VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

PROBLEMATIKA KOMPLEXNÍCH POTENCIÁLŮ V IZOTROPNÍ ROVINNÉ PRUŽNOSTI
PROBLEMS OF THE COMPLEX POTENTIALS OF THE ISOTROPIC ELASTICITY

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. Radek Kubíček
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2018

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	**Bc. Radek Kubíček**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	**doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.**
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Přes veškerý současný výpočetní potenciál má teorie komplexních potenciálů nezatupitelné místo v problematice rovinné pružnosti a vyplňuje mezeru mezi klasickým přístupem a mocnými numerickými nástroji současnosti, jako je např. MKP. Cílem práce je uchazečovo seznámení se s problematikou tzv. komplexních potenciálů a jejich aplikací na některé problémy rovinné pružnosti. Funkce komplexní proměnné, se svými specifickými vlastnosti, mohou značně zjednodušit popis řešení některých problémů matematické teorie rovinné pružnosti, zejména úloh, ve kterých se vyskytují geometrické singularity typu trhlina nebo vrub.

Cíle diplomové práce:

1. Nastudování Muschelišviliho formalismu komplexních potenciálů pro popis rovinné izotropní pružnosti.
2. Aplikace teorie komplexních potenciálů na některé singulární úlohy rovinné izotropní pružnosti.

Seznam doporučené literatury:

MUSKHELISHVILI, N.I., Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Groningen, P. Noordhoff, 1953.

BABUŠKA, I., REKTORYS, K., VYČICHLO, F., Matematická theorie rovinné pružnosti, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1955.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 30. 10. 2017

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
ředitel ústavu	děkan fakulty

Abstrakt
Předkládaná diplomová práce spadá do oblasti lineární lomové mechaniky a zabývá se stanovením součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky nacházející se v blízkosti bimateriálového rozhraní pomocí metody spojitě rozložených dislokací a teorie komplexních potenciálů. Práci je možné rozdělit do tří částí. První část obsahuje základní pojmy lineárně elastické lomové mechaniky a pojednává o mechanice kompozitních materiálů. Druhá část se zabývá stanovením součinitele intenzity napětí z řešení singulární integrální rovnice sestavené pomocí Buecknerova principu a metody spojitě rozložených dislokací. Třetí část tvoří již konkrétní konfigurace bimateriálového prostředí obsahujícího trhlinu a její následné řešení, které je navíc ověřeno i metodou konečných prvků.

Summary
The presented diploma thesis concerns linear fracture mechanics and deals with determination of the stress intensity factor of the finite crack, which is located in the vicinity of the bimaterial interface, solved by the distributed dislocation technique and theory of complex potencials. The work is possible to devide into three parts. The first part includes basic concepts of the linear fracture mechanics and is also dedicated to the mechanics of composite materials. The second part deals with the determination of the stress intensity factor from solving singular integral equation formulated by Bueckner's principle and the distributed dislocation technique. The third part includes the specific configuration of the crack with respect to the bimaterial interface and the solution, which is compared with results obtained from the FE analysis.

Klíčová slova
Komplexní potenciály, součinitel intenzity napětí, trhlina, metoda spojitě rozložených dislokací, singulární integrální rovnice, bimateriálové rozhraní.

Keywords
Complex potentials, stress intensity factor, crack, distributed dislocation technique, singular integral equation, bimaterial interface.

Bibliografická citace

KUBÍČEK, R. *Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 77 s. Vedoucí doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Prohlášení
Prohlašuji, že jsem předkládanou diplomovou práci na téma Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti vypracoval samostatně a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu literatury.

V Brně dne 25. května 2018 ....

Bc. Radek Kubíček

Poděkování
Rád bych poděkoval svému vedoucímu doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky a znalosti, které mi předal, a za čas a ochotu, kterou mi při tvorbě této diplomové práce věnoval. Velké díky patří samozřejmě i mojí rodině, která mě podporovala po celou dobu mého studia.

Obsah

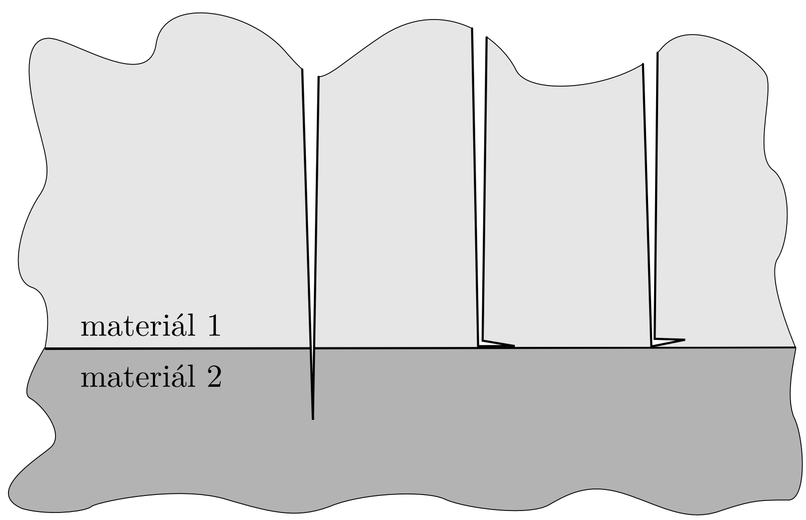
1 Úvod

V současné době se stále více využívají plasty, keramika a kompozitní materiály, které i při nižším hmotnostech vykazují lepší mechanické vlastnosti než klasické konstrukční materiály. Struktura u těchto materiálů je však poměrně složitá, což s sebou přináší i komplikace z hlediska popisu a posouzení jejich chování.

Fakt, že reálné konstrukce vždy obsahují vady nebo trhliny, které mohou způsobit porušení a následnou nefunkčnost daného zařízení i při napětích menších než je mez kluzu, je obecně známý. Vědní disciplína, která se zabývá popisem napjatosti a deformace v okolí tvarových změn a materiálových nespojitostí a současně i mezním stavem součástí s trhlinami, se nazývá lomová mechanika.

Počátek hlavního vývoje lomové mechaniky spadá do období druhé světové války, kdy došlo ke značnému počtu havárií lodí typu Liberty křehkým lomem. Za jejího zakladatele je považován A. A. Griffith, který formuloval energetickou koncepci pro ideálně křehké těleso s trhlinou. Avšak teoretické základy lomové mechaniky položil již ve své disertační práci zabývající se napjatostí eliptického otvoru G. V. Kolosov v roce 1907, aniž by sám tušil o její existenci.

Protože Griffithovo kritérium pro posouzení stability trhliny platí pouze pro ideálně křehký stav materiálu, pánové E. Orowan a G. R. Irwin vytvořili nové teorie zahrnující i možnost plastické deformace materiálu. G. R. Irwin v roce 1957 publikoval koncepci součinitele intenzity napětí K, která se dodnes nejvíce používá v oblasti lineárně elastické lomové mechaniky. Jestliže však plastická oblast před čelem trhliny přesáhne 2 % tloušťky tělesa, plasticita nemůže být zanedbána a musí se použít elasto-plastická lomová mechanika, za jejíž průkopníky se považují pánové Wells, Cottrell a Barenblatt, kteří nezávisle na sobě publikovali koncepci kritického rozevření trhliny, a J. R. Rice, který přišel s koncepcí J-integrálu.



Obrázek 1.1: Způsoby šíření trhliny kolmé k bimateriálovému rozhraní.

Součinitel intenzity napětí K, který určuje napjatost i deformaci před čelem trhliny, lze zjistit různými metodami. Těmi nejznámějšími a v současnosti nejpoužívanějšími jsou metody numerické, které využívají metodu konečných prvků (MKP) a jsou založené například na posunutí uzlových bodů nebo měrné energii napjatosti. Další variantou je analyticko-numerická metoda, tzv. metoda spojitě rozložených dislokací vycházející z teorie komplexních potenciálů.

Tou hlavní výhodou analyticko-numerické metody je schopnost popsat chování trhliny na bimateriálovém rozhraní, kde dochází ke změně exponentu singularity a MKP již nedokáže řešit tuto úlohu svépomocí. Součinitel intenzity napětí K v takovém případě ztrácí smysl a zavádí se tzv. zobecněný faktor intenzity napětí H. Popis chování trhliny je rozhodující pro stanovení způsobu šíření trhliny na rozhraní dvou různých materiálů. Může dojít k proniknutí trhliny do druhého materiálu nebo k ohybu jejího čela, které se bude následně šířit podél bimateriálového rozhraní, viz obr. 1.1.

Hlavním cílem předkládané diplomové práce je seznámit se s uvedenou analyticko--numerickou metodou a s teorií komplexních potenciálů a následně nově získané poznatky aplikovat ke stanovení součinitele intenzity napětí K trhliny konečné délky nacházející se v blízkosti bimateriálového rozhraní.

2 Problémová situace

Problémovou situací je nazývána nestandardní situace, jejíž vyřešení vyžaduje naformulovat vymezené cíle, kterých je dosaženo nejen rutinními, tj. algoritmizovanými, procesy [1]. Řešitel je tudíž nucen využívat činnosti informační, hodnotící, tvůrčí a rozhodovací a zároveň hledat metody řešení.

Tato úvodní kapitola se zabývá procesem řešení problémové situace, který byl vytvořen v souladu se systémovým pojetím, o kterém se lze více dozvědět v literatuře [1].

2.1 Popis problémové situace

Jak již bylo zmíněno v předchozím odstavci, problémovou situací se označuje každá nestandardní situace, pro jejíž řešení nestačí postupovat pouze podle určitých algoritmizovaných procesů a postupů. V této diplomové práci lze za problémovou situaci označit bližší nastudování a seznámení se s problematikou komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti, která se ve studijních osnovách v rámci pětiletého studia na Fakultě strojního inženýrství v Brně nevyučuje, a její následnou aplikaci na některém problému singularity rovinné izotropní pružnosti. Za příčinu této situace lze označit zájem studenta rozšířit si znalosti v oblasti lineárně elastické lomové mechaniky.

2.2 Formulace problému

Problémem se označuje to podstatné, co se musí vyřešit, aby se nestandardní situace stala standardní. K vytvoření dostatečné poznatkové a zkušenostní báze pro formulaci problému vede analýza problémové situace [1]. V této diplomové práci je informační báze tvořena zdroji uvedenými v seznamu použité literatury.

Problém lze v souladu s [1] formulovat následovně. Na základě vypracované studijní rešerše teorie komplexních potenciálů a jejího začlenění do lineární pružnosti aplikovat tuto teorii ke stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky, která se nachází v blízkosti bimateriálového rozhraní, při rovinné izotropní pružnosti.

2.3 Cíle řešení problému

1. Nastudování Muschelišviliho formalismu komplexních potenciálů pro popis rovinné izotropní pružnosti.

2. Aplikace teorie komplexních potenciálů k určení napjatosti v okolí hranové dislokace, která se nachází v blízkosti bimateriálového rozhraní, při rovinné izotropní pružnosti.

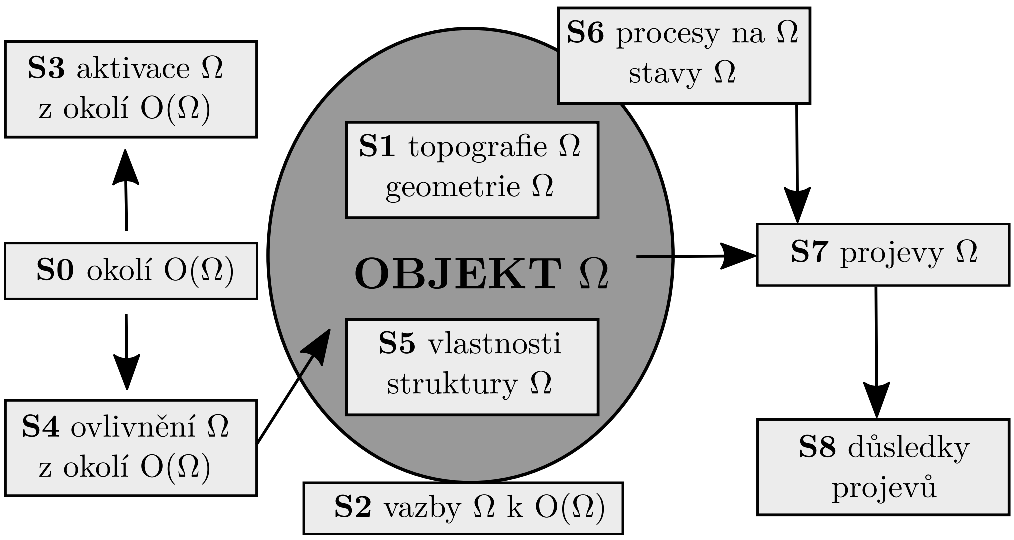
3. Seznámení se s metodou spojitě rozložených dislokací.

4. Stanovit součinitel intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bimateriálového rozhraní pomocí metody spojitě rozložených dislokací.

2.4 Systém podstatných veličin

Systémem $\Sigma(\Omega)$ podstatných a problémově orientovaných veličin na objektu se rozumí množina všeho podstatného, co souvisí s řešením problému na daném objektu při dané rozlišovací úrovni. Tento systém lze považovat za abstraktní systémový objekt, na který může být tím pádem aplikován systémový přístup. Systém podstatných veličin $\Sigma(\Omega)$ je tvořen za účelem nejvhodnější volby metody sloužící pro řešení uvažovaného problému.

Systém podstatných veličin je tvořen podmnožinami S0 až S8, které vychází z úvahy, že veškeré probíhající děje mají příčinný charakter. Jak je uvedeno v [1], každý objekt je charakterizován svojí geometrií (má tvar), která zaujímá určitou polohu (topologii) v okolí, se kterým je svázána vazbami. Tyto vazby objekt daným způsobem ovlivňují a aktivují, což má za následek vyvolání procesů, které mění stavy tohoto objektu. Následné projevy objektu do okolí vyvolávají určité důsledky, viz obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Podmnožiny systému podstatných veličin. Předloha z [1].

Podmnožina S0 – okolí objektu O(Ω)

Veličinami v_0 vyjadřujícími okolí objektu jsou:

- prázdná množina (S0 = $\emptyset$) – veličiny popisující okolí entity nejsou definovány.

Podmnožina S1 – geometrie a topologie objektu Ω

Veličinami v_1 vyjadřujícími geometrii a topologii objektu jsou:

- tvar a rozměry hranice tělesa,
- délka trhliny,
- poloha trhliny vůči bimateriálovému rozhraní,

- poloha trhliny vůči hranici tělesa.

Všechny tyto uvedené veličiny jsou uvažovány jako deterministické. Počátek souřadnicového systému leží na bimateriálovém rozhraní, přičemž problém se řeší jako rovinný, tudíž veškeré řezy kolmé k ose z jsou stejné.

Podmnožina S2 – podstatné vazby objektu v okolí

Veličinami v_2 popisujícími vazby objektu k okolí jsou:

- idealizované čelisti, které nebrání kontrakci v příčném směru.

Jestliže se objekt analyzuje při silovém zatěžování (případ uváděný v této diplomové práci), mluví se o měkkém zatěžování, pokud se však pohyb čelistí řídí posuvy, jedná se o deformační neboli tvrdé zatěžování.

Podmnožina S3 – aktivace objektu Ω z okolí $\mathbf{O}(\Omega)$

Veličinami v_3 vyjadřujícími působení na objekt, tedy jeho aktivaci, jsou:

- síly silové soustavy.

Tyto veličiny jsou uvažovány jako deterministické a časově neproměnné. V případě, že je předepsána silová soustava, jedná se o silové neboli měkké zatěžování. Druhou možností jsou již zmíněné předepsané posuvy na hranici objektu (tvrdé zatěžování). V závislosti na směru působícího zatížení se rozlišují 3 módy – mód I (rozevírání trhliny), mód II (smyk) a mód III (střih). V předkládané diplomové práci bude uvažován mód I.

Podmnožina S4 – ovlivňování objektu Ω z okolí $\mathbf{O}(\Omega)$

Veličinami v_4 vyjadřujícími ovlivnění objektu jsou:

- prázdná množina (S4 = $\emptyset$).

Podmnožina S5 – vlastnosti prvků struktury objektu Ω

Veličinami v_5 vyjadřujícími vlastnosti objektu jsou:

- Youngův modul pružnosti v tahu E,
- Poissonovo číslo μ.

Objekt je tvořen dvěma materiály, které modelujeme jako homogenní, izotropní a lineárně pružné. Pro každý tento model materiálu je nutné definovat Youngův modul pružnosti v tahu a Poissonovo číslo. Zároveň platí, že na bimateriálovém rozhraní je dokonalá adheze.

Podmnožina S6 – procesy na objektu Ω a jeho stavy

Veličinami v_6 popisujícími procesy, které probíhají ve struktuře objektu a jsou vyvolány působením na objekt, jsou:

- komplexní potenciály,
- součinitel intenzity napětí K_I.

Pomocí součinitele intenzity napětí lze vyjádřit i složky napětí a pole posuvů.

Podmnožina S7 – projevy (chování) objektu Ω

Veličinami v_7 popisujícími projevy objektu jsou:

- napětí,
- deformace,
- šíření/zastavení trhliny.

Trhlina se označuje za stabilní, jestliže se při nerostoucí zatěžující síle nešíří. Naopak pokud se šíří samovolně, jedná se o trhlinu nestabilní. O chování trhliny rozhoduje mezní hodnota součinitele intenzity napětí K_{Ic}, tzv. lomová houževnatost.

Podmnožina S8 – důsledky projevů

Veličinami v_8 vyjadřujícími důsledky jsou:

- lom objektu.

Rozpad tělesa na dvě nebo více částí nastane, jestliže součinitel intenzity napětí K_I dosáhne hodnoty lomové houževnatosti K_{Ic}, při které se trhlina začne šířit rychlostí zvuku v daném materiálu. Lom tělesa je nežádoucí jev a může mít katastrofální účinky.

3 Lineárně elastická lomová mechanika

S rozvojem techniky v první polovině 20. století se začalo objevovat velké množství havárií značně rozměrných konstrukcí. Jednalo se o mosty, plynovody, ropovody nebo například velké nádrže, přičemž nejznámějším případem byly celosvařované konstrukce lodí typu Liberty. Všechny havárie byly způsobeny náhlými lomy bez jakékoliv výraznější předchozí plastické deformace. Studium havárií těchto ocelových svařovaných konstrukcí křehkým lomem vedlo ke vzniku dvou pohledů na řešení [2]. Prvním z nich byla filosofie zastavení trhliny, která se opírala o minimální hodnotu houževnatosti a tranzitivní teplotu materiálu. Naopak druhá filosofie zabraňující iniciaci lomu vedla ke vzniku vědního oboru, který se zabývá mezním stavem součástí s trhlinami – lomová mechanika. Lomová mechanika se rozděluje do dvou hlavních oblastí [3]:

1. Lineárně elastická lomová mechanika (LELM)
2. Elasto-plastická lomová mechanika (EPLM)

Teorie LELM je použitelná tehdy, jestliže se předpokládá lineární závislost mezi napětím a deformací u kořene trhliny, tj. platí-li Hookův zákon. Naopak druhá výše zmíněná teorie uvažuje na čele trhliny existenci velké plastické oblasti [4].

3.1 Energetická koncepce

V oblasti lineárně elastické lomové mechaniky byly vytvořeny dvě základní koncepce [5]:

- energetická koncepce,
- napěťová koncepce.

Za zakladatele energetické koncepce je považován A. A. Griffith, který v roce 1920 na základě energetické bilance (zákonu zachování energie) ideálně křehkého tělesa s trhlinou zformuloval následující kritérium pro posouzení stability dané trhliny [6].

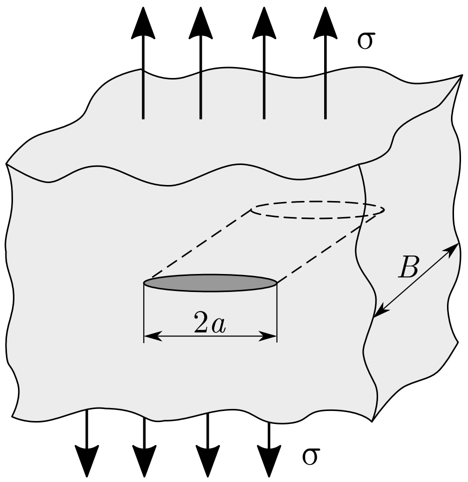
Uvažuje-li se těleso s trhlinou dle obr. 3.1, pro celkové množství energie v této soustavě E_c platí vztah

$$E_c = \Pi - W_s, \tag{3.1}$$

kde Π představuje celkovou potenciální energii tělesa s trhlinou a W_s je energie spojená se vznikem nových povrchů (disipační energie).

Rovnice podmínky nestability trhliny (3.3) vychází z platnosti zákona zachování energie (3.2), který říká, že celková energie v soustavě a jejím okolí se nemění. Jinými slovy nedochází ke změně E_c.

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}S} + \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}S} = 0 \tag{3.2}$$



Obrázek 3.1: Průchozí trhlina v nekonečné stěně.

$$-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}S} \tag{3.3}$$

Griffith pro formulaci svého kritéria využil celkovou potenciální energii Π, kterou Inglish odvodil ve tvaru

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E}, \tag{3.4}$$

kde Π_0 je celková potenciální energie tělesa bez trhliny, σ je tahové napětí, E představuje Youngův modul pružnosti a parametry a, B charakterizují rozměry tělesa s trhlinou, viz obr. 3.1.

Pro disipační energii W_s, která je spotřebovávána pouze na vznik nových povrchů, uvažoval vztah

$$W_s = 2S\gamma = 4aB\gamma, \tag{3.5}$$

kde S je plocha průmětu trhliny a γ je měrná povrchová energie materiálu.

Po dosazení rovnic (3.4) a (3.5) do podmínky nestability trhliny (3.3) se obdrží vztah

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma. \tag{3.6}$$

Za předpokladu kritické délky trhliny a_c lze z rovnice (3.6) vyjádřit lomové napětí σ_f

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a_c}}, \tag{3.7}$$

nebo naopak při uvažování lomového napětí σ_f lze z (3.6) získat kritickou délku trhliny a_c

$$a_c = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}. \tag{3.8}$$

Protože Griffithovo kritérium bylo odvozeno za předpokladu ideálně křehkého tělesa s trhlinou, pánové Irwin a Orowan jej nezávisle na sobě modifikovali pro modely materiálu vykazující i plastickou deformaci

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma_{ef} E}{\pi a_c}}, \tag{3.9}$$

kde γ_{ef} je efektivní povrchová energie

$$\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_{pl}, \tag{3.10}$$

přičemž platí

$$\gamma_{pl} >> \gamma. \tag{3.11}$$

3.1.1 Hnací síla trhliny

Na Griffithovu energetickou koncepci navázal Irwin. Výchozí rovnicí se mu stala podmínka nestability (3.3), kdy jako hnací sílu trhliny G nazval změnu celkové potenciální energie tělesa s trhlinou

$$G = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}S} \tag{3.12}$$

a změnu disipační energie označil za odpor tělesa proti růstu trhliny R

$$R = \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}S}. \tag{3.13}$$

Veličina R charakterizuje množství energie potřebné k vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti. V případě, že hnací síla trhliny G dosáhne své kritické hodnoty G_c, tj. houževnatosti materiálu, dojde k nestabilnímu šíření trhliny. Kies později zjistil, že kritické napětí pro těleso s danou trhlinou závisí pouze na součinu G_cE, přičemž jeho druhá odmocnina je dnes nazývána lomovou houževnatostí K_c.

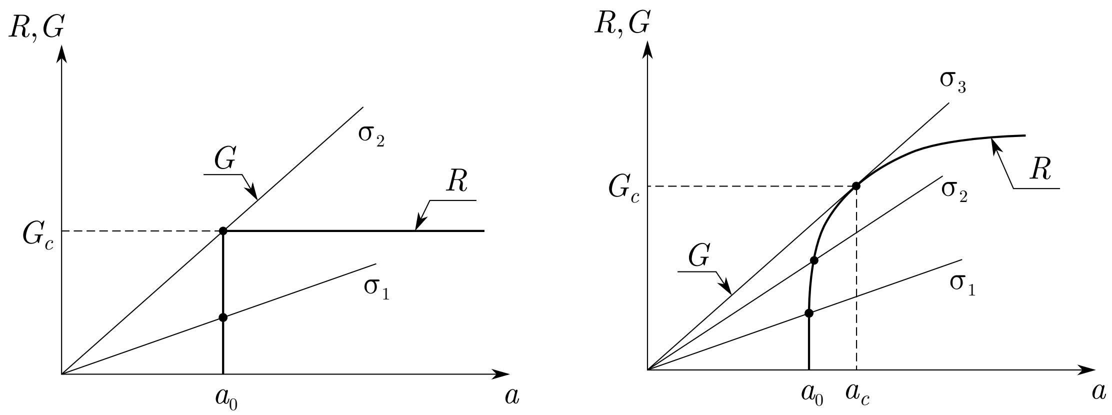
3.1.2 Stabilita šíření trhliny

O stabilitě šíření trhliny lze například rozhodnout pomocí tzv. R-křivek (obr. 3.2), které znázorňují průběhy hnací síly trhliny G a odporu tělesa proti růstu trhliny R v závislosti na její délce a [3].

Obr. 3.2a) odpovídá ideálně křehkému tělesu s trhlinou, naopak obr. 3.2b) popisuje chování houževnatého tělesa. Průběh hnací síly trhliny G je při konstantním napětí σ v obou případech lineární. Tato závislost vyplývá z rovnice (3.12) zmíněné v kapitole 3.1.1. Avšak průběh odporu R se v daných případech liší [7].

V prvním případě, obr. 3.2a), je odpor proti růstu trhliny R konstantní, tj. nezávislý na délce trhliny a. Při zatěžování napětím menším než σ_2, které odpovídá lomovému napětí σ_f, nedochází k jejímu následnému šíření, avšak při překročení této hodnoty okamžitě nastává nestabilní růst trhliny a dochází k lomu.

V druhém případě, obr. 3.2b), odpor R vykazuje s rostoucí délkou trhliny vzrůstající charakter. Jestliže je takové těleso zatěžováno napětím menším než σ_1, nedochází k šíření uvažované trhliny. Při překročení této prahové hodnoty dojde k nárůstu její délky. Tento stabilní růst trhlina vykazuje do okamžiku dosažení napětí o velikosti σ_3, které na obr. 3.2b) reprezentuje lomové napětí σ_f. Po překročení této kritické hodnoty dochází k nestabilnímu růstu a následnému lomu tělesa.



a) Křehký stav materiálu   b) Houževnatý stav materiálu

Obrázek 3.2: R-křivky.

Obecně lze stabilitu šíření trhliny vyjádřit následujícími vztahy. Pokud je splněna nerovnost (3.14), trhlina se buď nešíří nebo se šíří stabilně. Jestliže však platí nerovnost (3.15), dochází k nestabilnímu růstu trhliny a následnému lomu uvažovaného tělesa.

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}a} \leq \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a} \tag{3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}a} > \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a} \tag{3.15}$$

3.2 Napěťová koncepce

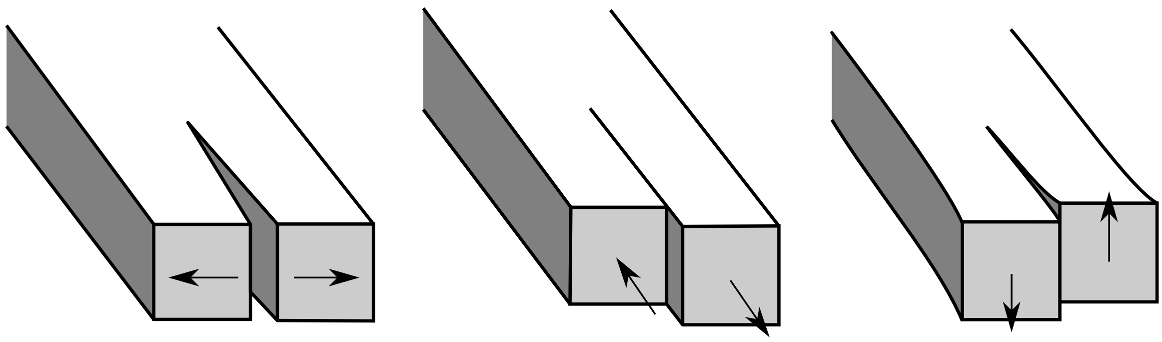
Jak již bylo zmíněno na začátku kapitoly 3, v LELM existují dva přístupy pro posouzení tělesa s trhlinou. O prvním z nich, Griffithově napěťové koncepci založené na energetické bilanci, pojednává kapitola 3.1. Za zakladatele druhého přístupu, koncepce součinitele intenzity napětí (K-koncepce), je považován G. R. Irwin [8].

3.2.1 Módy zatěžování

Při posuzování tělesa s trhlinou pomocí koncepce součinitele intenzity napětí hrají významnou roli tzv. módy zatěžování [9]. Jedná se o tři základní způsoby namáhání, které ovlivňují napjatost a deformaci v okolí trhliny.

- **Mód I – rozevírání**
  Tento mód je též označován jako normálový, protože působící napětí je kolmé na rovinu trhliny, viz obr. 3.3a). Jedná se o nejčastější a zároveň nejnebezpečnější způsob namáhání, jelikož růst trhliny se rozevíráním významně urychluje.

- **Mód II – smyk**
  U smyku působí napětí v rovině rovnoběžné s lomovou plochou a současně kolmo na čelo trhliny, viz obr. 3.3b).



a) Rozevírání b) Smyk c) Střih

Obrázek 3.3: Módy zatěžování trhliny.

- **Mód III – střih**
  Poslední mód bývá označován také jako antirovinný mód, avšak z hlediska mechanismu je nejčastěji nazýván jako střih, k němuž dochází při napětí, které je rovnoběžné současně s rovinou trhliny a jejím čelem, viz obr. 3.3c).

3.2.2 Napjatost a deformace v okolí trhliny

Irwinova K-koncepce pro posuzování tělesa s trhlinou vychází z prací Westergaarda [10] a Williamse [11]. Westergaardův popis napjatosti a deformace v okolí trhliny byl odvozen z řešení rovinné úlohy pružnosti, pro kterou jsou za předpokladu nulových objemových sil splněny rovnice rovnováhy a geometrické rovnice

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{3.16a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \tag{3.16b}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.17a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3.17b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.17c}$$

kde $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ jsou složky tenzoru napětí, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ jsou složky tenzoru přetvoření a u, resp. v, je posuv ve směru osy x, resp. y.

Vyloučením posuvů z geometrických rovnic (3.17) vzniká rovnice kompatibility

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{3.18}$$

Použitím konstitutivních vztahů, lze rovnici kompatibility vyjádřit ve tvaru

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \tag{3.19}$$

kde Δ značí Laplaceův operátor.

Rovnice (3.19) lze pomocí Airyho funkce napětí U převést na rovnici

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{3.20}$$

přičemž platí

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \tag{3.21a}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{3.21b}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{3.21c}$$

Westergaard rovnici (3.20) vyřešil pro každý mód zatěžování. Tato diplomová práce se bude zabývat pouze módem I – rozevíráním. Za předpokladu lineárně elastického izotropního modelu materiálu Westergaard v blízkosti čela ostré trhliny, tj. poloměr zaoblení se blíží nule, zatěžované módem I odvodil

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \tag{3.22a}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \tag{3.22b}$$

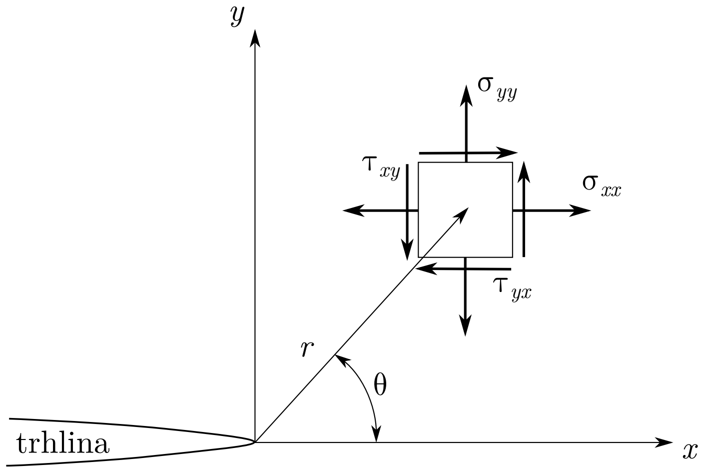
$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}, \tag{3.22c}$$

$$u_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\mu + \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.22d}$$

$$u_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\mu - \cos^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.22e}$$

kde σ představuje vnější napětí působící kolmo k rovině trhliny, G je modul pružnosti ve smyku, μ je Poissonovo číslo a θ, r jsou souřadnice elementu v polárním souřadnicovém systému, viz obr. 3.4.

V případě, že je těleso s trhlinou namáháno kombinací základních typů zatěžování, výsledné hodnoty napětí a posuvů v blízkosti čela trhliny se obdrží superpozicí dílčích řešení. Z rovnic (3.22) je patrné, že pro $r \to 0$ dosahuje napětí nekonečné hodnoty. Z tohoto důvodu nemohou být složky elastického napětí stavovou veličinou pro vyjádření podmínky nestability [4].



Obrázek 3.4: Napětí působící na elementární prvek v blízkosti kořene trhliny, jehož pozice je určena polárními souřadnicemi (θ, r). Předloha z [12].

Jinou formu řešení rovnice (3.20) publikoval M. L. Williams, který napětí u čela trhliny vyjádřil ve tvaru nekonečné mocninné řady [13]

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{n}{2} \right) r^{\frac{n}{2}-1} f_{ij}(n, \varphi). \tag{3.23}$$

3.2.3 Součinitel intenzity napětí

Součinitel intenzity napětí je velmi významnou veličinou v lineárně elastické lomové mechanice. Na rozdíl od napětí u čela trhliny jím je možné vyjádřit podmínku nestability trhliny. Kromě napjatosti a deformace určuje i tvar a otevření trhliny. Platnost K-koncepce je jen v případech, kdy u čela šířící se trhliny vzniká pouze malá plastická oblast, která podle [5] nesmí překročit 2 % tloušťky tělesa. Pro homogenní izotropní lineárně elastický model materiálu se součinitel intenzity napětí označuje K_k, kde $k = I, II, III$ symbolizuje daný mód zatěžování. Pro mód I jej G. R. Irwin v případě nekonečné roviny definoval následovně

$$K_I = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{yy}(r, \theta = 0) = \sigma\sqrt{\pi a}. \tag{3.24}$$

Pro případ konečného tělesa je vztah (3.24) upraven na obecnější tvar

$$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi_0} Y, \tag{3.25}$$

kde Φ_0 je funkce zahrnující tvar trhliny a Y je korekční rozměrová funkce.

Pro podmínku nestability trhliny se zavádí lomová houževnatost K_c, která vyjadřuje mezní odpor materiálu při mezním stavu stabilního šíření trhliny [14]. Pro mód I lze tuto podmínku psát ve tvaru

$$K_I = K_{Ic}. \tag{3.26}$$

4 Kompozitní materiály

Za kompozitní materiál, neboli kompozit, se označuje materiál skládající se ze dvou nebo více částí s nerozlišitelným vzájemných rozhraním, z nichž každá plní určitou specifickou funkci [15]. Obecně se kompozitní materiál rozděluje na dvě základní části:

- **matrice** – spojitá fáze, která udržuje těleso pohromadě a udává mu tvar
- **výztuž** – nosná část udávající pevnostní charakteristiky, která by měla být v kompozitu rovnoměrně rozptýlena

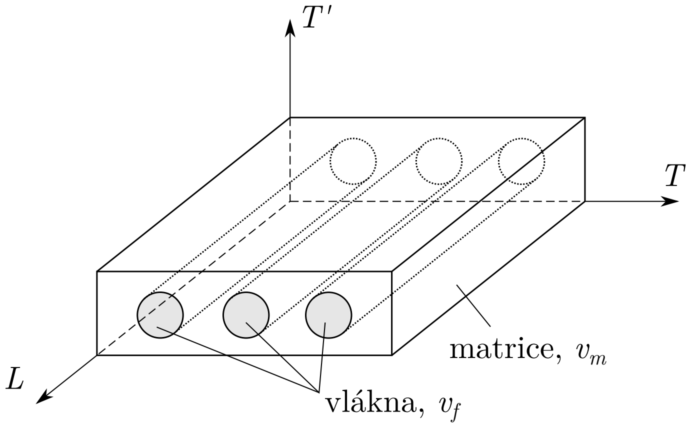
Materiál matrice a výztuže lze za předpokladu dokonalé adheze a dobré smáčivosti mezi složkami kompozitu kombinovat nejrůznějšími způsoby.

4.1 Klasifikace kompozitů

Kompozity lze rozdělovat podle materiálu matrice nebo výztuže [16]. Nejčastěji se však uvádí rozdělení na základě geometrického tvaru výztuže, a to na kompozity částicové a vláknové, které lze dále rozlišovat následovně:

1. Částicové kompozity
    - s náhodnou orientací
    - s přednostní orientací
2. Vláknové kompozity
    - jednovrstvé
        - krátkovláknové
            - s náhodnou orientací
            - s přednostní orientací
        - dlouhovláknové
            - s jednosměrným vyztužením
            - s dvousměrným vyztužením
    - mnohavrstvé
        - hybridy
        - lamináty

Termínem laminát se označuje kompozit obsahující vrstvy stejného složení. Pokud jsou laminy různého složení, jedná se o tzv. hybridní lamináty. Tato odlišnost může být způsobena buď vlákny nebo i matricí.



Obrázek 4.1: Vrstva jednosměrného dlouhovláknového kompozitu.

4.2 Mikromechanika kompozitů

Mikromechanika je oblast nauky popisující chování kompozitu na úrovni jednotlivých komponent. Základní jednotkou jsou vlákna a matrice. Mechanické vlastnosti uvedené v této kapitole budou vycházet z jedné vrstvy jednosměrného dlouhovláknového kompozitního materiálu. Jak je znázorněno na obr. 4.1, pro popis se využívá materiálový souřadnicový systém. Osa ve směru vláken se nazývá podélná neboli longitudinální a označuje se písmenem L. Příčný směr T leží v rovině vrstvy a je kolmý na osu vláken. Třetí směr, kolmý k oběma předcházejícím, se nazývá ortogonální T'.

Pro stanovení jednotlivých charakteristik kompozitu se zavádí objemový podíl (4.1), který vyjadřuje poměr objemu komponenty k celkovému objemu kompozitu. Index f značí veličiny související s vlákny, index m se týká matrice a veličina charakterizující kompozit jako celek má index c.

$$v_f = \frac{V_f}{V_c} \tag{4.1a}$$

$$v_m = \frac{V_m}{V_c} \tag{4.1b}$$

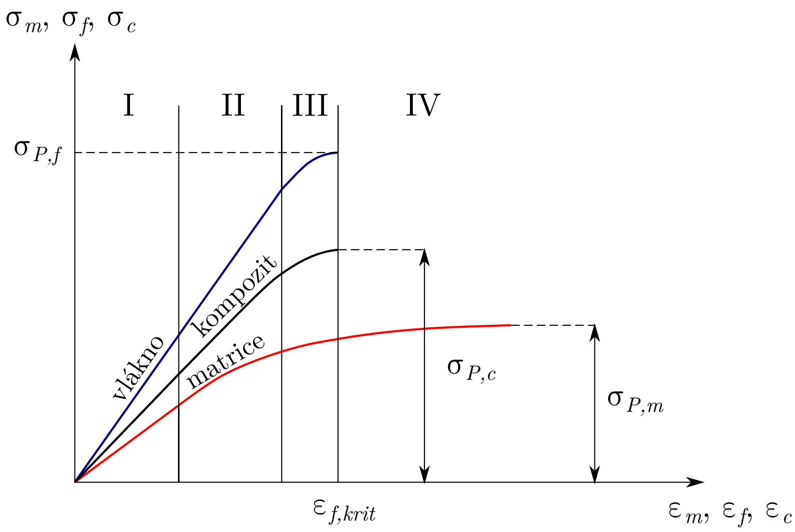
4.2.1 Podélná pevnost a tuhost

V případě, že kompozit (obr. 4.1) je zatěžován v longitudinální směru L, dochází k přerozdělení celkové podélné síly – část je přenášena vlákny a část matricí. Z tohoto předpokladu vychází tzv. směšovací pravidlo, kterým lze napětí v kompozitu vyjádřit vztahem

$$\sigma_c = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m. \tag{4.2}$$

Pomocí směšovacího pravidla lze vyjádřit i modul pružnosti kompozitu v longitudinálním směru E_L následovně

$$E_L = E_f v_f + E_m v_m = E_f v_f + E_m \left(1 - v_f\right). \tag{4.3}$$



Obrázek 4.2: Tahový diagram jednosměrné laminy.

Vztah (4.3) však platí pouze tehdy, jestliže se obě složky kompozitu deformují elasticky, viz obr. 4.2 oblast I. Pro druhou oblast, kde se již matrici deformuje plasticky, platí

$$E_L = E_f v_f + \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_m}{\mathrm{d}\varepsilon_m}\right)_{\varepsilon_c} v_m, \tag{4.4}$$

kde výraz $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_m}{\mathrm{d}\varepsilon_m}\right)_{\varepsilon_c}$ představuje směrnici tečny k tahové křivce matrice při deformaci kompozitu ε_c.

Ke třetímu stádiu dochází, jestliže se plasticky deformuje nejen matrice, ale i vlákna. Toto stádium nenastává u kompozitů s křehkými vlákny. Přetržení vláken nastává při kritickém přetvoření $\varepsilon_{f,krit}$. Je-li objemový podíl vláken v_f větší než $v_{f,min}$, viz obr. 4.3, matrice nedokáže snést sama celkové zatížení kompozitu, čímž dochází k jeho úplnému porušení. Výsledná pevnost kompozitu v tahu je za těchto podmínek

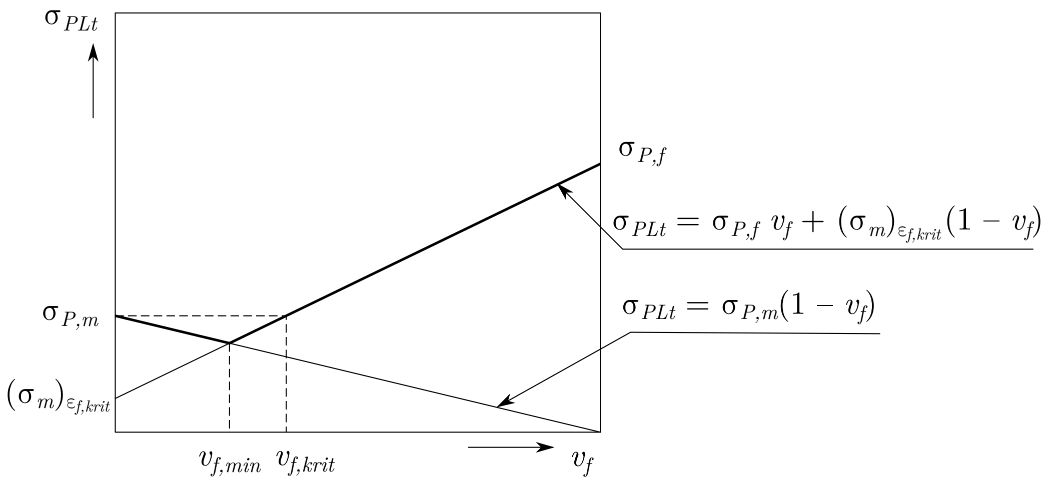
$$\sigma_{PLt} = \sigma_{P,f} v_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{f,krit}} (1 - v_f) \,. \tag{4.5}$$

V případě, že objemový podíl vláken v kompozitu je menší než $v_{f,min}$, přetržení vláken neznamená porušení kompozitu. K němu dochází až při dosažení pevnosti

$$\sigma_{PLt} = \sigma_{P,m} (1 - v_f) \,. \tag{4.6}$$

O dobře navrženém kompozitu se mluví tehdy, jestliže jeho výsledná pevnost převyšuje pevnost matrice samotné. To nastává, pokud je objemový podíl vláken větší než kritický $v_{f,krit}$, viz obr. 4.3.

$$v_{f,krit} = \frac{\sigma_{P,m} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{f,krit}}}{\sigma_{P,f} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{f,krit}}} \tag{4.7}$$



Obrázek 4.3: Pevnost jednosměrné laminy. Předloha z [15].

4.2.2 Příčná pevnost a tuhost

Pro hodnocení příčných charakteristik se vychází z příčného řezu kompozitu, jenž tvoří střídavě vrstvy matrice a vlákna, jejichž tloušťka je úměrná objemovým podílům [17]. Modul pružnosti v příčném směru je za předpokladu elastické deformace obou komponent dán vztahem

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m}. \tag{4.8}$$

Pevnost kompozitu v příčném směru je dána pevností matrice. Například Kaw [18] pro výpočet příčné tahové a tlakové pevnosti uvádí vztahy

$$\sigma_{PTt} = E_T \left[\left(\frac{4v_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{E_m}{E_f} + \left[1 - \left(\frac{4v_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \frac{\sigma_{Ptm}}{E_m}, \tag{4.9}$$

$$\sigma_{PTd} = E_T \left[\left(\frac{4v_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{E_m}{E_f} + \left[1 - \left(\frac{4v_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \frac{\sigma_{Pdm}}{E_m}. \tag{4.10}$$

4.2.3 Modul pružnosti ve smyku a Poissonovo číslo

Analogicky ke vztahu (4.8) lze vyjádřit podélný modul pružnosti ve smyku G_{LT}

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m}, \tag{4.11}$$

kde G_f, resp. G_m, je modul pružnosti ve smyku vlákna, resp. matrice. K získání Poissonova čísla kompozitu lze opět použít tzv. směšovací pravidlo

$$\mu_{LT} = \mu_f v_f + \mu_m v_m, \tag{4.12}$$

kde μ_f, μ_m jsou Poissonova čísla vlákna a matrice.

4.3 Makromechanika kompozitů

Makromechanika popisuje chování kompozitů na úrovni vrstvy a výše. Základním stavebním prvkem je tudíž vrstva, která je popsána maticí tuhosti a pevnostními charakteristikami [15]. K popisu chování laminátu se používá tzv. klasická teorie laminátů.

4.3.1 Konstitutivní vztahy

Za předpokladu lineárního chování materiálu lze vztah mezi tenzorem napětí σ_{ij} a tenzorem přetvoření ε_{ij} obecně vyjádřit pomocí zobecněného Hookeova zákona (4.13), resp. inverzního Hookeova zákona (4.14)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \qquad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{4.14}$$

kde C_{ijkl}, resp. S_{ijkl}, je tenzor elastických koeficientů, resp. tenzor elastických modulů. V obou případech se jedná o tenzory druhého řádu, které obsahující 81 prvků [19]. Na základě jejich symetrie a symetrie tenzoru napětí a tenzoru přetvoření [20], je lze však charakterizovat pouze 21 nezávislými elastickými konstantami. Takto popsaný model materiálu se nazývá anizotropní.

Jestliže je však uvažován jednosměrný dlouhovláknový kompozit (obr. 4.1), jedná se o ortotropní model materiálu, u kterého jsou tři vzájemně kolmé směry $1,2,3$ ekvivalentní materiálovým směrům L,T,T'. Na rozdíl od anizotropního modelu materiálu nedochází při zatěžování v hlavních souřadnicových osách ke zkosům. Počet nezávislých elastických konstant je v takovém případě roven devíti [21].

Pomocí zkráceného indexování [22] lze tenzorový zápis Hookeova zákonu včetně jeho inverzního vztahu pro ortotropní model materiálu psát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

kde prvky C_{ij} tvoří matici tuhosti a prvky S_{ij} tvoří matici poddajnosti.

Tenká vrstva kompozitu, lamina (obr. 4.1), se modeluje pomocí rovinného ortotropního modelu materiálu, pro jehož popis lze použít dvourozměrný tvar Hookeova zákona, který obsahuje již pouze čtyři nezávislé elastické konstanty

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Při použití elastických inženýrských konstant se inverzní Hookeův zákon (4.18) pro rovinou úlohu za předpokladu rovinné napjatosti mění na tvar (4.19), přičemž nezávislými konstantami jsou podélný a příčný modul pružnosti E_1, E_2, modul pružnosti ve smyku G_{12} a Poissonovo číslo μ_{12}.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } \mu_{21} = \mu_{12}\frac{E_2}{E_1} \tag{4.19}$$

V případě obecného souřadnicového systému, který je natočen o úhel θ vůči materiálovému souřadnicovému systému, se tenzory napětí a přetvoření přepočítávají pomocí tzv. transformační matice $\mathbf{T}$ následovně

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

5 Funkce komplexní proměnné

Funkce komplexní proměnné se používají pro řešení mnoha různých dvourozměrných fyzikálních a technických problémů [23].

Funkce komplexní proměnné přiřazuje komplexnímu číslu $z \in D$ právě jedno komplexní číslo w

$$w = f(z), \tag{5.1}$$

kde množina D se nazývá definiční obor funkce. Vyjádří-li se $z = x + \mathrm{i}y$, lze funkci této komplexní proměnné psát ve tvaru

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \tag{5.2}$$

kde $u(x, y), v(x, y)$ jsou reálné funkce dvou reálných proměnných, přičemž platí

$$u(x, y) = \Re f(z), \qquad v(x, y) = \Im f(z). \tag{5.3}$$

5.1 Základní pojmy

V této podkapitole bude vysvětleno několik pojmů, se kterými se bude v následujících kapitolách pracovat. Jmenovitě se jedná o funkci harmonickou, biharmonickou a holomorfní, jejichž vlastnosti sloužily k zavedení komplexních potenciálů, tzv. Muschelišviliho komplexních potenciálů [24].

5.1.1 Harmonická funkce

Definice [23]**:** Reálnou funkci $u(x, y)$ dvou reálných proměnných x, y nazveme *harmonickou funkcí* v oblasti $D \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, má-li $u(x, y)$ v D spojité parciální derivace prvního a druhého řádu a zároveň vyhovuje tzv. *Laplaceově rovnici*:

$$\Delta u = 0, \tag{5.4}$$

kde Δ je *Laplaceův operátor*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5.5}$$

5.1.2 Biharmonická funkce

Definice [25]**:** Funkci $U(x, y)$ nazveme *biharmonickou funkcí* v oblasti $T \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, má-li $U(x, y)$ v T spojité parciální derivace do čtvrtého řádu a zároveň vyhovuje rovnici:

$$\Delta\Delta U = 0, \tag{5.6}$$

kde Δ je *Laplaceův operátor*.

5.1.3 Cauchy-Riemannovy podmínky

Cauchy-Riemannovy podmínky jsou nutné a zároveň postačující podmínky k tomu, aby funkce $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, která je definovaná v nějaké oblasti G, byla v bodě z této oblasti diferencovatelná jako funkce komplexní proměnné [23]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5.7}$$

Jestliže jsou splněny tyto podmínky, derivace funkce komplexní proměnné $f'(z)$ může být vyjádřena v libovolném z těchto čtyř tvarů

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5.8a}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5.8b}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5.8c}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.8d}$$

5.1.4 Holomorfní funkce

Definice [26]**:** Nechť $G \in \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní, jestliže $f'(z)$ existuje ve všech bodech množiny G.

Vlastnosti holomorfní funkce

Každá holomorfní funkce $f(z)$ má tyto vlastnosti [27]:

1. součin, podíl a součet dvou holomorfních funkcí $f_1(z), f_2(z)$ je funkce holomorfní,
2. derivace a integrace holomorfní funkce $f(z)$ je opět holomorfní funkce,
3. každá holomorfní funkce $f(z)$ definovaná v oblasti C je analytická – lze ji vyjádřit ve tvaru součtu mocninné řady v okolí libovolného bodu z_0 v oblasti C

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n,$$

4. reálná $u(x, y)$ a imaginární část $v(x, y)$ každé holomorfní funkce $f(z)$ jsou harmonické funkce, tj. splňují Laplaceovu rovnici (5.4), protože platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

5.2 Aplikace funkcí komplexní proměnné

Jak již bylo zmíněno v kapitole 3.2.2, k vyřešení rovinné úlohy pružnosti, pro kterou platí rovnice rovnováhy (3.16) a geometrické rovnice (3.17), stačí znát tvar Airyho funkce napětí $U(x, y)$ (biharmonické funkce), která splňuje rovnici (3.20).

5.2.1 Muschelišviliho komplexní potenciály

N. I. Muschelišvili [24] dokázal, že Airyho funkci napětí lze vyjádřit pomocí dvou komplexních holomorfních funkcí $\varphi(z), \chi(z)$, tzv. Muschelišviliho komplexních potenciálů

$$U(x, y) = \Re\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right], \tag{5.9}$$

kde $\bar{z}$ je komplexně sdružené číslo. Důkaz o platnosti vztahu (5.9) uvádí literatura [25].

Pro zisk složek tenzoru napětí $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ a pole posuvů (u_x, u_y) z Muschelišviliho komplexních potenciálů platí následující vztahy [28]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right) = 2\left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right), \tag{5.10a}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right) = 2\left(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right), \tag{5.10b}$$

$$2G\left(u_x + \mathrm{i}u_y\right) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{5.10c}$$

kde $\Phi(z), \psi(z)$ a $\Psi(z)$ jsou holomorfní funkce, pro které platí

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \qquad \psi(z) = \chi'(z), \qquad \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z) \tag{5.11}$$

a κ je materiálová charakteristika, která pro rovinnou deformaci splňuje vztah

$$\kappa = 3 - 4\mu \tag{5.12}$$

a pro rovinnou napjatost nabývá

$$\kappa = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}. \tag{5.13}$$

Důkaz o platnosti vztahů (5.10) včetně vyjádření jednotlivých napětí a posuvů je uveden v litaraturách [25, 27]. Tato diplomová práce se bude opírat zejména o literaturu [29], kde je využito následující značení

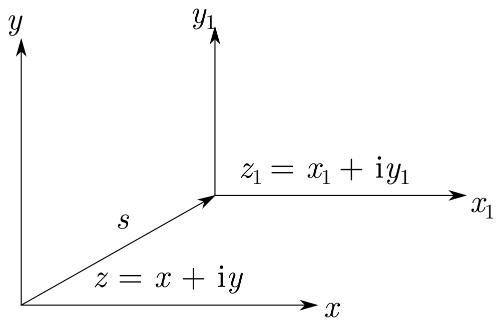
$$\Phi(z) = \varphi'(z), \qquad \Omega(z) = \left[z\varphi'(z) + \psi(z)\right]'. \tag{5.14}$$

Pro zisk složek napětí a pole posuvů platí následně vztahy [29]

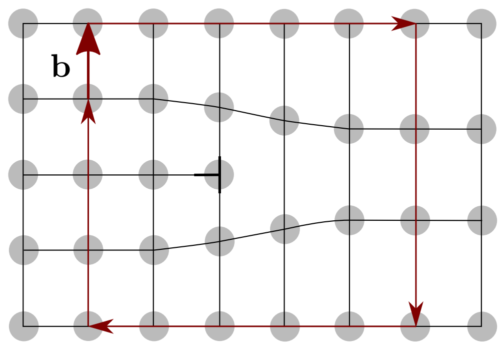
$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right), \tag{5.15a}$$

$$\sigma_{yy} + \mathrm{i}\sigma_{xy} = \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) + (\bar{z} - z)\,\Phi'(z), \tag{5.15b}$$

$$-2\mathrm{i}G\frac{\partial}{\partial x}\left(u_y + \mathrm{i}u_x\right) = \kappa\overline{\Phi(z)} - \Omega(z) - (\bar{z} - z)\,\Phi'(z). \tag{5.15c}$$



Obrázek 5.1: Posunutí souřadnicového systému.



Obrázek 5.2: Hranová dislokace.

Pravidlo pro posunutí

Nechť $\Phi_1(z_1), \Omega_1(z_1)$ jsou komplexní potenciály v souřadnicovém systému $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, zatímco $\Phi(z), \Omega(z)$ jsou potenciály pro stejný problém avšak v souřadnicovém systému $z = x + \mathrm{i}y$, viz obr. 5.1, poté platí

$$\Phi(z) = \Phi_1(z - s), \qquad \Omega(z) = \Omega_1(z - s) + (s - \bar{s})\,\Omega_1'(z - s). \tag{5.16}$$

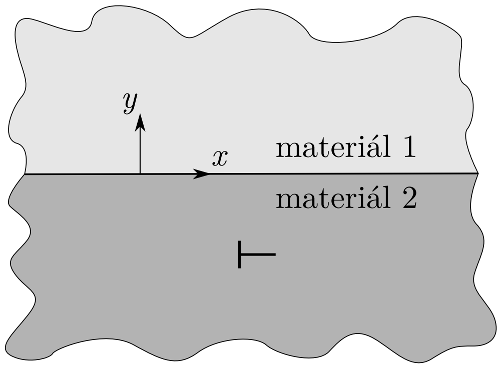
5.2.2 Hranová dislokace v blízkosti bimateriálového rozhraní

Hranová dislokace je čárová porucha krystalické mřížky a reprezentuje spodní konec atomové poloroviny, která byla do mřížky vložena [30]. Burgersův vektor **b** uzavírá dislokační smyčku a je vždy kolmý na dislokační čáru, viz obr. 5.2. V komplexní rovině lze Burgersův vektor zapsat pomocí komplexního čísla

$$b = b_x + \mathrm{i}b_y, \tag{5.17}$$

které reprezentuje jeho a velikost a orientaci.

V předchozí kapitole jsou uvedeny vztahy pro zisk pole napětí a posuvů (5.15) pomocí dvou komplexních holomorfních funkcí $\Phi(z), \Omega(z)$. Nic ale není řečeno o jejich konkrétních tvarech. Ty se mění pro každou úlohu a jejich nalezení může být poměrně složité.



Obrázek 5.3: Nekonečná rovina s dislokací.

Uvažuje-li se nekonečná rovina tvořená dvěma polorovinami ze dvou homogenních izotropních lineárně elastických modelů materiálů, které jsou charakterizovány materiálovými charakteristikami μ_1, G_1, resp. μ_2, G_2, pro horní M_1, resp. dolní M_2, polorovinu, přičemž dislokace se nachází v materiálu 2, viz obr. 5.3, tvary komplexních potenciálů $\Phi(z), \Omega(z)$ jsou

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) + \Phi_0(z), & z \in M_1, \\ \Phi_2(z) + \Phi_0(z), & z \in M_2, \end{cases} \tag{5.18a}$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Omega_1(z) + \Omega_0(z), & z \in M_1, \\ \Omega_2(z) + \Omega_0(z), & z \in M_2, \end{cases} \tag{5.18b}$$

kde členy $\Phi_0(z)$ a $\Omega_0(z)$ se nazývají singulární a pro dislokaci nacházející se v poloze $z = s = s_x + \mathrm{i}s_y$ mají tvar [29]

$$\Phi_0(z) = B\left[\frac{1}{z-s}\right], \qquad \Omega_0(z) = B\left[\frac{\bar{s}-s}{(z-s)^2}\right] + \overline{B}\left[\frac{1}{z-s}\right], \tag{5.19}$$

kde

$$B = \frac{G_2}{\pi \mathrm{i}\,(1+\kappa_2)}\,(b_x + \mathrm{i}b_y)\,. \tag{5.20}$$

Členy $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Omega_1(z), \Omega_2(z)$ se nazývají podobnostní a jejich tvary jsou na základě rovnosti napětí (5.15b) a posuvů (5.15c) na bimateriálovém rozhraní rovny

$$\Phi_1(z) = \Lambda\Phi_0(z), \qquad \Phi_2(z) = \Pi\overline{\Omega_0}(z), \tag{5.21a}$$

$$\Omega_1(z) = \Pi\Omega_0(z), \qquad \Omega_2(z) = \Lambda\overline{\Phi_0}(z). \tag{5.21b}$$

Konstanty Λ, Π nabývají hodnot

$$\Lambda = \frac{\alpha+\beta}{1-\beta}, \tag{5.22}$$

$$\Pi = \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}, \tag{5.23}$$

přičemž α, β jsou tzv. Dundursovy parametry [31] vyjádřené pomocí modulů pružnosti ve smyku G_1, G_2 a materiálových charakteristik κ_1, κ_2 definovaných vztahem (5.12) pro rovinnou deformaci nebo vztahem (5.13) pro rovinnou napjatost

$$\alpha = \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \tag{5.24}$$

$$\beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}. \tag{5.25}$$

Tvary komplexních potenciálů pro dislokaci dle obr. 5.3 lze tudíž vyjádřit pouze pomocí singulárních členů Φ_0, Ω_0 následovně

$$\Phi(z) = \begin{cases} (1 + \Lambda)\Phi_0(z), & z \in M_1, \\ \Phi_0(z) + \Pi\overline{\Omega_0}(z), & z \in M_2, \end{cases} \tag{5.26a}$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} (1 + \Pi)\Omega_0(z), & z \in M_1, \\ \Omega_0(z) + \Lambda\overline{\Phi_0}(z), & z \in M_2. \end{cases} \tag{5.26b}$$

Detailnější odvození komplexních potenciálů (5.26) na základě rovnosti napětí a posuvů na bimateriálovém rozhraní je uvedeno v příloze A.

6 Stanovení součinitele intenzity napětí

Součinitel intenzity napětí K lze stanovit z řešení tzv. integrální rovnice uvedené v kapitole 6.3, pro jejíž sestavení se využívá Buecknerův princip [32] a metoda spojitě rozložených dislokací [33]. Pro jednoduchost bude tento postup demonstrován na průchozí trhlině nacházející se v nekonečném rovinném homogenním prostředí a zatěžované módem I, jak je znázorněno na obr. 6.1a).

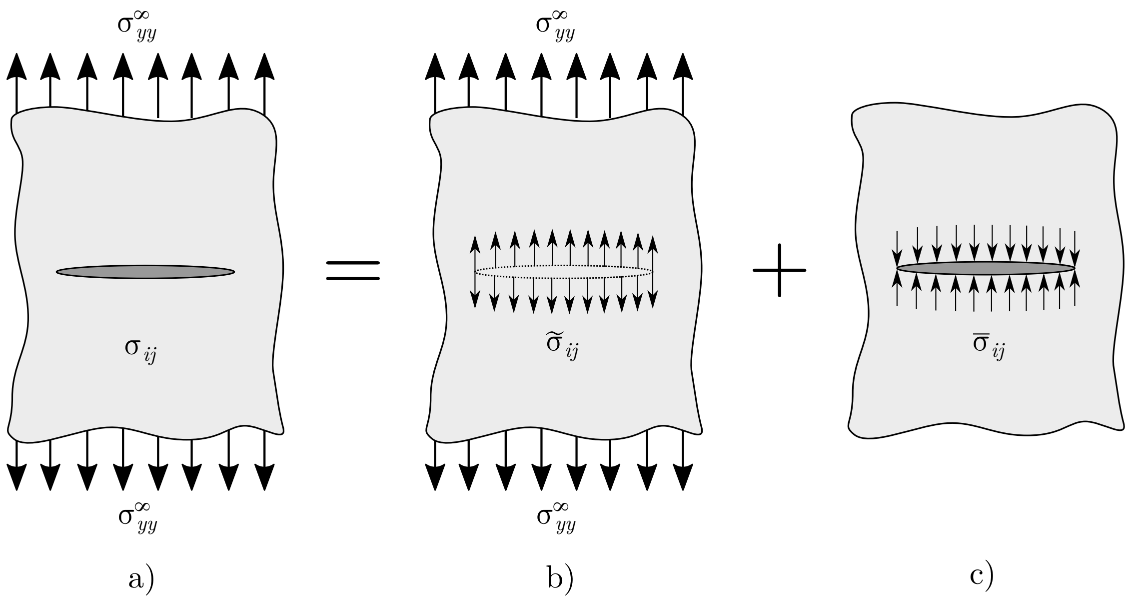
6.1 Buecknerův princip

H. F. Bueckner [32] uvádí, že výše definovanou rovinnou úlohu lze rozdělit do dvou úloh, viz obr. 6.1, a celkové řešení následně získat superpozicí dílčích řešení jednotlivých úloh.

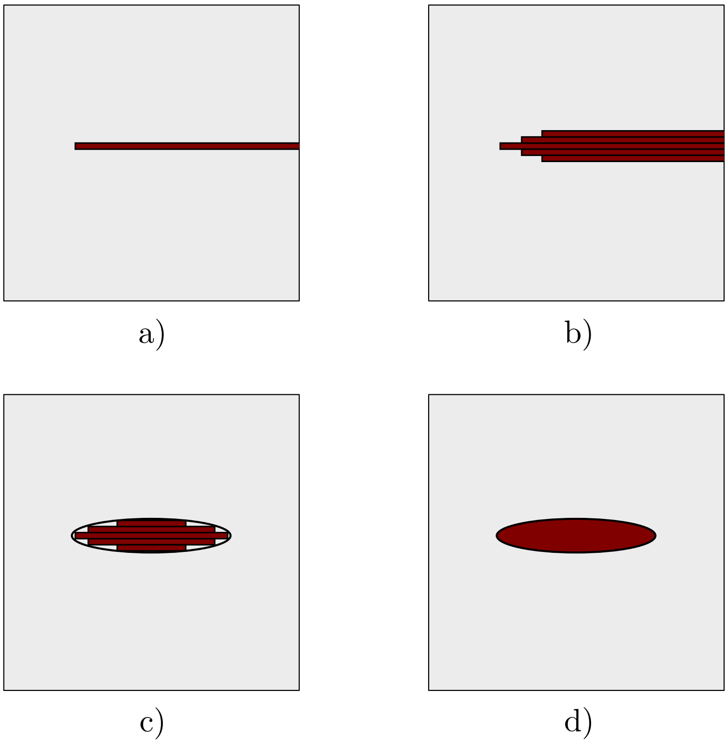
$$\sigma_{ij}(x,y) = \widetilde{\sigma}_{ij}(x,y) + \overline{\sigma}_{ij}(x,y). \tag{6.1}$$

- **Úloha 1:** homogenní neporušené prostředí, které je zatížené v nekonečnu – obr. 6.1b)
- **Úloha 2:** nezatížené prostředí s trhlinou, na jejíž volném povrchu jsou předepsaná tzv. korekční napětí $\overline{\sigma}_{ij}$ – obr. 6.1c)

Korekční napětí $\overline{\sigma}_{ij}$ definovaná v úloze 2 jsou co do velikosti totožná s napětími $\widetilde{\sigma}_{ij}$ působícími v místě trhliny v úloze 1, avšak opačného směru. Tato konvekce má za následek, že na lících trhliny v zatíženém nekonečném rovinném homogenním prostředí nepůsobí žádné napětí, viz obr. 6.1a).



Obrázek 6.1: Buecknerův princip. Předloha z [34].



Obrázek 6.2: Ilustrace vloženého materiálu mezi líce trhliny. Předloha z [35].

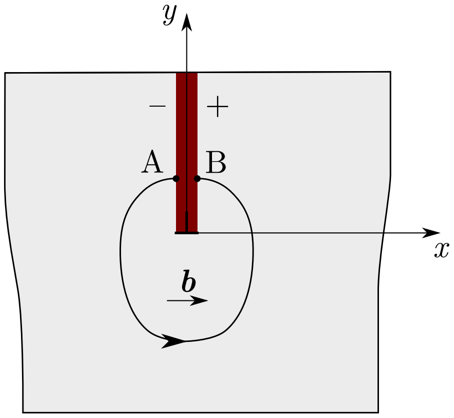
6.2 Metoda spojitě rozložených dislokací

Korekční napětí se stanovuje například tak, že mezi líce trhliny se postupně vkládá nadbytečný materiál. Tento postup je pouze matematickým nástrojem sloužícím ke stanovení korekčních napětí a současně k simulaci rozevření trhliny. Ve skutečnosti je vnitřek trhliny samozřejmě prázdný [35].

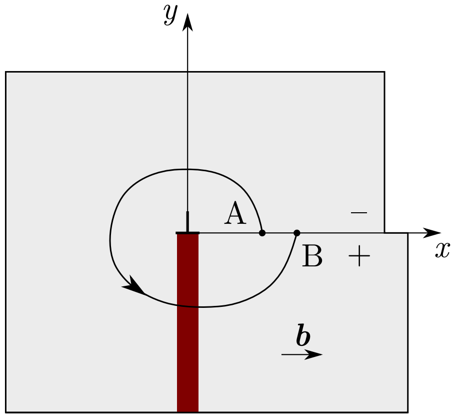
Vkládaný nadbytečný materiál si lze představit jako soubor nekonečně tenkých pásů (nosičů soustředěné deformace). Postup vkládání ilustruje obr. 6.2. Nejprve se uvažuje pouze jedna vrstva, která začíná v kořeni trhliny a pokračuje až do nekonečna nebo ke vzdálenému okraji, viz obr. 6.2a). Následně se vloží dostatečné množství pásů nad i pod první uvažovanou vrstvu, obr. 6.2b). Poté se tyto vrstvy na vhodných místech vyjmou, obr. 6.2c), což vede k požadované konfiguraci, která je znázorněna na obr. 6.2d).

Každá nekonečně tenká vrstva vloženého materiálu vnáší do tělesa relativní posuv $\delta\mathbf{b}$, čímž v něm generuje určité napětí, jehož matematické řešení může být použito jako Greenova funkce úlohy c). Následným součtem nebo integrací této Greenovy funkce se získá napětí generované výsledným posuvem $\mathbf{b}$ od všech uvažovaných vrstev [35].

Jednotlivé nekonečně malé vrstvy vkládaného materiálu jsou analogií hranové dislokace zmíněné v kapitole 5.2.2. I přes řadu shodných rysů mezi hranovou dislokací a vrstvou vkládaného materiálu se však jedná pouze o matematický nástroj umožňující zavést self-konzistentní stav napětí v tělese, který odpovídá vložené soustředěné deformaci a příslušným okrajovým podmínkám. Ve skutečnosti totiž žádné poruchy v krystalové mřížce nevznikají.



a) Climb



b) Glide

Obrázek 6.3: Způsoby vytvoření hranové dislokace. Předloha z [35].

6.2.1 Způsoby vytvoření hranové dislokace

Dislokace může být modelována jako polonekonečný zářez, do které se vloží nebo se z něj vyjme pás materiálu o konstantní šířce a následně se materiál opět spojí dohromady. Šířku vloženého, případně odstraněného, pásu reprezentuje Burgersův vektor **b**. Důležitou vlastností hranových dislokací je, že napjatost jimi způsobená závisí pouze na Burgersově vektoru $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ a nijak nezávisí na orientaci zářezu [35].

Dva způsoby vytvoření hranové dislokace s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ jsou zobrazeny na obr. 6.3.

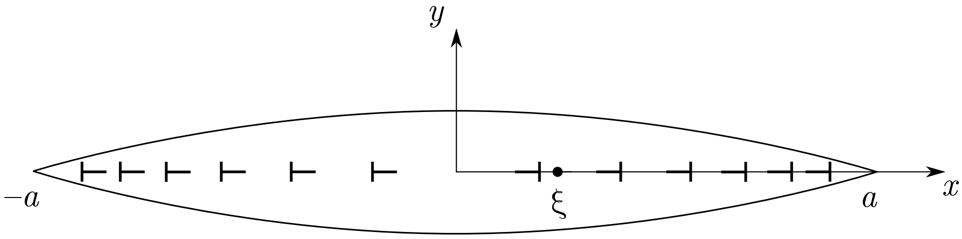
- **Climb**
  V tomto případě se do řezu vedeného podél osy y vloží a následně spojí s okolím vrstva materiálu o tloušťce b_x, viz obr. 6.3a).

- **Glide**
  V tomto případě je řez materiálem veden podél osy x, přičemž hranová dislokace vzniká posunutím materiálu pod řezem ve směru kladné osy x o délku b_x a jeho následným spojením, viz obr. 6.3b).

V obou těchto případech se generuje stejné pole napětí. Z obr. 6.3 je taktéž patrná znaménková konvekce Burgersova vektoru **b** zavedená Dundursem [31]. Ta říká, že jako pravá se označuje ta strana řezu materiálem, která leží napravo od řezu při pohledu z jádra dislokace a značí se (+). Levá strana označovaná (−) se získá analogicky. Díky znaménkové konvekci se jednoznačně určuje velikost a orientace Burgersova vektoru **b**.

Například pro případ znázorněný na obr. 6.3 se znaménko složky b_x Burgersova vektoru **b** určí pomocí křivky obcházející kořen dislokace z jakéhokoliv bodu levé hrany řezu do jemu odpovídajícího bodu na hraně pravé. Po ukončení oběhu křivky se získá nespojitost posunutí ve směru osy x, která je stejně velká a shodně orientovaná jako složka b_x

$$b_x = u(+) - u(-). \tag{6.2}$$



Obrázek 6.4: Trhlina modelovaná pomocí hranových dislokací. Předloha z [35].

6.2.2 Napjatost způsobená hranovou dislokací

Jestliže je uvažována hranová dislokace s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ nacházející se v počátku souřadnicového systému, napjatost v libovolném bodě je popsána následujícími vztahy [34]

$$\sigma_{xx} = \frac{2G}{\pi\left(\kappa+1\right)}\left\{b_x\left[-\frac{y}{r^4}\left(3x^2+y^2\right)\right]+b_y\left[\frac{x}{r^4}\left(x^2-y^2\right)\right]\right\}, \tag{6.3a}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2G}{\pi\left(\kappa+1\right)}\left\{b_x\left[\frac{y}{r^4}\left(x^2-y^2\right)\right]+b_y\left[\frac{x}{r^4}\left(x^2+3y^2\right)\right]\right\}, \tag{6.3b}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2G}{\pi\left(\kappa+1\right)}\left\{b_x\left[\frac{y}{r^4}\left(x^2-y^2\right)\right]+b_y\left[\frac{x}{r^4}\left(x^2-y^2\right)\right]\right\}, \tag{6.3c}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, $r^2 = x^2 + y^2$ a κ je materiálová charakteristika definovaná vztahem $\kappa = 3 - 4\mu$ pro rovinnou deformaci nebo $\kappa = \frac{3-\mu}{1+\mu}$ pro rovinnou napjatost.

6.2.3 Napjatost způsobená spojitě rozloženou dislokací

Uvažují-li se podél osy x spojitě rozložené dislokace s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (0, b_y)$, viz obr. 6.4, pak lze infinitezimální úsek tohoto rozložení charakterizovat jedinou izolovanou dislokací s nekonečně malým Burgersovým vektorem [35]

$$\delta b_y = B_y(\xi)\delta\xi, \tag{6.4}$$

kde $B_y(\xi)$ je hustota dislokací v bodě $[\xi, 0]$.

Napětí $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$, která vyvolá dislokace v bodě $[\xi, 0]$, jsou definována vztahy (6.3), kde proměnná x se nahradí výrazem $x-\xi$, přičemž $b_x = 0$. Korečkní napětí $\overline{\sigma}_{yy}$ generované spojitým rozložením dislokací mezi body $[-a, 0]$ a $[a, 0]$ se získá integrací napětí od jedné dislokace $\overline{\sigma}^{dis}_{yy}$ přes délku této trhliny

$$\overline{\sigma}_{yy}(x,0) = \frac{2G}{\pi(\kappa+1)}\int_{-a}^{a}\frac{B_y(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi, \qquad |x| < a, \tag{6.5}$$

kde hustotu dislokace $B_y(\xi)$ lze vyjádřit vztahem

$$B_y(\xi) = \frac{\mathrm{d}b_y(\xi)}{\mathrm{d}\xi}. \tag{6.6}$$

6.3 Integrální rovnice

Z Buecknerova principu uvedeného v kapitole 6.1 plynou výsledná normálová a smyková napětí působící v místě trhliny modelované pomocí hranových dislokací dle obr. 6.4

$$\sigma_{yy}(x,0) = \sigma_{yy}^{\infty}(x,0) + \overline{\sigma}_{yy}(x,0) = 0, \qquad |x| < a, \tag{6.7a}$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = \sigma_{xy}^{\infty}(x,0) + \overline{\sigma}_{xy}(x,0) = 0, \qquad |x| < a, \tag{6.7b}$$

kde $\sigma_{yy}^{\infty}(x,0), \sigma_{xy}^{\infty}(x,0)$ jsou napětí zatěžující nekonečné prostředí a napětí $\overline{\sigma}_{yy}(x,0), \overline{\sigma}_{xy}(x,0)$ reprezentují korekční napětí působící po délce trhliny.

Dosazením rovnice (6.5) do vztahu (6.7a) se obdrží tzv. singulární integrální rovnice prvního druhu s Cauchyho jádrem $(x-\xi)^{-1}$ a neznámou hustotou dislokací $B_y(\xi)$ [35]

$$-\frac{\kappa+1}{2G}\sigma_{yy}^{\infty}(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{B_y(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi, \qquad |x| < a. \tag{6.8}$$

Z matematických důvodů se tato rovnice normalizuje na interval $\langle -1, 1\rangle$, čehož se pro obecný interval $\langle a, b\rangle$ dosáhne substitucí [34]

$$\begin{aligned} 2\xi &= (b-a)\,s + (b+a)\,, \\ 2x &= (b-a)\,t + (b+a)\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Integrální rovnice pak pro trhlinu uvažovanou dle obr. 6.4 nabývá tvar

$$-\frac{\kappa+1}{2G}\sigma_{yy}^{\infty}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{B_y(s)}{t-s}\,\mathrm{d}s, \qquad |t| < 1, \tag{6.10}$$

jejíž řešení lze odvodit na základě Muschelišviliho teorie [24], která říká, že řešení se musí hledat ve tvaru součinu fundamentálního řešení $\omega(s)$ a neznámé ohraničené funkce $\phi_y(s)$

$$B_y(s) = \omega(s)\phi_y(s), \quad \text{kde } \omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}. \tag{6.11}$$

Řešení rovnice (6.10) pro takto uvažovanou úlohu je pak dáno výrazem [35]

$$B_y(t) = \frac{\omega(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\kappa+1)\,\sigma_{yy}^{\infty}(s)}{2G\omega(s)\,(t-s)}\,\mathrm{d}s + C\omega(t), \tag{6.12}$$

kde C je libovolná konstanta, kterou je potřeba určit z podmínky nulového rozevření konců trhliny

$$\Delta(-a) = \Delta(a) = 0. \tag{6.13}$$

Přičemž pro rozevření trhliny $\Delta(x)$ na základě vzorce (6.6) platí vztah

$$\Delta(x) = -\int_{-a}^{x} B_y(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{6.14}$$

nebo také

$$B_y(x) = -\frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{6.15}$$

Podmínka nulového rozevření konců trhliny (6.13) pak s rovnicí (6.14) dává tzv. podmínku konzistence

$$\int_{-a}^{a} B_y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} B_y(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{6.16}$$

Součinitel intenzity napětí

Kromě rozevření trhliny $\Delta(x)$ lze pomocí hustoty dislokací $B_y(\xi)$ určit i součinitel intenzity napětí K_I na koncích trhliny, který pro uvažovanou trhlinu namáhanou módem I vychází z rozevření trhliny [34]

$$\Delta(r) = u_y(r, +\pi) - u_y(r, -\pi) = \frac{\kappa+1}{G} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \tag{6.17}$$

Součinitel intenzity napětí K_I tak lze vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned} K_I(\pm 1) &= \lim_{r\to 0} \frac{2G}{\kappa+1}\sqrt{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Delta(r)}{\mathrm{d}r} = \\ &= \pm \lim_{t\to\pm 1^{\mp}} \frac{2G}{\kappa+1}\sqrt{2\pi a(1\mp t)}B_y(t) = \\ &= \pm\sqrt{\pi a}\frac{2G}{\kappa+1}\phi_y(\pm 1). \end{aligned} \tag{6.18}$$

7 Trhlina v blízkosti bimateriálového rozhraní

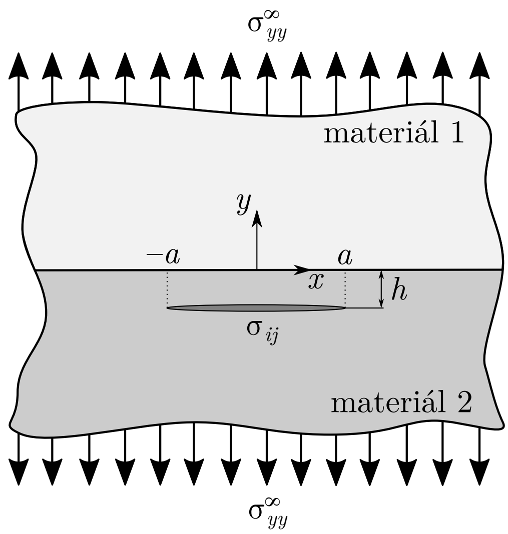
Cílem této kapitoly je stanovení součinitele intenzity napětí K_I trhliny nacházející se v blízkosti bimateriálového rozhraní, viz obr. 7.1, pomocí nastudované teorie komplexních potenciálů.

Uvažovaná trhlina má délku $2a$ a nachází se ve vzdálenosti h od bimateriálového rozhraní v materiálu 2. Homogenní izotropní lineárně elastické modely materiálů jsou popsány materiálovými charakteristikami μ_1, G_1, μ_2, G_2, jejichž hodnoty jsou uvedeny společně s ostatními parametry v tab. 7.1. Pro takto definovanou rovinnou úlohu bude uvažována rovinná deformace.

K ověření hodnoty součinitele intenzity napětí K_I se použije výpočet pomocí metody konečných prvků, který bude podrobně uveden v kapitole 7.2.

Tabulka 7.1: Zadané parametry.

a [mm]	h [mm]	μ_1 [–]	G_1 [GPa]	μ_2 [–]	G_2 [GPa]
6	10	0,3	50	0,3	200

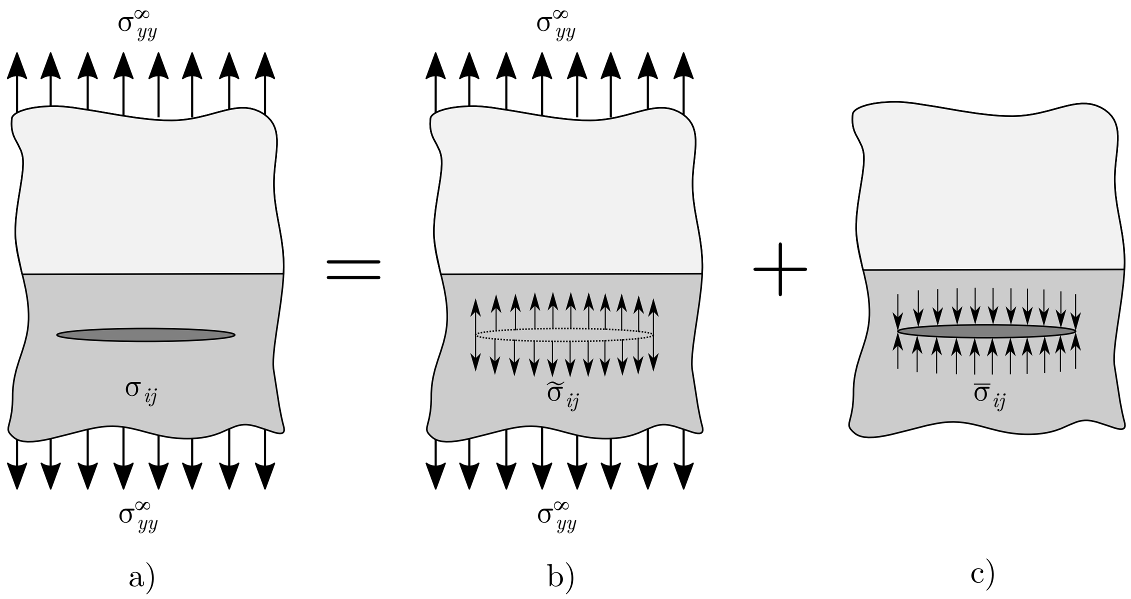


Obrázek 7.1: Trhlina v blízkosti bimateriálového rozhraní.

7.1 Stanovení K_I pomocí komplexních potenciálů

Jak je uvedeno v kapitole 6, součinitel intenzity napětí K_I lze určit z řešení integrální rovnice, pro jejíž sestavení se využívá Buecknerův princip [32], který je schematicky zobrazen na obr. 7.2. Pro napětí σ_{yy}, které je kolmé na rovinu trhliny, pak platí vztah

$$\sigma_{yy}(x,y) = \widetilde{\sigma}_{yy}(x,y) + \overline{\sigma}_{yy}(x,y). \tag{7.1}$$



Obrázek 7.2: Buecknerův princip – trhlina v blízkosti bimateriálového rozhraní.

7.1.1 Korekční napětí $\overline{\sigma}_{yy}$

Pro stanovení korekčního napětí $\overline{\sigma}_{yy}$ se bude aplikovat postup uvedený v kapitole 6.2, který na základě metody spojitě rozložených dislokací vyjadřuje korekční napětí $\overline{\sigma}_{yy}$ pomocí integrace napětí od jedné dislokace $\overline{\sigma}_{yy}^{dis}$ přes délku dané trhliny. Jednotlivé dislokace se nachází mezi body $[-a, -h]$ a $[a, -h]$.

Jak je uvedeno v kapitole 5.2, složky napětí a pole posuvů lze vyjádřit pomocí komplexních potenciálů. Napětí od jedné dislokace $\overline{\sigma}_{yy}^{dis}$ lze získat z rovnice (5.15b) následovně

$$\overline{\sigma}_{yy}^{dis}(x,y) = \Re\left[\overline{\Phi(z)} + \Omega(z) + (\bar{z} - z)\,\Phi'(z)\right], \tag{7.2}$$

kde komplexní potenciály $\Phi(z)$ a $\Omega(z)$ jsou vyjádřeny vztahy (5.26), přičemž singulární členy $\Phi_0(z), \Omega_0(z)$ nabývají pro dislokaci nacházející se v poloze $z = s = s_x + \mathrm{i}s_y$ tvary (5.19).

Ke stanovení tohoto napětí je nezbytné vyjádřit komplexně sdružené singulární členy, tj. $\overline{\Phi_0}(z), \overline{\Omega_0}(z)$, a derivace komplexních potenciálů $\Phi_0(z), \overline{\Omega_0}(z)$. Tyto vztahy zde nebudou uváděny, ale jejich odvození lze naleznout v příloze B. Jelikož se trhlina nachází ve vzdálenosti h od bimateriálového rozhraní (obr. 7.1) a zároveň je modelována pomocí dislokací s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (0, b_y)$, platí následující vztahy

$$z = x - \mathrm{i}h, \tag{7.3}$$

$$s = s_x - \mathrm{i}h, \tag{7.4}$$

$$b = b_y. \tag{7.5}$$

Při dosazení výše uvedených vztahů do rovnice (7.2) a následnými úpravami se obdrží napětí od jedné dislokace ve vzdálenosti h od bimateriálového rozhraní ve tvaru

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{yy}^{dis}(x) &= \frac{2G_2}{\pi\left(\kappa_2+1\right)}\left[\frac{b_y}{x-s_x}+\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(x-s_x\right)b_y}{2\left(1-\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)}+\right.\\ &+\frac{48h^4\left(\alpha-\beta\right)\left(x-s_x\right)b_y}{\left(1+\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^3}-\frac{4h^2\left(\alpha-\beta\right)\left(x-s_x\right)^3b_y}{\left(1+\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^3}+\\ &+\frac{4h^2\left(\alpha-\beta\right)\left(x-s_x\right)b_y}{\left(1+\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^2}+\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\left(\frac{4h^2\left(x-s_x\right)}{\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^2}+\right.\\ &\left.\left.+\frac{x-s_x}{2\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)}\right)b_y\right]. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nyní se na základě vztahu (6.4) v rovnici (7.6) nahradí Burgersův vektor b_y výrazem

$$\mathrm{d}b_y = B_y(s_x)\,\mathrm{d}s_x, \tag{7.7}$$

kde $B_y(s_x)$ je hustota dislokací v bodě $[s_x, -h]$. Následnou integrací přes délku trhliny se získá korekční napětí $\overline{\sigma}_{yy}$

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{yy}(x) &= \frac{2G_2}{\pi\left(\kappa_2+1\right)}\left[\int_{-a}^{a}\frac{B_y(s_x)}{x-s_x}\,\mathrm{d}s_x+\int_{-a}^{a}\frac{\left(\alpha+\beta\right)\left(x-s_x\right)B_y(s_x)}{2\left(1-\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)}\,\mathrm{d}s_x+\right.\\ &+\int_{-a}^{a}\frac{48h^4\left(\alpha-\beta\right)\left(x-s_x\right)B_y(s_x)}{\left(1+\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^3}\,\mathrm{d}s_x-\int_{-a}^{a}\frac{4h^2\left(\alpha-\beta\right)\left(x-s_x\right)^3B_y(s_x)}{\left(1+\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^3}\,\mathrm{d}s_x+\\ &+\int_{-a}^{a}\frac{4h^2\left(\alpha-\beta\right)\left(x-s_x\right)B_y(s_x)}{\left(1+\beta\right)\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^2}\,\mathrm{d}s_x+\int_{-a}^{a}\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\left(\frac{4h^2\left(x-s_x\right)}{\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)^2}+\right.\\ &\left.\left.+\frac{x-s_x}{2\left(4h^2+\left(x-s_x\right)^2\right)}\right)B_y(s_x)\,\mathrm{d}s_x\right]. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Jak uvádí kapitola 6.3, výše uvedený vztah je výhodné normalizovat z intervalu $\langle -a, a\rangle$ na interval $\langle -1, 1\rangle$. Pro obecný případ intervalu $\langle a, b\rangle$ toho lze dosáhnout substitucí

$$\begin{aligned}2s_x &= \left(b-a\right)s+\left(b+a\right),\\ 2x &= \left(b-a\right)t+\left(b+a\right),\end{aligned} \tag{7.9}$$

Pro úlohu uvažovanou v této diplomové práci má substituce tvar

$$\begin{aligned}s_x &= as,\\ x &= at.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Korekční napětí $\overline{\sigma}_{yy}$ následně při použití substituce (7.10) přejde na tvar

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{yy}(t) \;=\; & \frac{2G_2}{\pi(\kappa_2+1)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{B_y(s)}{t-s}\,\mathrm{d}s + a\left[\int_{-1}^{1}\frac{(\alpha+\beta)(at-as)B_y(s)}{2(1-\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)}\,\mathrm{d}s+\right.\right.\\ & +\int_{-1}^{1}\frac{48h^4(\alpha-\beta)(at-as)B_y(s)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^3}\,\mathrm{d}s-\int_{-1}^{1}\frac{4h^2(\alpha-\beta)(at-as)^3B_y(s)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^3}\,\mathrm{d}s+\\ & +\int_{-1}^{1}\frac{4h^2(\alpha-\beta)(at-as)B_y(s)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^2}\,\mathrm{d}s+\int_{-1}^{1}\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\left(\frac{4h^2(at-as)}{\left(4h^2+(at-as)^2\right)^2}+\right.\\ & \left.\left.\left.+\frac{at-as}{2\left(4h^2+(at-as)^2\right)}\right)B_y(s)\,\mathrm{d}s\right]\right].\end{aligned} \tag{7.11}$$

7.1.2 Integrální rovnice

Protože výsledná normálová napětí působící v místě trhliny jsou nulová, z Buecknerova principu (7.1) plyne, že vyjádřené korekční napětí $\overline{\sigma}_{yy}$ je podél trhliny co do velikosti totožné s napětím $\widetilde{\sigma}_{yy}$, které působí ve stejném místě, avšak v neporušeném bimateriálovém prostředí zatíženém v nekonečnu, viz obr. 7.2b), ale opačného směru

$$-\widetilde{\sigma}_{yy}(t)=\overline{\sigma}_{yy}(t),\qquad |t|<1. \tag{7.12}$$

Dosazením rovnice (7.11) do vztahu (7.12) se obdrží singulární integrální rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}-\frac{\kappa_2+1}{2G_2}\widetilde{\sigma}_{yy}(t) = & \frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{B_y(s)}{t-s}\,\mathrm{d}s + a\left[\int_{-1}^{1}\frac{(\alpha+\beta)(at-as)B_y(s)}{2(1-\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)}\,\mathrm{d}s+\right.\right.\\ & +\int_{-1}^{1}\frac{48h^4(\alpha-\beta)(at-as)B_y(s)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^3}\,\mathrm{d}s-\int_{-1}^{1}\frac{4h^2(\alpha-\beta)(at-as)^3B_y(s)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^3}\,\mathrm{d}s+\\ & +\int_{-1}^{1}\frac{4h^2(\alpha-\beta)(at-as)B_y(s)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^2}\,\mathrm{d}s+\int_{-1}^{1}\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\left(\frac{4h^2(at-as)}{\left(4h^2+(at-as)^2\right)^2}+\right.\\ & \left.\left.\left.+\frac{at-as}{2\left(4h^2+(at-as)^2\right)}\right)B_y(s)\,\mathrm{d}s\right]\right],\qquad |t|<1,\end{aligned} \tag{7.13}$$

kterou lze pro jednoduchost zapsat jako součet singulárního a nesingulárního integrálu [34], viz rovnice (7.14). Protože hodnota singulárního integrálu pro $s \to t$ roste nade všechny meze, je nutné jej uvažovat ve smyslu jeho hlavní hodnoty [35, 36].

$$-\frac{\kappa_2+1}{2G_2}\widetilde{\sigma}_{yy}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{B_y(s)}{t-s}\,\mathrm{d}s+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,s)B_y(s)\,\mathrm{d}s,\qquad |t|<1, \tag{7.14}$$

kde

$$\begin{aligned} K(t,s) &= \frac{(\alpha+\beta)(at-as)}{2(1-\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)} + \frac{48h^4(\alpha-\beta)(at-as)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^3} - \\ &- \frac{4h^2(\alpha-\beta)(at-as)^3}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^3} + \frac{4h^2(\alpha-\beta)(at-as)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at-as)^2\right)^2} + \\ &+ \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\left(\frac{4h^2(at-as)}{\left(4h^2+(at-as)^2\right)^2} + \frac{at-as}{2\left(4h^2+(at-as)^2\right)}\right). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Jak již bylo zmíněno v kapitole 6.3, hledaná funkce $B_y(s)$ se vyjádří ve tvaru součinu fundamentálního řešení $\omega(s)$ a neznámé ohraničené funkce $\phi_y(s)$ [24]

$$B_y(s) = \omega(s)\phi_y(s), \quad \text{kde } \omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}. \tag{7.16}$$

Pro získání řešení integrální rovnice je zapotřebí použít vhodných numerických metod. V této diplomové práci se bude aplikovat metoda, jejíž princip vychází z numerické integrace pomocí Gauss-Chebyshevovy kvadratury [37, 38].

Její aplikací se převede singulární integrální rovnice (7.14) na $N-1$ rovnic o N neznámých, kde N značí stupeň aproximace [34]

$$-\frac{\kappa_2+1}{2G_2}\tilde{\sigma}_{yy}(t_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi_y(s_i)\left(\frac{1}{t_k-s_i} + aK(t_k,s_i)\right), \qquad k = 1\cdots N-1, \tag{7.17}$$

přičemž souřadnice integračních bodů s_i a kolokačních bodů t_k jsou dány následujícími vztahy

$$s_i = cos\left(\pi\frac{2i-1}{2N}\right), \qquad i = 1\cdots N, \tag{7.18}$$

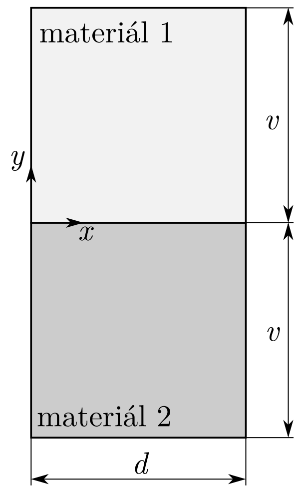
$$t_k = cos\left(\pi\frac{k}{N}\right), \qquad k = 1\cdots N-1. \tag{7.19}$$

Z podmínky konzistence (6.16) se stanoví rovnice

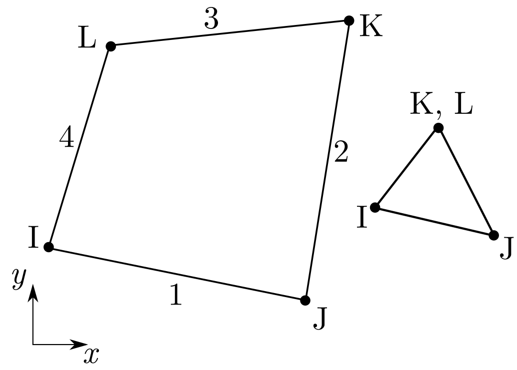
$$\frac{\pi}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi_y(s_i) = 0, \tag{7.20}$$

která společně s rovnicemi (7.17) tvoří soustavu N rovnic o N neznámých.

V této diplomové práci bude uvažován stupeň aproximace osm, což povede k soustavě osmi rovnic o osmi neznámých, která bude řešena v programovacím jazyku Python. Podmínkou k získání hodnot neznámé ohraničené funkce ϕ_y v integračních bodech s_i je stanovení napětí $\tilde{\sigma}_{yy}(t_k)$, které působí v kolokačních bodech neporušeného bimateriálového prostředí zatíženého v nekonečnu, viz obr. 7.2b). Hodnoty těchto napětí se obdrží pomocí metody konečných prvků (MKP), a to konkrétně pomocí komerčního softwaru ANSYS 18.1.



Obrázek 7.3: Model geometrie.



Obrázek 7.4: Prvek PLANE182.

7.1.3 Stanovení napětí $\widetilde{\sigma}_{yy}(t_k)$

Jak již bylo zmíněno, v této kapitole se bude řešit úloha stanovení napětí $\widetilde{\sigma}_{yy}$ v kolokačních bodech t_k bimateriálového prostředí při absenci trhliny pomocí metody konečných prvků, obr. 7.2b). Pro zisk jednotlivých hodnot bylo vytvořeno makro *sig_yy.mac*, které respektuje následující uvedené modely.

Model geometrie

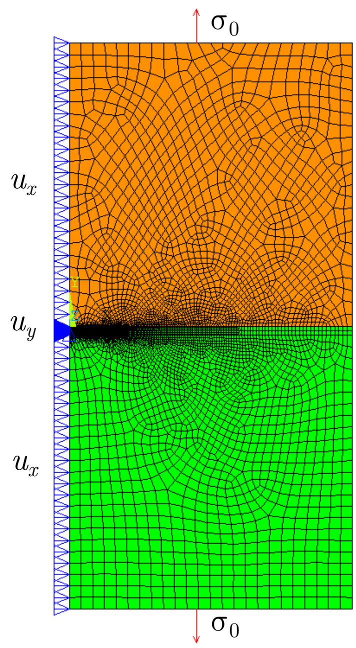
Buecknerův princip říká, že neporušené bimateriálové prostředí má být zatíženo v nekonečnu. Nekonečné těleso však nelze modelovat, a tudíž rozměry modelu tělesa musí být voleny jako konečné. Důvodem požadovaného zatížení v nekonečnu je, že napětí vyvolaná jednotlivými dislokacemi $\overline{\sigma}_{xx}^{dis}, \overline{\sigma}_{yy}^{dis}, \overline{\sigma}_{xy}^{dis}$ jsou nulová pro $x, y \to \pm\infty$. Tyto předpoklady jsou však dostatečně splněny, jestliže se trhlina nachází v dostatečné vzdálenosti od okraje tělesa [35]. Z tohoto důvodu se volí šířka a výška modelu tělesa 100-krát větší, než je délka trhliny ($2a = 12$ mm). Protože se jedná o symetrickou úlohu podle osy y, modeluje se pouze polovina uvažovaného tělesa. Schematicky je model geometrie tělesa znázorněn na obr. 7.3, přičemž jednotlivé rozměry nabývají následujících hodnot: $d = 600$ mm, $v = 600$ mm.

Model materiálu

Horní i dolní část tělesa se modeluje homogenním izotropním lineárně elastickým modelem materiálu, který je v obou případech popsán materiálovými charakteristikami uvedenými v tab. 7.2.

Tabulka 7.2: Materiálové charakteristiky modelu tělesa.

	Modul pružnosti	**Poissonovo číslo**
Horní část (M1)	50 GPa	0,3
Dolní část (M2)	200 GPa	0,3



Obrázek 7.5: Konečnoprvková síť včetně okrajových podmínek a zatížení.

Model diskretizace

Pro tvorbu konečnoprvkové sítě v programu ANSYS se využije rovinný lineární čtyřuzlový prvek PLANE182 se dvěma stupni volnosti v každém uzlu, případně jeho triangulární varianta (obr. 7.4), s nastavením pro rovinnou deformaci. Velikost elementů roste se vzdáleností od kolokačních bodů. Konečnoprvková síť je znázorněna na obr. 7.5.

Model okrajových podmínek a zatížení

Z důvodu zmíněné symetrie je všem uzlům s nulovou x-ovou souřadnicí (na levé straně) zamezen posuv ve směru osy x ($u_x = 0$). Uzlu v počátku souřadnicového systému je navíc ještě předepsán nulový posuv ve směru osy y ($u_y = 0$) z důvodu statické určitosti. Těleso je zatíženo silou, která na horním a dolním okraji vyvolá napětí $\sigma_0 = 100\,\mathrm{MPa}$. V ANSYSU lze toto zatížení modelovat pomocí záporného tlaku (příkazem *pressure*), který se automaticky přepočítá na síly v jednotlivých uzlech. Silové zatížení a okrajové podmínky jsou zobrazeny na obr. 7.5.

7.1.4 Součinitel intenzity napětí

Jak již bylo zmíněno v kapitole 6.3, součinitel intenzity napětí se vypočítá podle vzorce (6.18). Protože se v této diplomové práci jedná o symetrickou úlohu, součinitel intenzity K_I bude na obou čelech trhliny totožný. Pro jeho stanovení tudíž stačí vyjádřit hodnotu ohraničené funkce ϕ_y v libovolném čele trhliny

$$K_I(+1) = K_I(-1) = \sqrt{\pi a}\frac{2G}{\kappa+1}\phi_y(+1) = -\sqrt{\pi a}\frac{2G}{\kappa+1}\phi_y(-1). \tag{7.21}$$

Nejdříve však musí být vyřešena singulární integrální rovnice (7.14) a podmínka konzistence (6.16), které byly převedeny na soustavu 8 rovnic o 8 neznámých

$$
\begin{aligned}
-\frac{\kappa_2+1}{2G_2}\tilde{\sigma}_{yy}(t_k) &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\phi_y(s_i)\left[\frac{1}{t_k-s_i}+a\left[\frac{(\alpha+\beta)(at_k-as_i)}{2(1-\beta)\left(4h^2+(at_k-as_i)^2\right)}+\right.\right.\\
&\quad+\frac{48h^4(\alpha-\beta)(at_k-as_i)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at_k-as_i)^2\right)^3}-\frac{4h^2(\alpha-\beta)(at_k-as_i)^3}{(1+\beta)\left(4h^2+(at_k-as_i)^2\right)^3}+\\
&\quad+\frac{4h^2(\alpha-\beta)(at_k-as_i)}{(1+\beta)\left(4h^2+(at_k-as_i)^2\right)^2}+\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\left(\frac{4h^2(at_k-as_i)}{\left(4h^2+(at_k-as_i)^2\right)^2}+\right.\\
&\quad\left.\left.\left.+\frac{at_k-as_i}{2\left(4h^2+(at_k-as_i)^2\right)}\right)\right]\right], \qquad k=1\cdots 7,\\
\frac{\pi}{8}\sum_{i=1}^{8}\phi_y(s_i) &= 0, \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

kde $\tilde{\sigma}_{yy}(t_k)$ jsou napětí v kolokačních bodech, která byla stanovena pomocí metody konečných prvků v komerčním programu ANSYS 18.1 v předchozí kapitole.

Řešení výše uvedené soustavy rovnic se provede v programovacím jazyku Python (soubor *vypocet_hlavni.py*). Všechny parametry vstupující do tohoto výpočtu jsou uvedeny v tab. 7.1. Obdržené hodnoty neznámé ohraničené funkce ϕ_y v integračních bodech s_i jsou vypsány v tab. 7.3.

Tabulka 7.3: Hodnoty neznámé ohraničené funkce v integračních bodech.

Integrační bod s_i [−]	**Neznámá ohraničená funkce** $\phi_y(s_i)$ [−]
0,981	$1{,}919 \cdot 10^{-3}$
0,831	$1{,}650 \cdot 10^{-3}$
0,556	$1{,}126 \cdot 10^{-3}$
0,195	$0{,}402 \cdot 10^{-3}$
-0,195	$-0{,}402 \cdot 10^{-3}$
-0,556	$-1{,}126 \cdot 10^{-3}$
-0,831	$-1{,}650 \cdot 10^{-3}$
-0,981	$-1{,}919 \cdot 10^{-3}$

Nyní je potřeba vypočítat hodnotu ohraničené funkce ϕ_y v místě čela trhliny, tj. $\phi_y(+1)$ nebo $\phi_y(-1)$. K tomu slouží Krenkův interpolační vzorec [39], který pro jednotlivá čela trhliny nabývá

$$\phi_y(+1) = M_E(+1)\sum_{i=1}^{N}\Phi_E(+1)\phi_y(s_i), \qquad (7.23a)$$

$$\phi_y(-1) = M_E(-1)\sum_{i=1}^{N}\Phi_E(-1)\phi_y(s_{N+i-1}), \qquad (7.23b)$$

kde N je zvolený stupeň aproximace a konstanty $M_E(\pm 1)$ s funkcemi $\Phi_E(\pm 1)$ se v případě trhliny uvažované v této diplomové práci definují vztahy

$$M_E(\pm 1) = \frac{1}{N}, \tag{7.24}$$

$$\Phi_E(\pm 1) = \frac{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi\,(2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi\right]}. \tag{7.25}$$

Ohraničená funkce nabývá na pravém čele trhliny hodnotu

$$\phi_y(+1) = 1,953 \cdot 10^{-3}. \tag{7.26}$$

Dosazením této hodnoty do vzorce (7.21) se obdrží součinitel intenzity napětí K_I na obou koncích trhliny

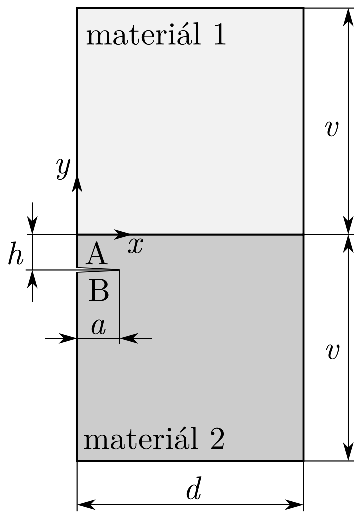
$$K_I(+1) = K_I(-1) = 14,735 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.27}$$

7.2 Stanovení K_I pomocí MKP

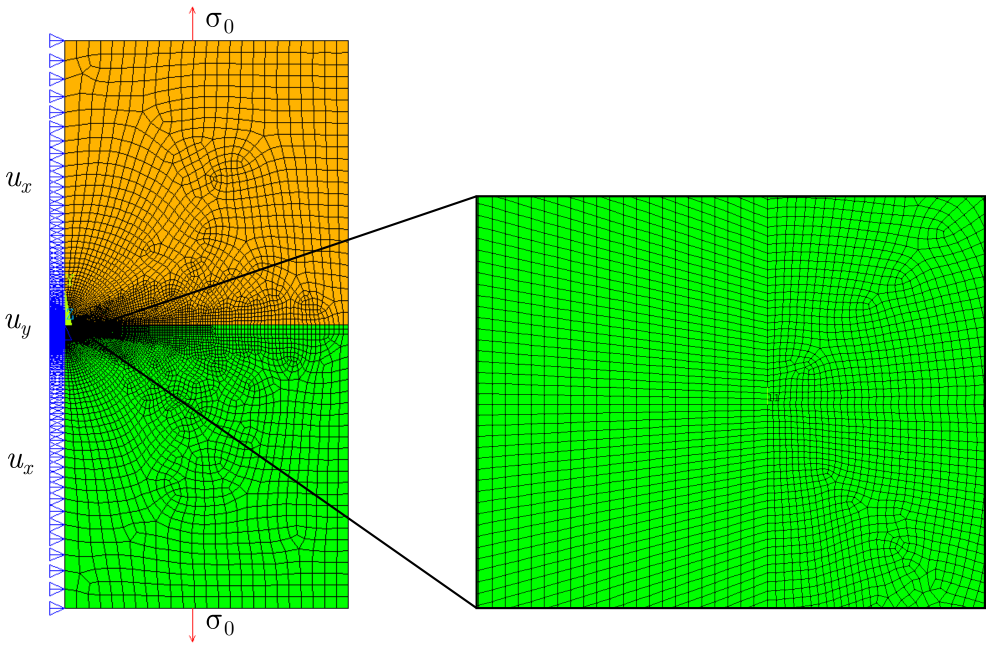
Pro porovnání a ověření součinitele intenzity napětí K_I získaného pomocí teorie komplexních potenciálů a metody spojitě rozložených dislokací lze využít metodu konečných prvků. V programu ANSYS 18.1 bylo za tímto účelem vytvořeno makro *k_faktor.mac*, které vzniklo na základě následujících modelů.

7.2.1 Model geometrie a model materiálu

Stejně jako při stanovení napětí $\tilde{\sigma}_{yy}(t_k)$ v kapitole 7.1.3 se i při výpočtu součinitele intenzity napětí K_I jedná o rovinnou úlohu s konečnými rozměry tělesa, které je symetrické podle osy y. Model geometrie uvažovaného tělesa je zobrazen na obr. 7.6. Na rozdíl od



Obrázek 7.6: Model geometrie tělesa s trhlinou.



Obrázek 7.7: Model diskretizace včetně okrajových podmínek a zatížení.

obr. 7.3 obsahuje i trhlinu, která je modelována pomocí křivek A a B. Tyto křivky jsou v nezatíženém stavu totožné, avšak při zatěžování se od sebe vzájemně vzdalují a reprezentují tak volný povrch rozevírané trhliny.

Těleso s trhlinou se opět modeluje pomocí dvou homogenních izotropních lineárně elastických modelů materiálů s materiálovými charakteristikami uvedenými v tab. 7.2.

7.2.2 Model diskretizace

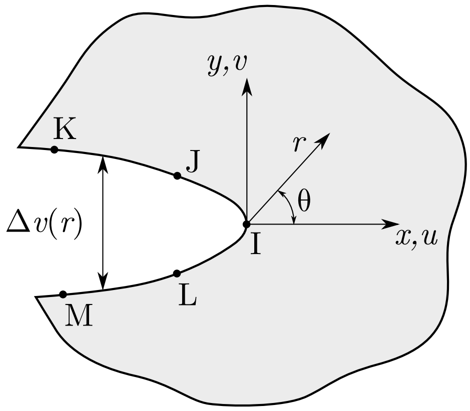
Konečnoprvkovou síť tvoří rovinný lineární čtyřuzlový prvek PLANE182 (případně jeho triangulární varianta), který má v každém uzlu dva stupně volnosti (obr. 7.4). Výpočet se provádí pro rovinnou deformaci. V místě čela trhliny je síť nejjemnější, což zobrazuje i obr. 7.7.

7.2.3 Model okrajových podmínek a zatížení

Díky využití symetrie jsou na levé straně tělesa předepsané nulové posuvy ve směru osy x ($u_x = 0$). V místě, kde se nachází trhlina (křivky A, B), nejsou předepsány žádné okrajové podmínky, avšak z důvodu statické určitosti je zamezen posuv ve směru osy y ($u_y = 0$) uzlu nacházejícímu se v počátku souřadnicového systému. Napětí $\sigma_0 = 100\,\mathrm{MPa}$ působící na horním i dolním okraji se modeluje stejně jako v kapitole 7.1.3. Model diskretizace včetně okrajových podmínek a zatížení je zobrazen na obr. 7.7.

7.2.4 Součinitel intenzity napětí

Součinitel intenzity napětí K_I lze v komerčním softwaru ANSYS 18.1 obdržet pomocí příkazu *KCALC* nebo *CINT*.



Obrázek 7.8: Úplný model trhliny – aproximace rozevření. Předloha z [40].

Příkazem *KCALC*

Tento příkaz vychází z posuvů uzlů, které se nachází v blízkosti trhliny. Pro modely nesymetrické podél délky trhliny (příklad uvažovaný v předkládané diplomové práci) platí vztah [40]

$$K_I = \sqrt{2\pi}\frac{G}{1+\kappa}\frac{|\Delta v(r)|}{\sqrt{r}} \tag{7.28}$$

kde $\Delta v(r)$ značí rozevření trhliny v polárním souřadnicovém systému (obr. 7.8) ve vzdálenosti r od kořene trhliny. Funkce rozevření trhliny se aproximuje na základě posuvů pěti uzlů – jeden v kořeni trhliny (bod I) a dva na každé straně trhliny (body J, K, L, M na horním, resp. dolním, líci trhliny).

V případě, že se zvolené uzly nacházejí ve vzálenosti $a/2$ a $a/6$ od kořene modelované trhliny, součinitel intenzity napětí K_I stanovený na základě příkazu *KCALC* nabývá hodnotu

$$K_I = 14,755 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.29}$$

Příkazem *CINT*

Další možností, jak lze v programu ANSYS vypočítat součinitel intenzity napětí K_I, je přepočet hodnoty J-integrálu. K tomuto způsobu slouží příkaz *CINT*, pro jehož aplikaci je nezbytné definovat uzel v kořeni trhliny, normálu trhliny a počet integračních cest. Výpočet součinitele intenzity napětí K_I pomocí J-integrálu je obecně přesnější, protože nijak neaproximuje rozevření trhliny, ale vychází z měrné energie napjatosti. J-integrál je nezávislý na integrační cestě a má následující tvar [41]

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}\Gamma, \tag{7.30}$$

kde $\vec{n}$ značí jednotkový vektor normály ke křivce Γ, t_i je vektor povrchových sil, u_i je vektor posuvů na křivce Γ a W je měrná energie napjatosti.

Hodnota součinitele intenzity napětí K_I obdržená pomocí příkazu *CINT* je pro uvažovanou úlohu rovna

$$K_I = 14,728 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.31}$$

7.3 Porovnání výsledků

Hodnoty součinitele intenzity napětí K_I trhliny v blízkosti bimateriálového rozhraní, viz obr. 7.1, jsou pro všechny výše uvedené způsoby výpočtu uvedeny v tab. 7.4.

Hodnota obdržená na základě teorie komplexních potenciálů a metody spojitě rozložených dislokací se jen nepatrně liší od hodnoty, která byla získána pomocí J-integrálu. Konkrétně se jedná o rozdíl $0,007\ \mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$, který tvoří pouze 0,05 % z daných hodnot. Pro případné snížení vzájemného rozdílu hodnot lze zvýšit stupeň aproximace N, avšak v tomto případě je to zbytečné. Odchylka mezi uvažovanými metodami výpočtu součinitele intenzity napětí K_I je beze sporu zanedbatelná.

Tabulka 7.4: Materiálové charakteristiky modelu tělesa.

Metoda výpočtu	Součinitel intenzity napětí
Komplexní potenciály	$14,735\ \mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$
MKP (*KCALC*)	$14,755\ \mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$
MKP (*CINT*)	$14,728\ \mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$

Velmi podobný výsledek se obdržel i z výpočtu založeném na aproximaci rozevření trhliny – příkazem *KCALC* v programu ANSYS 18.1. Hodnota součinitele intenzizy napětí získaná tímto postupem se liší v řádech setin $\mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$. Tento postup však velmi závisí na hustotě sítě a na uzlech, které byly pro aproximaci vybrány. V případě jemnější sítě ovšem dochází ke zvyšování výpočetního času. V případě využití metody konečných prvků se tudíž doporučuje postup stanovení součinitele intenzity napětí pomocí J-integrálu, který je nezávislý na integrační cestě.

Pokud se však trhlina nachází ve velmi těsné blízkosti bimateriálového rozhraní, metoda konečných prvků má se stanovením součinitele intenzity napětí větší problémy a nejpřesnější výsledky se tak obdrží metodou spojitě rozložených dislokací, která využívá komplexní potenciály [27].

Protože se v této diplomové práci řešila trhlina v ne bezprostředním kontaktu s bimateriálovým rozhraním, metoda konečných prvků zde sloužila pro ověření hodnoty součinitele intenzity napětí K_I získaného na základě nastudované teorie komplexních potenciálů. Lze tedy jednoznačně říci, že aplikovaný postup vycházející z komplexních potenciálů je správný a hodnota součinitele intenzity napětí pro trhlinu v blízkosti bimateriálového rozhraní dle obr. 7.1 je $14,73\ \mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$.

8 Závěr

Cílem předkládané diplomové práce bylo nastudování Muschelišviliho formalismu komplexních potenciálů pro popis rovinné izotropní pružnosti, analytický popis napětí v okolí hranové dislokace nacházející se v blízkosti bimateriálového rozhraní a následně i stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bimateriálového rozhraní pomocí metody spojitě rozložených dislokací.

Pro tento účel byla v rámci rešeršní části nastudována a zpracována problematika lineárně elastické lomové mechaniky. Konkrétně zde byly uvedeny základní pojmy jak z energetické koncepce hodnocení trhliny, tak i z koncepce napěťové, která chování trhliny hodnotí na základě součinitele intenzity napětí K. V rešeršní části bylo provedeno i rozdělení kompozitních materiálů, pro něž je typické bimateriálové rozhraní uvažované v této diplomové práci. Součástí kapitoly 4 jsou taktéž základní pojmy z mikromechaniky a makromechaniky kompozitů.

Dále byla uvedena teorie Muschelišviliho komplexních potenciálů $\varphi(z), \chi(z)$ vycházející ze základních pojmů funkcí komplexní proměnné uvedených v kapitole 5. Její součástí jsou i vztahy vyjadřující pole napětí a posuvů pro dislokaci v blízkosti bimateriálového rozhraní pomocí komplexních potenciálů.

Aby bylo dosaženo hlavního cíle, tj. prokázání porozumění teorii komplexních potenciálů, a to na základě stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bimateriálového rozhraní, muselo dojít i k nastudování a zpracování metody spojitě rozložených dislokací a řešení singulární integrální rovnice.

Úloha stanovení součinitele intenzity napětí pro mód I se provedla pro jednu zvolenou konfiguraci bimateriálového prostředí obsahujícího trhlinu, která se nachází v konstantní vzdálenosti od bimateriálového rozhraní ($h = 10\,\mathrm{mm}$). Stupeň aproximace při řešení singulární integrální rovnice byl v předkládané diplomové práci zvolen $N = 8$. Pro ověření správnosti hodnoty součinitele intenzity napětí i předkládaného postupu se navíc použila metoda konečných prvků (MKP) v komerčním programu ANSYS 18.1.

Součinitel intenzity napětí K_I pro zvolenou úlohu byl při aplikaci komplexních potenciálů a metody spojitě rozložených dislokací roven hodnotě $14,735\ \mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$. Tuto hodnotu následně potvrdil i výpočet metodou konečných prvků a zaručil tím pádem správnost aplikovaného postupu vycházejícího z Muschelišviliho teorie.

Na první pohled působí metoda spojitě rozložených dislokací s teorií komplexních potenciálů těžkopádně oproti MKP, kterou lze obdržet prakticky totožný výsledek, aniž by byly na člověka kladeny nároky na znalost analytické matematiky a funkcí komplexní proměnné. Avšak jednou z výhod metody spojitě rozložených dislokací je její snadná opakovatelnost oproti MKP, kde při každé změně délky trhliny nebo její vzdálenosti od bimateriálového rozhraní se musí měnit konečnoprvková síť. Tou největší výhodou je však její aplikace v těsné blízkosti rozhraní daných materiálů. V případě, kdy se trhlina dostane na bimateriálové rozhraní totiž dochází ke změně exponentu singularity z $\lambda = 1/2$ na libovolné reálné číslo z intervalu $\lambda \in (0; 1)$. V takovém případě se mění i úloha, a to na stanovení zobecněného faktoru intenzity napětí H_i. Ta však již nelze řešit pouze pomocí MKP, ale musí se využít jiných přístupů – například metody spojitě rozložených dislokací, pro jejíž popis lze použít teorii komplexních potenciálů. Existuje několik prací, které se zabývají popisem zobecněného faktoru intenzity napětí – například habilitační práce pana Náhlíka [42].

Závěrem lze říci, že stanovených cílů bylo úspěšně dosaženo, přičemž zajímavým rozšířením by mohlo být studium chování trhliny při různém vnějším zatížení, které by způsobilo šíření trhliny směrem k bimateriálovému rozhraní, na kterém by se následně stanovil zobecněný faktor intenzity napětí.

Seznam použitých zdrojů

[1] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-7204-554-9.

[2] DLOUHÝ, Ivo. *Mezní stavy materiálů*. (přednáška) Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 3. 11. 2015.

[3] ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. 3. vyd. Boca Raton: Taylor, 2005. ISBN 08-493-1656-1.

[4] VLK, Miloš. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1991. ISBN 80-214-0386-1.

[5] ONDRÁČEK, Emanuel, Přemysl JANÍČEK a Jan VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002. ISBN 80-214-2214-9.

[6] GRIFFITH, A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1921, **221**(582-593), 163-198.

[7] VLK, Miloš a Zdeněk FLORIAN. *Mezní stavy a spolehlivost* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2007 [cit. 2018-02-21]. Dostupné z: http://www.zam.fme.vutbr.cz/ vlk/meznistavy.pdf

[8] IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, **24**, 361-364.

[9] BROBERG, K. B. *Cracks and fracture*. San Diego: Academic Press, 1999. ISBN 01-213-4130-5.

[10] WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Crack. *International Journal of Applied Mechanics*. 1939, 49-53.

[11] WILLIAMS, M. L. The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*. American Society of Mechanical Engineers, 1961, **28**(1), 78-82.

[12] HRSTKA, Miroslav. *Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu pomocí zobecněného faktoru intenzity napětí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. Diplomová práce. Vedoucí práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

[13] SVOBODA, Miroslav. *Problém trhliny v blízkosti bimateriálové rozhraní*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. Diplomová práce. Vedoucí práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

[14] FLORIAN, Zdeněk. *Mezní stavy a spolehlivost.* (přednáška) Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 9. 10. 2017.

[15] JURAČKA, Jaroslav. *Kompozitní konstrukce v letectví.* Brno: Letecký ústav, Fakulta strojního inženýrství, VUT, 2017.

[16] CHAWLA, Krishan Kumar. *Composite Materials: Science and Engineering.* 3. vyd. New York: Springer, 2012. ISBN 978-0-387-74364-6.

[17] BARBERO, Ever J. *Inroduction to Composite Materials Design.* 2. vyd. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2011. ISBN 978-1-4398-9413-2.

[18] KAW, Autar K. *Mechanics of composite materials.* 2. vyd. New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. ISBN 0849313430.

[19] ŠTOLL, Ivan, Jiří TOLAR a Igor JEX. *Klasická teoretická fyzika.* Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2017. ISBN 978-80-246-3545-3.

[20] JANÍČEK, P., E. ONDRÁČEK a J. VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I.* 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1992. ISBN 802140468X.

[21] BARBERO, Ever J. *Finite element analysis of composite materials using ANSYS.* 2. vyd. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2014. ISBN 14-665-1689-5.

[22] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua.* 3. vyd. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1344-X.

[23] DRUCKMÜLLER, Miloslav a Alexander ŽENÍŠEK. *Funkce komplexní proměnné.* Brno: PC-DIR Real, 2000. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1788-9.

[24] MUSCHELIŠVILI, N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending.* 4. vyd. Dordrecht: Springer Netherlands, 1977. ISBN 978-94-017-3034-1.

[25] BABUŠKA, Ivo, Karel REKTORYS a František VYČICHLO. *Matematická theorie rovinné pružnosti.* 1. vyd. Praha: ČSAV, 1955.

[26] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Funkce komplexní proměnné.* 2. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2017. ISBN 978-80-01-06317-0.

[27] PADĚLEK, Petr. *Aplikace matematické teorie dislokací na problém trhliny v blízkosti bi-materiálvého rozhraní.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. Diplomová práce. Vedoucí práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

[28] ENGLAND, Arthur Henry. *Complex variable methods in elasticity.* New York: Dover Publications, 2003. ISBN 0486432300.

[29] ZHIGANG, Suo. Singularities interacting with interfaces and cracks. *International Journal of Solids and Structures.* Pergamon Press, 1989, **25**(10), 1133-1142. DOI: 10.1016/0020-7683(89)90072-3.

[30] JAN, Vít. *Úvod do materiálových věd a inženýrství.* (přednáška) Brno: Ústav materiálových věd a inženýrství, FSI VUT, 18. 2. 2013.

[31] DUNDURS, J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities. *Mathematical theory of dislocations.* New York: American Society of Mechanical Engineering, 1969, 70-115.

[32] BUECKNER, H. F. The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation. *Journal of Applied Mechanics.* 1958, **80**, 1225-1230.

[33] ESHELBY, J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society.* 1957, **241**(1226), 376-396. ISSN 1364-5021.

[34] HILLS, D.A, D.N DAI, P.A KELLY a A.M KORSUNSKY. *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislokation Technique.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. ISBN 0-7923-3848-0.

[35] PROFANT, Tomáš. *Interakce mikrotrhlin s částicemi druhé fáze.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2003. Disertační práce. Vedoucí práce prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.

[36] MICHLIN, Solomon Grigorjevič. *Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky.* 2. vyd. Přeložil Otto Vejvoda. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.

[37] ERDOGAN, F. a G. D. GUPTA. On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1972, **30**, 525-534.

[38] ERDOGAN, F., G. D. GUPTA a T. S. COOK. Numerical solution of singular integral equations. SIH, George C., ed. *Methods of analysis and solutions of crack problems.* Leiden: Noordhoff, 1973, 368-425.

[39] KRENK, Steen. On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1975, **32**(4), 479-484.

[40] ANSYS® Academic Teaching Advanced, Release 18.1, Help System, Mechanical APDL, ANSYS, Inc.

[41] SCHREURS, Piet J.G. *Fracture mechanics: Lecture notes - course 4A780.* Eindhoven: Eindhoven University of Technology, Department of Mechanical Engineering, 2012. Dostupné také z: http://www.mate.tue.nl/ piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf

[42] NÁHLÍK, Luboš. *Zobecnění lineární lomové mechaniky na případ trhliny šířící se přes rozhraní dvou materiálů.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2008. Habilitační práce.

Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Jednotka	Význam
a, B	[m]	rozměry trhliny (obr. 3.1)
a_c	[m]	kritická délka trhliny
$\mathbf{b}, b_x, b_y$	[m]	Burgersův vektor
B_y	[–]	hustota dislokací
C_{ij}	[Pa]	prvky matice tuhosti
C_{ijkl}	[Pa]	tenzor elastických koeficientů
E, E_1, E_2	[Pa]	Youngův modul pružnosti
E_c	[J]	celkové množství energie v soustavě
E_f, E_m	[Pa]	Youngův modul pružnosti vlákna a matrice
E_L	[Pa]	modul pružnosti v tahu v podélném směru
E_T	[Pa]	modul pružnosti v tahu v příčném směru
G	[J/m^2]	hnací síla trhliny
G_c	[J/m^2]	houževnatost materiálu
G_1, G_2, G_{LT}	[Pa]	modul pružnosti ve smyku
h	[m]	vzdálenost trhliny od bimateriálového rozhraní
K, K_i, K_I	[MPa·m$^{\frac{1}{2}}$]	součinitel intenzity napětí (obecně, pro i-tý mód, pro mód I)
K_c, K_{Ic}	[MPa·m$^{\frac{1}{2}}$]	lomová houževnatost
$K(t, s)$	[m^{-1}]	kvadraticky integrovatelná funkce
N	[–]	stupeň aproximace
r	[m]	vzdálenost od kořene trhliny
R	[J/m^2]	odpor tělesa proti růstu trhliny
S	[m^2]	plocha průmětu trhliny
s_i	[-]	integrační body
S_{ij}	[Pa^{-1}]	prvky matice poddajnosti
S_{ijkl}	[Pa^{-1}]	tenzor elastických modulů
$\mathbf{T}$	[–]	transformační matice
t_k	[–]	kolokační body
U	[N]	Airyho funkce napětí
$u(+), u(-)$	[m]	posuv pravé a levé strany řezu
u_x, u_y	[m]	složky posuvů
V_c	[m^3]	objem kompozitu
v_f	[–]	objemový podíl vláken
$v_{f,krit}$	[–]	kritický objemový podíl vláken
$v_{f,min}$	[–]	minimální objemový podíl vláken
V_f	[m^3]	objem vláken
v_m	[–]	objemový podíl matrice
V_m	[m^3]	objem matrice

W_s	[J]	disipační energie
x, y, z	[m]	kartézské souřadnice
Y	[–]	korekční rozměrová funkce
$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$	[–]	Dundursovy parametry
γ	[J/m^2]	měrná povrchová energie materiálu
γ_{ef}	[J/m^2]	efektivní povrchová energie
γ_{pl}	[J/m^2]	povrchová energie spotřebovaná v plastické zóně
$\Delta(x), \Delta(r)$	[m]	rozevření trhliny
$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$	[–]	složky tenzoru přetvoření
θ	[rad]	úhel natočení od kořene trhliny (polární souřadnice)
$\kappa, \kappa_1, \kappa_2$	[–]	konstanta určující stav rovinné napjatosti nebo rovinné deformace
$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_f, \mu_m$	[–]	Poissonovo číslo
Π	[J]	celková potenciální energie tělesa s trhlinou
Π_0	[J]	celková potenciální energie tělesa bez trhliny
σ	[Pa]	napětí
σ_0	[Pa]	napětí na horním a dolním okraji (obr. 7.5, 7.7)
σ_f	[Pa]	lomové napětí
$\sigma_{ij}, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$	[Pa]	složky tenzoru napětí (obecně, konkrétně)
$\overline{\sigma}_{ij}$	[Pa]	korekční napětí
$\widetilde{\sigma}_{ij}$	[Pa]	napětí v místech trhliny při absenci trhliny
$\sigma_{P,f}, \sigma_{P,m}$	[Pa]	mez pevnosti vlákna a matrice
$\sigma_{PLd}, \sigma_{PTd}$	[Pa]	tlaková pevnost v podélném a příčném směru
$\sigma_{PLt}, \sigma_{PTt}$	[Pa]	tahová pevnost v podélném a příčném směru
$\overline{\sigma}_{xx}^{dis}, \overline{\sigma}_{yy}^{dis}, \overline{\sigma}_{xy}^{dis}$	[Pa]	napětí generované dislokací
σ_{yy}^{∞}	[Pa]	napětí zatěžující nekonečné prostředí (obr. 6.1)
Φ_0	[–]	funkce zahrnující tvar trhliny
$\varphi(z)$	[Pa·m]	Muschelišviliho komplexní potenciál
$\Phi(z), \Psi(z), \Omega(z)$	[Pa]	komplexní potenciály
$\Phi_0(z), \Omega_0(z)$	[Pa]	singulární členy komplexních potenciálů
$\Phi_i(z), \Omega_i(z)$	[Pa]	podobnostní členy komplexních potenciálů
$\phi_y(s)$	[–]	neznámá ohraničená funkce
$\chi(z)$	[Pa·m^2]	Muschelišviliho komplexní potenciál
$\omega(s)$	[–]	fundamentální řešení

Zkratka	**Význam**
EPLM	elasto-plastická lomová mechanika
I, II, III	módy zatěžování
L, T, T'	osy materiálového souřadnicového systému
LELM	lineárně elastická lomová mechanika
M1	materiál č. 1 (horní část tělesa)
M2	materiál č. 2 (dolní část tělesa)
MKP	metoda konečných prvků

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam příloh

Příloha A

Tvary komplexních potenciálů – odvození

Jak je uvedeno v kapitole 5.2.2, uvažuje se nekonečná rovina s dislokací, viz obr. 5.3, pro kterou nabývají komplexní potenciály $\Phi(z), \Omega(z)$ následujících tvarů

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) + \Phi_0(z), & z \in M_1, \\ \Phi_2(z) + \Phi_0(z), & z \in M_2, \end{cases}$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Omega_1(z) + \Omega_0(z), & z \in M_1, \\ \Omega_2(z) + \Omega_0(z), & z \in M_2. \end{cases}$$

Singulární členy $\Phi_0(z), \Omega_0(z)$ mají pro dislokaci nacházející se v poloze $z = s = s_x + \mathrm{i}s_y$ dle obr. 5.3 tvary (5.19–5.20). Podobnostní členy je nezbytné vyjádřit pomocí singulárních na základě rovnosti napětí a posuvů na bimateriálovém rozhraní. Pro napětí na rozhraní platí

$$[\sigma_{yy} + \mathrm{i}\sigma_{xy}]_1 = [\sigma_{yy} + \mathrm{i}\sigma_{xy}]_2 \,,$$

kde index 1, resp. 2, značí, že složky napětí jsou vyjádřeny pomocí komplexních potenciálů definovaných v horní, resp. dolní, polorovině podle vztahu (5.15b) následovně

$$\left[\overline{\Phi(x)} + \Omega(x)\right]_1 = \left[\overline{\Phi(x)} + \Omega(x)\right]_2 ,$$
$$\overline{\Phi_1(x) + \Phi_0(x)} + \Omega_1(x) + \Omega_0(x) = \overline{\Phi_2(x) + \Phi_0(x)} + \Omega_2(x) + \Omega_0(x),$$
$$\overline{\Phi_1}(x) + \Omega_1(x) = \overline{\Phi_2}(x) + \Omega_2(x).$$

Na základě této rovnosti platí

$$\Omega_1(z) = \overline{\Phi_2}(z), \qquad z \in M_1,$$
$$\Omega_2(z) = \overline{\Phi_1}(z), \qquad z \in M_2,$$

kde komplexně sdružené členy se získají na základě notace

$$\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}.$$

Pro posuvy na rozhraní platí

$$[u_x + \mathrm{i}u_y]_1 = [u_x + \mathrm{i}u_y]_2 \,,$$

které lze vyjádřit ze vztahu (5.10c) pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů $\varphi(z), \chi(z)$. V této práce se ovšem vychází z literatury [29], kde se využívá značení (5.14). Z tohoto důvodu se pro rovnost posuvů na rozhraní využije vztah (5.15c)

$$\frac{1}{G_1}\left[\kappa_1\overline{\Phi(x)} - \Omega(x)\right]_1 = \frac{1}{G_2}\left[\kappa_2\overline{\Phi(x)} - \Omega(x)\right]_2 ,$$
$$\kappa_1\left(\overline{\Phi_1(x)} + \overline{\Phi_0(x)}\right) - \Omega_1(x) - \Omega_0(x) = \frac{G_1}{G_2}\left[\kappa_2\left(\overline{\Phi_2(x)} + \overline{\Phi_0(x)}\right) - \Omega_2(x) - \Omega_0(x)\right],$$
$$\kappa_1\left(\Omega_2(x) + \overline{\Phi_0(x)}\right) - \Omega_1(x) - \Omega_0(x) = \frac{G_1}{G_2}\left[\kappa_2\left(\Omega_1(x) + \overline{\Phi_0(x)}\right) - \Omega_2(x) - \Omega_0(x)\right],$$

$$\kappa_1\Omega_2(x) + \kappa_1\overline{\Phi_0(x)} - \Omega_1(x) - \Omega_0(x) = \frac{\kappa_2 G_1}{G_2}\Omega_1(x) + \frac{\kappa_2 G_1}{G_2}\overline{\Phi_0(x)} - \frac{G_1}{G_2}\Omega_2(x) - \frac{G_1}{G_2}\Omega_0(x),$$
$$\Omega_2(x)\left(\kappa_1 + \frac{G_1}{G_2}\right) + \Omega_0(x)\left(\frac{G_1}{G_2} - 1\right) = \Omega_1(x)\left(1 + \frac{\kappa_2 G_1}{G_2}\right) + \overline{\Phi_0(x)}\left(\frac{\kappa_2 G_1}{G_2} - \kappa_1\right).$$

Tento vztah lze zjednodušit pomocí Dundursových vztahů (5.24–5.25)

$$\Omega_2(x)\,(1-\beta) + \Omega_0(x)\,(\alpha-\beta) = \Omega_1(x)\,(1+\beta) + \overline{\Phi_0(x)}\,(\alpha+\beta)\,.$$

Na základě této rovnosti platí

$$\Omega_1(z) = \Pi\Omega_0(z), \qquad z \in M_1,$$
$$\Omega_2(z) = \Lambda\overline{\Phi_0}(z), \qquad z \in M_2,$$

kde

$$\Lambda = \frac{\alpha+\beta}{1-\beta}, \qquad \Pi = \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}.$$

Nyní lze podobnostní členy vyjádřit pomocí singulárních, což vede na vztahy

$$\Phi(z) = \begin{cases} (1+\Lambda)\,\Phi_0(z), & z \in M_1, \\ \Phi_0(z) + \Pi\overline{\Omega_0}(z), & z \in M_2, \end{cases}$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} (1+\Pi)\,\Omega_0(z), & z \in M_1, \\ \Omega_0(z) + \Lambda\overline{\Phi_0}(z), & z \in M_2. \end{cases}$$

Příloha B

Singulární členy komplexních potenciálů

V této příloze budou postupně odvozeny tvary komplexně sdružených singulárních členů, tj. $\overline{\Phi_0}(z), \overline{\Omega_0}(z)$, a derivace komplexních potenciálů $\Phi_0(z), \overline{\Omega_0}(z)$, které se používají při vyjádření napětí od jedné dislokace σ_{yy}^{dis}, viz kapitola 7.1.1.

Jak již bylo uvedeno v kapitole 5.2.2, singulární členy $\Phi_0(z), \Omega_0(z)$ komplexních potenciálů $\Phi(z), \Omega(z)$ mají pro dislokaci nacházející se v poloze $z = s = s_x + \mathrm{i}s_y$ tvar

$$\Phi_0(z) = B\left[\frac{1}{z-s}\right], \qquad \Omega_0(z) = B\left[\frac{\bar{s}-s}{(z-s)^2}\right] + \overline{B}\left[\frac{1}{z-s}\right],$$

kde

$$B = \frac{G_2}{\pi \mathrm{i}\,(1+\kappa_2)}\,(b_x + \mathrm{i}b_y)\,.$$

Pro komplexně sdružené členy platí následující notace

$$\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}.$$

V souladu s touto notací lze komplexně sdružené singulární členy psát v následujících tvarech

$$\overline{\Phi_0}(z) = \overline{\Phi_0(\bar{z})},$$

$$\overline{\Phi_0}(z) = \overline{B\left[\frac{1}{\bar{z}-s}\right]} = \overline{B}\left[\frac{1}{z-\bar{s}}\right],$$

$$\overline{\Omega_0}(z) = \overline{\Omega_0(\bar{z})}$$

$$\overline{\Omega_0}(z) = \overline{B}\left[\frac{s-\bar{s}}{(z-\bar{s})^2}\right] + B\left[\frac{1}{z-\bar{s}}\right].$$

Derivaci komplexního potenciálu $\Phi_0(z)$ lze vyjádřit vztahem

$$\Phi_0'(z) = -B\frac{1}{(z-s)^2}$$

a derivace komplexního potenciálu $\overline{\Omega_0}(z)$ je rovna

$$\overline{\Omega_0}'(z) = -2\overline{B}\frac{s-\bar{s}}{(z-\bar{s})^3} - B\frac{1}{(z-\bar{s})^2}.$$

Výsledný vztah napětí od jedné dislokace σ_{yy}^{dis} byl díky výše uvedeným vztahům získán v programovacím jazyku Python – soubor *sigma_yy.py*.

Příloha C

Součástí diplomové práce je jeden kus CD, který obsahuje následující složky:

- **Konecnoprvkove_modely**
  - obsahuje soubory *sig_yy.mac* a *k_faktor.mac* vytvořené v komerčním programu ANSYS 18.1
- **Python_vypocty**
  - obsahuje soubory *sigma_yy.py* a *vypocet_hlavni.py* vytvořené v objektovém programovacím jazyku Python
- **VUT_FSI_Brno**
  - obsahuje elektronickou verzi diplomové práce