}) > 0$. Pre prvky kritériálnej matice $\mathbf{S}_{(\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})^+}$, ktorá vystupuje v rovnici (4), potom platí:

$$\{\mathbf{S}_{(\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})^+}\}_{i,j} = \text{Tr}((\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})^+ \mathbf{V}^{(i)} (\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})^+ \mathbf{V}^{(j)}). \quad (9)$$

Po vyčíslení prvkov kritériálnej matice $\mathbf{S}_{(\mathbf{M}\Sigma_0\mathbf{M})^+}$ podľa vzťahu (9) a vektora $\mathbf{y}$ podľa vzťahu (5) môžeme podľa vzťahu (4) uskutočniť odhad variančných komponentov $\hat{\mathbf{\Theta}}$ (prípadne postup môžeme zopakovať formou viacerých iterácií, až kým dospejeme k stabilným odhadom variančných komponentov). Ak sa výpočet variančných komponentov $\hat{\mathbf{\Theta}}$ uskutočnil korektne, následný odhad $\hat{\mathbf{\Theta}}(\hat{\mathbf{\Theta}})$ sa realizuje s využitím kovariančnej matice (3) zohľadňujúcej použitie odhadu variančných komponentov [1]

$$\Sigma_x(\hat{\mathbf{\Theta}}) = \hat{\vartheta}_1 \mathbf{V}^{(1)} + \hat{\vartheta}_2 \mathbf{V}^{(2)} + \dots + \hat{\vartheta}_m \mathbf{V}^{(m)}. \quad (10)$$

3 Aplikácia metódy variančných komponentov

Uvedenú metódu sme aplikovali na jednoduchom príklade určenia polohy bodov v lokálnej rovinnej sieti (obr. 1), kde bolo odmeraných 5 vodorovných dĺžok s a 4 vodorovné uhly ω . Súradnice bodov A a B sú známe, cieľom je určenie súradníc bodov M a N . V tab. 1 sú uvedené merané veličiny a ich presnosť. Na odhad súradníc neznámych bodov sme použili metódu najmenších štvorcov, konkrétne model nepriameho merania vektorového parametra [3].

Obr. 1 Grafické znázornenie situácie, zoznam súradníc daných a určovaných bodov.

Tab. 1 Merané veličiny a ich presnosť.

i	s (m)	σ_s (mm)	i	ω	σ_ω
1	104.7037	5.5	6	26° 35' 12.4"	3"
2	222.1313	6.1	7	59° 35' 07.3"	3"
3	217.0478	6.1	8	28° 45' 58.2"	3"
4	99.4238	5.5	9	62° 02' 11.8"	3"
5	191.7302	6.0			

Deterministický model (DM) tejto situácie môžeme vyjadriť podľa [3] v tvare $\mathbf{L} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta})$, kde $\mathbf{L}$ je n -rozmerný vektor priamo merateľných veličín, $\boldsymbol{\Theta}$ je k -rozmerný vektor neznámych parametrov, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta})$ je vektorová funkcia vektorového parametra $\boldsymbol{\Theta}$, ktorá vyjadruje matematický vzťah medzi vektorom priamo merateľných veličín a neznámych parametrov. Určujúce rovnice pre vodorovné dĺžky, resp. vodorovné uhly sú v tvare

$$f_1(\boldsymbol{\Theta}) = s_1 = [(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2]^{1/2}, \dots \quad (11)$$

$$f_6(\boldsymbol{\Theta}) = \omega_1 = \arctg \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} - \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \dots \quad (12)$$

Vektorová funkcia $\mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta})$ je nelineárna, je potrebné ju linearizovať rozvojom do Taylorovho radu, potom DM s uvažovaním vhodných približných hodnôt $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\Theta}$ a zanedbaním členov vyšších rádov môžeme zapísať v tvare $\mathbf{L} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta}_0) + \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{\Theta}$, kde matica plánu je $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\Theta}^T}$. Stochastický model podľa [3] vychádza z toho, že merania sú ovplyvnené náhodnými chybami s nulovou strednou hodnotou $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ a variabilitou rovnou kovariančnej matici $\text{var}(\boldsymbol{\xi}) = \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$, jeho tvar v linearizovanej podobe je $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta}_0) + \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\boldsymbol{\xi}$ je n -rozmerný náhodný vektor, ktorým modelujeme merania, $\boldsymbol{\varepsilon}$ je n -rozmerný vektor náhodných chýb meraní. V štatistickom modeli vychádzame zo známeho n -rozmerného vektora realizácie meraní $\mathbf{x}$ a jeho kovariančnej matice vyjadrenej podľa vzťahov (1) až (3). Na základe výpočtu podľa vzťahov (4) až (9) sme určili odhad vektora variančných komponentov $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{S}_{(\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{M})}^{-1} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2.280 \\ 0.646 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Potom podľa vzťahu (10) vypočítame novú kovariančnú maticu meraní, ktorá zohľadňuje odhadnuté variančné komponenty a v rámci štatistického modelu vypočítame odhad neznámych parametrov a jeho charakteristiky presnosti. Nová kovariančná matica koriguje pôvodné apriórne charakteristiky presnosti uskutočnených meraní. Z hodnôt jednotlivých variančných komponentov podľa (13) vyplýva, že by bolo potrebné znížiť presnosť merania dĺžok a zvýšiť presnosť merania vodorovných uhlov. Na porovnanie uvádzame v tab. 2 výsledné hodnoty odhadov neznámych parametrov a ich charakteristiky presnosti v prípade zohľadnenia, resp. nezohľadnenia variančných komponentov.

Tab. 2 Odhad neznámych parametrov a ich charakteristik presnosti.

Vypočítané hodnoty:	Riešenie zohľadňujúce variančné komponenty	Riešenie bez použitia variančných komponentov
Odhad prírastkov	$\Delta\hat{\Theta}(\hat{\Theta}) = \begin{bmatrix} -0.0106 \\ -0.0215 \\ 0.0552 \\ 0.0598 \end{bmatrix} \cdot \text{m},$	$\Delta\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} -0.0103 \\ -0.0192 \\ 0.0561 \\ 0.0591 \end{bmatrix} \cdot \text{m}$
Odhadnuté parametre $\hat{\Theta} = \Theta_0 + \Delta\hat{\Theta}$	$\hat{\Theta}(\hat{\Theta}) = \begin{bmatrix} 246.7894 \\ 305.8785 \\ 438.4552 \\ 310.6598 \end{bmatrix} \cdot \text{m}$	$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 246.7897 \\ 305.8808 \\ 438.4561 \\ 310.6591 \end{bmatrix} \cdot \text{m}.$
Stredné chyby odhadnutých parametrov	$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{x_M} \\ \hat{\sigma}_{y_M} \\ \hat{\sigma}_{x_N} \\ \hat{\sigma}_{y_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 2.6 \\ 1.5 \\ 2.7 \end{bmatrix} \cdot \text{mm}$	$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{x_M} \\ \hat{\sigma}_{y_M} \\ \hat{\sigma}_{x_N} \\ \hat{\sigma}_{y_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 2.8 \\ 1.7 \\ 2.8 \end{bmatrix} \cdot \text{mm}$

4 Záver

Metóda variančných komponentov je jedna z metód, ktorá sa dá použiť pri spracovaní heterogénnych meraní, napríklad pri spájaní trojrozmerných geodetických sietí získaných rozličnými kozmickými/družicovými technikami, pri kombinácii družicových a terestrických meraní, pri kombinácii uhlových a dĺžkových meraní, pri spájaní nivelačných a gravimetrických meraní a pod. V príspevku sme prezentovali jednoduchý príklad, kde sme uvedenú metódu aplikovali na spracovanie meraní vodorovných dĺžok a vodorovných uhlov v lokálnej geodetickej sieti.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol pri riešení projektu 1/0300/19 finančne podporeného Vedeckou grantovou agentúrou MŠVVaŠ SR a SAV VEGA.

Literatúra

- [1] Hefty, J., 2004. *Globálny polohový systém v štorrozmernej geodézii*, Bratislava: Slovenská technická univerzita. ISBN 80-227-2027-5
- [2] Kubáček, L., 2008. *Multivariate Statistical Models Revisited*. Olomouc: Univerzita Palackého. ISBN 978-80-244-2212-1
- [3] Kubáčková, L., 1990. *Metódy spracovania experimentálnych údajov*. Bratislava: VEDA, 1990. 324 s. ISBN 80-224-0104-8
- [4] Štroner, M.; Michal, O., 2019: *Určení variačních komponent přesnosti měření z vyrovnání*. In: *Geodézia, Kartografia a Geoinformatika 2019*. Košice: BERG Faculty TU Košice, 2019. ISBN 978-80-553-3340-3.
- [5] Rao, C. R., 1971. *Estimation of variance and covariance components - MINQUE theory*. *Journal of Multivariate Analysis*, 1/65
- [6] Rao, C. R., Kleffe, J., 1988. *Estimation of variance components and applications*. Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo: North-Holand.

Recenzováno: 20. 1. 2022