VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

DYNAMICKÉ VLASTNOSTI LAVALOVA ROTORU
DYNAMIC BEHAVIOR OF LAVAL ROTOR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE **NADĚŽDA NOVÁKOVÁ**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE **prof. Ing. EDUARD MALENOVSKÝ, DrSc.**
SUPERVISOR

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav
Akademický rok: 2008/09

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Nováková Naděžda

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Energetika, procesy a ekologie (3904R030)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Dynamické vlastnosti Lavalova rotoru

v anglickém jazyce:

Dynamic Behavior of Laval Rotor

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Výpočtová a experimentální analýza modelové rotorové soustavy.

Cíle bakalářské práce:

1. S využitím základních vztahů popisující krouživé kmitání rotorů stanovte vlastní frekvenci modelové rotorové soustavy.
2. Experimentálně ověřte zda jsou splněny předpoklady pro to, aby modelová experimentální rotorová soustava mohla být považována za Lavalův rotor.
3. Porovnejte výsledky výpočtové a experimentální analýzy.

Seznam odborné literatury:

Gash, R., Pfützner, H.: Dynamika rotorů;. Praha SNTL 1980. 163 stran.

Kicinski, J.: Rotor Dynamics. IFFM Gdansk, Poland 2006. p. 539.

Gash, R., Nordmann, R., Pfützner, H.:Rotordynamik. Springer, Berlin. 2002. p. 705.

Vedoucí bakalářské práce: prof. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/09.

V Brně, dne 6.11.2008

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc. Ředitel ústavu	doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc. Děkan fakulty

ABSTRAKT

Náplní této bakalářské práce je stanovení vlastní frekvence modelové rotorové soustavy a ověření, zda tato soustava může být považována za Lavalův rotor. Vlastní frekvence se získá výpočtem ze známých vztahů pro krouživé kmitání rotorů. Ověření, zda tato modelová rotorová soustava může být Lavalův rotor, se provede pomocí experimentálního měření, při kterém se zjišťuje výchylka trajektorie hřídele při postupně se zvyšujících otáčkách. Naměřené hodnoty se následně zpracují v programu MATLAB. Výsledky se porovnají s teorií Lavalova rotoru.

KLÍČOVÁ SLOVA

Lavalův rotor, Jeffcottův rotor, parní turbína, Lavalova turbína, Parsonsova turbína, rychloběžná parní turbína, kritické otáčky, proximity probe .

ABSTRACT

The aim of this bachebor's thesis is to specify self-frequency of model rotor system and verify that the system may be considered as Laval rotor. The natural frequency is obtained by calculating from the known relations for the circular rotor vibration. Verify that the model rotor system can be Laval rotor, is performed by using experimental measurements, which is determined in shaft deflection trajectory during gradually increasing speed. The measured values are then processed in program MATLAB. The results are compared with theory of Laval rotor

KEYWORDS

Laval rotor, Jeffcott rotor, gas turbine, Laval turbine, Parsons turbíne, high speed turbine, critical speed, proximity probe.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

NOVÁKOVÁ, N. *Dynamické vlastnosti Lavalova rotoru.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 36 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Eduard Malenovský, DrSc.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Dynamické vlastnosti Lavalova rotoru vypracovala samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

10. dubna 2009

…………………………………

Naděžda Nováková

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce prof. Ing. Eduardu Malenovskému, DrSc. za cenné rady a připomínky, pomoc při řešení a také za trpělivost. Dále bych ráda poděkovala Ing. Pavlu Hlavoňovi, Ph.D. za čas, který mi věnoval, Ing. Lubomíru Houfkovi, Ph.D.za jeho pomoc při měření a Ing. Zdeňkovi Novotnému za dobré rady při vypracování.

Zvláštní poděkování patří mé rodině za jejich plnou podporu v době celého studia.

.

OBSAH

1 ÚVOD **10**
1.1 HISTORICKÝ VÝVOJ PARNÍCH TURBÍN 10
1.2 LAVALOVA A PARSONSOVA TURBÍNA 11
1.2.1 Lavalova turbína *11*
1.2.2 Parsonsova turbína *12*
2 LAVALŮV ROTOR **14**
2.1 VLASTNOSTI NETLUMENÉHO LAVALOVA ROTORU 14
2.1.1 Pohybové rovnice *16*
2.1.2 Volné netlumené kmitání *18*
2.2 KROUŽIVÉ KMITÁNÍ ROTORU. KRITICKÉ OTÁČKY. 19
3 VÝPOČET KRITICKÝCH OTÁČEK MODELOVÉ ROTOROVÉ SOUSTAVY **25**
3.1 VSTUPNÍ HODNOTY PRO VÝPOČET 25
3.2 KRITICKÁ ÚHLOVÁ RYCHLOST 25
3.3 KRITICKÉ OTÁČKY 26
4 EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ **27**
4.1 CÍL EXPERIMENTU 27
4.2 STRUKTURA EXPERIMENTU 27
4.2.1 Rotor kit *27*
4.2.2 Proximity probe *28*
4.3 POSTUP MĚŘENÍ 29
4.4 ANALÝZA VYHODNOCENÍ 29
4.4.1 Statistické zpracování *29*
4.4.2 Vyhodnocení výsledků a porovnání s teoretickým výpočtem *30*
ZÁVĚR **33**
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ **34**
SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN **35**
FYZIKÁLNÍ KONSTANTY 35

1 ÚVOD

Lavalův rotor je extrémně zjednodušený model rotoru, avšak lze na něm vysvětlit a prodiskutovat mnoho důležitých jevů zásadních pro praxi. Mohou na něm být sledovány vlivy nevyváženosti rotoru, pružného uložení, vnějších a vnitřních tlumících sil, gyroskopického momentu, kluzných a valivých ložisek a mnoho dalších. Tyto vlivy by se velice těžko a komplikovaně daly měřit a počítat pro skutečné rotory parních a plynových turbín.

1.1 Historický vývoj parních turbín

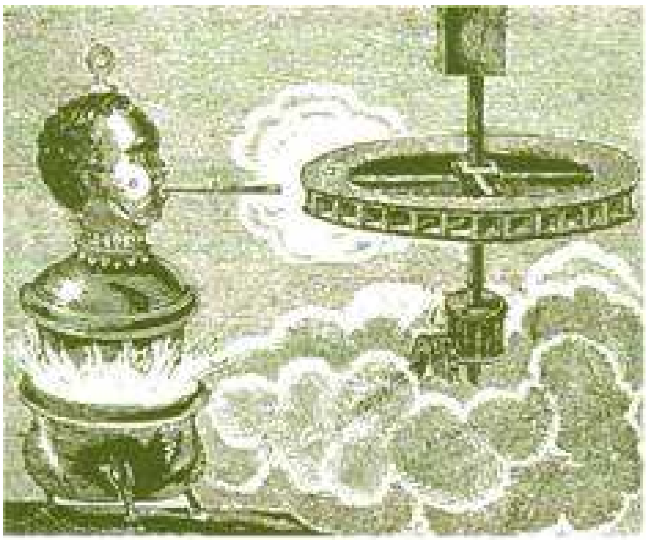
Parní turbíny se staly základním typem pohonu v soudobých tepelných elektrárnách, včetně jaderných. Nalezly široké uplatnění jako hnací jednotky na lodích vojenského i obchodního loďstva. Parní turbína mimo to slouží jako pohon různých strojů – čerpadel, dmychadel apod.

Parní turbínu pracující s vysokými otáčkami charakterizují poměrně malé rozměry i malá hmotnost a může být postavena pro velmi velké výkony (milión kW i více), přitom současně parní turbína dosahuje vysokého stupně hospodárnosti a vysoké účinnosti.

Sestrojení parní turbíny, podobně jako je tomu u všech významných vynálezů, nemůžeme připisovat tvůrčí činnosti pouze jediného člověka.[5]

První počátky parní turbíny nalezneme již v dobách Heronových (r. 120 př. Kr.). Byly to duté, nejčastěji ozdobené, nádoby kulovitého tvaru, do nichž se přiváděla pára dutými rameny z kotlíku. Na kouli byly umístěny ohnuté trubky jimiž proudila pára ven a vzniklou reakcí se koule otáčela. Jakýmsi předchůdcem parních turbín byly též „aeolipily” (uzavřená nádoba v níž se vařila voda a malým otvorem z ní unikala pára - často provedeny v podobě foukajícího muže).

Uplynulo však skoro 2000 let než se začalo vážně pomýšlet na využití síly napjaté vodní páry. Giovani de Branca v r.1629 navrhl lopatkové kolo, jež bylo poháněno parou vystupující z aeolipily. Tato Brancova kola a mnoho jiných návrhů vzhledem k primitivnímu stavu strojní výroby zaniklo.



Obr. 1.1 Brancova turbína [8]

Teprve v 19. století se podařilo uskutečnit točící se stroj, tedy parní turbínu. Byl to švédský inženýr de Laval, který v r. 1883 zkonstruoval první parní turbínu založenou na rovnotlakém principu. Současně Angličan Parsons postavil r. 1884 parní turbínu, která byla založena na přetlakovém principu, v dvou proudovém uspořádání.

Z radiálních turbín se nejvíce uplatnila a i dosti rozšířila Ljungströmova, taky někdy označovaná jako Stal-turbína. Je to protiběžná turbína. Oběžné lopatkové stupně jsou střídavě uspořádány na dvou letmo uložených kotoučích, přičemž se oba tyto kotouče točí protiběžně. Vstup páry do oběžných stupňů je z vnitřku. Pára se přivádí provrtanými náboji kotoučů. Za účelem vyrovnání veliké osové síly, působící jednostranně na kotouče, jsou s těmito spojeny vyrovnávací kotouče opatřené radiálním labyrintem. [4]

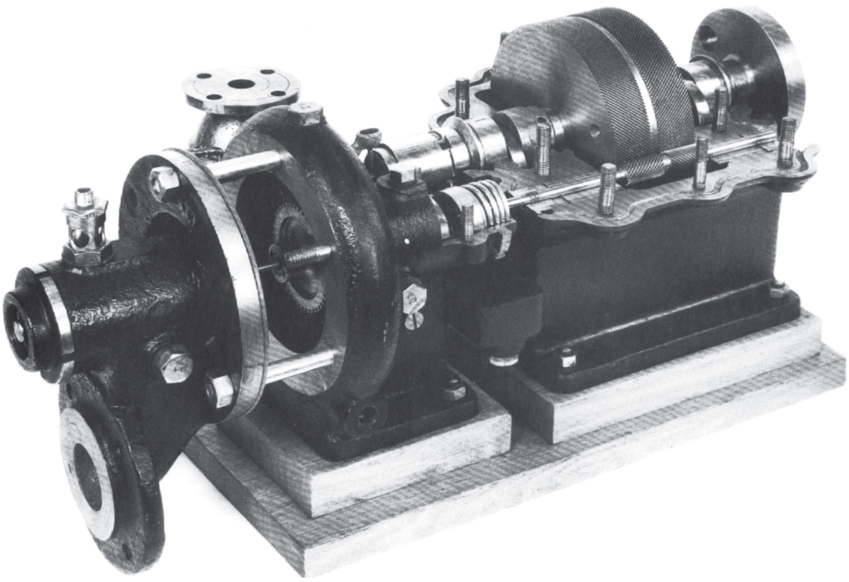
1.2 Lavalova a Parsonsova turbína

V průběhu 19. století různí vynálezci předložili řadu návrhů na přeměnu tepelné energie v energii mechanickou, založených na změně hybnosti proudící páry. Existují svědectví o tom, že již ve 30. letech 18. století se využívalo v různých zařízeních parních turbín, jejichž konstrukční princip byl založen na Segnerově kole, tj. na využití reaktivního účinku vytékajícího proudu páry.

Největší převrat v konstrukčním uspořádání parní turbíny a v dalším jejím vývoji nastal koncem 19. století, kdy ve Švédsku Gustav de Laval a v Anglii Charles Parsons nezávisle na sobě pracovali na sestrojení a zdokonalení parní turbíny. Jimi dosažené výsledky umožnily, aby se parní turbína ve své době stala základním typem pohonu elektrických generátorů a nalezla široké využití i jako lodní pohon.[5]

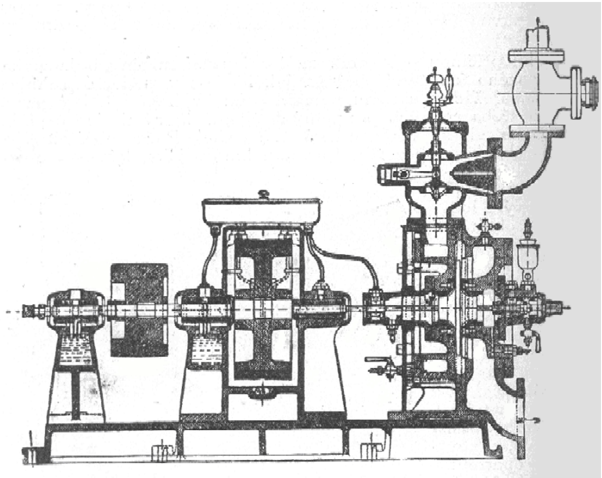
1.2.1 Lavalova turbína

V Lavalově turbíně, sestrojené v r. 1883, pára vystupuje z jedné nebo několika dýz, dosahuje v nich vysoké rychlosti a vede se do oběžných lopatek umístěných na obvodu kola nasazeného na hřídeli turbíny. Síla vznikající zakřivením proudu páry v mezilopatkových kanálech oběžné mříže otáčí kolem a s ním spojenou hřídelí turbíny.



Obr. 1.2 Lavalova turbína [7]

Charakteristickou zvláštností této turbíny je to, že expanze páry probíhá v dýzách od počátečního do konečného tlaku v jednom stupni, což je příčinou zvláště vysokých rychlostí proudu páry. Přeměna kinetické energie páry v energii mechanickou se uskutečňuje již bez další expanze páry, pouze změnou směru proudu páry v kanálech oběžných lopatek.[5]



Obr. 1.3 Řez Lavalovou turbínou [9]

Turbíny, které jsou postaveny na tomto principu, tj. turbíny, u nichž úplná expanze páry probíhá v nepohybujících se dýzách, nazýváme rovnotlakové turbíny.

Při stavbě rovnotlakových, jednostupňových turbín byla rozřešena řada problémů, což mimořádným způsobem ovlivnilo další rozvoj parních turbín.

Byly použity rozšířené dýzy, nyní nazývané Lavalovy dýzy, které umožňují hospodárně využívat vysokého stupně expanze páry, s vysokými rychlostmi proudu páry. Laval u svých turbín vyřešil konstrukci kotouče stejné pevnosti, který umožňuje pracovat s vysokými obvodovými rychlostmi (350 ms^{-1}).

Jednostupňové rovnotlakové turbíny dosahovaly otáček (do $n=640\ s^{-1}$) mnohonásobně vyšších, ve srovnání s otáčkami běžnými v té době u jiných typů strojů. Tato skutečnost vedla k vynálezu pružného rotoru, jehož kritické otáčky jsou nižší než jmenovité otáčky turbíny.

Nehledě k řadě nových konstrukčních řešení využívaných u jednostupňových rovnotlakových turbín, nebyla jejich účinnost právě vysoká.

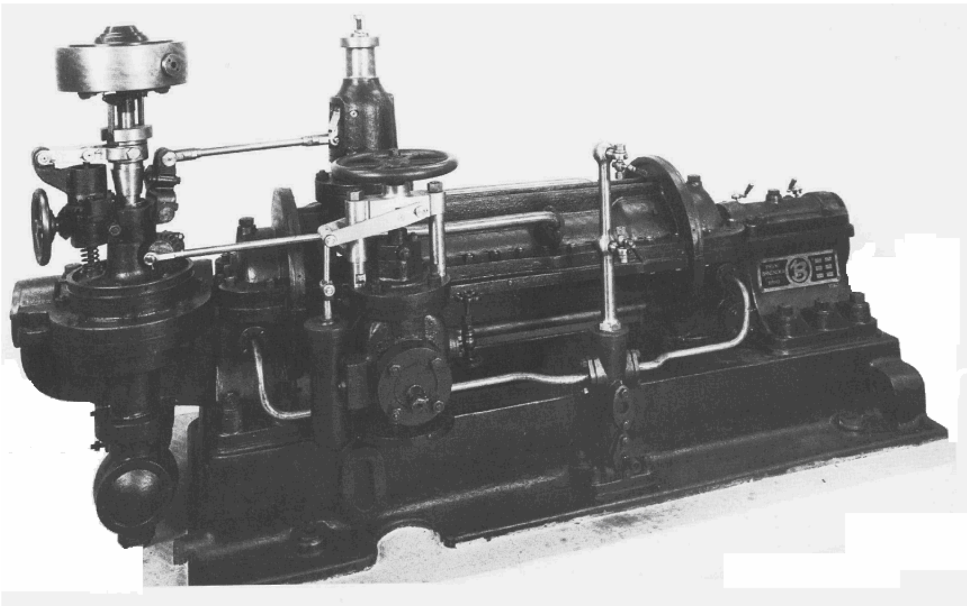
Navíc nutnost používat převodovek pro snížení otáček hnacího hřídele na úroveň otáček příslušného stroje brzdila v té době rozvoj jednostupňových turbín, zvláště pak omezovala zvýšení jejich výkonu. Z těchto důvodů, na počátku rozvoje turbínářství, jednostupňové Lavalovy turbíny nalezly velké uplatnění zvláště u soustrojí nižších výkonů (do 500 kW).[5]

1.2.2 Parsonsova turbína

Parní turbína navržená v r. 1884 Parsonsem se lišila podstatně od Lavalovy turbíny. Expanze páry v této turbíně neprobíhá v jedné skupině dýz, ale postupně v řadách turbínových stupňů řazených za sebou, z nichž každý se skládá z nepohyblivých rozváděcích a oběžných lopatek.

Rozváděcí lopatky jsou upevněny v nepohyblivém tělese turbíny, oběžné lopatky jsou uchyceny v jednotlivých řadách na rotujícím bubnu. V každém stupni této turbíny se zpracuje tlakový spád tvořící nevelkou část celého spádu mezi tlakem vstupní páry a protitlakem ve výstupním hrdle turbíny. Takto je možné pracovat s menšími rychlostmi páry v každém stupni i s nižšími obvodovými rychlosti oběžných lopatek než v Lavalové turbíně.

Mimo to expanze páry ve stupních Parsonsovy turbíny probíhá jak v rozváděcích, tak i v oběžných lopatkách. Z toho důvodu na oběžné lopatky působí síly vyvolané nejen změnou směru proudu páry, ale i urychlením páry v oběžných lopatkách, což je zdrojem reakčního silového účinku.[5]

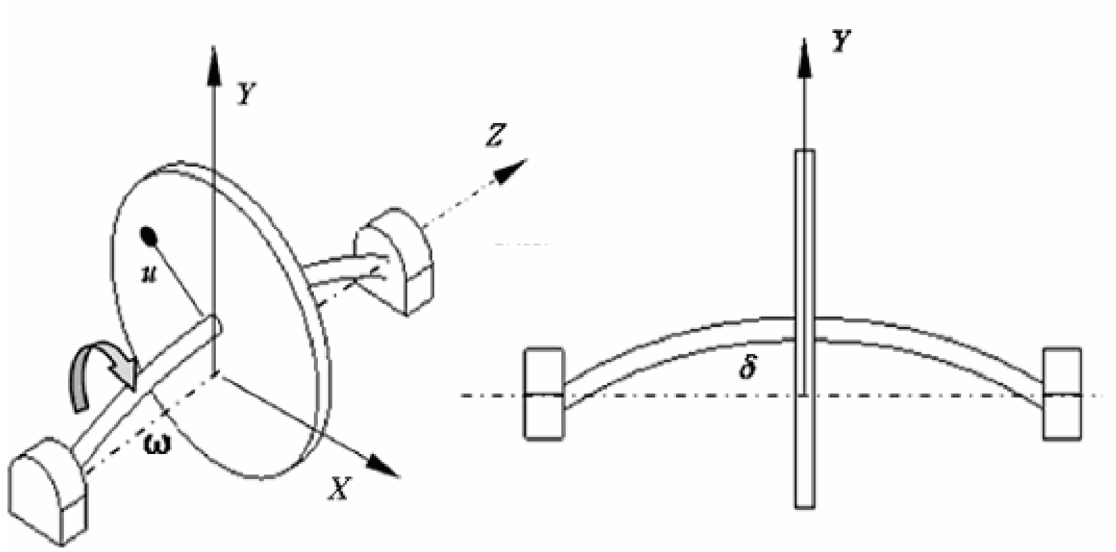


Obr. 1.4 Parsonsova turbína [7]

2 LAVALŮV ROTOR

Nejjednodušší model, který může být použit ke studiu průhybového chování rotorů, se skládá z nehmotného pružného hřídele a hmotného bodu, který je umístěný uprostřed délky hřídele. V roce 1919 Jeffcott publikoval důkladné studie jeho dynamického chování, proto je často označován jako Jeffcottův rotor; nicméně toto přisuzování je nesprávné. Již v roce 1895 publikoval August Föppl článek, ve kterém správně analyzoval jeho chování (označil ho jako De Lavalův rotor), a Stodola a Belluzzo ho popsali ve své knize o turbínách v prvních letech dvacátého století.

I když je model Lavalova rotoru přílišné zjednodušení skutečných rotorů, zachovává některé základní vlastnosti a dovolí nám získat kvalitní náhled do důležitých jevů typických pro dynamiku rotorů, ačkoliv je mnohem jednodušší než reálné modely.[2]



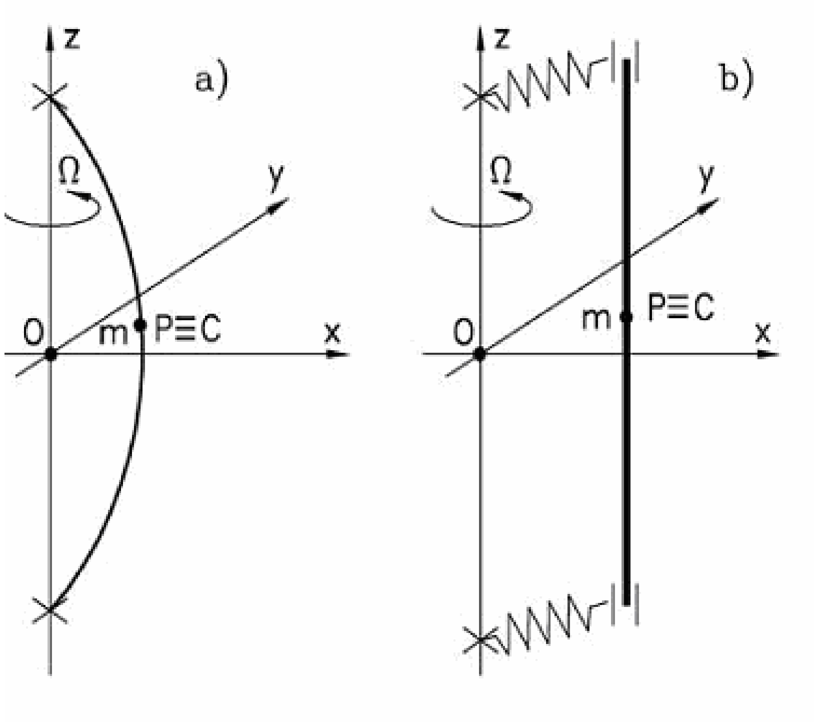
Obr. 2.1 Schéma Lavalova rotoru.[6]

2.1 Vlastnosti netlumeného Lavalova rotoru

Na obrázku 2.2 jsou nakreslena dvě schémata uložení Lavalova rotoru, které nám přináší stejné výsledky, pokud je soustava:

- netlumená – tlumící efekt není spojen ani s pružinou ani s hřídelí
- osově souměrná

Celková tuhost *k* podmíněná vratnou sílou může být považována za tuhost hřídele, nosnou konstrukcí, nebo kombinací obou.

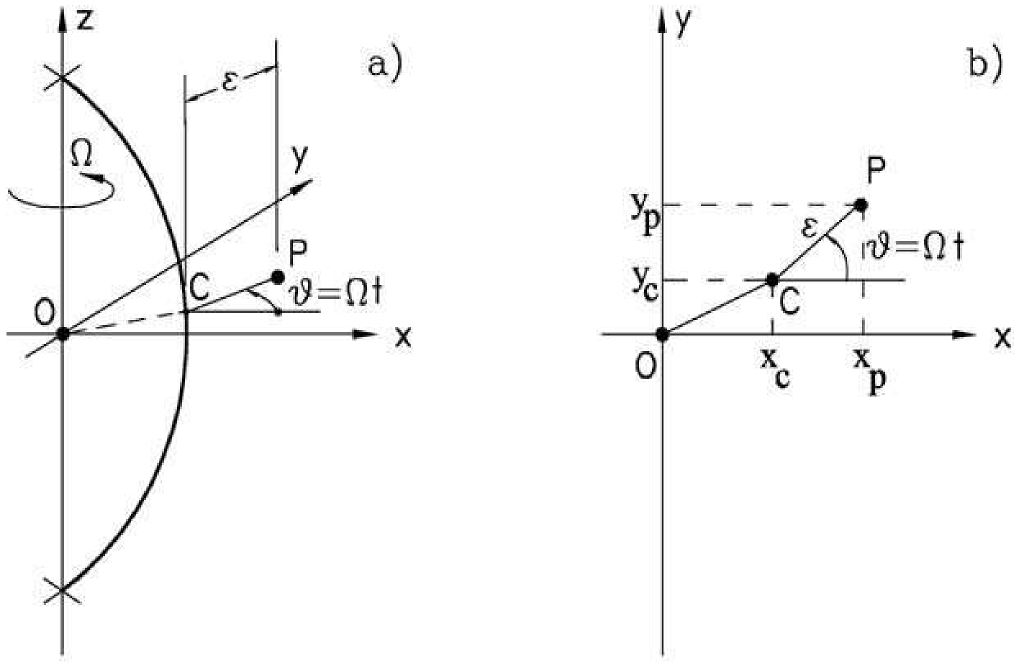


Obr. 2.2 Dokonale vyvážený Lavalův rotor. (a) Rotor skládající se z hmotného bodu a pružného hřídele uloženého v tuhých ložiskách. (b) Hřídel není prohnutý, protože ložiska jsou poddajná.[2]

Bod P leží vždy v rovině xy. Tento údaj je vysvětlován rozchodem mezi axiálním a radiálním pohybem a závisí na malém posunutí, které vzniká na základě lineárního statického výpočtu. Ke studiu ohybového chování může být použit model pouze se dvěma stupni volnosti.

Zmíněná schémata jsou však příliš mnoho idealizovaná. V praxi se nikdy nestává, že bod P je totožný s pružným středem C, který se kříží na části hřídele s bodem působícím na hřídel pružnou zpětnou vazbou. Jakkoli malá může být vzdálenost mezi body C a P, excentricita ε (obrázek 2.3) způsobuje statickou nevývahu $m\varepsilon$ a to může silně ovlivnit chování soustavy.

U základních rotorových soustav předpokládáme konstantní úhlovou rychlost Ω s počátečním časem (t=0) v okamžiku ,ve kterém je vektor PC rovnoběžný s osou x, úhel mezi osou x a vektorem PC je $\theta=\Omega t$.[2]



Obr. 2.3 Nevyvážený Lavalův rotor s nevývahou mε. (a) Nákres soustavy. (b) Stav v rovině xy.[2]

2.1.1 Pohybové rovnice

Jsou možné dvě volby pro obecné souřadnice: buď souřadnice x_c a y_c pro bod C, geometrické či elastické centrum hřídele, nebo souřadnice x_p a y_p pro bod P, hmotný bod.

Užitím první možnosti (mnohem více používanou) můžeme polohu a rychlost bodu P vyjádřit jako

$$\overline{PO} = r_P(t) = \begin{Bmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_C(t) + \varepsilon\cos(\Omega t) \\ y_C(t) + \varepsilon\sin(\Omega t) \end{Bmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\dot{r}_P(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \dot{y}_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_C(t) - \varepsilon\Omega\sin(\Omega t) \\ \dot{y}_C(t) + \varepsilon\Omega\cos(\Omega t) \end{Bmatrix}. \tag{2.2}$$

Kinetická energie E_k a potenciální energie E_p jsou

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2\right) = \frac{1}{2}m\left\{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \varepsilon^2\Omega^2 + 2\varepsilon\Omega\left[-\dot{x}_C\sin(\Omega t) + \dot{y}_C\cos(\Omega t)\right]\right\},$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(x_C^2 + y_C^2\right) \tag{2.3}$$

Lagrangeovy rovnice můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(E_k - E_p)}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(E_k - E_p)}{\partial q_i} = Q_i, \tag{2.4}$$

kde q_i jsou Lagrangeovy souřadnice, zde x_c a y_c.

Za předpokladu, že vnější síla působí na bod P v rovině xy (např. průhyb rotoru v případě, že osa otáčení je horizontální), síly Q mohou být snadno získány virtuálním posunutím bodu C $[\delta x_c, \delta y_c]^T$. Vzhledem k tomu, že úhlová rychlost je předepsána pohonným systémem (úhel $\theta = \Omega t$ nezávisí na obecných souřadnicích), virtuální posunutí bodu P je $[\delta x_c, \delta y_c]^T$ a virtuální práce δL od síly F se složkami F_x a F_y působící na bod P je

$$\delta L = F_x \delta x_C + F_y \delta y_C \,. \tag{2.5}$$

Celkové síly lze pak vypočítat jako

$$Q_i = \frac{\partial \delta L}{\partial \delta q_i} \,. \tag{2.6}$$

Při odvozování příslušných vztahů si musíme pamatovat, že úhlová rychlost Ω má být konstantní. Pohybové rovnice pak vypadají následovně:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C(t) + kx_C(t) &= m\varepsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) + F_x(t) \\ m\ddot{y}_C(t) + ky_C(t) &= m\varepsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) + F_y(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde síly $F_x(t)$ a $F_y(t)$ jsou považovány za všeobecné funkce času, zatímco nerovnováha sil je ze stejné amplitudy jenom ve fázovém rozdílu.[2]

Jako vždy řešením obecné rovnice (2.7) můžeme získat sčítáním homogenní rovnice (doplňková funkce)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C(t) + kx_C(t) &= 0 \\ m\ddot{y}_C(t) + ky_C(t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

k partikulárnímu řešení celé rovnosti. Rovnice (2.8) dovoluje volný pohyb dokonale vyváženého Lavalova rotoru, zatímco rovnice (2.7) přináší odpověď na statickou nerovnováhu a vnější sílu působící v rovině xy. Všimněte si, že vzhledem k linearitě, je možné studovat jednotlivé reakce nevyváženosti i ke statické síle.

Jak již bylo uvedeno, je možné používat souřadnice x_p a y_p od bodu P (těžiště) jako obecné souřadnice. V tom případě můžeme polohu bodu C vyjádřit jako

$$\overline{CO} = r_C(t) = \begin{Bmatrix} x_C(t) \\ y_C(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_P(t) - \varepsilon\cos(\Omega t) \\ y_P(t) - \varepsilon\sin(\Omega t) \end{Bmatrix}. \tag{2.9}$$

Kinetická a potenciální energie jsou

$$E_k = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2\right) \tag{2.10}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k\left(x_P^2 + y_P^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\left[x_P \cos(\Omega t) + y_P \sin(\Omega t)\right]\right) \tag{2.11}$$

Při dosazení Lagrangianu a sil F_x a F_y do Lagrangeovy rovnice budou následující rovnice pohybu bodu P tyto:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_P(t) + kx_P(t) &= k\varepsilon\cos(\Omega t) + F_x(t) \\ m\ddot{y}_P(t) + ky_P(t) &= k\varepsilon\sin(\Omega t) + F_y(t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.2 Volné netlumené kmitání

Rovnice pohybu podél každé osy jsou shodné s rovnicí volného pohybu soustavy s jedním stupněm volnosti. Čistě matematický přístup k řešení je převzat z exponenciálního řešení.

$$x_C(t) = x_{C_O} e^{st}, \qquad y_C(t) = y_{C_O} e^{st}, \tag{2.13}$$

a řešení pro $s \in C$

$$\left(ms^2 x_{C_O} + kx_{C_O}\right)e^{st} = 0, \qquad \left(ms^2 y_{C_O} + ky_{C_O}\right)e^{st} = 0. \tag{2.14}$$

Pro $e^{st} \neq 0$ a netriviální řešení ($x_{C_O} \neq 0$ a $y_{C_O} \neq 0$), které hledáme, předpokládáme, že

$$ms^2 + k = 0, \qquad ms^2 + k = 0. \tag{2.15}$$

Absolutní hodnota s z rovnice (2.15) se shoduje s vlastní frekvencí nerotující soustavy

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.16}$$

a čtyři řešení $\pm i\omega_n$ (ve skutečnosti jen dvě, každé s násobkem 2) jsou pouze imaginární kvůli konzervativní povaze soustavy.[2]

Kvůli symetrii soustavy kolem os x a y je pohyb bodu C dán kombinací dvou harmonických pohybů ležících kolem os a s frekvencí, která se shoduje s vlastní frekvencí nerotujícího hřídele

$$x_C(t) = X_1 e^{i\omega_n t} + X_2 e^{-i\omega_n t}, \qquad y_C(t) = Y_1 e^{i\omega_n t} + Y_2 e^{-i\omega_n t}. \tag{2.17}$$

Konstanty X_1, X_2, Y_1 a Y_2 mohou být určeny z počátečních podmínek poloh $x_C(0)$ a $y_C(0)$ a rychlostí $\dot{x}_C(0)$ a $\dot{y}_C(0)$

$$x_C(0) = X_1 + X_2, \qquad \dot{x}_C(0) = i(X_1 - X_2)\omega_n, \qquad y_C(0) = Y_1 + Y_2, \qquad \dot{y}_C(0) = i(Y_1 - Y_2)\omega_n. \tag{2.18}$$

Dosazením do rovnice (2.17) dostaneme řešení na základě počátečních podmínek

$$x_C(t) = x_C(0)\cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\dot{x}_C(0)\sin(\omega_n t), \qquad y_C(t) = y_C(0)\cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\dot{y}_C(0)\sin(\omega_n t), \tag{2.19}$$

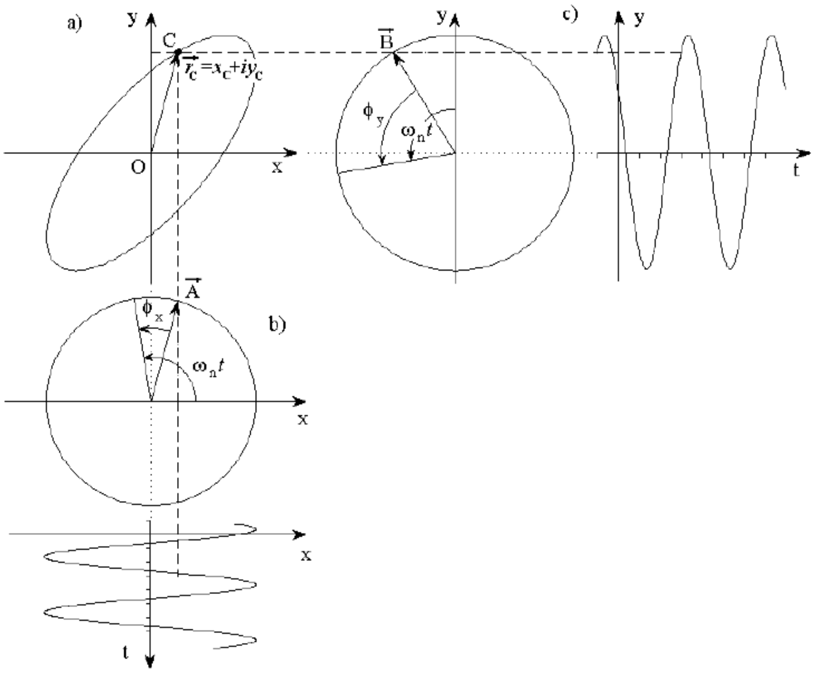
které se shoduje s odezvou z obou tlumených harmonických oscilátorů. Jako vždy může být řešení vyjádřeno na základě amplitudových a fázových úhlů

$$x_C(t) = X\cos(\omega_n t - \phi_x),$$
$$y_C(t) = Y\cos(\omega_n t - \phi_y), \tag{2.20}$$

kde

$$x_C(0) = X\cos\phi_x, \qquad \dot{x}_C(0) = \omega_n X\sin\phi_x,$$
$$y_C(0) = Y\cos\phi_y, \qquad \dot{y}_C(0) = \omega_n Y\sin\phi_{y.} \tag{2.21}$$

Rovnice pohybu vyjádřená rovnicí (2.20) je znázorněná na obrázku 2.3. Trajektorii bodu C znázorňuje vektor r_C, jehož souřadnice $x_C(t)$ a $y_C(t)$ v čase jsou dány harmonickými funkcemi (2.20) amplitud X a Y a fází ϕ_x a ϕ_y. Ty mohou být myšleny jako průmět rotujících vektorů $\vec{A}$ a $\vec{B}$ do pomocných os x a y podle obrázku 2.3.[2]



Obr. 2.3 Odpověď Lavalova rotoru na vlastní kmitání. (a) Reálné (v x a y) a komplexní ($r = x + iy$) prezentují dráhu bodu C; (b) a (c) prezentují souřadnice $x(t)$ a $y(t)$ pro bod C ve vektorovém průmětu promítnutém na osy x a y z rotujících vektorů $\vec{A}$ a $\vec{B}$.[2]

2.2 Kroužívé kmitání rotoru. Kritické otáčky.

Při otáčení rotorů se vyskytují oblasti otáček, při kterých lze pozorovat hlučení, nadměrné chvění ložiskových stojanů, neklidný mechanický chod a prohýbání hřídele spojené dokonce s možností jeho trvalé deformace. Úhlové rychlosti, při kterých k tomuto jevu dochází, se nazývají kritickými a mluvíme o tom, že hřídel běží v kritických otáčkách. V podstatě jde o nestabilní případ rovnováhy mezi silami odstředivými a silami elastickými, popřípadě tlumícími.

Uvažujme nejprve velmi jednoduchý případ nehmotného hřídele konstantního průřezu uloženého ve dvou ložiskách s kotoučem o hmotnosti *m* uprostřed. Pokládáme-li ložiska za prosté podpory a zanedbáme-li vliv vlastní tíhy kotouče, platí tato podmínka rovnováhy mezi odstředivou silou kotouče $my\omega^2$ a elastickou silou ky, kterou působí hřídel na kotouč

$$my\omega^2 - ky = 0 \tag{2.22}$$

Netriviální řešení rovnice (2.22) pro $y \neq 0$ vyžaduje splnění podmínky

$$m\omega^2 - k = 0 \tag{2.23}$$

což je vztah pro výpočet kritické úhlové rychlosti

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.24}$$

kde v případě

$$k = \frac{48EJ}{l^3}. \tag{2.25}$$

Kritické otáčky za minutu určuje vztah

$$n_{kr} = \frac{30}{\pi}\omega_{kr} \tag{2.26}$$

Neleží-li střed hmotnosti kotouče na spojnici středů ložisek, ale je-li vychýlen o excentricitu ε, jako např. u excentricky nasazeného kotouče, pak pro rovnováhu platí

$$m(y+\varepsilon)\omega^2 - ky = 0 \tag{2.27}$$

Z toho

$$y = \frac{\varepsilon}{\frac{\omega_{kr}^2}{\omega^2} - 1} \tag{2.28}$$

Pro $\omega \to 0$ je $y = 0$, pro $\omega \to \infty$, $y = -\varepsilon$.

Průběh závislosti je obdobný průběhu získanému při vyšetřování ustáleného kmitání netlumené soustavy s 1° volnosti vynuceného harmonickou budicí silou o amplitudě úměrné ω^2.[3]

Je-li na hřídeli nasazeno n kotoučů, nahradíme silový účinek na hřídeli od každého z nich odstředivou silou $m_i\omega^2 y_i$, kde y_i je průhyb hřídele v místě kotouče. Po zavedení příčinkových činitelů α_{ij} platí soustava n rovnic

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} m_j \omega^2 y_j , \qquad i = 1,\ldots,n \tag{2.29}$$

kterou lze užitím matic vyjádřit takto

$$(-\omega^2 GM + I)y = 0 \tag{2.30}$$

kde $G = \lfloor \alpha_{ij} \rfloor$ je symetrická matice sestavená z příčinkových činitelů α_{ij} jako prvků,

M - diagonální matice s prvky m_i na hlavní diagonále

$y^{\mathrm{T}} = [\ldots, y_i, \ldots]$ - vektor výchylek v místech kotoučů

Nenulové řešení, $y \neq 0$, vyžaduje, aby

$$\left| -\omega^2 GM + I \right| = 0 \tag{2.31}$$

Kořeny frekvenčního determinantu jsou hledané kritické úhlové rychlosti ω_{kr}.

Postup řešení a výsledné vztahy jsou formálně stejné jako při úlohách z ohybového kmitání nosníků. Mezi krouživým a ohybovým kmitáním existuje pro takto idealizovaný případ podobnost do té míry, že kritické úhlové rychlosti ω_{kr} jsou rovny vlastním frekvencím Ω_i obdobné úlohy ohybového kmitání. Hřídel v okolí kritických otáček krouží deformována do tvaru, který rovněž odpovídá vlastnímu tvaru kmitání při ohybovém kmitání. Pokud se ložiska považují za tuhé nebo pružné podpory s tuhostí ve všech směrech stejnou a není-li třeba uvažovat gyroskopické účinky nasazených kotoučů, lze tedy výpočet kritických otáček provádět z pohybových rovnic odvozených pro ohybové kmitání nehmotných nosníků s osamělými soustředěnými hmotami tj. s použitím příčinkových činitelů.[3]

Po zavedení statického průhybu hřídele tíhou kotouče $y_{st} = mg/k$ vyplývá

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} \tag{2.32}$$

Uvedený vztah určuje kritickou úhlovou rychlost ze znalosti statického průhybu hřídele.

U hřídele s několika hmotami uložených na dvou ložiskách bez převislých konců, lze nejnižší kritické otáčky dobře vystihnout vztahem

$$n_{kr} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\chi \frac{g}{y_{\max}}} \tag{2.33}$$

kde $y_{\max}$ je největší průhyb hřídele vlastní tíhou a tíhou nasazených kotoučů. Součinitel χ se volí:

$\chi = 1{,}00$ pro jednu hodnotu na hřídeli,

$\chi = 1{,}27$ pro hřídel zatížený spojitou, rovnoměrně rozloženou hmotou,

$\chi = 1{,}08$ pro rotory turbín, odstředivých čerpadel, kompresorů,

$\chi = 1{,}20$ pro rotory turbogenerátorů a elektromotorů.

Jiný vztah pro přibližný výpočet nejnižších kritických otáček z průhybové čáry je

$$n_{kr} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}}\,. \tag{2.34}$$

Jeho spolehlivost záleží na přesnosti odhad průhybů y_i v místech soustředěných hmot (nasazených kotoučů) o hmotnosti m_i. Jsou-li kotouče nasazené na hřídel rozměrnější, je jejich silové působení na hřídel při vyšších otáčkách složitější, jak vyplývá z teorie sférického pohybu tělesa (z teorie gyroskopů). Silové účinky, tj. síly a momenty se obdrží z derivace momentu hybnosti kotouče jako tuhého tělesa. Uvažujeme jednoduchý případ tenkého kotouče nasazeného na hřídel, který se otáčí úhlovou rychlostí ω. V těžišti kotouče je zvolen počátek pevné pravotočivé souřadnicové soustavy x, y, z a rovněž počátek pohyblivé souřadnicové soustavy ξ, η, ζ spojené s otáčejícím se kotoučem, přičemž ξ, η a ζ jsou současně centrální hlavní osy setrvačnosti. Deformace hřídele je vyvolána účinkem sil F_y a F_z a momentů M_y a M_z. Z derivace momentu hybnosti kotouče jako tuhého tělesa vyplývají za předpokladu malých výchylek a natočení pro síly a momenty působící na těleso (F_x a M_x není pro další úvahy zapotřebí) vztahy

$$\begin{aligned} F_y &= m\ddot{y}, \\ F_z &= m\ddot{z}, \\ M_y &= -I_\eta \ddot{z}' + I_\xi \omega\, \dot{y}', \\ M_z &= I_\zeta \ddot{z}' + I_\xi \omega\, \dot{z}', \end{aligned} \qquad (2.35)$$

kde I_ξ, I_η a I_ζ jsou momenty setrvačnosti k osám pohyblivé souřadnicové soustavy a jsou tedy centrálními hlavními momenty setrvačnosti kotouče. Tečkami jsou vyznačeny derivace podle času a čárkami derivace podle argumentu x. Užitím příčinkových činitelů odvodíme vztahy pro výchylky a natočení hřídele v počátku souřadnicové soustavy O.[3]

$$\begin{aligned} y &= \alpha(-F_y) + \gamma(-M_z), \\ z &= \alpha(-F_z) + \gamma(-M_y), \\ \varphi_z &= \gamma(-F_y) + \delta(-M_z), \\ \varphi_y &= -\gamma(-F_z) + \delta(-M_y). \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Pro kotouč dále platí $I_\eta = I_\xi$. Dosazením (2.35) do (2.36) a zavedením $y + iz = \hat{u}e^{i\Omega t}$ a $y' + iz' = \hat{u}' e^{i\Omega t}$, kde Ω je úhlová rychlost kroužení hřídele kolem spojnice ložisek, obdržíme po úpravě

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \alpha m \Omega^2 \hat{u} + \gamma\left(I_\eta \Omega^2 - I_\xi \omega \Omega\right)\hat{u}', \\ \hat{u}' &= \gamma m \Omega^2 \hat{u} + \delta\left(I_\eta \Omega^2 - I_\xi \omega \Omega\right)\hat{u}'. \end{aligned} \qquad (2.37)$$

V uvedené rovnici je $m\Omega^2\hat{u}$ odstředivá síla kotouče a výraz $\left(I_\eta \Omega^2 - I_\xi \omega \Omega\right)\hat{u}'$ moment od setrvačných sil kotouče. Druhý člen ve výrazu pro moment pak značí gyroskopický moment $M_G = -I_\xi \omega \Omega \hat{u}'$. Pro tenké kotouče $I_\xi \doteq 2I_\eta$. Mohou nastat dva případy.

a) Hřídel krouží úhlovou rychlostí $\Omega = \omega$, jde o tzv. souběžnou precesi, a gyroskopický moment pro tenký kotouč je $M_G = -2I_\eta \Omega^2 \hat{u}'$.
   Moment od setrvačných sil kotouče je
   $$M_S = -\Omega^2 I_\eta \hat{u}'. \qquad (2.38)$$

b) Hřídel krouží úhlovou rychlostí $\Omega = -\omega$, jde o tzv. protiběžnou precesi, a gyroskopický moment pro tenký kotouč je $M_G = 2I_\eta \Omega^2 \hat{u}'$. Moment od setrvačných sil kotouče je

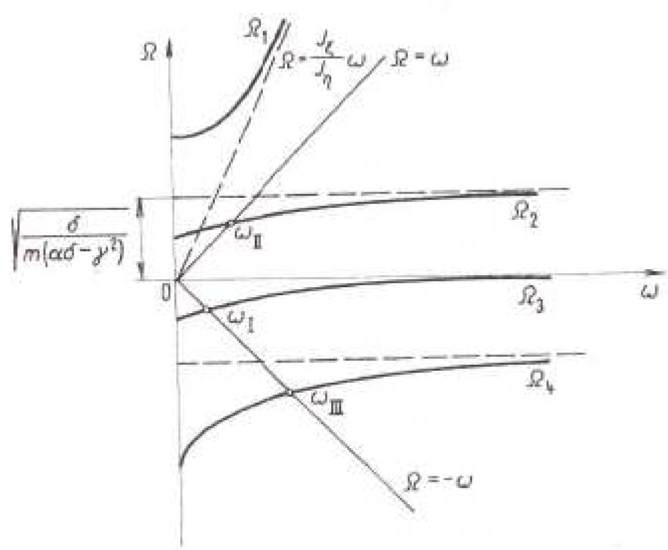
$$M_S = 3\Omega^2 I_\eta \hat{u}'. \tag{2.39}$$

Pohyb hřídele při souběžné a protiběžné precesi je patrný ze čtyř jeho základních poloh.[3]

Z rovnic (2.37) vyplývá tato frekvenční rovnice pro výpočet vlastních úhlových frekvencí Ω_i

$$mI_\eta\left(\alpha\delta-\gamma^2\right)\Omega^4 - mI_\xi\left(\alpha\delta-\gamma^2\right)\omega\Omega^3 - \left(\alpha m+\delta I_\eta\right)\Omega^2 + \delta I_\xi\omega\Omega + 1 = 0 \tag{2.40}$$

Rovnice má 4 reálné kořeny $\Omega_1(\omega)$ až $\Omega_4(\omega)$. Jejich závislost na úhlové rychlosti ω je zakreslena na obrázku 2.4.



Obr. 2.4 Závislost kořenů rovnice 2.40 na úhlové rychlosti ω.[3]

Úsečky průsečíků křivek Ω_i s přímkami $\Omega = \pm\omega$ jsou kritické otáčky. Jsou tři ω_I, ω_{II}, ω_{III}. Z toho v kritických otáčkách ω_{II} jde o souběžnou precesi a ve zbývajících dvou ω_I a ω_{III} o protiběžnou precesi. Kritické otáčky se vypočtou z frekvenční rovnice (2.40), a to

a) pro souběžnou precesi položením $\Omega = \omega$

$$\omega_{II}^2 = \frac{(\delta A - \alpha m) + \sqrt{(\delta A - \alpha m)^2 + 4mqA}}{2mqA}; \tag{2.41}$$

b) pro protiběžnou precesi položením $\Omega = -\omega$

$$\omega_{I,III}^2 = \frac{(\alpha m + \delta B) \mp \sqrt{(\alpha m + \delta B)^2 - 4mqB}}{2mqB}, \tag{2.42}$$

kde $A = I_\xi - I_\eta$,

$B = I_\xi + I_\eta$,

$q = \alpha\delta - \gamma^2$.

Kritické otáčky se současnou precesí nastanou vždycky. O vzniku kritických otáček s protiběžnou precesí rozhodují další podmínky, které je nutno zkoumat případ od případu. Například u hřídele ve dvou ložiskách s letmým kotoučem příznivou podmínkou pro vznik kritických otáček s protiběžnou precesí je rozdílná tuhost jednoho uložení ve dvou směrech. Rozdílná tuhost ložisek ve dvou směrech může vyvolat protiběžnou precesi i u rotorů bez letmých kotoučů.[3]

Složitější řešení problémů krouživého kmitání hřídele rotorů je dále do značné míry určována silovými účinky působícími na hřídel od ložisek, zejména pokud jde o kluzná ložiska. Tyto síly jsou vesměs závislé na úhlové rychlosti otáčení ω, ve dvou navzájem kolmých směrech jsou různé a výchylka hřídele v jednom směru, např. svislém, vyvolá silové účinky i ve směru kolmém, tj. vodorovném. Tyto případy vyžadují zvláštní metody při sestavování pohybových rovnic (např. metodou konečného prvku) a použití numerických metod a počítačů při řešení Pohybová rovnice v maticovém tvaru pro takové případy je typu

$$M\ddot{x} + B(\omega)\dot{x} + K(\omega)x = 0\,, \tag{2.43}$$

kde $B(\omega)$ a $K(\omega)$ jsou nesymetrické matice závislé na ω. Vlastní hodnoty frekvenčního parametru λ_i jsou většinou komplexní a rovněž závislé na ω.[3]

3 VÝPOČET KRITICKÝCH OTÁČEK MODELOVÉ ROTOROVÉ SOUSTAVY

Cílem tohoto výpočtu je zjištění kritických otáček, při kterých se rotor nesmí provozovat, poněvadž při nich dojde k nekonečně velkému průhybu hřídele.

3.1 Vstupní hodnoty pro výpočet

Ukázkový výpočet je proveden pro model rotoru, který se nachází v laboratořích ústavu mechaniky těles.

Délka hřídele [m]	0,5
Průměr hřídele [m]	1.10^{-2}
Hmotnost kotouče [kg]	0,5

Tab. 3.1 Parametry rotoru

Hmotnost hřídele zanedbáváme.

3.2 Kritická úhlová rychlost

Vycházíme ze základního vztahu pro kritickou úhlovou rychlost

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{3.1}$$

kde za konstantu tuhosti k dosadíme

$$k = \frac{48EJ}{l^3}. \tag{3.2}$$

Tento vztah nalezneme v tabulkách.[1] Pak tedy získáme vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}, \tag{3.3}$$

kde J je moment setrvačnosti a pro kruhový průřez platí

$$J = \frac{\pi\ d^4}{64}. \tag{3.4}$$

Konečný vztah pro úhlovou kritickou rychlost ω je tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{48E\pi\ d^4}{64ml^3}}, \tag{3.5}$$

Po dosazení hodnot uvedených v tabulce 3.1 se stanoví kritická úhlová rychlost. Ta vyšla $281{,}37\ [rad.s^{-1}]$.

3.3 Kritické otáčky

Pro výpočet kritických otáček platí vztah

$$n_{kr} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{3.6}$$

kde ω získáme z předešlého výpočtu a výsledek vyjde v jednotkách $[s^{-1}]$.

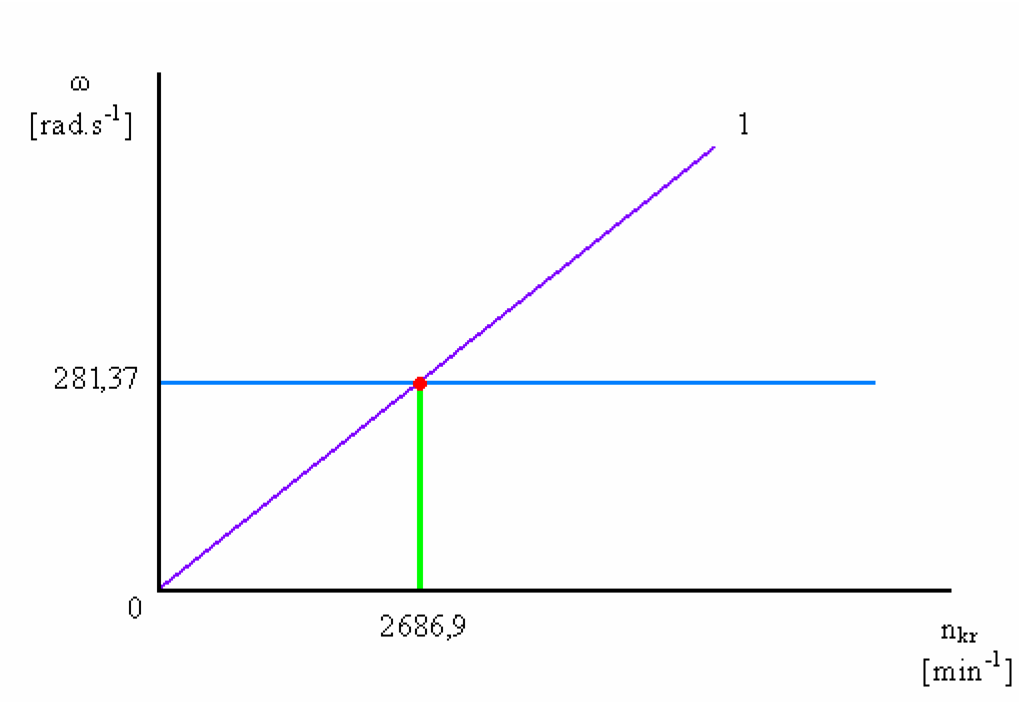
Dosadíme hodnoty

$$n_{kr} = \frac{281{,}37}{2\pi} = \underline{\underline{44{,}78\ [s^{-1}]}}. \tag{3.7}$$

Výsledek převedeme na jednotky $[\min^{-1}]$.

$$n_{kr} = 44{,}78 \cdot 60 = \underline{\underline{2686{,}9\ [\min^{-1}]}}. \tag{3.8}$$

Vlastní frekvence modelové rotorové soustavy je tedy $2686{,}9\ [\min^{-1}]$. Při této hodnotě by v důsledku nevývahy pro netlumenou soustavu měly být vibrace nekonečně velké. Na obrázku 3.1 je znázorněn Campbellův diagram.



Obr. 3.1 Campbellův diagram pro modelovou rotorovou soustavu

4 EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ

4.1 Cíl experimentu

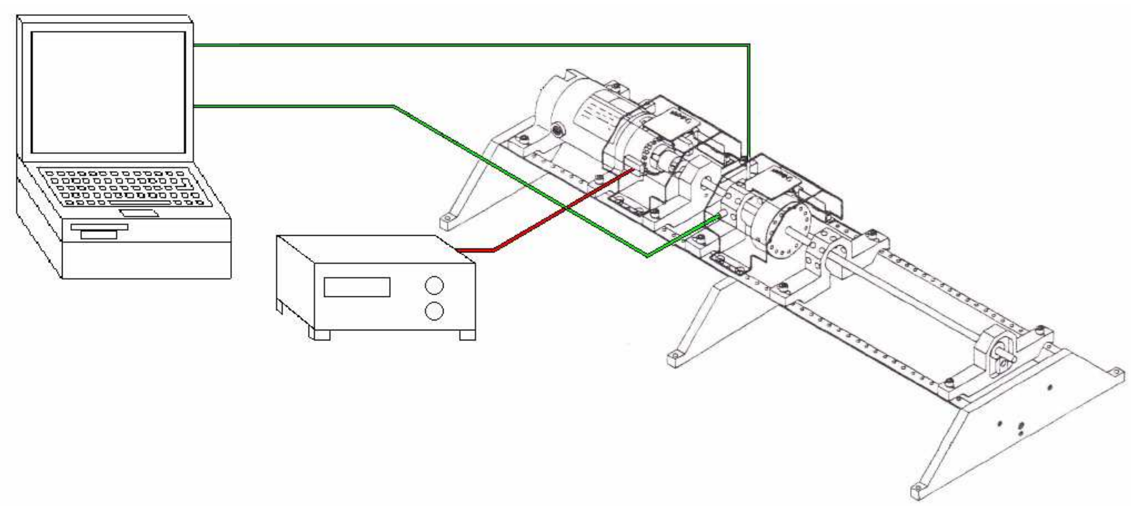
Cílem experimentálního řešení bylo zjištění výchylky trajektorie hřídele při různých otáčkách. Na základě těchto výsledků se provedlo vyhodnocení a porovnání s teoretickými výsledky Lavalova rotoru.

4.2 Struktura experimentu

Měřící řetězec je sestaven z následujících členů:

- rotor kit
- proximity probe
- snímač otáček
- notebook

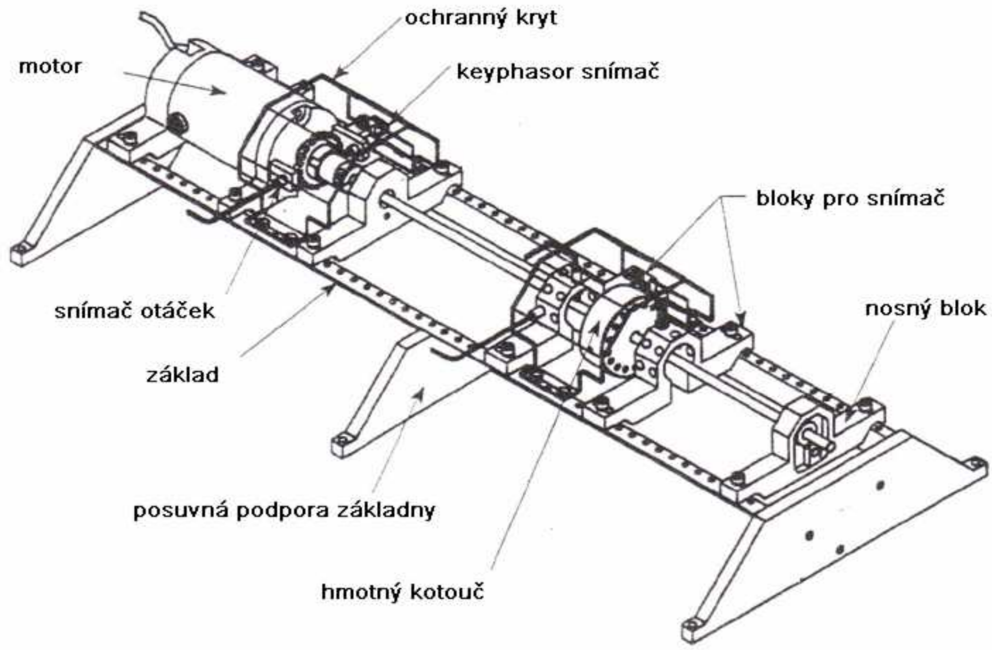
Ukázka zapojení toho schéma je na obrázku 4.1.



Obr. 4.1 Schéma zapojení.

4.2.1 Rotor kit

Na obrázku 4.3 je ukázka rotor kitu, na kterém byl experiment prováděn. Rotor kit je model rotujícího stroje, který simuluje několik druhů kmitání hřídele, které se objevuje u velkých rotujících strojů. Různých druhů kmitání se dosahuje například změnou úhlové rychlosti, změnou ložisek atd.

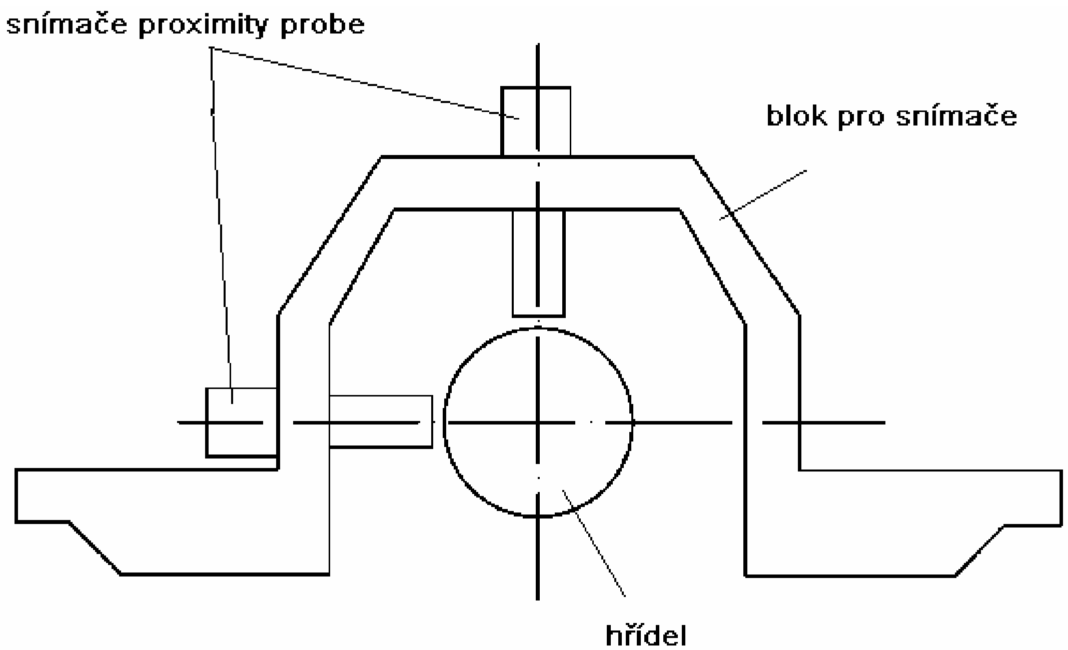


Obr.4.2 Rotor kit

4.2.2 Proximity probe

Proximity probe je pevně připevněný na bloku. Je nutná úprava signálu zesilovačem, aby generoval výstupní napětí úměrné k vzdálenosti mezi koncem snímače a hřídelí. Pracuje na magnetickém principu a je tedy citlivý na magnetické anomálie. Proto je třeba dbát na to, aby byl hřídel zabezpečený proti zmagnetizování, jinak bude výstupní signál chybný.

Snímače jsou často používány v párech a svírají mezi sebou úhel 90°. Jeden je připojen vertikálně a druhý horizontálně, jak je znázorněno na obrázku 4.3.



Obr.4.3 Zapojení snímačů.

4.3 Postup měření

Měření i sběr dat byly řízeny pomocí měřícího notebooku. Měřilo se v rozmezí od 0 do 10000 otáček, které se postupně zvyšovaly o 1000. Při každých měřených otáčkách se nechal rotor ustálit.

Základní data z měření:

Počet čar ve spektru:	6400
Maximální frekvence:	5 kHz
Frekvenční krok:	781,3 mHz
Doba záznamu:	1,28 s
Časový krok:	78,13 μs

4.4 Analýza vyhodnocení

Naměřené hodnoty byly zpracovány pomocí programu MATLAB.

4.4.1 Statistické zpracování

Pro statistické zpracování dat byly použity tyto vzaty:

Aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.1}$$

Rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{4.2}$$

Směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{s^2} \tag{4.3}$$

Průměrná odchylka

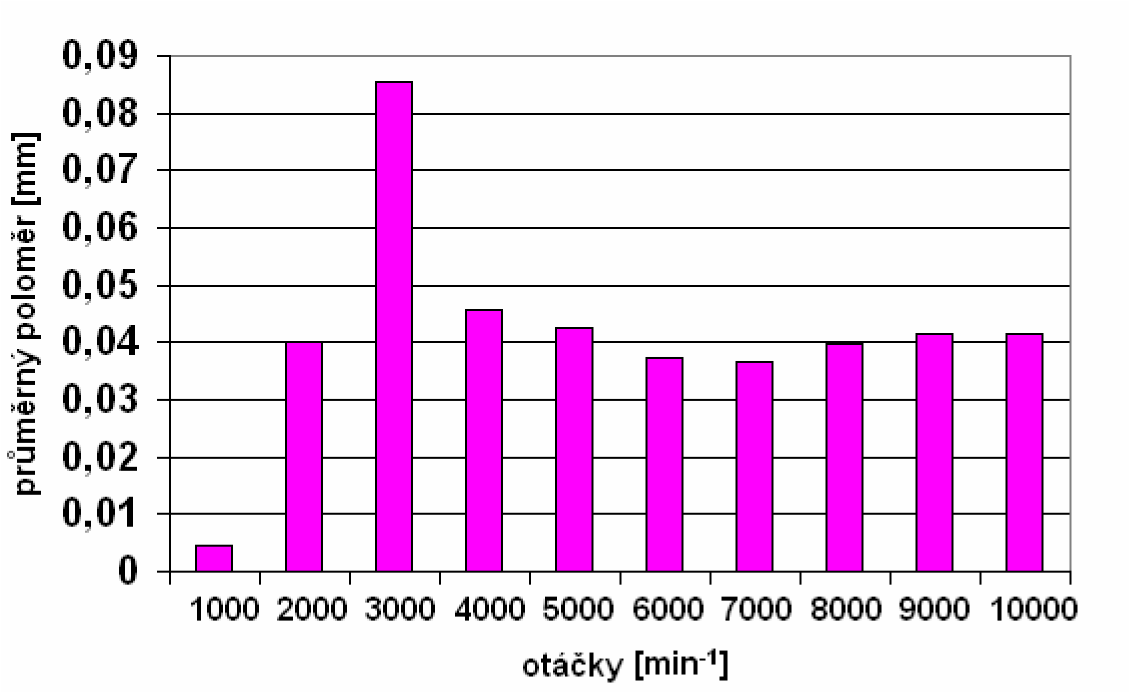
$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} \tag{4.4}$$

4.4.2 Vyhodnocení výsledků a porovnání s teoretickým výpočtem

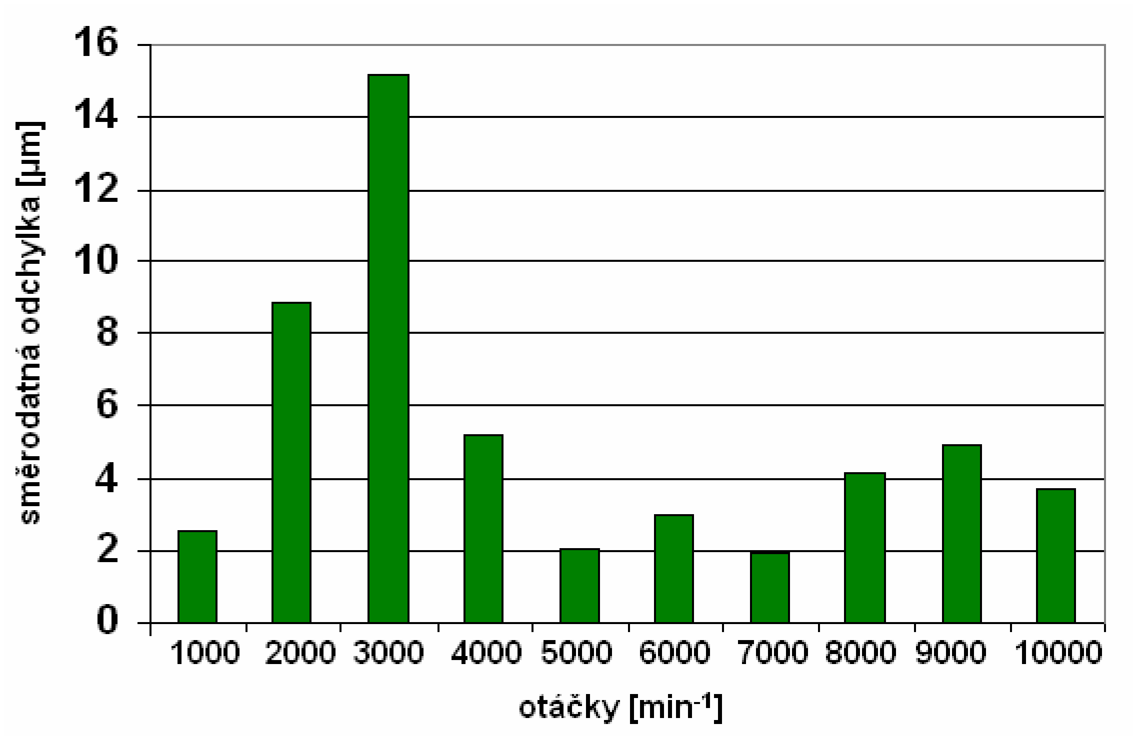
V tabulce 4.1 se nacházejí hodnoty, které byly naměřeny v první periodě otáček. Tyto hodnoty jsou názorně vykresleny v grafech 4.1–4.3.

Otáčky [min^{-1}]	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Průměrný poloměr[mm]	0,0045	0,0401	0,0855	0,0458	0,0427	0,0373	0,0368	0,0398	0,0414	0,0416
Směrodatná odchylka[μm]	2,598	8,899	15,166	5,214	2,035	2,994	1,935	4,118	4,921	3,701
Průměrná odchylka[μm]	2,278	7,669	13,150	4,273	1,637	2,252	1,574	3,559	4,181	3,241

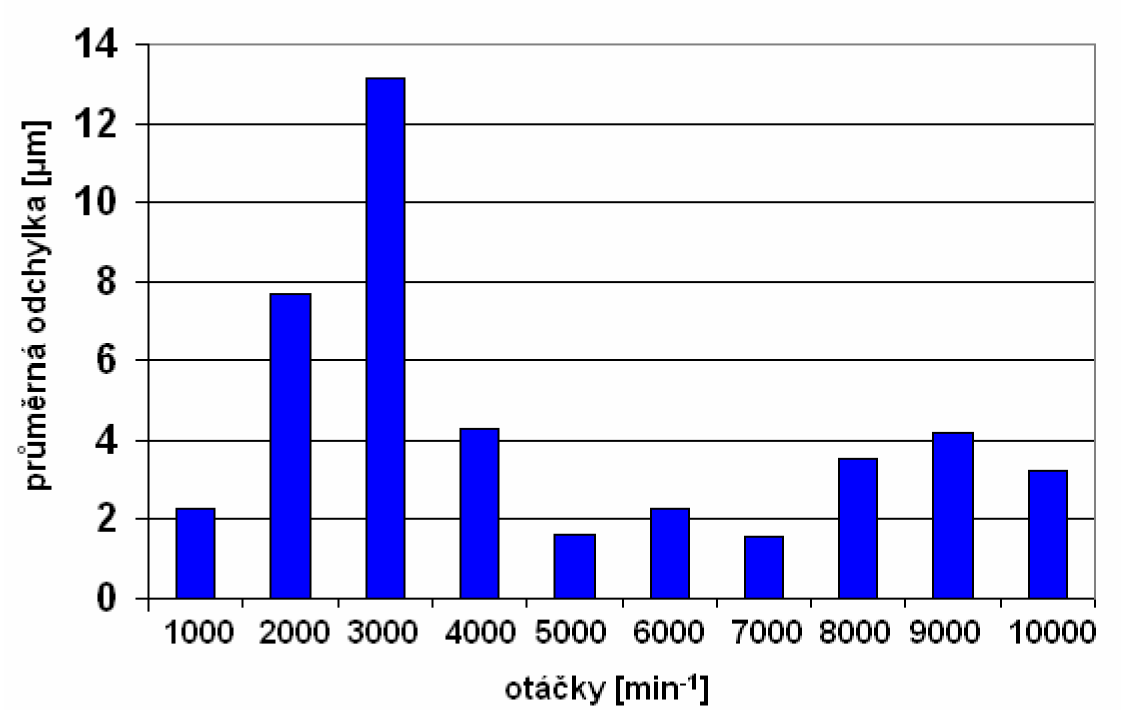
Tab. 4.1 Naměřené hodnoty



Graf 4.1 Závislost průměru trajektorie na otáčkách



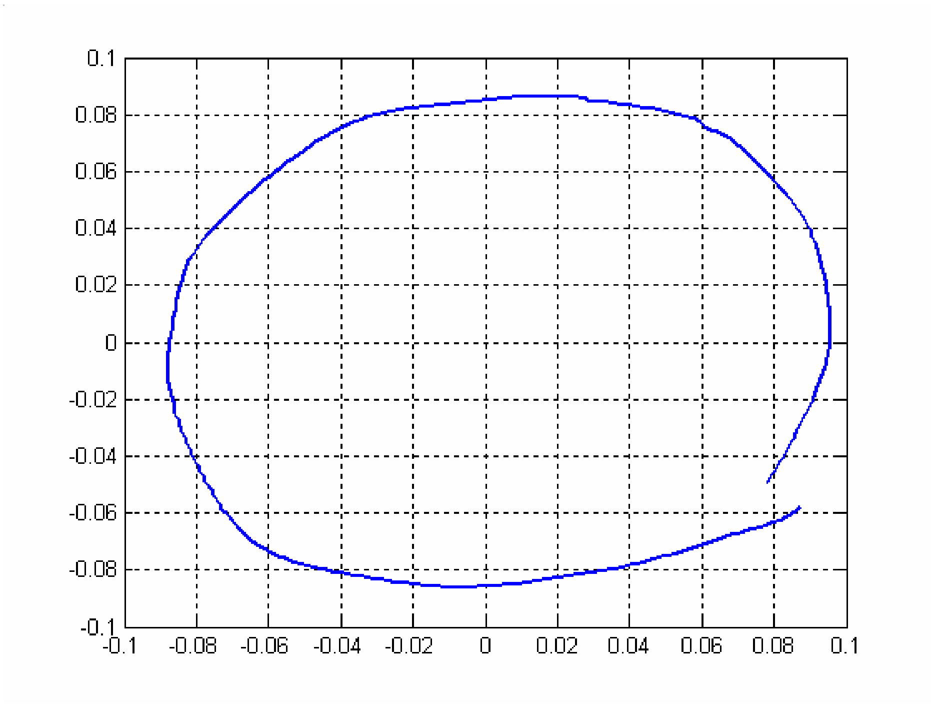
Graf 4.2 Závislost směrodatné odchylky trajektorie hřídele na otáčkách



Graf 4.3 Závislost průměrné odchylky trajektorie hřídele na otáčkách

Nejvyšších hodnot dosahuje průměrný poloměr, směrodatná odchylka a průměrná odchylka při 3000 otáčkách. Zde totiž dochází k přechodu přes kritické otáčky.

Na obrázku 4.5 je vykreslena trajektorie hřídele v rozmezí jedné periody. Ideálním tvarem by byla kružnice, která je typická pro Lavalův rotor.



Obr. 4.5 Vykreslení trajektorie

	Frekvence [Hz]	Kritické otáčky [min^{-1}]	Úhlová rychlost [$rad.s^{-1}$]
EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA	41,5	2490	260,1
TEORETICKÝ VÝPOČET	44,78	2686,9	281,37

Tab. 4.2 Porovnání výsledků

Z tabulky 4.2 je vidět, že experimentální analýza a teoretický výpočet se navzájem liší. Tato chyba je způsobená zanedbáním hmotnosti hřídele při výpočtu.

ZÁVĚR

Předmětem této práce bylo zjistit, zda daná modelová rotorová soustava může být považována za Lavalův rotor. Na základě provedeného experimentu a získaných dat lze tedy usoudit, že modelová rotorová soustava je Lavalův rotor. Zadání bakalářské práce bylo splněno.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

[1] GASCH, Robert, PFÜTZNER, Herbert. *Dynamika rotorů*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1980. 164 s.

[2] GENTA, Giancarlo. *Dynamics of rotating systems*. New York : Springer, 2005. 660 s. ISBN 978-0-387-20936-4.

[3] JULIŠ, Karel, BREPTA, Rudolf a kol. *Mechanika: Dynamika*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987. 688 s.

[4] MIŠKOVSKÝ, Ladislav. *Parní a plynové turbíny*. 3. vydání. Praha : ČVUT, 1949. 422 s.

[5] ŠČEGLJAJEV, Andrej Vladimírovič. *Parní turbíny : Teorie tepelného děje a konstrukce turbín*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1983. 555 s.

[6] CAMPOS, Joaquín, CRAWFORD, Mark, LONGORIA, Raul. Rotordynamic modeling using bond graphs : Modeling the Jeffcott rotor. *IEEE Magnetics society* [online]. 2005, vol. 41, no. 1 [cit. 2009-04-25]. Dostupný z WWW: <http://ieeexplore.ieee.org>. ISSN 0018-9464.

[7] MAZNÝ, Petr, KRÁTKÝ, Vladislav. Začala doba turbín. *Škodovák*. 30.1.2004, č. 2, s. 4. Dostupný z WWW: <http://www.skoda.cz/skodovak/>.

[8] *Mysli a vzdělávej se* [online]. c2007 [cit. 2009-04-28]. Dostupný z WWW: <http://www.imysli.cz/ilearning/disertacka/index.html>.

[9] *Parní stroje, parní turbíny, parní kotle : Parní turbína de Lavalova* [online]. [2005] [cit. 2009-04-28]. Dostupný z WWW: <http://www.hornictvi.info/stroje/pstroj1/032.htm>.

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

Veličina	Symbol	Jednotka
Úhlová rychlost	ω	rad.s^{-1}
Čas	t	s
Průměr	d	m
Excentricita	ε	m
Frekvence	f	Hz
Gravitační zrychlení	g	m.s^{-2}
Tuhost	k	N.m^{-1}
Vlastní frekvence	Ω	rad.s^{-1}
Moment setrvačnosti	J	kg.m^{2}
Délka	l	m
Otáčky	n	min^{-1}
Síla	F	N
Moment	M	N.m
Hmotnost	m	kg
Souřadnice kartézské	x, y, z	m, m, m

Fyzikální konstanty

Veličina	Symbol	Jednotka	Hodnota
Modul pružnosti	E	MPa	$2{,}1.10^{11}$