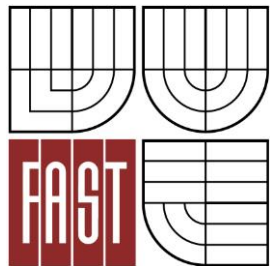




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

MODELOVÁNÍ POSTKRITICKÝCH STAVŮ ŠTÍHLÝCH KONSTRUKCÍ

MODELLING OF POSTCRITICAL STATES OF SLENDER STRUCTURES

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

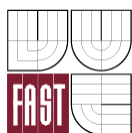
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. JAN MAŠEK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. PETR FRANTÍK, Ph.D.

BRNO 2016



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Diplomant	Bc. Jan Mašek
Název	Modelování postkritických stavů štíhlých konstrukcí
Vedoucí diplomové práce	Ing. Petr Frantík, Ph.D.
Datum zadání diplomové práce	31. 3. 2015
Datum odevzdání diplomové práce	15. 1. 2016
V Brně dne 31. 3. 2015	

.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

Literatura dle vývoje a pokynů vedoucího práce.

Macur, J., Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace, skripta, nakladatelství PC-DIR, Brno, 1995

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha, 1994.

Zásady pro vypracování

Nastudování potřebných znalostí dle pokynů vedoucího práce. Zorientování se v problematice. Vytvoření numerických modelů a jejich aplikace.

Struktura bakalářské/diplomové práce

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

3.

.....

Ing. Petr Frantík, Ph.D.
Vedoucí diplomové práce

Abstrakt

Cílem předkládané práce je vytvoření ucelené publikace zabývající se vlastnostmi, řešením a studiem chování dynamických systémů modelů mechanických konstrukcí.

Úvodní pasáž teoretické části práce provází čtenáře nejprve problematikou popisu deterministických modelů, předkládá způsoby numerického řešení a zkoumá jeho stabilitu. Rozebrány jsou rovněž možné varianty zatížení, tlumení a odezvy dynamicky zatížené konstrukce.

V navazujících kapitolách je podrobně pojednáno o způsobech sledování vývoje dynamických systémů a možnostech identifikace nelineárních a chaotických projevů. Pozornost je věnována také způsobům zobrazování a barevným prostorům jako nezbytným nástrojům pro zkoumání citlivých a složitých systémů. Teoretický základ práce uzavírá úvod do oblasti fraktální geometrie.

Diplomová práce dále pokračuje aplikací uvedených poznatků a ukazuje přístup k numerické simulaci a studiu modelů reálných konstrukcí. Nejprve je čtenář seznámen s modelem jednoduchého rotátoru jako nejjednodušším numerickým modelem splňujícím podmínky existence jevu deterministického chaosu. Následující model dvojitého rotátoru ukazuje na problémy pozorování systému s více stavovými proměnnými.

Jako příklady modelů reálných konstrukcí s mnoha stupni volnosti konečně slouží modely vetknutého a volného prutu. Tyto modely v ještě větší šíři ukazují, že jednoznačné nebo alespoň dostatečně vypovídající sledování vývoje deterministického systému stává se úkolem složitým, vyžadujícím důvtipný přístup.

Klíčová slova

Dynamické systémy, deterministický chaos, fraktální geometrie, fyzikální diskretizace, metoda tuhých dílců, Lagrangeovská a Hamiltonovská mechanika, pohybové rovnice, nekonzervativní zatížení, velké deformace.

Abstract

The aim of the presented thesis is to create a compact publication which deals with properties, solution and examination of behavior of dynamical systems as models of mechanical structures.

The opening portion of the theoretical part leads the reader through the subject of description of dynamical systems, offers solution methods and investigates solution stability. As the introduction proceeds, possible forms of structure loading, damping and response are presented.

Following chapters discuss extensively the possible approaches to system behavior observation and identification of nonlinear and chaotic phenomena. The attention is also paid to displaying methods and color spaces as these are essential for the examination of complex and sensitive systems. The theoretical part of the thesis ends with an introduction to fractal geometry.

As the theoretical background is laid down, the thesis proceeds with an application of the knowledge and shows the approach to numerical simulation and study of models of real structures. First, the reader is introduced to the single pendulum model, as the simplest model to exhibit chaotic behavior. The following double pendulum model shows the obstacles of observing systems with more state variables.

The models of free rod and cantilever serve as examples of real structure models with many degrees of freedom. These models show even more that a definite or at least sufficiently relevant monitoring of behavior of such deterministic systems is a challenging task which requires sophisticated approach.

Keywords

Dynamical systems, deterministic chaos, fractal geometry, physical discretization, rigid element method, Lagrangian and Hamiltonian mechanics, equations of motion, non-conservative load, large deflections.

Bibliografická citace práce

MAŠEK, Jan. Modelování postkritických stavů štíhlých konstrukcí. Brno, 2016. 118s., 2s. příl. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Petr Frantík, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci zpracoval samostatně, pod odborným vedením vedoucího práce Ing. Petra Frantíka, Ph.D., a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 12.1.2016

.....
podpis autora
Jan Mašek

Poděkování:

Rád bych poděkoval vedoucímu své diplomové práce panu Ing. Petru Frantíkovi, Ph.D. za otevřený a konstruktivní odborný a přátelský osobní přístup v průběhu naší spolupráce. Především díky jeho nezištné pomoci jsem si osvojil schopnosti a způsob myšlení nezbytné k vypracování této práce.

Dále bych rád poděkoval vyučujícím a vědeckým pracovníkům Ústavu stavební mechaniky, kteří ve mně svým nadšením a pečlivou prací probudili podobné zálibení v mechanice.

V neposlední řadě chci poděkovat svým rodičům, kteří mě vždy neúnavně podporovali a poskytnuli mi tak skvělé zázemí po celou dobu studia. Poděkování patří i mému bratrovi, bez jehož pomoci a podpory by pro mne studium bylo mnohem obtížnější.

V Brně dne 12.1.2016

.....
podpis autora
Jan Mašek

Obsah

I	Teorie dynamických systémů	16
1	Úvod	17
1.1	Cíle práce	17
1.2	Filozofie poznání	18
1.3	Od řádu k chaosu	19
2	Dynamické systémy	22
2.1	Deterministický dynamický systém	22
2.2	Dynamické systémy	23
2.2.1	Terminologie	24
2.2.2	Fázový portrét	25
2.2.3	Operátor toku	26
2.3	Rovnovážné řešení	26
2.3.1	Stabilita kritického bodu	26
2.4	Stabilita trajektorií	27
2.4.1	Stabilita podle Ljapunovova	27
2.4.2	Asymptotická stabilita	27
2.4.3	Orbitální stabilita	28
2.4.4	Asymptotická orbitální stabilita	29
2.5	Linearizace řešení dynamického systému	29
2.6	Ljapunovova teorie stability	31
2.7	Deterministický chaos	33
3	Metody numerického řešení	35
3.1	Jednokrokové metody	35
3.1.1	Eulerova metoda	35
3.1.2	Semi-implicitní Eulerova metoda	36
3.1.3	Metoda Runge-Kutta	37
3.2	Vícekrokové metody	38
3.2.1	Adamsovy metody	38
3.3	Adaptivní metody	38
4	Dynamická odezva systému	39
4.1	Tlumení	39
4.2	Dynamické zatížení	41
4.3	Dynamická odezva konstrukce	42

4.3.1	Volné kmitání	42
4.3.2	Rezonance	42
4.3.3	Odezva na dynamické zatížení	42
4.3.4	Vývoj dynamické odezvy v čase	43
5	Nelineární jevy a jejich sledování	44
5.1	Limitní množiny	44
5.1.1	Limitní body	44
5.1.2	Limitní cykly	45
5.1.3	Chaotické atraktory	45
5.2	Bazény přitažlivosti	45
5.3	Poincarého mapa	47
5.3.1	Volba řezných rovin	47
5.3.2	Projevy limitního chování v Poincarého mapě	48
5.3.3	Poznámky k Poincarého mapám	50
5.4	Bifurkační diagram	51
5.4.1	Poznámky k bifurkačním diagramům	51
5.5	Strukturální nestabilita a bifurkace	57
5.5.1	Bifurkace v dynamických systémech	57
5.5.2	Kaskáda bifurkací a Feigenbaumovy konstanty	60
6	Fraktály	62
6.1	Soběpodobnost	62
6.2	Fraktální dimenze	63
II	Numerické simulace nelineárních dynamických systémů	67
7	Jednoduchý rotátor	68
7.1	Odvození modelu	69
7.2	Vybrané příklady	71
7.2.1	Fázové portréty	71
7.2.2	Identifikace limitních stavů	72
7.2.3	Bazény přitažlivosti	78
8	Dvojitý rotátor	80
8.1	Odvození modelu	81
8.2	Vybrané příklady	84
8.2.1	Bifurkační diagramy	84
8.2.2	Poincarého mapy	84
9	Volný prut	90
9.1	Dynamický model	91
9.2	Podmínky pro konstrukci Poincarého map	97
9.3	Vybrané příklady	100
9.3.1	Výsledky simulací	100

10 Vetknutý prut	104
10.1 Vybrané příklady	105
10.1.1 Výsledky simulací	105
11 Závěr	109
 III Přílohy	 113
Literatura	115
Seznam symbolů	118

Seznam obrázků

1.1	Poincarého mapa trajektorie jednoduchého rotátoru.	18
2.1	Řešení, integrální křivka a orbita dynamického systému.	25
2.2	Příklady fázových portrétů systémů se dvěma stavovými proměnnými.	25
2.3	Trajektorie stabilní podle Ljapunovova.	27
2.4	Asymptoticky stabilní trajektorie.	27
2.5	Fázové portréty trajektorií, které jsou nestabilní podle Ljapunovova, ale asymptoticky se blíží kritickému bodu.	28
2.6	Hyperbolické pevné body.	30
2.7	Okolí U kritického bodu $\bar{x}$ a směr vektorového pole na jeho hranici.	31
2.8	Izolinie hodnot $V=C$ a gradient ∇V	32
3.1	Odchylování od skutečné trajektorie při použití Eulerovy metody.	36
4.1	Průběh obecného buzení.	41
4.2	Průběh periodického buzení.	41
4.3	Průběh harmonického buzení.	41
4.4	Amplituda ustáleného kmitání v závislosti na frekvenci buzení.	42
4.5	Nárůst amplitudy kmitání při rezonanci.	43
5.1	Bazény přitažlivosti jednoduchého rotátoru v monochromatické barevné škále.	46
5.2	Bazény přitažlivosti jednoduchého rotátoru v trilineární barevné škále.	46
5.3	Idealizace konstrukce Poincarého mapy.	47
5.4	Poincarého mapa jednoduchého limitního cyklu.	48
5.5	Poincarého mapa jednoduchého limitního cyklu vyplňujícího kompaktní oblast.	48
5.6	Poincarého mapa ztrojeného limitního cyklu vyplňujícího kompaktní oblasti.	49
5.7	Poincarého mapa chaotického atraktoru.	49
5.8	Poincarého mapa zaznamenaná po ustálení systému.	50
5.9	Poincarého mapa zaznamenaná včetně ustalování systému.	50
5.10	Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru vytvořený zvyšováním amplitudy za chodu simulace.	52
5.11	Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru vytvořený snižováním amplitudy za chodu simulace.	53
5.12	Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru získaný opakováním simulace pro $\varphi = 0, \omega_0 = 0$	54

5.13	Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru získaný mnoha simulacemi s náhodnými počátečními podmínkami.	55
5.14	Detail bifurkačního diagramu 5.13.	56
5.15	Detail bifurkačního diagramu 5.14.	56
5.16	Superkritická Hopfova bifurkace.	58
5.17	Zdvojování a půlení periody jako přechod mezi řádem a chaosem.	58
5.18	Lokální zdvojení periody limitního cyklu.	59
5.19	Superkritická vidličková bifurkace.	59
5.20	Kaskáda bifurkací konvergující k Feigenbaumovým konstantám.	61
6.1	Konstrukce Kochovy křivky.	62
6.2	Měření délky Kochovy křivky.	63
6.3	Naměřené délky Kochovy křivky v dvojitě logaritmickém měřítku.	64
6.4	Poincarého mapa chaotického atraktoru.	65
6.5	Rozhraní bazénů přitažlivosti.	66
7.1	Model jednoduchého rotátoru.	68
7.2	Fázový portrét netlumeného jednoduchého rotátoru.	71
7.3	Fázový portrét tlumeného jednoduchého rotátoru.	72
7.4	Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 2.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$	73
7.5	Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 2.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$	73
7.6	Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 7.5 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$	74
7.7	Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 7.5 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$	74
7.8	Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 7.6 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$	75
7.9	Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 7.6 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$	75
7.10	Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 7.7 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$	76
7.11	Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 7.7 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$	76
7.12	Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$	77
7.13	Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$	77
7.14	Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$	78
7.15	Konstrukce bazénů přitažlivosti, nedostatečně ustálený stav.	79
7.16	Konstrukce bazénů přitažlivosti, dostatečně ustálený stav.	79
8.1	Model dvojitého rotátoru.	80
8.2	Bifurkační diagram prvního dílce dvojitého rotátoru vytvořený zvyšováním amplitudy za chodu simulace.	85
8.3	Bifurkační diagram druhého dílce dvojitého rotátoru vytvořený zvyšováním amplitudy za chodu simulace.	86
8.4	Bifurkační diagram prvního dílce dvojitého rotátoru získaný mnoha simulacemi s náhodnými počátečními podmínkami.	87
8.5	Bifurkační diagram druhého dílce dvojitého rotátoru získaný mnoha simulacemi s náhodnými počátečními podmínkami.	88

8.6	Poincarého mapa prvního dílce v limitním cyklu pro parametry $A = 5.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 5.0 \text{ s}^{-1}$.	89
8.7	Poincarého mapa druhého dílce v limitním cyklu pro parametry $A = 5.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 5.0 \text{ s}^{-1}$.	89
9.1	Volný prut zatížený sledující silou.	90
9.2	Model volného prutu.	91
9.3	Působení sledující síly.	96
9.4	První podmínka konstrukce Poincarého mapy.	97
9.5	Druhá podmínka konstrukce Poincarého mapy.	98
9.6	Třetí podmínka konstrukce Poincarého mapy.	98
9.7	Bifurkační diagram volného prutu vytvořený užitím Poincarého map P0 .	101
9.8	Poincarého mapa P0 pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 7.0 \text{ N}$.	101
9.9	Bifurkační diagram volného prutu vytvořený užitím Poincarého map P1 .	102
9.10	Poincarého mapa P1 pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 7.0 \text{ N}$.	102
9.11	Bifurkační diagram volného prutu vytvořený užitím Poincarého map P2 .	103
9.12	Poincarého mapa P2 pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 7.0 \text{ N}$.	103
10.1	Model vetknutého prutu.	104
10.2	Bifurkační diagram vetknutého prutu vytvořený užitím Poincarého mapy P0 .	106
10.3	Poincarého mapa P0 pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 4.0 \text{ N}$.	106
10.4	Bifurkační diagram vetknutého prutu vytvořený užitím Poincarého mapy P1 .	107
10.5	Poincarého mapa P1 pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 4.0 \text{ N}$.	107
10.6	Bifurkační diagram vetknutého prutu vytvořený užitím Poincarého mapy P2 .	108
10.7	Poincarého mapa P2 pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 4.0 \text{ N}$.	108

Seznam tabulek

5.1	Konvergence souřadnic bifurkačních bodů k Feigenbaumovým konstantám. . .	60
6.1	Zjištění délky Kochovy křivky.	63

Část I

Teorie dynamických systémů

Kapitola 1

Úvod

Tato práce je vytvořena se záměrem poskytnout čtenáři celistvý materiál, jehož obsah shrnuje znalosti o chování dynamických deterministických systémů a metody vyšetřování jejich vývoje v čase. Studium zvoleného tématu se opírá o výsledky bádání mnoha vědních oborů, zejména teorie dynamických systémů a teorie deterministického chaosu.

Jakkoli je konečný cíl práce zúžen na modelování a studium dynamických modelů mechanických konstrukcí, bylo by zcela jistě chybou ignorovat zásadní souvislosti mezi zdánlivě vzdálenými obory a kvalitativní podobností mezi tématicky odlišnými modely. Jev nelinearity a deterministického chaosu totiž, jak ukázal vývoj posledního století, lze kolem nás pozorovat bezděčně a patrně nejčastěji. Z hlediska deterministických modelů postačuje pro vznik chaosu splnění pouze nemnoha předpokladů a chaotický vývoj tak nastává i u překvapivě jednoduchých modelů.

1.1 Cíle práce

Ve stavební praxi je přirozená snaha omezit účinky dynamického chování konstrukcí. Nicméně je třeba mít na paměti, že obecně by tato snaha neměla vést k omezujícím předpokladům již při tvorbě matematického modelu konstrukce nebo k příliš zjednodušenému způsobu vyšetřování chování modelu. Toto platí zejména v případě modelů mechanických konstrukcí, jenž slouží v postkritickém stavu a mohou kmitat v oblasti velkých deformací.

Teoretický základ práce poskytuje čtenáři přehled o možném způsobu vytváření dynamických modelů a jejich numerickém řešení. Především ale ukazuje metody sledování a rozpoznávání nelineárních jevů. Navazující kapitoly pojednávají o aplikaci přednesených metod na konkrétní numerické modely a diskutují obdržené výsledky.

Čtenář by tak měl opouštět představu chaosu jako nežádoucího způsobu chování a postupně si osvojit nástroje k jeho studiu. Chaotické chování totiž, jak uvidíme, je sice vpravdě *podivné*, ale nedostatkem řádu se nutně nevyznačuje, viz obrázek 1.1.



Obrázek 1.1: Poincarého mapa trajektorie jednoduchého rotátoru.

1.2 Filozofie poznání

Ve své knize *Struktura vědeckých revolucí* (1962), viz [16], publikoval americký teoretik vědy THOMAS SAMUEL KUHN tvrzení, že vědecké poznání se nevyvíjí postupným hromaděním znalostí, ale děje se skokově, vždy ve dvou kvalitativně odlišných obdobích vědecké aktivity.

První období označené jako období *normální vědy* využívá obecně uznaný model poznání, takzvané *paradigma*¹. Náplň činnosti vědců je podle Kuhna *řešení hádanek*, neboli aplikace paradigmatu, jenž je vědecky a společensky přijaté, na objasnění problémů své doby. Obdržené řešení problému by pak ideálně mělo být blízko počátečním očekáváním do té míry, aby společnosti *nečinilo obtíže mu uvěřit*.

Anomální výsledky jsou zpočátku přičítány chybě vědce. S jejich hromaděním se však stává zřejmým, že možnosti současného paradigmatu se začínají vyčerpávat. Tehdy začíná narůstat tlak na vysvětlení problémů mimo dosah soudobé vědy, podle Kuhna nastává *vědecká revoluce*. Platnost současného paradigmatu je zpochybněna a je třeba přijmout pohled širší, který poskytne nástroj pro vysvětlení anomálií i další bádání.

A právě skromné předpoklady nutné pro vznik chaotického řešení vedly na přelomu 19. a 20. století k další nevyhnutelné změně pohledu na svět. Existenci chaotického chování dokázal HENRI POINCARÉ v roce 1899 při studiu modelu tří nebeských těles pod vzájemným gravitačním působením.

¹ Paradigma je souhrnem teorií, předpokladů a metod tvořících soudobý pohled vědy na svět.

1.3 Od řádu k chaosu

Vývoj představ lidstva o modelu kosmu je vůbec vynikající ukázkou vlivu mínění společnosti na činnost vědy a v mnohém dává Kuhnově tvrzení za pravdu.

Názor, že Země je pevným středem vesmíru, jako první představil řecký filozof ARISTOTELÉS v práci *O nebi*. Základní strukturu geocentrického kosmu tvořily dvě soustředné kulové plochy. Menší představovala nehybný povrch Země a větší, nesoucí hvězdy a denně se otáčející, uzavírala kulový kosmos do konečného celku. Mezi povrchem Země a hvězdnou sférou bylo ještě dalších sedm sférických orbit, které obývaly tehdy známé planety - Saturn, Jupiter, Mars, Slunce, Merkur, Venuše a Měsíc. Jejich pohyb byl způsoben otáčením vnější sféry a byl uvažován jako rovnoměrný kruhový, neboť tento byl vnímán jako nejušlechtlejší druh pohybu. Model dobře vyhovoval tehdejšímu pozorování: povrch Země se jistě zdá jako stacionární, bylo možné poměrně přesně předpovědět budoucí pohyb nebeských těles a částečně vysvětloval souvislost kosmu a některých pozemských jevů jako kolísání mořské hladiny.

Na počátku 16. století polský astronom a matematik MIKULÁŠ KOPERNÍK při pozorování pohybu nebeských těles zaznamenal tehdejší *paradigmatem* nevysvětlitelné jevy. Takzvaný *problém planet* popisoval pravidelná období, kdy se planety - Merkur, Venuše, Mars, Jupiter a Saturn - jeví pozorovateli jasnější než obvykle. Navíc se jejich pohyb po nebi čas od času zastavuje a na okamžik obrací a potom dále pokračuje po obvyklé dráze.

Koperník předložil vpravdě revoluční vysvětlení: planety (včetně Země) obíhají kolem stacionárního Slunce². Aby model vyhovoval dosavadnímu pozorování, Země musí být planetou ležící mezi Venuší a Marsem a navíc se otáčet kolem vlastní osy. KOPERNÍK tak zcela vyloučil Zemi z pozice nejvýznamnějšího místa v centru všeho.

Newtonovská mechanika

Půl století po Koperníkově smrti objevil italský astronom a fyzik GALILEO GALILEI za pomoci nově vynalezeného teleskopu čtyři největší Jupiterovy měsíce Ganymed, Callisto, Io a Europa. I díky tomuto objevu v něm uzrávala představa planet jako izolovaných těles ideálně se pohybujících nekonečným vesmírem. Galileo předpokládal, že takový rovnoměrný pohyb planet by trval bez omezení, pokud by nebyl přerušen srážkou s jiným tělesem. Protože se ale planety zřejmě pohybují bez ustání po eliptických drahách, musí být neustále pod vlivem mechanického působení - gravitační síly. Galileo tak v podstatě vyslovil první z pozdějších Newtonových zákonů:

"Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo je výslednice vnějších sil nulová, potom těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu."

SIR ISAAC NEWTON, anglický fyzik a matematik narozený rok po Galileově smrti, navázal na práci pionýrů moderní vědy a v roce 1687 ve své práci *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publikoval zákon všeobecné gravitace a tři pohybové zákony, viz [27]. Současně předložil ucelený dynamický model Sluneční soustavy a představil i problém pohybu dvou

² Prvotní Koperníkův heliocentrický model, který uvažoval kruhové oběžné dráhy, poskytoval dokonce horší výsledky než předchozí model geocentrický. Johannes Kepler později pozorováním ukázal, že přesněji je třeba uvažovat eliptické oběžné dráhy.

gravitačně vázaných hmotných těles pohybujících se v prostoru. Podle Newtonova³ zákona gravitace je gravitační síla vzájemně působící na dvě tělesa rovna:

$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

kde G je obecná konstanta gravitačního působení, m_1 a m_2 jsou hmotnosti těles a r je jejich vzdálenost.

Řešení problému dvou těles dále pokračovalo: v roce 1710 JOHANN BERNOULLI ukázal, že dvě hmotná tělesa vzájemně vázaná gravitací se musí prostorem pohybovat po kuželosečce. Konečně v roce 1744, sedmnáct let po Newtonově smrti, publikoval LEONHARD EULER úplné analytické řešení problému.

Výsledky řešení problému pohybu vzájemně přitahovaných těles navíc nacházely užitek ve fyzikálním zkoumání na atomární úrovni. Navzdory rozdílu tříadvaceti řádů ve velikosti oproti planetám, klasická řešení dynamiky atomových částic vycházejí ze vztahu:

$$F_1 = F_2 = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.2)$$

kde ε je dielektrická vodivost vakua a q_1 a q_2 jsou velikosti náboje částic.

Problém tří těles

Řešení problému dvou těles prakticky umožnilo popsat pohyb modelu Země a Měsíce a částic atomu vodíku⁴. Dopad vyřešení problému dvou těles zároveň ukázal na důležitost vyřešení problému interakce systému tří a nakonec libovolně mnoha těles.

Není tedy překvapením, že na studiu problému tří těles dále pracovali nejlepší matematikové 18. a 19. století. Mezi jinými například JOSEPH-LOUIS LAGRANGE, SIMÉON DENIS POISSON, PIERRE-SIMON LAPLACE nebo CARL FRIEDRICH GAUSS. Přestože výzkumné úsilí vedlo k mnoha významným pokrokům především v teorii diferenciálních rovnic, problém tří těles zůstal stále nevyřešen až do konce 19. století.

Na konci osmdesátých let 19. století se blížily šedesátiny švédského krále OSKARA II.. U té příležitosti švédský matematik GÖSTA MITTAG-LEFFLER navrhl panovníkovi, aby vyhlasil cenu pro matematika, který vyřeší problém tří těles:

„Uvažujme systém tří (nebo libovolně mnoha) hmotných bodů, které jsou navzájem přitahovány podle zákona inverzního čtverce (1.1). Za předpokladu, že tyto hmotné body vzájemně nekolidují, nalezněte řešení trajektorie bodů ve tvaru známých funkcí, které bude konvergovat pro všechny časy v minulosti i budoucnosti stejně.“

V roce 1885 se o výzvě doslechl tehdy jednatřicetiletý francouzský fyzik a matematik HENRI POINCARÉ a započal svoji práci na řešení problému. Po třech letech, dva týdny před uzávěrkou, předložil práci, ve které za použití novátorských geometrických metod uvedl řešení problému tří těles a důkaz o jeho stabilitě. Poincaré byl 21. ledna 1889, v den králových narozenin, za práci odměněn cenou 2 500 švédských korun a jeho práce měla být uveřejněna ve významném švédském matematickém časopise *Acta Mathematica*, jehož byl Mittag-Leffler tehdy šéfredaktorem.

³ V roce 1686, když Newton poprvé prezentoval svoji práci, byl obviněn dalším velikánem své doby, Robertem Hookem, z plagiátorství. Hooke označoval sebe za autora myšlenky, že *vliv gravitace klesá se čtvercem vzdálenosti těles*.

⁴ Objeveného později v roce 1766 Angličanem Henrym Cavendishem.

Poincarého chyba

Při úpravách práce pro publikaci v časopise nicméně Poincaré objevil chybu ve svém důkazu stability řešení a byl tak nucen vyžádat zastavení chystaného tisku časopisu do doby, než se mu podaří chybu vyřešit.

V lednu 1890 odevzdal Poincaré opravenou verzi práce a na jejích 270 stranách dokázal, že pro problém tří těles nelze naléznout obecné řešení, neboť pro některé počáteční podmínky *stavové proměnné systému bloudí ve fázovém prostoru bezcílně a nepředvídatelně*. Poincaré ukázal, že malé rozdíly v počátečních podmínkách mohou vést k neomezeně velkým chybám v konečném řešení. Ze své peněžité výhry se tak Poincaré dlouho netěšil. Zastavení tisku časopisu a vytištění nového vydání ho nakonec stálo 3 500 švédských korun.

Navzdory významu Poincarého objevu a navzdory tomu, že důkaz chaotického řešení dále publikoval v roce 1903 v díle *Věda a Metoda*, viz [29], velkou částí vědecké veřejnosti nebyla teorie chaosu brána na zřetel až do poloviny 20. století. Možnost vzniku chaotického chování totiž ukazuje, že realita je mnohem komplikovanější, než si lidstvo bylo ochotno připustit. Představa o účelu výzkumu byla ukázat *co možné je a ne co možné není*.⁵

⁵ Zajímavě o možném katastrofickém vlivu neočekávaných událostí píše ve své knize Nassim Nicholas Taleb [31].

Kapitola 2

Dynamické systémy

Matematické nástroje pro simulaci a sledování modelů, jejichž stav se mění v čase, studuje a rozvíjí teorie dynamických systémů. Takto obecná definice dává tušit, že jako dynamický systém lze chápat děje v mnoha vědních oborech. Teorie dynamických systémů má tak širokou platnost.

2.1 Deterministický dynamický systém

Základním předpokladem deterministického dynamického systému je představa, že jeho stav v každém čase lze bezezbytku a zcela přesně popsat. Deterministický přístup neuvažuje nejistoty v počátečních podmínkách nebo nejistoty vznikající při vzájemné interakci prvků modelu.

Podle determinismu lze zcela přesně předpovědět stav dynamického systému v budoucnosti i minulosti pouze na základě znalosti počátečních podmínek a platných fyzikálních zákonů.

Jedním ze zastánců teorie determinismu byl německý matematik a filosof GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ. V práci *Von dem Verhängnisse* z roku 1838, viz [22], se lze dočíst:

"Že všechno je důsledkem předem daného osudu je stejně jisté, jako že tři krát tři je devět. Pokud se například srazí dvě koule ve volném prostoru, a pokud jsou známy jejich velikosti a dráhy a směry před kolizí, potom můžeme předpovědět a vypočítat, jakým směrem se odrazí a jak se budou chovat dále po nárazu.

Z uvedeného můžeme vidět, že všechno na světě probíhá matematicky, tedy neomylně. Pokud by tedy někdo měl dostatečný přehled o součástech světa a inteligenci dostatečnou k uvážení všech důsledků, stal by se prorokem a mohl by vidět budoucnost v přítomnosti jako v zrcadle."

LEIBNIZOVU představu deterministického modelu světa nakonec zpochybnil v roce 1927 jeho krajan WERNER KARL HEISENBERG s *principem neurčitosti*. Stav systému totiž nelze popsat s absolutní přesností. Podle kvantové mechaniky lze říci, že čím přesněji známe polohu částice, tím méně přesně lze popsat její hybnost a naopak.

Zřejmě není ani možné zahrnout do modelu veškeré okolnosti mající vliv na jeho vývoj. Nelze tedy trasovat alespoň část trajektorie, ale pouze její přibližný vývoj v n -rozměrném

kulovém okolí počátečních podmínek. O předpovědi, jak si ji představoval Leibniz, proto nemůže být řeči, viz [24].

2.2 Dynamické systémy

Stav deterministického dynamického systému je plně určen vektorem hodnot *stavových proměnných*. V závislosti na předloze modelu mohou v praxi jako stavové proměnné figurovat nejrůznější veličiny. V teoretické mechanice jsou to především zobecněné souřadnice polohy a hybnosti, v termodynamice tlak, teplota a objem, v elektrodynamice proud a napětí a podobně, viz [23].

Má-li systém n *stupňů volnosti*¹, pro jeho úplný popis potom postačuje n nezávislých proměnných $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Při použití více proměnných se tyto již nutně stávají vzájemně závislými a není žádná výhoda, kterou by tato komplikace přinesla, viz [34].

Uspořádejme stavové proměnné do vektoru $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (2.1)$$

Potom jako *fázový prostor* $\mathbb{R}^n$ označíme n -rozměrný prostor, ve kterém lze stav systému jednoznačně zobrazit jako bod. Tedy:

$$\mathbb{R}^n : \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (2.2)$$

Konečně jako model dynamického systému nazveme soustavu diferenciálních rovnic:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (2.3)$$

kde t je čas a vektor funkcí $\mathbf{F}$ obsahuje předpis budoucího vývoje systému.

Složky soustavy diferenciálních rovnic (2.3) můžeme rozepsat:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= F_0(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ \dot{x}_1 &= F_1(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ \dot{x}_2 &= F_2(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= F_{n-1}(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Po vyřešení soustavy rovnic (2.4) pro vektor počátečních podmínek $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ obdržíme vektor tečny *trajektorie systému* v čase t_0 . Soustava rovnic (2.4) je proto někdy označována jako *vektorové pole*. V závislosti na použité numerické metodě potom aproximací získáme vektor hodnot stavových proměnných v čase t :

$$\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t)). \quad (2.5)$$

¹ Ve fyzikálním smyslu je jako stupeň volnosti rozuměn nezávislý parametr popisující stav systému.

2.2.1 Terminologie

Před dalším postupem bude na místě vysvětlit některé pojmy, viz [14] nebo [15], jenž budeme při studiu dynamických systémů dále používat:

- Řešením dynamického systému (2.3) je myšleno zobrazení x z časového intervalu $I \subset \mathbb{R}^1$ do fázového prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x &: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t &\rightarrow x(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Křivka řešení $x(t, t_0, x_0)$ bývá nazývána *trajektorie* nebo *fázová křivka* procházející bodem x_0 v čase $t \geq t_0$. Z podstaty deterministického systému plynou vlastnosti řešení: jednoznačnost a diferencovatelnost vzhledem k počátečním podmínkám.

- Integrální křivka je zobrazením (grafem) hodnot řešení $x(t, t_0, x_0)$ v časovém úseku I :

$$\text{graf } x(t, t_0, x_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mid x = x(t, t_0, x_0), t \in I\}. \quad (2.7)$$
- Orbita $O(x_0)$ je množina bodů ve fázovém prostoru ležících na uzavřené trajektorii procházející bodem x_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &\in U \subset \mathbb{R}^n, \\ O(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(t, t_0, x_0), t \in I\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pojmy *integrální křivka* a *trajektorie* jsou v literatuře užívány značně volně a často bývají zaměňovány jako ekvivalentní.

Příklad

Ukažme nyní rozdíly mezi řešením, integrální křivkou a orbitou na příkladu, viz [14]. Uvažujme dynamický systém se dvěma stavovými proměnnými u, v :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= -x_0, \\ (x_0, x_1) &\in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \\ x_0(0) &= 1, x_1(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

s řešením:

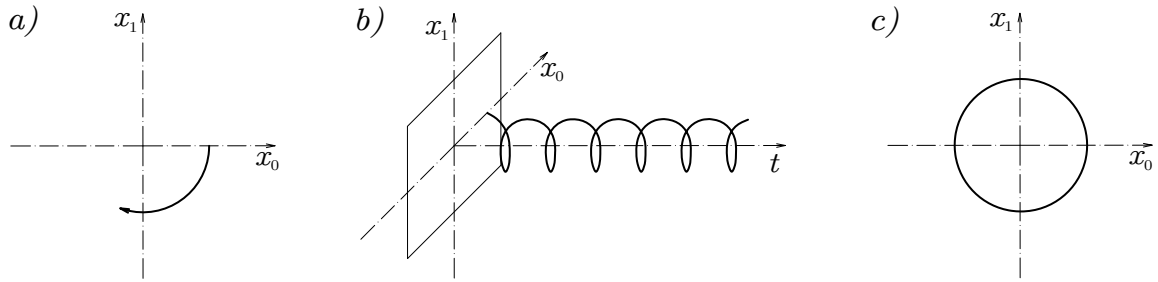
$$\begin{aligned} x_0(t) &= \cos(t), \\ x_1(t) &= -\sin(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Řešení v bodě $(1, 0)$ v čase $t = 0$ podle definice (2.6) ilustruje obrázek 2.1a. Integrální křivka, viz obrázek 2.1b, procházející bodem $(1, 0)$ v čase $t = 0$ je podle definice (2.7) dána:

$$\{(x_0, x_1, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid (x_0(t), x_1(t)) = (\cos(t), -\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.11)$$

A konečně orbitu v bodě $(1, 0)$ tvoří podle definice (2.8) kružnice, viz obrázek 2.1c:

$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \quad (2.12)$$



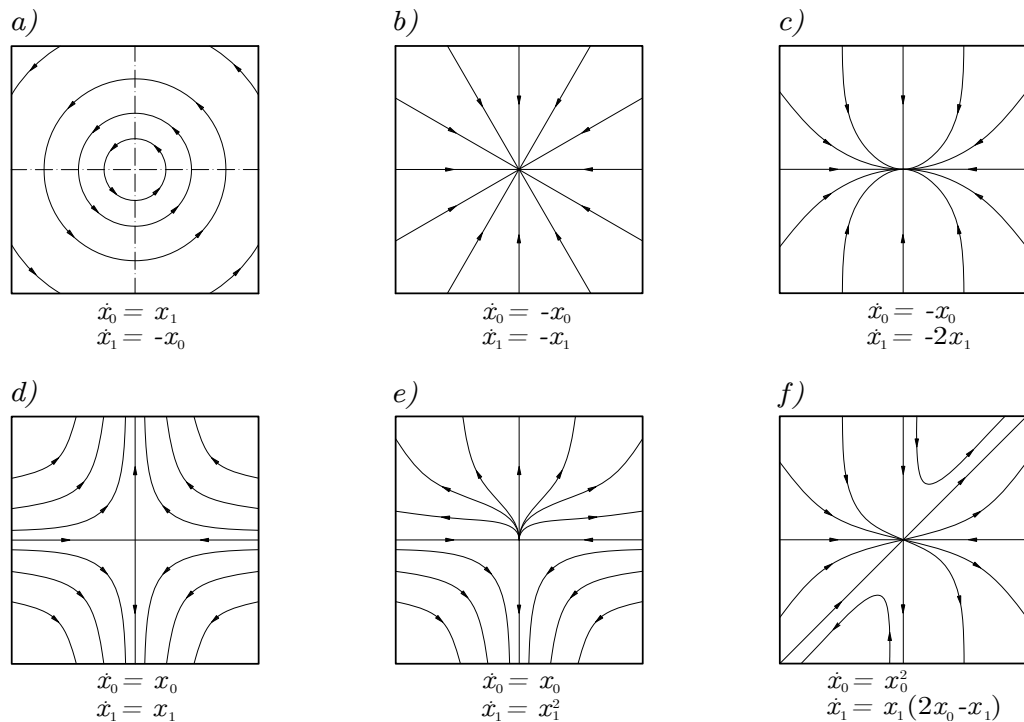
Obrázek 2.1: Řešení, integrální křivka a orbita dynamického systému.

2.2.2 Fázový portrét

Vývoj dynamického systému v čase je zřejmě závislý na počátečních hodnotách stavových proměnných - počátečních podmínkách. Zaznamenávejme trajektorie, které získáme postupným řešením pro množinu počátečních podmínek. Po vynesení trajektorií ve fázovém prostoru získáme *fázový portrét systému*.

Zůstaneme-li nadále u dynamických systémů se dvěma stavovými proměnnými x_0 a x_1 , fázovým prostorem je rovina. Tohoto mimořádně názorného fázového prostoru užívá obrázek (2.2) k ukázce některých příkladů fázových portrétů autonomních dynamických systémů. Šipky ukazují směr vývoje systému v čase.

Poznámka: Jako autonomní se označují dynamické systémy, jejichž vektor funkcí (2.3) není závislý na čase. Neautonomní systémy, které na čase závisí, můžeme na autonomní převést nahrazením času další stavovou proměnnou $\dot{x}_n = 1$, viz [24].



Obrázek 2.2: Příklady fázových portrétů systémů se dvěma stavovými proměnnými.

2.2.3 Operátor toku

Levá strana rovnice (2.3) reprezentuje vektor změny rychlosti systému v čase. Při konstantním časovém kroku řešení tento vektor udává rychlost toku bodů podél trajektorie ve fázovém prostoru pro každou stavovou proměnnou x_i , viz [24].

Pro známé počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ lze definovat zobrazení Φ_t fázového prostoru $\mathbb{R}^n$ na sebe takové, že každému stavu $x(0)$ a času t přiřadí stav $x(t)$.

Takové zobrazení se nazývá *operátor toku* nebo *evoluční operátor*. Operátor toku obsahuje všechna řešení soustavy (2.3). Jeho pomocí tak lze stanovit stavy v minulosti i budoucnosti.

Řešení soustavy rovnic pomocí evolučního operátoru při počátečních podmínkách $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ lze vyjádřit, viz [23]:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_{t-t_0}(\mathbf{x}(0)). \quad (2.13)$$

Z uvedeného plyne:

$$\begin{aligned} \Phi_{s+t}(\mathbf{x}) &= \Phi_s(\Phi_t(\mathbf{x})), \\ \Phi_t(\Phi_{-t}(\mathbf{x})) &= \Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

a tedy:

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}. \quad (2.15)$$

Inverzní operátor toku k operátoru definujícímu stav v budoucnosti je tedy operátor toku definující stav v minulosti.

2.3 Rovnovážné řešení

Stav dynamického systému (2.3) se obecně mění v čase. Může ale existovat řešení, pro které platí:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0. \quad (2.16)$$

Takové řešení je v závislosti na literatuře nazýváno jako *rovnovážné řešení*, *ustálený stav* nebo *singularita*. Odpovídající bod ve fázovém prostoru bývá označován jako *pevný* nebo *kritický bod*.

2.3.1 Stabilita kritického bodu

Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ považujeme za *stabilní*, viz [14], existuje-li k jeho okolí N takové okolí M , kterým procházejí všechny trajektorie tak, že platí $M \subseteq N$ pro všechny časy.

Pokud je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ stabilní a navíc existuje konstanta $b > 0$ taková, že pro každé následující řešení $\mathbf{x}(t)$ platí:

$$|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t)| < b \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t)| = 0, \quad (2.17)$$

potom lze kritický bod nazvat *asymptoticky stabilním*. Trajektorie se tedy k asymptoticky stabilnímu bodu postupně přibližují, viz například obrázek 2.2b. Doplňme, že $|\cdot|$ je norma ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Stabilní bod, který není asymptoticky stabilní, označme jako *neutrálně stabilní*. K takovému bodu se trajektorie nepřibližují ani se od něho nevzdalují, viz obrázek 2.2a.

Uvedené seznámení se způsobem posouzení stability kritických bodů dále poslouží čtenáři jako dobrý úvod do problematiky stability trajektorií.

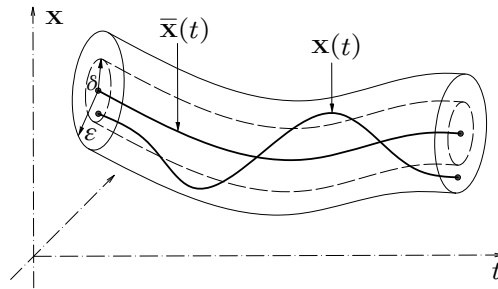
2.4 Stabilita trajektorií

2.4.1 Stabilita podle Ljapunovova

Uvažujme obecné řešení dynamického systému $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ je *stabilní podle Ljapunovova*, viz [19], pokud řešení začínající *blízko* trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ zůstává *blízko* i ve všech budoucích časech. Formálně řečeno: při zvoleném $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že pro libovolné řešení $\mathbf{x}(t)$ platí:

$$|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)| < \delta \implies |\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon. \quad (2.18)$$

Přehledné vysvětlení nabízí obrázek 2.3.



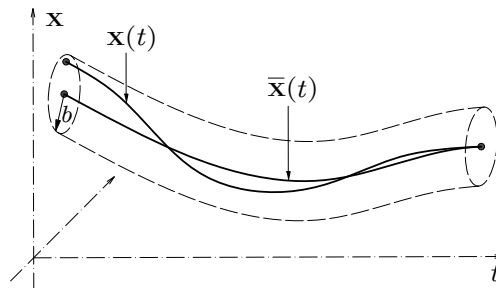
Obrázek 2.3: Trajektorie stabilní podle Ljapunovova.

2.4.2 Asymptotická stabilita

Pokud je trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ stabilní v Ljapunovově smyslu a zároveň pro libovolné řešení $\mathbf{x}(t)$ existuje takové $b > 0$, pro které platí:

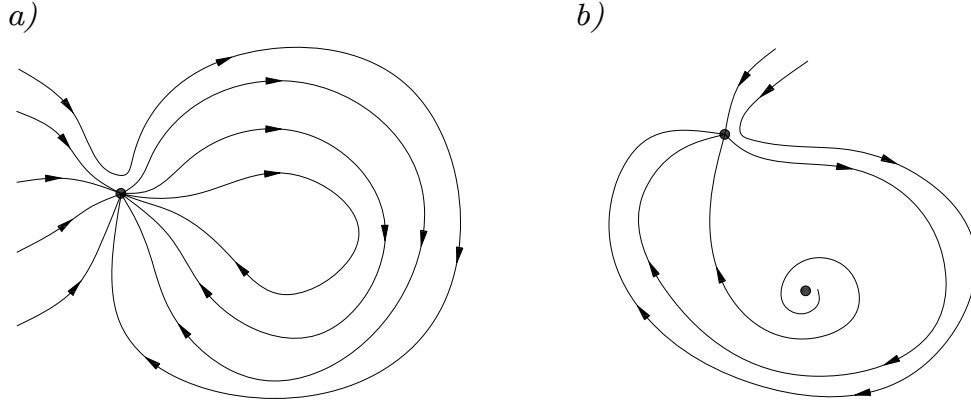
$$|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)| < b \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)| = 0, \quad (2.19)$$

potom trajektorii nazýváme *asymptoticky stabilní*, viz obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Asymptoticky stabilní trajektorie.

Požadavek na stabilitu podle Ljapunovova jako předpoklad pro asymptotickou stabilitu může čtenáři připadat zbytečný. Může se zdát, že stabilita řešení vyplývá z tvrzení (2.19). V obecném smyslu to ale neplatí. Jak ukazují fázové portréty na obrázku 2.5, řešení dynamického systému může opouštět libovolně malé okolí a zároveň se asymptoticky blížit kritickému bodu v čase $t = \infty$.



Obrázek 2.5: Fázové portréty trajektorií, které jsou nestabilní podle Ljapunovova, ale asymptoticky se blíží kritickému bodu.

2.4.3 Orbitální stabilita

Pro posouzení orbitální stability trajektorie nejprve definujeme vzdálenost mezi bodem a množinou (sadou) bodů ve fázovém prostoru. Necht' $S \in \mathbb{R}^n$ je libovolná sada bodů a $p \in \mathbb{R}^n$ je libovolný bod ve fázovém prostoru. Potom vzdálenost d mezi bodem p a sadou S je dána vztahem:

$$d(p, S) = \inf_{x \in S} |p - x|. \quad (2.20)$$

Dále je zapotřebí definovat *pozitivní orbitu* procházející bodem x_0 v čase $t \geq t_0$:

$$O^+(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x}(t), t \geq t_0, \bar{x}(t_0) = x_0\}. \quad (2.21)$$

Nyní již můžeme vyslovit definici orbitální stability trajektorie: Jestliže pro dané $\varepsilon > 0$ a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ splňuje libovolné řešení $\mathbf{x}(t)$ podmínku:

$$|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t)| < \delta, \quad (2.22)$$

potom *pro orbitálně stabilní* trajektorii platí:

$$d(\mathbf{x}(t), O^+(x_0, t_0)) < \varepsilon, \quad (2.23)$$

v každém čase $t \geq t_0$.

2.4.4 Asymptotická orbitální stabilita

Je-li trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ orbitálně stabilní a zároveň pro libovolné řešení $\mathbf{x}(t)$ existuje takové $b > 0$, pro které platí:

$$|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)| < b \implies \lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t), O^+(x_0, t_0)) = 0, \quad (2.24)$$

potom je trajektorie *asymptoticky orbitálně stabilní*.

Sekce 2.4 ukazuje na nutnost pečlivě dodržovat terminologii, viz odstavec 2.2.1. Studium mnohé literatury totiž znesnadňuje odchylky v užití pojmů trajektorie, integrální křivky a orbity. Namísto orbitálně stabilní trajektorie může být označována jako stabilní orbita trajektorií vytvářená a podobně.

2.5 Linearizace řešení dynamického systému

Předchozí sekce poskytla čtenáři přehled o možných typech stability trajektorie a jejich matematické definici. Abychom byli schopni posoudit stabilitu trajektorie dynamického systému, je zapotřebí zmínit se o způsobu, jak trajektorii zkonstruovat: tedy jak získat řešení dynamického systému (2.3) v každém čase.

Uvažujme trajektorii $\bar{\mathbf{x}}(t)$, viz [34]. Známe-li počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, potom další bod trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ v čase $t_1 = t_0 + h$ je dán vztahem:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{y}, \quad (2.25)$$

kde $\mathbf{y}$ je vektor řešení - přírůstek souřadnic ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Po dosazení do rovnice (2.3) a rozšíření získáváme:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)}_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)} + \underbrace{\dot{\mathbf{y}}}_{\dot{\mathbf{y}}} = \underbrace{\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t))}_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)} + \underbrace{D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t))\mathbf{y} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2)}_{\dot{\mathbf{y}}}, \quad (2.26)$$

kde $D\mathbf{F}$ je derivace vektoru funkcí $\mathbf{F}$. Obecně pro n -rozměrný fázový prostor:

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_0} & \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_0}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_0} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Zaměříme se nyní na druhou část výrazu (2.26). Ta popisuje vývoj orbity blízko trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Ponecháme-li stranou chybu $\mathcal{O}$, můžeme očekávat, že na stabilitu řešení dynamického systému kolem trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ bude ukazovat řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t))\mathbf{y}. \quad (2.28)$$

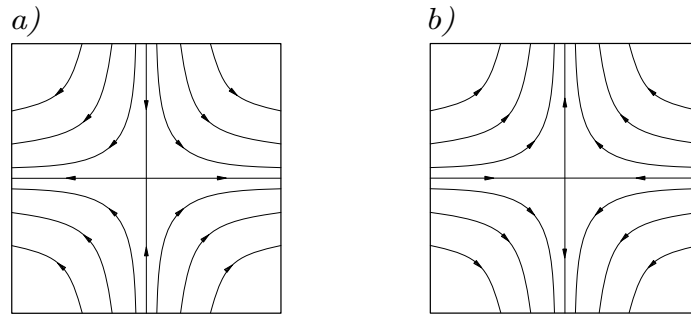
Pro stanovení stability trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ je třeba nejdříve určit, zda řešení $\mathbf{y} = 0$ soustavy (2.28) je stabilní. Toto může být podobně obtížné, neboť analytické řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic není možné.

Pokud ovšem budeme předpokládat, že $\bar{\mathbf{x}}(t)$ je trajektorie rovnovážného řešení $\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}$, potom matice $D\mathbf{F}$ obsahuje konstanty, tedy $D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t)) = D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$. Řešením soustavy rovnic (2.28) je potom přímo výraz:

$$\mathbf{y} = e^{D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})t} \mathbf{y}_0. \quad (2.29)$$

Řešení $\mathbf{y}(t)$ je tedy asymptoticky stabilní, pokud všechna vlastní čísla matice $D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t))$ mají zápornou reálnou složku. Asymptoticky stabilní je potom i rovnovážné řešení dynamického systému $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$.

V případě, že všechna vlastní čísla matice $D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t))$ mají nenulovou reálnou složku, potom bod rovnovážného řešení $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ se nazývá *hyperbolický pevný bod*. Nejčastějším typem hyperbolického bodu je tzv. *sedlový bod*, viz obrázek 2.6. Specifickou vlastností sedlového bodu jsou stabilní a nestabilní trajektorie směřující do nebo ze sedlového bodu ve směru vlastních vektorů matice $D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t))$.



Obrázek 2.6: Hyperbolické pevné body.

Trajektorie začínající nebo končící v sedlovém bodě rozdělují fázový prostor do disjunktních oblastí. Podle této separační funkce ve fázovém prostoru se popsané trajektorie nazývají *separatrix*. Při studiu nelineárních dynamických systémů dále uvidíme, že rozhraní oblastí (separatrix) může mít obecně velmi složitou podobu.

2.6 Ljapunovova teorie stability

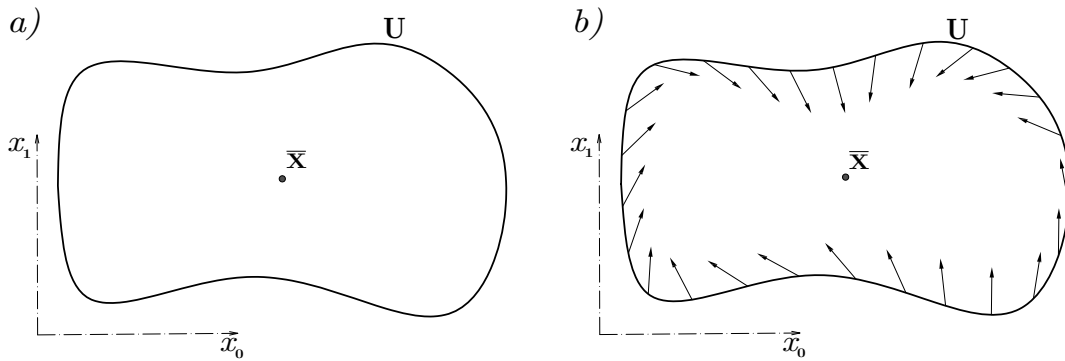
Předpoklady pro posouzení stability trajektorie za pomoci linearizace zřejmě ukazují, že tento přístup obecně nevede k použitelným výsledkům. Ljapunovova² teorie stability je značně obsáhlou oblastí, viz např [1] nebo [4]. Dále se proto zaměříme pouze na její nezbytně zúženou část.

Ačkoli Ljapunovův přístup funguje obecně pro n až nekonečně rozměrný fázový prostor, pro úvod do teorie pokračujeme s rovinným fázovým prostorem $\mathbb{R}^2$.

Uvažujme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= F_0(t, x_0, x_1), \\ \dot{x}_1 &= F_1(t, x_0, x_1),\end{aligned}\tag{2.30}$$

a stabilní kritický bod $\bar{x}(\bar{x}_0, \bar{x}_1) \in \mathbb{R}^2$. Vycházejme z již vyslovených definic stability: mějme libovolné okolí U bodu $\bar{x}$, viz obrázek 2.7a, a sledujme, zda trajektorie začínající v okolí U zůstávají uvnitř okolí U ve všech budoucích (kladných) časech. Je zřejmé, že trajektorie zůstává uvnitř okolí U , pokud vektorové pole (2.30) směřuje dovnitř okolí U a nebo je alespoň ve směru tečny jeho hranice, jak ukazuje obrázek 2.7b.



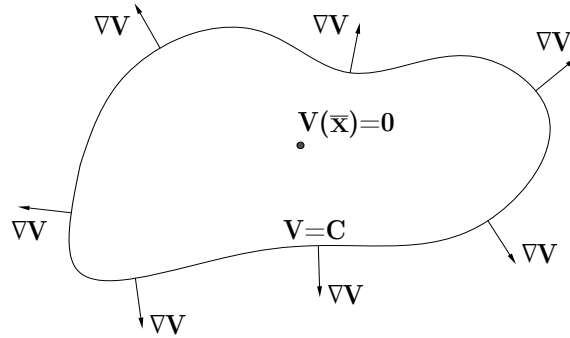
Obrázek 2.7: Okolí U kritického bodu $\bar{x}$ a směr vektorového pole na jeho hranici.

Nyní definujme Ljapunovovu funkci V jako nástroj, který nám bude sloužit pro posuzování stability: Nechť V je skalární funkce v prostoru $\mathbb{R}^2 = \{x_0, x_1\}$ se spojitou první derivací (funkce třídy C^1). Dále předpokládejme její hodnotu v kritickém bodě $V(\bar{x}_0, \bar{x}_1) = 0$.

Lze tedy právem očekávat, že kolem bodu $\bar{x}$ budeme schopni konstruovat izolinie spojující místa se stejnou hodnotou $V(x_0, x_1) = C = konst.$ Potom zbývá zavést gradient ∇V jako vektor kolmý k izolinii $V = C$ ukazující ve směru nárůstu hodnot funkce V , viz obrázek 2.8:

$$\nabla V(x_0, x_1) = grad V(x_0, x_1) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_0}, \frac{\partial V}{\partial x_1} \right).\tag{2.31}$$

² Ruský matematik Alexandr Michailovič Ljapunov se zasloužil zejména o rozvoj teorie stability dynamických systémů, teorie potenciálu a teorie pravděpodobnosti. Na Petrohradské univerzitě byl jeho učitelem mimo jiné další velký ruský matematik P.F. Čebyšev. Ljapunovo jméno, azbukou Александр Михайлович Ляпунов, bývá v závislosti na literatuře latinkou přepisováno jako Liapunov, Lyapunov nebo Liapunoff, viz [1], [14] nebo [19].

Obrázek 2.8: Izolinie hodnot $V=C$ a gradient ∇V .

Již bylo řečeno, že pro stabilitu trajektorie je zapotřebí, aby vektorové pole směřovalo dovnitř okolí U nebo bylo alespoň tečné k jeho hranici v posuzovaném bodě. Pro každou izolinii $V = C$ potom platí:

$$\nabla V(x_0, x_1) \cdot \mathbf{F}(x_0, x_1) \leq 0, \quad (2.32)$$

tedy skalární součin vektorů gradientu ∇V a vektorového pole $\mathbf{F}$, viz (2.30), je negativně definitní. Výraz (2.32) představuje derivaci Ljapunovovy funkce ve směru trajektorie systému. V mnohé literatuře bývá označován také jako *orbitální derivace*, viz například [34].

Nyní je již vše připraveno pro vyslovení Ljapunovova teorému stability: Nechť je bod $\bar{x}$ kritickým bodem řešení dynamického systému $\mathbf{F}$. Dále budiž funkce V spojitou skalární funkcí třídy C^1 definovanou na okolí U bodu $\bar{x}$. Za předpokladu, že platí:

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{pro } x = \bar{x}, \\ V(x) &> 0 \quad \text{pro } x \neq \bar{x}, \\ \dot{V}(x) &\leq 0 \quad \text{uvnitř } U \text{ vyjma } \bar{x}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

je bod $\bar{x}$ stabilní podle uvedených definic. Pokud navíc platí:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{uvnitř } U \text{ vyjma } \bar{x}, \quad (2.34)$$

potom je bod $\bar{x}$ asymptoticky stabilní.

2.7 Deterministický chaos

Stav deterministického systému v každém čase je podle definice závislý pouze na počátečních podmínkách. Potom, pokud by *tři krát tři* bylo skutečně vždy *neomylně devět*, jak uvažoval Leibniz, deterministický systém se nemůže chovat nepředvídatelně, chaoticky.

Deterministický systém skutečně funguje na základě *neomylně* předepsaných pravidel, například pohybových rovnic. Pojem chaotického chování deterministického systému značí, že předpověď stavu systému je velmi citlivá na malé změny v počátečních podmínkách. Původcem nepředvídatelného chování jsou zde nejistoty ve vyčíslení hodnot stavových proměnných, viz například [28].

Důvod složitého chování reálného dynamického systému nemusí být vůbec zřejmý. Nepředvídatelné chování nemusí způsobovat pouze citlivost systému, ale například stochastický aspekt problému. Lze si představit veličiny stavových proměnných deterministického modelu popsané pravděpodobnostně. V krajním případě je rovněž možné uvažovat plně stochastický model, jehož vstupem i výstupem je vektor hustot pravděpodobností stavových proměnných.

Zůstaňme u deterministicky popsaných modelů. Existence chaotického chování je zde podmíněna jen skromnými požadavky:

- alespoň tři nezávislé stavové proměnné (trojrozměrný fázový prostor),
- dostatečně silná nelineární složka v definici systému.

Zároveň stojí za zmínku, že vyšší počet stavových proměnných obecně nemusí znamenat složitější chování systému, viz [2].

Citlivost vývoje stavu systému na počátečních podmínkách je typickou vlastností chaosu. Lze říci, že dvě trajektorie, které jsou na počátku libovolně blízko, se vzájemně vzdalují s exponenciální závislostí na čase. Jejich vzájemná vzdálenost $\delta \mathbf{x}(t)$ velmi rychle dosahuje maximálního rozměru dostupné podmnožiny fázového prostoru.

Pro představu uvažujme libovolně malou n -rozměrnou kouli počátečních podmínek ve fázovém prostoru, viz [30]. V případě chaotického systému tato koule v čase bez omezení roste a v nekonečném čase vyplní celý objem konečné podmnožiny fázového prostoru. Tuto vlastnost lze vyjádřit jako:

$$\delta \mathbf{x}(t) \approx e^{\lambda t} \delta \mathbf{x}(0), \quad (2.35)$$

kde λ je míra vzájemného vzdalování trajektorií označovaná jako Ljapunovův exponent. Pro libovolně malou (konečnou) počáteční odchylku $|\delta \mathbf{x}(0)|$ lze definovat Ljapunovův čas T_{Lyp} jako ukazatel citlivosti systému:

$$T_{Lyp} \approx -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\delta \mathbf{x}(0)}{L} \right|, \quad (2.36)$$

kde L je maximální rozměr fázového prostoru. Ljapunovův čas je tedy čas, za který velikost koule, na počátku srovnatelná s odchylkou pozorování, naroste do velikosti srovnatelné s rozměrem fázového prostoru.

Kladná hodnota Ljapunovova exponentu sama o sobě nevede ke vzniku chaosu - trajektorie se od sebe pouze vzdalují. Důležitou potřebnou vlastností je tzv. *chaotické míchání* (*chaotic mixing*). Vývoj trajektorií je totiž omezen konečným rozměrem podmnožiny fázového prostoru. Proto se trajektorie musí k sobě znovu přibližovat a opět se od sebe vzdalovat v jedinečném smyslu.

Jistě je na místě se ptát, kdy je vliv chaotického chování systému významný a kdy nikoliv. Planety sluneční soustavy se pohybují chaoticky, jak ukázal Poincaré. Přesto se nám daří velmi přesně předvídat jejich pohyb dlouho (v lidském měřítku) do budoucnosti.

Zjednodušeně lze říci, že pokud je Ljapunovův čas kratší než doba našeho pozorování, bylo by chybou chaos nestudovat. Proto teorie chaosu nalézá dobré uplatnění v mechanice klasické i kvantové, chemii a biologii.

Kapitola 3

Metody numerického řešení

Pro řešení disipativních dynamických systémů¹ běžně postačují tzv. explicitní numerické metody, viz [24]. Výpočet pomocí explicitních metod je obecně jednodušší než u implicitních, nicméně stabilita řešení je nižší.

Řešení se provádí numerickou integrací a výsledná trajektorie vzniká v uvedených případech aproximací polynommem stupně k . Konzervativní² systémy zpravidla vyžadují robustnější numerické metody kvůli náročnosti na numerickou stabilitu řešení.

3.1 Jednokrokové metody

3.1.1 Eulerova metoda

Eulerova metoda je nejjednodušší explicitní metodou pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Eulerova metoda je jednokroková³ a jednobodová⁴ numerická metoda.

Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (3.1)$$

Předpis Eulerovy metody je potom:

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (3.2)$$

kde h je krok numerické metody a $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ je směrnice aproximační přímky v bodě $\mathbf{x}(t)$. Směrnici $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ lze obdržet jako numerickou první derivaci. Přibližně potom platí:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.3)$$

Po úpravě lze tedy psát:

$$f(x+h) \approx f(x) + h f'(x). \quad (3.4)$$

¹ U disipativního mechanického systému se celková energie systému nezachovává. Disipace energie může být způsobena například tlumením systému.

² V konzervativních mechanických systémech zůstává celková energie systému konstantní.

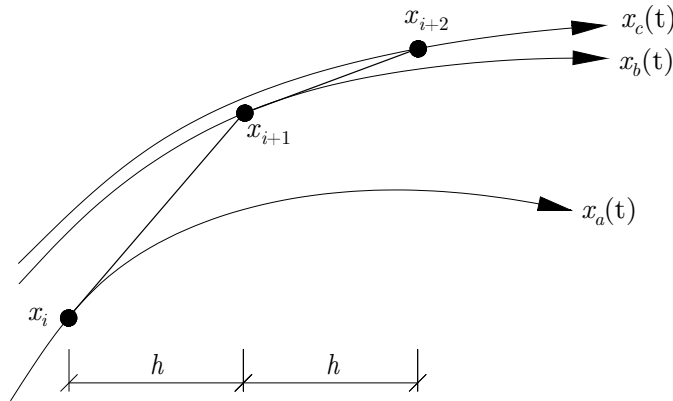
³ Pro řešení k -krokové numerické metody je zapotřebí znát k předchozích stavů - kroků.

⁴ Při řešení pomocí l -bodové numerické metody je potřeba spočítat l hodnot funkce $F(t, \mathbf{x}(t))$.

Pro řešení dynamického systému s n stavovými proměnnými nabývá předpis Eulerovy metody tvaru:

$$\mathbf{x}_i(t+h) = \mathbf{x}_i(t) + h \mathbf{F}_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (3.5)$$

Eulerova metoda není obecně spolehlivě použitelná. Získaný následující stav systému odpovídá skutečnosti pouze při konstantní rychlosti systému. Při nenulovém zrychlení se nový stav systému nutně nachází na jiné blízké trajektorii, viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Odchylování od skutečné trajektorie při použití Eulerovy metody.

Chyba Eulerovy metody je řádu $\mathcal{O}(h^2)$. Jedná se tedy o metodu prvního řádu⁵ s chybou odhadu nového stavu $|\varepsilon_i| < Ch^2$, kde C je konstanta.

3.1.2 Semi-implicitní Eulerova metoda

Mnohem stabilnějšího řešení při použití Eulerovy metody lze dosáhnout jednoduchou úpravou vycházející z vlastností dynamických systémů. Dynamické systémy popisující chování mechanických konstrukcí mají původ v diferenciálních rovnicích druhého řádu a pomocí jednoduchých substitucí se upravují na diferenciální rovnice prvního řádu.

Například diferenciální rovnici ve tvaru:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + c \frac{d\mathbf{x}}{dt} + k \mathbf{x} = 0, \quad (3.6)$$

lze substitucí

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad (3.7)$$

upravit na soustavu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{c}{m} \mathbf{v} - \frac{k}{m} \mathbf{x}, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

⁵ Metoda s chybou $\mathcal{O}(h^p)$ se nazývá metodou řádu $p-1$.

Při řešení Eulerovou metodou, viz (3.2), dostáváme diferenční vztahy:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t+h) &= \mathbf{v}(t) - h\left(\frac{c}{m}\mathbf{v}(t) + \frac{k}{m}\mathbf{x}(t)\right), \\ \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + h\mathbf{v}(t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Pokud nejdříve vyřešíme hodnotu stavové proměnné $\mathbf{v}$ v čase $t+h$, lze předpis (3.9) upravit na:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t+h) &= \mathbf{v}(t) - h\left(\frac{c}{m}\mathbf{v}(t) + \frac{k}{m}\mathbf{x}(t)\right), \\ \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + h\mathbf{v}(t+h).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Popsaná úprava Eulerovy metody tedy spočívá v použití nově vypočtené rychlosti $\mathbf{v}$ pro výpočet nového posunutí $\mathbf{x}$. Stejně stability výpočtu dosáhneme opačnou úpravou, totiž užitím nově vypočteného posunutí pro výpočet nové rychlosti.

3.1.3 Metoda Runge-Kutta

Metoda Runge-Kutta je jednokroková a čtyřbodová numerická metoda. Pro výpočet je tedy zapotřebí znát předchozí stav a hodnoty funkce $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ ve čtyřech bodech. Průběh funkce je aproximován polynomem čtvrtého stupně. Předpis metody Runge-Kutta je následující:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}\left(t, \mathbf{x}(t)\right), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_1 \frac{h}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_2 \frac{h}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}\left(t + h, \mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_3 h\right), \\ \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + \frac{h}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Chyba metody Runge-Kutta je řádu $\mathcal{O}(h^5)$. Pro řešení soustav rovnic dynamického systému s n stavovými proměnnými lze předpis zobecnit:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{1i} &= \mathbf{F}_i\left(t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\right) \\ \mathbf{k}_{2i} &= \mathbf{F}_i\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{k}_{11} \frac{h}{2}, \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{k}_{12} \frac{h}{2}, \dots, \mathbf{x}_n(t) + \mathbf{k}_{1n} \frac{h}{2}\right) \\ \mathbf{k}_{2i} &= \mathbf{F}_i\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{k}_{21} \frac{h}{2}, \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{k}_{22} \frac{h}{2}, \dots, \mathbf{x}_n(t) + \mathbf{k}_{2n} \frac{h}{2}\right) \\ \mathbf{k}_{4i} &= \mathbf{F}_i\left(t + h, \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{k}_{31} h, \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{k}_{32} h, \dots, \mathbf{x}_n(t) + \mathbf{k}_{3n} h\right) \\ \mathbf{x}_i(t+h) &= \mathbf{x}_i(t) + \frac{h}{6}\left(\mathbf{k}_{1i} + 2\mathbf{k}_{2i} + 2\mathbf{k}_{3i} + \mathbf{k}_{4i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{3.12}$$

3.2 Vícekrokové metody

Při řešení pomocí vícekrokové (k -krokové) metody potřebujeme k vypočtení následujícího stavu znát k předchozích stavů systému.

Je zřejmé, že nutnost udržovat v paměti hodnoty stavových proměnných k předchozích stavů navýší paměťovou náročnost výpočtu. V praxi tato skutečnost ovšem nemusí mít zásadní význam. Zvlášť v porovnání s programátorovými rezervami v implementaci modelu. Samotná výpočetní složitost obecně neroste s počtem kroků.

V obecném případě lineární k -krokové metody platí předpis pro nový stav:

$$\mathbf{x}_{n+1} = a_0\mathbf{x}_n + a_1\mathbf{x}_{n-1} + \dots + a_k\mathbf{x}_{n-k+1} + h(b_0\mathbf{F}_{n+1} + b_1\mathbf{F}_n + \dots + b_k\mathbf{F}_{n-k+1}), \quad (3.13)$$

kde a_i a b_i jsou vhodné konstanty. Pokud je konstanta b_0 nenulová, potom pro výpočet nového stavu potřebujeme neznámou hodnotu $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}(t_{x+1}, x_{n+1})$. Úlohu proto musíme řešit iterací. Taková metoda se nazývá implicitní a její výpočetní složitost závisí na konvergenci iterační metody.

Pokud je konstanta b_0 rovna nule, metoda se nazývá explicitní. Pro její řešení postačí znalost k předchozích stavů systému. Výpočet je jednodušší, avšak oblast stability řešení je menší. Výpočet spočívá v nahrazení předpokládané trajektorie polynomem stupně k .

3.2.1 Adamsovy metody

Zástupcem explicitních vícekrokových metod je Adams-Bashforthova metoda s předpisem:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h(b_1\mathbf{F}_n + b_2\mathbf{F}_{n-1} + \dots + b_k\mathbf{F}_{n-k+1}), \quad (3.14)$$

kde koeficienty b_i závisí na počtu kroků a jsou tabelovány, viz [24]. Je zřejmé, že pokud pro výpočet pomocí k -krokové metody je zapotřebí znalost k předchozích stavů systému, nelze samotnou simulaci zahájit přímo vícekrokovou metodou. Potřebné úvodní kroky získáme použitím některé z jednokrokových⁶ metod.

Polynom k nahrazení trajektorie používá i zástupce iteračních vícekrokových metod, tzv. Adams-Moultonova metoda. V jejím předpisu:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h(b_0\mathbf{F}_{n+1} + b_1\mathbf{F}_n + b_2\mathbf{F}_{n-1} + \dots + b_k\mathbf{F}_{n-k+1}), \quad (3.15)$$

figuruje neznámý stav $\mathbf{F}_{n+1}$. Pro k kroků je metoda řádu $k + 1$. Koeficienty b_i jsou rovněž tabelovány. Již bylo zmíněno, že předností takové implicitní metody je vyšší stabilita řešení, ovšem za cenu iterace ke stavu $\mathbf{F}_{n+1}$.

3.3 Adaptivní metody

S přihlédnutím k povaze konkrétní úlohy lze zvýšit efektivitu řešení, budeme-li se snažit maximalizovat krok h časové diskretizace při současném sledování relativní chyby. Pro adaptivní metodu proto zřejmě není vstupem hodnota kroku h , nýbrž maximální přijatelná relativní chyba ε_{max} .

Výpočet proto probíhá nezávisle s užitím více časových kroků a obdržené relativní chyby jsou porovnány s hodnotou ε_{max} za účelem zvolení optimálního kroku.

Lze si představit, že nutný benefit, který použitím adaptivní metody musíme získat, abychom vykoupili její náročnost, obecně nelze zaručit.

⁶Jednokrokové metody se proto nazývají také samostartovací.

Kapitola 4

Dynamická odezva systému

Dynamické chování mechanických konstrukcí je podmíněno několika základními požadavky. V první řadě musí model obsahovat hmotný člen se setrvačnými vlastnostmi, kterému není okrajovými podmínkami zamezen pohyb. Takový prvek slouží v systému jako *nositel kinetické energie*.

Běžnou součástí mechanických systémů jsou členy schopné deformace – translační, rotační či smykové pružiny. Tyto fungují v modelu jako *nositele potenciální energie deformace*. Akumulace energie závislé na poloze může být také například důsledkem působení gravitačního zrychlení.

Při mechanické přeměně mezi potenciální a kinetickou energií často dochází k tzv. vratnému pohybu, kmitání – nejčastější formě pohybu mechanických konstrukcí. Potřebná energie může být v soustavě přítomna buď na základě počáteční deformace nebo počáteční rychlosti, anebo ji může dodávat vnější zatížení v čase.

4.1 Tlumení

Při modelování reálných konstrukcí je zapotřebí vystihnout jev útlumu - disipace energie z modelu do jeho okolí. Příčiny útlumu, viz [5], jsou především:

- materiálové tlumení – přeměna kinetické energie konstrukce na teplo, přesněji na kinetickou energii částic materiálu,
- tlumení odporem prostředí – přeměna kinetické energie konstrukce na kinetickou energii částic okolního prostředí.

Souhrnný vliv útlumu konstrukce je zřejmě nelineární. Pro vystižení tlumení mechanických konstrukcí se běžně používá kombinace forem matematického útlumu:

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + \dots, \quad (4.1)$$

kde C je výsledná tlumící síla, C_0 je konstantní složka tlumící síly a následující složky C_i jsou složky tlumení závislého na rychlosti posunu. Běžně používané složky útlumu budou popsány dále.

Konstantní útlum

Vliv suchého (COULOMBOVA) tření přitlačovaných povrchů lze vystihnout konstantním odporem proti směru posunu. Předpis pro konstantní útlum je jednoduše:

$$\begin{aligned} C_0 &= \mu F_s \quad \text{pro } v > 0, \\ C_0 &= -\mu F_s \quad \text{pro } v < 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde μ je koeficient suchého tření a F_s je vzájemná přitlačná síla povrchů.

Útlum lineárně závislý na rychlosti

Lineární závislost tlumení na rychlosti posunu dobře vystihuje vliv pružného přetvoření materiálu nebo odpor okolního prostředí při malých rychlostech.

Předpis lineárního útlumu je zřejmě:

$$C_1 = c_1 v, \tag{4.3}$$

kde c_1 je koeficient lineárního útlumu a v je rychlost posunu.

Útlum závislý na mocnině rychlosti

Tlumení závislé na vyšších mocninách rychlosti je nejčastěji užíváno ve snaze vystihnout odpor okolního prostředí při vyšších a vysokých rychlostech.

S předpisem:

$$C_2 = c_2 v^2, \tag{4.4}$$

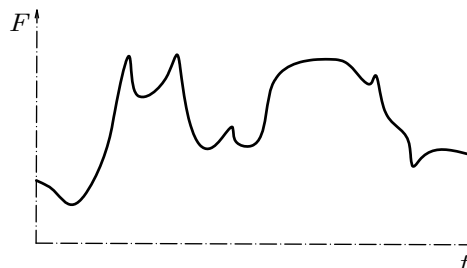
kde c_2 je koeficient kvadratického útlumu a v je rychlost posunu.

Vhodné kombinace forem matematického útlumu slouží v případě modelů mechanických konstrukcí dostatečně výstižně. V případě modelů stavebně mechanických konstrukcí je nejčastěji používána složka útlumu lineárně závislého na rychlosti posunutí.

4.2 Dynamické zatížení

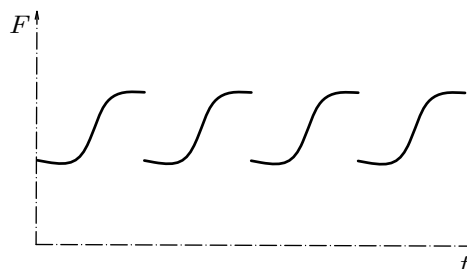
Vnější dynamické zatížení neustále přivádí do konstrukce energii v různých podobách. Průběh proměnlivého zatížení může být zcela obecný, stejně jako vynucená odezva konstrukce:

- obecné zatížení (také aperiodické) se mění v čase zcela neomezeně. Jako celek není zjevnou periodickou funkcí času, viz obrázek 4.1.



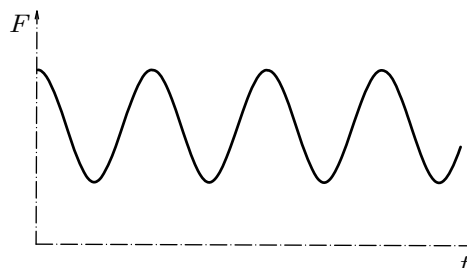
Obrázek 4.1: Průběh obecného buzení.

- periodické zatížení je zatížení, které se s určitou periodou neustále opakuje v čase, viz obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Průběh periodického buzení.

- harmonické zatížení je podmnožinou periodického zatížení, jenž je zřejmě harmonickou funkcí času, viz obrázek 4.3.



Obrázek 4.3: Průběh harmonického buzení.

4.3 Dynamická odezva konstrukce

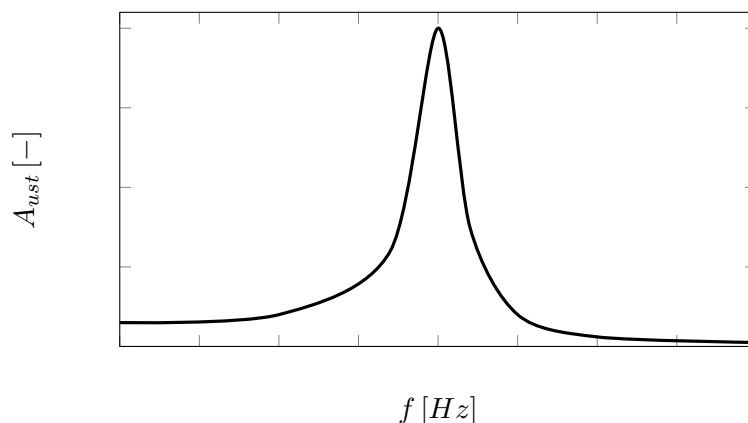
4.3.1 Volné kmitání

Pokud není konstrukce vystavena vnějšímu buzení, avšak se nenachází v klidovém stavu, dochází k jejímu *volnému kmitání*. Vlastní frekvence a vlastní tvary při volném kmitání jsou základní ukazatele tuhostních a hmotnostních vlastností konstrukce.

4.3.2 Rezonance

Rezonance je dynamický jev, který nastává v případě souladu (i přibližného) některé z vlastních frekvencí s frekvencí vnějšího periodického zatížení. Z fyzikálního pohledu se jedná o hromadění energie v systému.

V případě lineárně se chovajícího systému s jedinou výraznou vlastní frekvencí lze zobrazit amplitudu ustáleného chování v závislosti na frekvenci budící síly, viz obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Amplituda ustáleného kmitání v závislosti na frekvenci buzení.

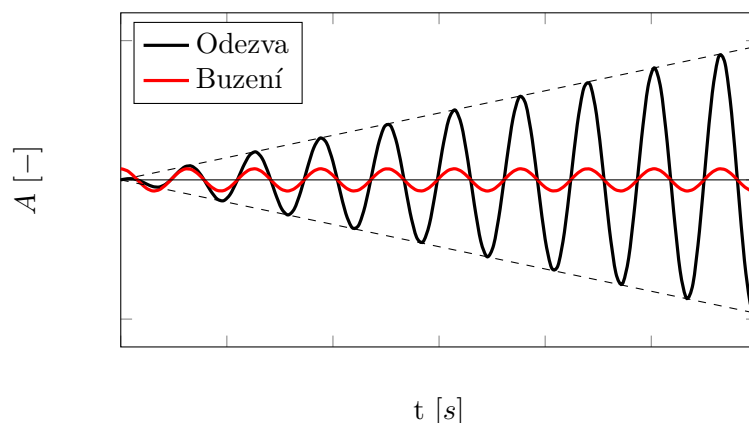
Budeme-li uvažovat harmonickou budící sílu s konstantní amplitudou a frekvencí blízkou vlastní frekvenci konstrukce, potom výchylka kmitání konstrukce bude lineárně růst nade všechny meze, viz obrázek 4.5. V případě reálné konstrukce až do meze únosnosti.

Běžnou snahou praktického navrhování konstrukcí je proto oddálit vlastní frekvence konstrukce a frekvence předpokládaného vnějšího buzení. Podobně je třeba vyšetřit interference vlastních frekvencí v různém namáhání, například v ohybu a kroucení.

4.3.3 Odezva na dynamické zatížení

Pouze v případě lineárně se chovajících konstrukcí lze s jistotou usuzovat, že povaha dynamické odezvy bude přímo odpovídat povaze dynamického zatížení. U nelineárních systémů není odezva přímo svázána s typem buzení.

Nelinearita může způsobovat odezvu složitější než charakter zatížení, například periodické kmitání konstrukce vynucené harmonickým zatížením. Naopak, konstrukce buzená obecnou zatěžovací funkcí se může ustálit v periodickém pohybu. Takový jev se nazývá *self-organization*.



Obrázek 4.5: Nárůst amplitudy kmitání při rezonanci.

4.3.4 Vývoj dynamické odezvy v čase

Kvality odezvy dynamicky zatížené konstrukce se obecně mění v čase. Lze předložit jejich volné rozdělení, viz [5]:

- přechodová oblast nevykazuje zjevné známky předvídatelnosti. Kmitání má velmi (*příliš*) složitý průběh. Přechodová oblast může trvat libovolně dlouho, z čehož je zřejmé, že jde o velmi vágní pojem určený především pro zakrytí naší neznalosti,
- ustalování pohybu je jev kvalitativně podobný s *ustáleným pohybem*. Jeho sledováním lze ukázat postupné přibližování k ustálenému stavu,
- ustálený pohyb je potom idealizovaný stav s periodicky se opakujícími kvalitativní i kvantitativní složkou.

Nastíněný průběh odezvy konstrukce lze připodobnit k hledání lokálního minima ve členitém prostoru. Je zřejmé, že složitost takového problému je mimo rozsah lidského smyslového vnímání. Celý systém je navíc neustále excitován vnějším zatížením.

V mnoha případech, jak bude ukázáno, je proto obtížné mluvit o ustálené nebo ustalující se odezvě. Způsoby zkoumání nelineárních projevů konstrukcí předkládá následující kapitola.

Kapitola 5

Nelineární jevy a jejich sledování

Dynamické modely mechanických systémů se obecně mohou skládat z mnoha stupňů volnosti. Je tedy zřejmé, že fázový prostor bude zpravidla nabývat dimenze vyšší, než lze lidskými smysly vnímat.

Esence vyšetřování takových vícerozměrných problémů v podstatě vždy spočívá ve snížení počtu dimenzí pomocí projekce do prostoru nižší dimenze. Snížení dimenze problému ovšem obecně přináší zkreslení skutečného vývoje systému. Při projekci trajektorií do prostorů nižší dimenze se tyto nutně začínají protínat. Trajektorii již nelze zpětně sledovat do minulosti, neboť obecně není možné rozlišit dvě křížící se trajektorie¹, viz například [23].

5.1 Limitní množiny

Při studiu chování nelineárních systémů lze pozorovat ustalování odezvy systému, viz odstavce 4.3.4. Charakter ustáleného stavu může být obecně velmi složitý. Při definicích limitních (též atrakčních nebo přitahujících) množin ve fázovém prostoru užijeme teoretický základ uvedený v kapitole 2.

5.1.1 Limitní body

Limitním bodem $\mathbf{y}$ k bodu $\mathbf{x}$ ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^n$ rozumíme bod, k němuž se asymptoticky blíží trajektorie $\bar{\mathbf{x}}(t)$ procházející bodem $\mathbf{x}$, viz [34]. Lze definovat dva druhy limitního bodu:

- **ω -limitní bod** přitahuje trajektorii v čase $+\infty$, tedy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad (5.1)$$

- **α -limitní bod** přitahuje trajektorii v čase $-\infty$, tedy:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{y}. \quad (5.2)$$

¹ Pouze v jednoduchých případech lze z požadavků na spojitost všech derivací odhadnout, která trajektorie vstoupila a vystoupila z průsečíku stavů.

5.1.2 Limitní cykly

Limitním cyklem je podle definic 2.2.1 orbita, uzavřená trajektorie ve fázovém prostoru. Limitní orbity jsou obecně dvojího druhu:

- **periodická orbita** je stabilním (podle definic 2.4.3 a 2.4.4) cyklem opakujícím se s konečnou periodou,
- **kvaziperiodická orbita** je stabilní cyklus s nekonečnou periodou. Tvoří rozhraní mezi periodickou orbitou a chaotickým atraktorem.

5.1.3 Chaotické atraktory

Chaotický (také *podivný*) atraktor je nejsložitější limitní množinou. Je charakteristický nestabilním chováním trajektorií, viz sekce 2.6 a 2.7. Typicky se jedná o nekompaktní oblast ve fázovém prostoru s fraktálními kvalitami, viz následující kapitoly.

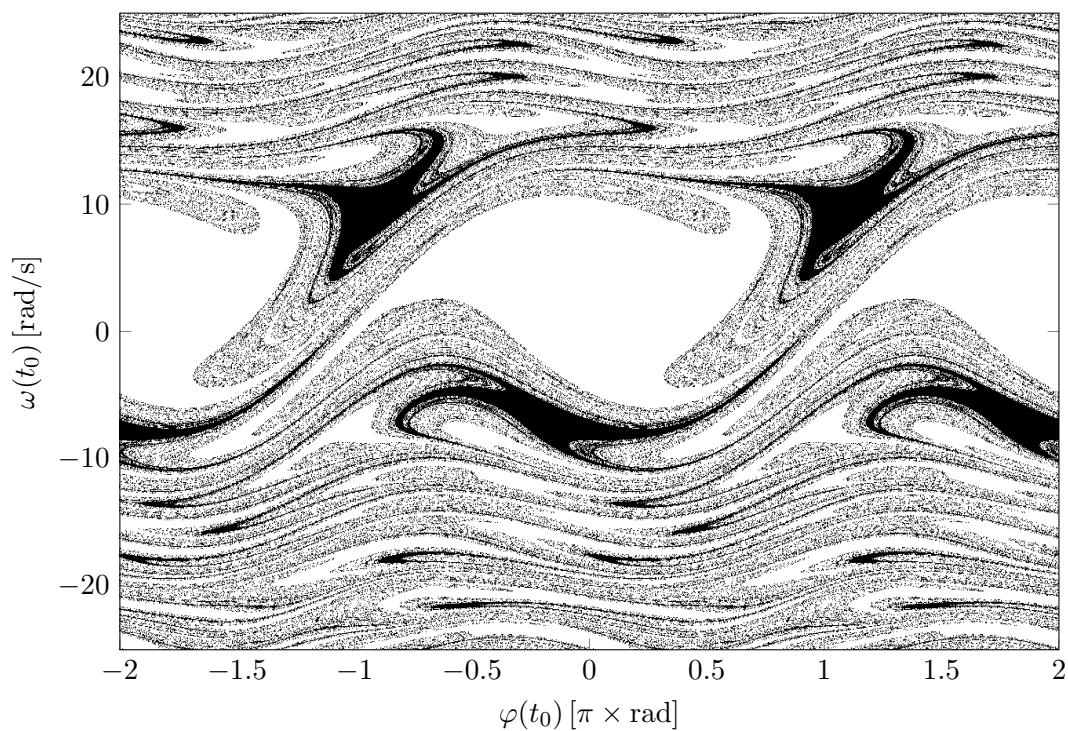
5.2 Bazény přitažlivosti

Z předchozí sekce lze vyvodit, že pro každý bod ve fázovém prostoru, jímž prochází trajektorie, lze určit odpovídající limitní stav. Můžeme tak identifikovat oblasti ve fázovém prostoru, které přitahuje právě zkoumaná limitní množina. Takové oblasti se nazývají *bazény přitažlivosti* (*basins of attraction*) dané limitní množiny. Rozhraní mezi bazény přitažlivosti jednotlivých limitních množin může mít fraktální kvality. Určení limitní množiny na rozhraní bazénů tak bývá nejednoznačné.

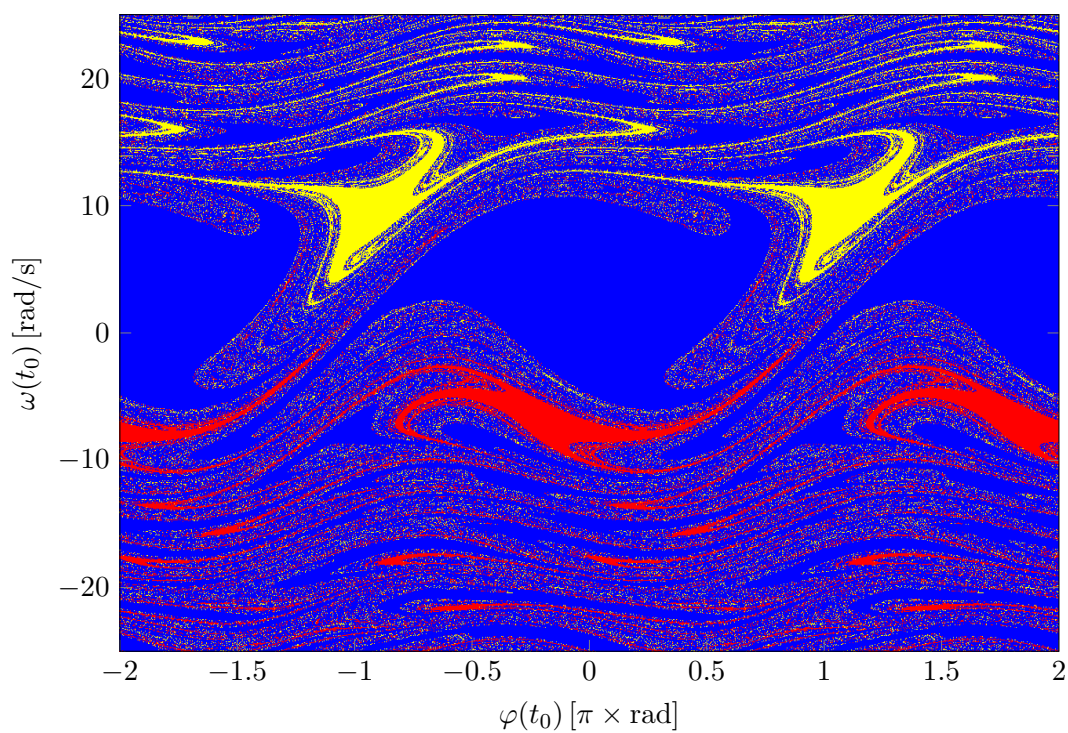
Na obrázcích 5.2 a 5.1 jsou ukázány bazény přitažlivosti jednoduchého rotátoru, viz kapitola 7. Zobrazení bazénů přitažlivosti je zde provedeno v dvourozměrném prostoru počátečních podmínek: úhlové rychlosti kyvadla ω_0 a úhlu φ . Pro každou kombinaci počátečních podmínek je proveden výpočet a zaznamenána maximální úhlová rychlost ω v konečné fázi simulace. Hodnota úhlové rychlosti je vyjádřena barvou pixelu pro danou kombinaci počátečních podmínek.

Na základě předpokladů získaných například studiem bifurkačního diagramu, viz sekce 5.4, lze usuzovat, že zde se systém může ustálit právě ve třech limitních cyklech.

Z výše uvedeného vyplývá, že při zobrazování mnohazměrného problému do nižší dimenze se běžně dopouštíme zkreslování skutečnosti. Proto by toto počínání mělo být založeno na rozumných předpokladech, aby výsledná projekce měla smysl a fyzikální odůvodnění. Při porovnání obrázků 5.2 a 5.1 lze navíc konstatovat, že navíc může záležet na rozlišení zobrazení - ať už jemnosti rastru nebo pestrosti barevné složky.



Obrázek 5.1: Bazény přitažlivosti jednoduchého rotátoru v monochromatické barevné škále.

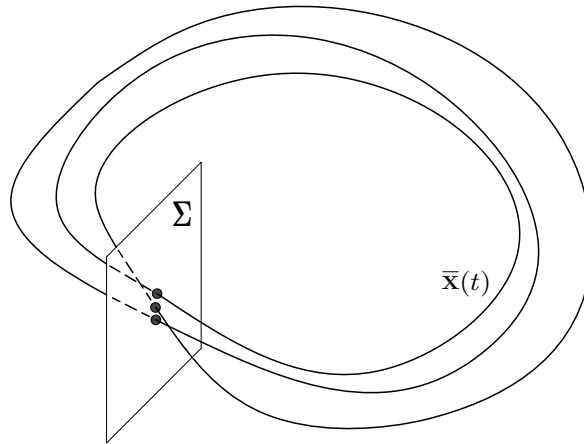


Obrázek 5.2: Bazény přitažlivosti jednoduchého rotátoru v trilineární barevné škále.

5.3 Poincarého mapa

Již v úvodu kapitoly bylo naznačeno, že při studiu dynamického systému s více stavovými proměnnými již dimenze fázového prostoru převyšuje možnosti lidského vnímání.

Poincarého mapa vzniká řezem fázového prostoru vhodně zvolenou nadplochou, kde jedna nebo více stavových proměnných má konstantní hodnotu, viz obrázek 5.3. Konstrukcí Poincarého mapy vzniká nejčastěji rovinné zobrazení, které umožňuje využívat nástroje pro studium linearizovaných systémů v rovině, viz kapitola 2. Jedná se tedy o významný způsob zobrazení a jeden ze základních nástrojů pro studium chování dynamických systémů, viz [5], [24], [14] a další.



Obrázek 5.3: Idealizace konstrukce Poincarého mapy.

Při každém průniku trajektorie s řeznou rovinou vzniká na plošné Poincarého mapě bod, označme jej $\mathbf{x}_i$, který jednoznačně určuje pozici dalšího průsečíku $\mathbf{x}_{i+1}$ trajektorie s řeznou rovinou. Poincarého mapa se proto nazývá také *mapou prvního návratu*.

5.3.1 Volba řezných rovin

Při konstrukci mapy Poincarého je vhodná volba řezné roviny zásadním problémem. Již z jednoduchého obrázku 5.3 je zřejmé, že výsledné zobrazení se může pro jednotlivé polohy řezné roviny fatálně lišit. Umístění řezné roviny by mělo mít ideálně fyzikální odůvodnění, avšak při zachování žádané přehlednosti.

Pozice řezné roviny, navzdory neomezenému počtu variant, se často volí se zaměřením na:

- geometrický význam – konstantní hodnoty stavových proměnných posunutí a otočení nebo na jejich rychlostech závislých integrálních veličin,
- dynamický význam – konstantní hodnoty stavových proměnných nebo jiných veličin derivovaných podle času,
- stroboskopický význam – provádění řezu fázového prostoru ve zvolených časových intervalech. Tato volba je užitečná pokud se některá ze stavových proměnných vyvíjí periodicky v čase. Například při harmonickém buzení konstrukce.

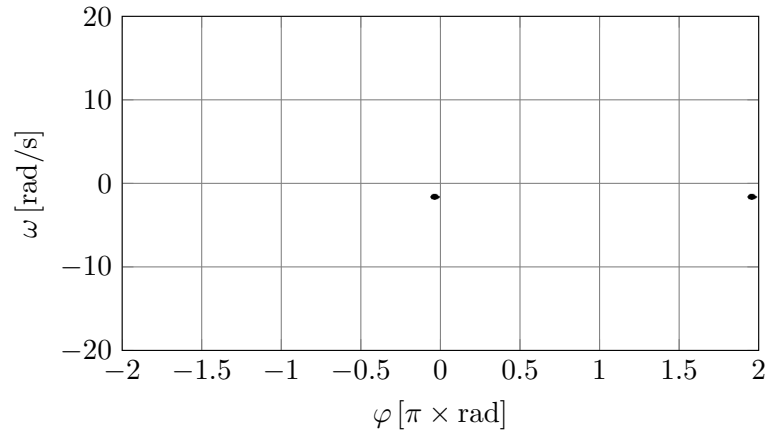
5.3.2 Projevy limitního chování v Poincarého mapě

Ukažme nyní názorně, jak lze Poincarého mapu použít pro diagnostiku ustáleného chování systému. Jako příklad poslouží model jednoduchého rotátoru, viz sekce 7. Odvození matematického modelu je též uvedeno v příslušné sekci.

Bezprostředně je třeba poznamenat, že fázový prostor modelu obsahuje tři proměnné: úhel natočení rotátoru φ od svislé osy, úhlovou rychlost rotátoru ω a harmonickou budící sílu $f(t) = A \cos(\Omega t)$. Vzhledem k matematické formulaci modelu dodejme, že obsah fázového prostoru se zřejmě opakuje v rozmezí od $-\pi$ do π .

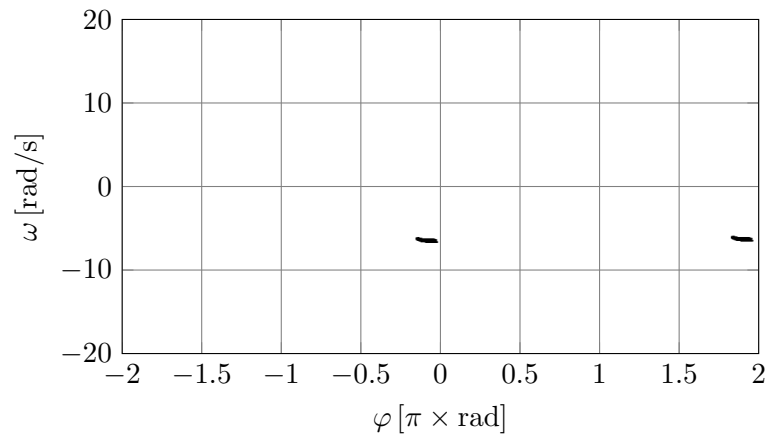
Jednoduchý limitní cyklus

Obrázek 5.3 již předznamenal, že limitní cyklus protíná řeznou rovinu v konečném počtu bodů. Na obrázku 5.4 je zobrazena Poincarého mapa pro jednoduchý limitní cyklus.



Obrázek 5.4: Poincarého mapa jednoduchého limitního cyklu.

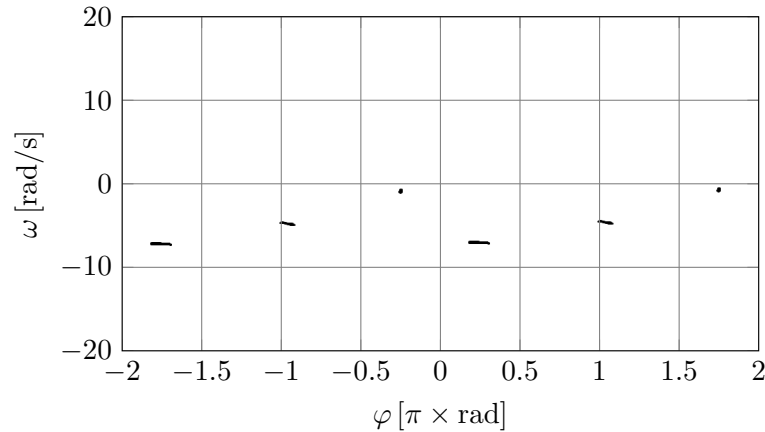
Systém se rovněž může ustálit v kvaziperiodické limitní množině. Cyklus má potom nekonečně dlouhou periodu a na Poincarého mapě vytváří ideálně kompaktní množinu bodů, viz obrázek 5.5.



Obrázek 5.5: Poincarého mapa jednoduchého limitního cyklu vyplňujícího kompaktní oblast.

Vícečetný limitní cyklus

Uzavřený limitní cyklus může rovněž protínat řeznou rovinu ve více oblastech či bodech. Na obrázku 7.4 je zobrazena Poincarého mapa ztrojeného kvaziperiodického limitního cyklu.

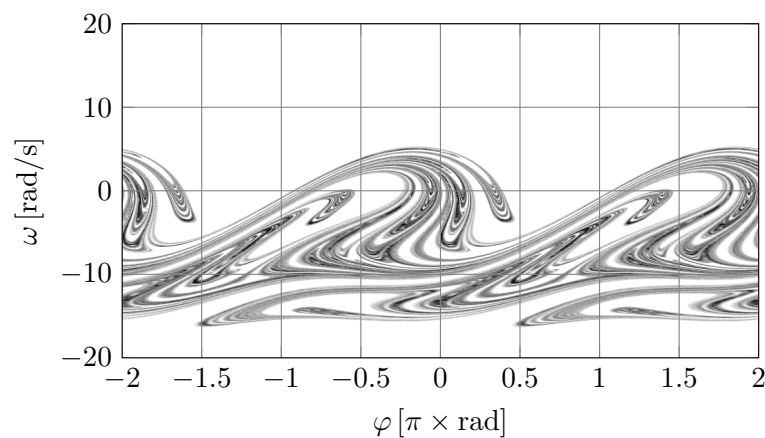


Obrázek 5.6: Poincarého mapa ztrojeného limitního cyklu vyplňujícího kompaktní oblasti.

Chaotický atraktor

Chaoticky se vyvíjející trajektorie neprotíná řeznou rovinu v jediném bodě, ani nevytváří kompaktní oblasti. Jako výsledek chaotického chování na Poincarého mapě vzniká řez chaotickým atraktorem. Nelze říci, že se jedná o spojitou oblast. Kvůli chybě použité numerické metody a chybě zaokrouhlování řešení neustále přeskakuje mezi blízkými trajektoriemi. Z definic nestabilního chování navíc víme, že dvě nestabilní trajektorie se od sebe velmi rychle vzdalují.

Chaotický atraktor je při makroskopickém pohledu svoji hranicí zřejmě omezen, při zvětšení má hranice ovšem zřetelně difuzní charakter. Množina chaotického atraktoru má složitou vrstevnatou strukturu. Trajektorie se totiž skutečně nemohou protínat a nejsou periodické.



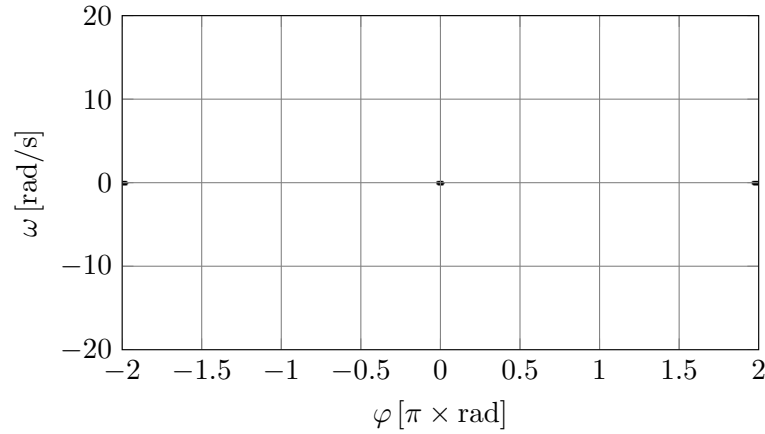
Obrázek 5.7: Poincarého mapa chaotického atraktoru.

5.3.3 Poznámky k Poincarého mapám

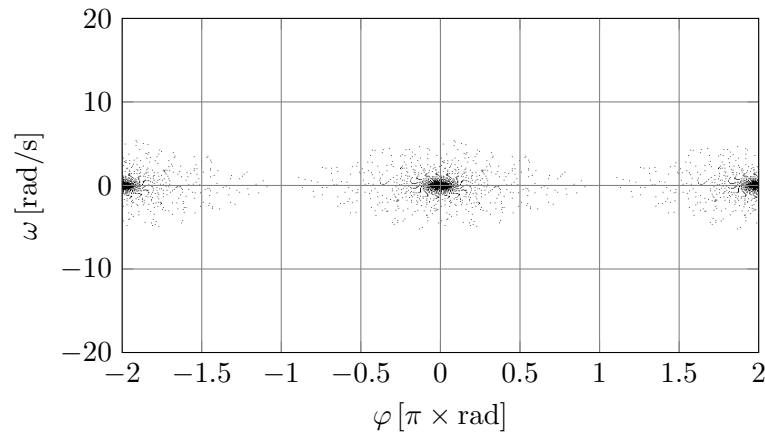
Konstrukce Poincarého mapy je proces velmi náročný na výpočetní dobu. Uvažme, že numerické řešení systému je třeba provádět s vysokou přesností, tedy s malým časovým krokem a robustní metodou řešení.

Nejzásadnější vliv na časovou náročnost výpočtu má ovšem nízká efektivita vytváření Poincarého mapy. Předpokládejme, že konkrétním případě trajektorie protíná řeznou rovinu vždy když harmonická funkce budící síly překračuje nulovou hodnotu s kladnou první derivací. Potom z časového úseku $\Delta t = 2\pi/\Omega$ využijeme do Poincarého mapy pouze jediný bod. Pro vyniknutí chaotických atraktorů jsou nicméně zapotřebí počty bodů v řádu 10^6 a více.

Vytvoření vypovídající Poincarého mapy ustáleného chování zřejmě naráží na nutnost určit, kdy systém považovat za ustálený. Zejména při konstrukci bifurkačních diagramů, viz sekce 5.4, je nezbytné studovat závislost podoby Poincarého map na době poskytnuté pro ustálení, viz obrázky 5.8 a 5.9. Uvědomme si, že při průmětu Poincarého mapy do osy ω se může neustálený jednoduchý limitní cyklus jevit jako chaotické chování.



Obrázek 5.8: Poincarého mapa zaznamenaná po ustálení systému.



Obrázek 5.9: Poincarého mapa zaznamenaná včetně ustalování systému.

5.4 Bifurkační diagram

Zobrazení v mapě Poincarého je silným nástrojem pro diagnostiku limitních stavů při daných hodnotách řídicích parametrů systému. Bifurkační diagram je navazující zobrazení, jenž slouží ke studiu vývoje limitních stavů systému při změně jednoho nebo více řídicích parametrů.

Při konstrukci bifurkačního diagramu vytváříme Poincarého mapu pro každou hodnotu měnícího se řídicího parametru. V získané Poincarého mapě provedeme průmět bodů na jednu z os, například na svislou osu úhlové rychlosti ω , viz příklad v sekci 5.3. Samotný bifurkační diagram vzniká postupným řazením takových průmětů Poincarého map za sebe ve směru nárůstu amplitudy budící síly.

Dá se očekávat, že jednoduchý limitní cyklus se v bifurkačním diagramu zobrazí jako jediný bod, zdvojený cyklus jako dva body, chaotické chování jako nespojitá množina bodů a podobně.

Vytvoření vypovídajícího bifurkačního diagramu vyžaduje zaznamenání Poincarého mapy vždy pro dostatečně ustálený stav systému. Obecně nelze předem předpovědět, kolik času potřebuje systém pro každou konfiguraci pro ustálení. Stejně tak je na zvážení, jak dlouho po ustálení průniky řeznou rovinou zaznamenávat. Podobně je třeba zkoumat citlivost výstupu na časovém kroku, metodě řešení, hodnotách tlumení a podobně.

Bifurkační diagram lze konstruovat s více přístupy. Při podrobném studiu citlivosti systému má význam provést každý:

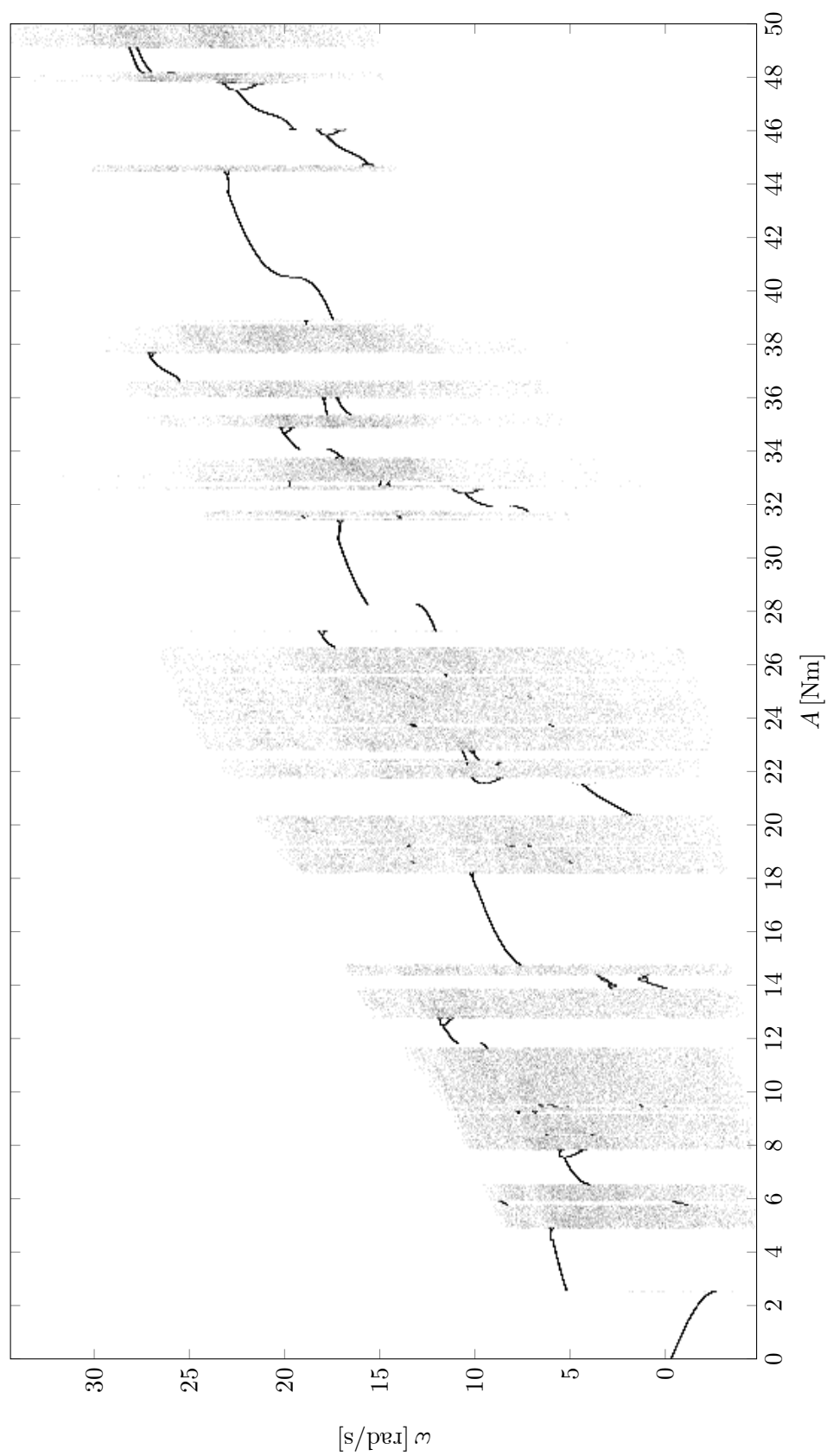
- Postupná změna řídicího parametru *za chodu*. Například pozvolný nárůst amplitudy budící síly při nepřerušené simulaci, viz obrázek 5.10. Podobně lze sledovat odezvu systému při zpětném snižování hodnoty parametru, viz obrázek 5.11.
- Provedení nového výpočtu pro každou hodnotu řídicího parametru s pevnými počátečními podmínkami, například $\omega_0 = 0, \varphi_0 = 0$, viz obrázek 5.12.
- Provedení více výpočtů pro každou hodnotu řídicího parametru s proměnlivými (náhodnými) počátečními podmínkami, například $\omega_0 = (-10; 10) \text{ rad s}^{-1}$, $\varphi_0 = (-\pi; \pi) \text{ rad}$, viz obrázek 5.13.

5.4.1 Poznámky k bifurkačním diagramům

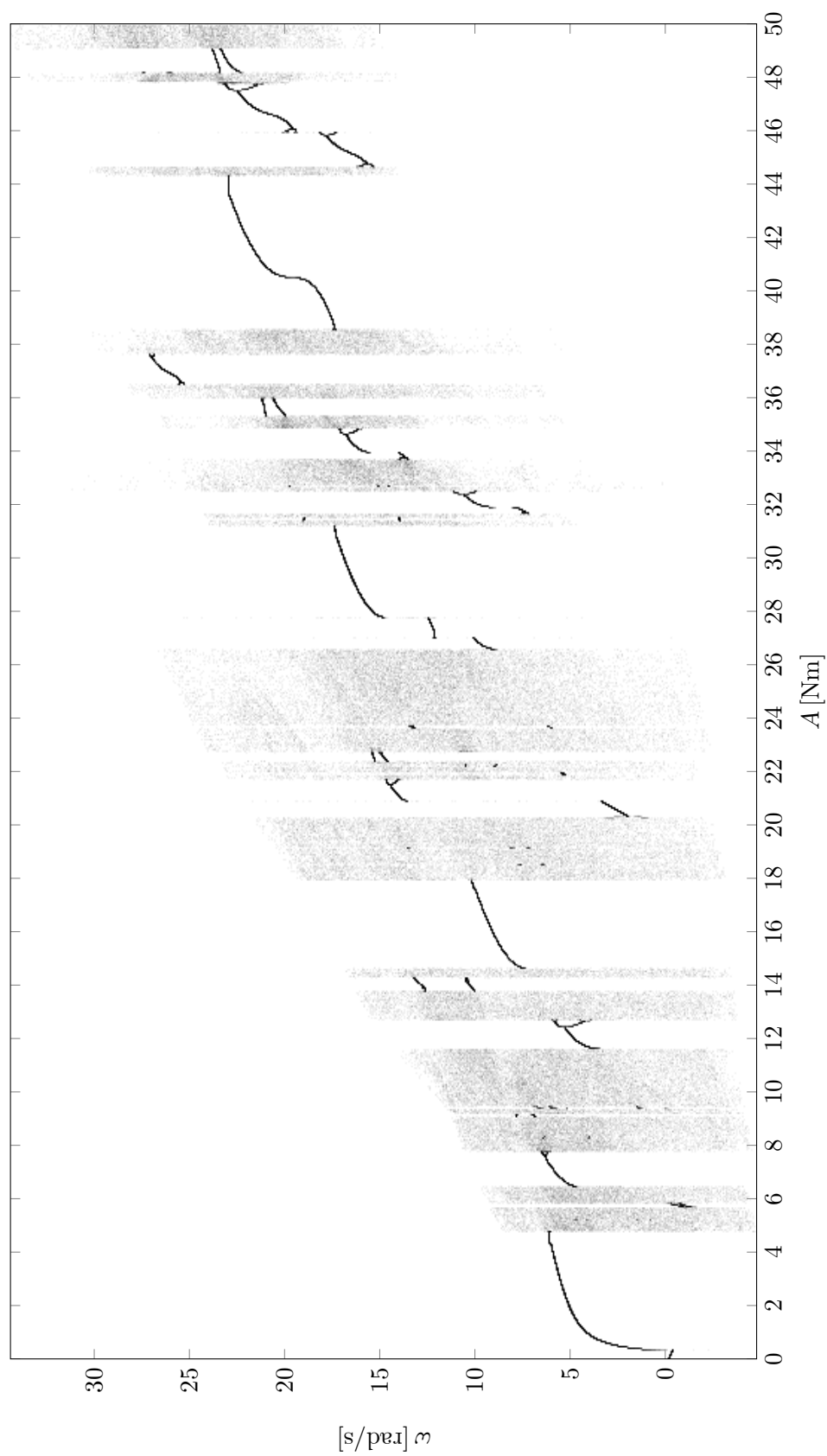
Bifurkační diagram běžně obsahuje oblasti jednoduchého limitního chování, místa štěpení na zdvojený limitní cyklus a oblasti chaotického chování. V místech bifurkace (štěpení) dochází ke strukturální nestabilitě systému kvůli skoku v první derivaci úhlové rychlosti, viz sekce 5.5.

Stejně jako Poincarého mapy, i bifurkační diagram z nich vytvořený má fraktální kvality. Zjišťujeme, že v oblastech jevicích se jako *chaotický šum* při přibližování opět nalézáme další bifurkující limitní cykly - takzvané *kaskády bifurkací*, viz obrázky 5.14 a 5.15.

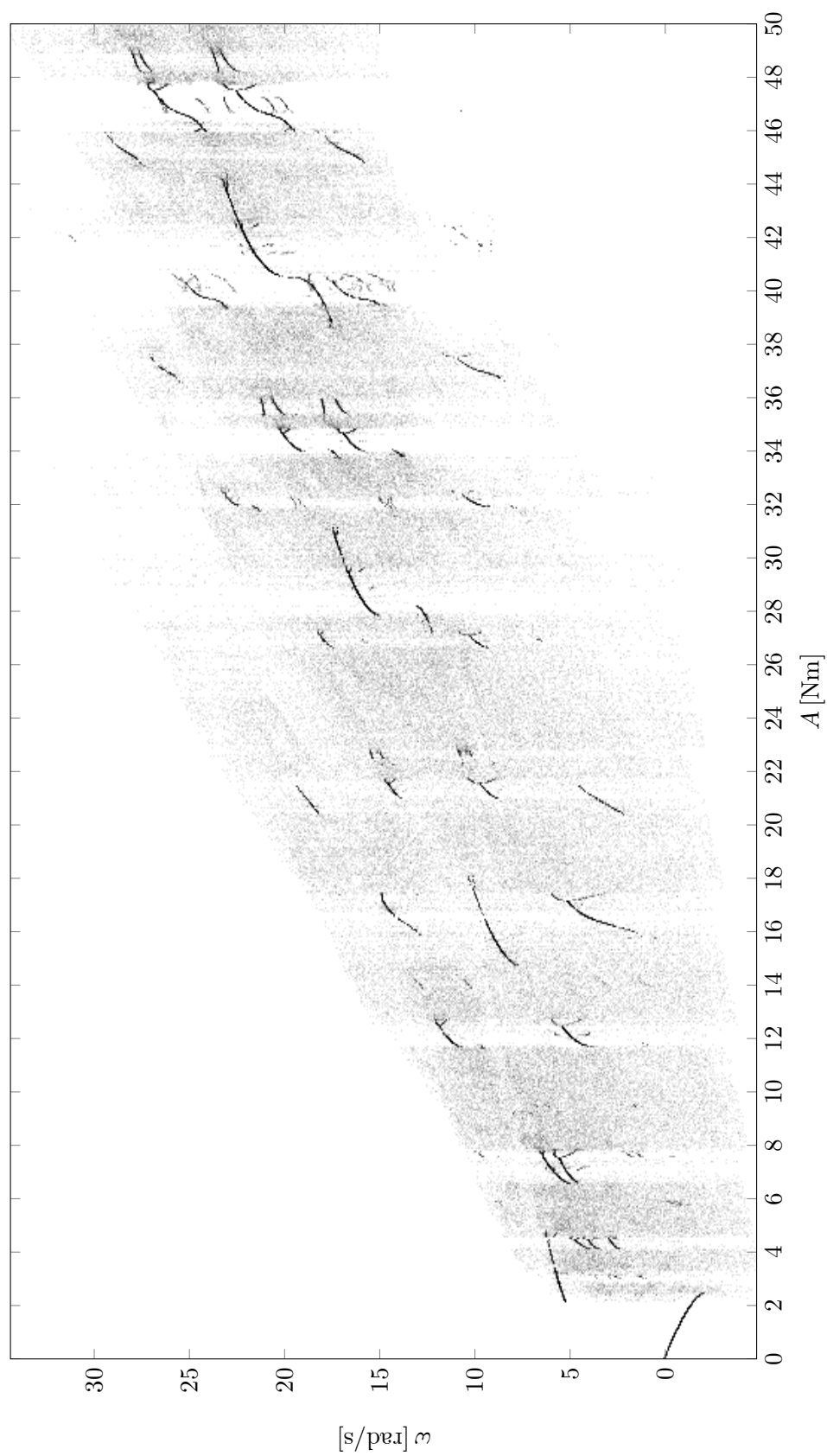
Ilustrace bifurkačních diagramů na obrázcích 5.10, 5.12 a 5.13 ukazují, že při výpočtu se stále stejnými počátečními podmínkami nebo při spojitě simulaci se může systém některým limitním stavům zcela vyhnout. Simulace s proměnlivými počátečními podmínkami naopak vystihuje širší množinu možných stavů. Zde je třeba uvážit, kolik různých výpočtů je třeba spustit pro téže hodnotu měněného parametru. Podobně jako výpočet podrobných Poincarého map, i konstrukce bifurkačního diagramu je časově velmi náročným problémem.



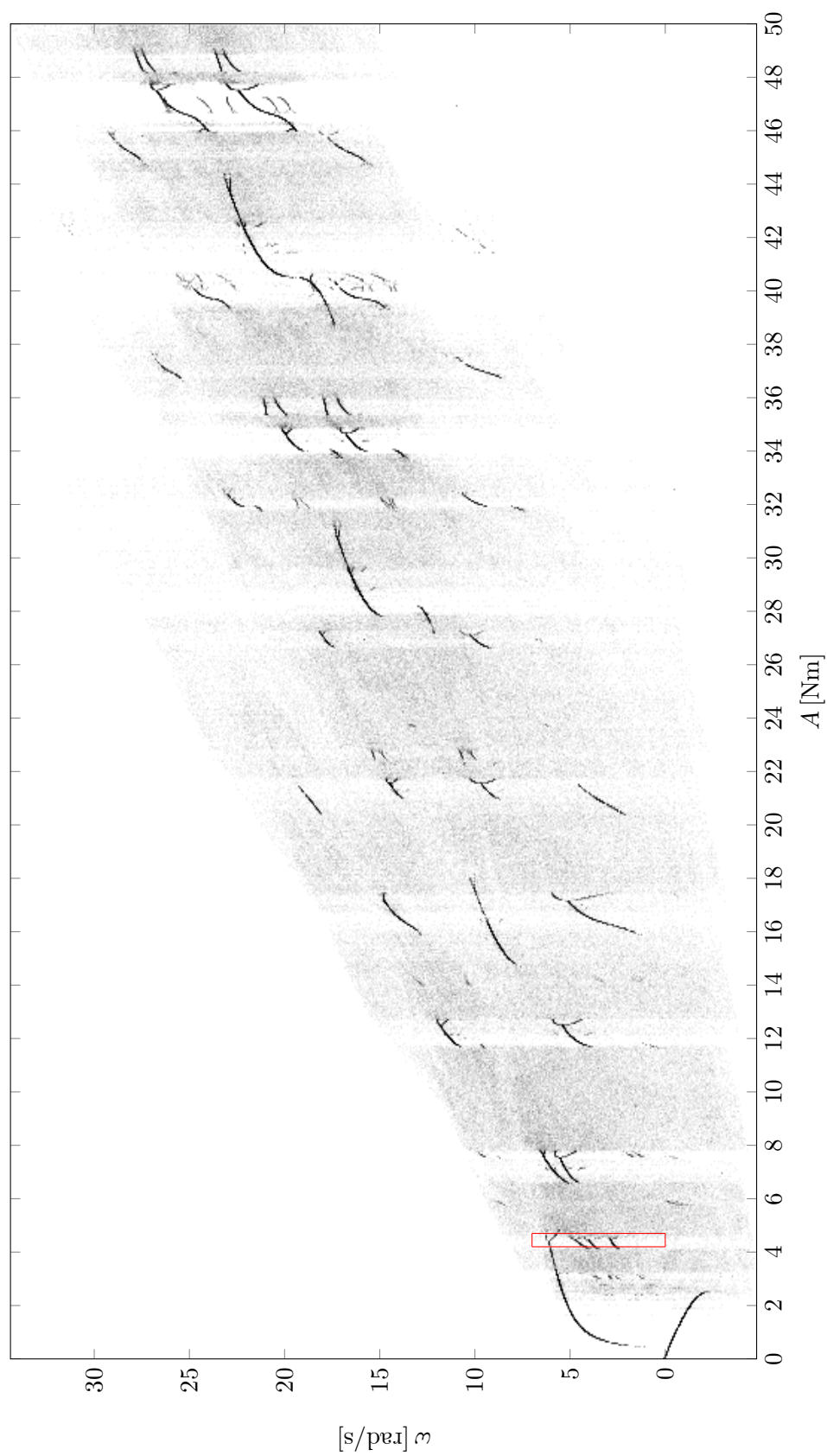
Obrázek 5.10: Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru vytvořený zvyšováním amplitudy za chodu simulace.



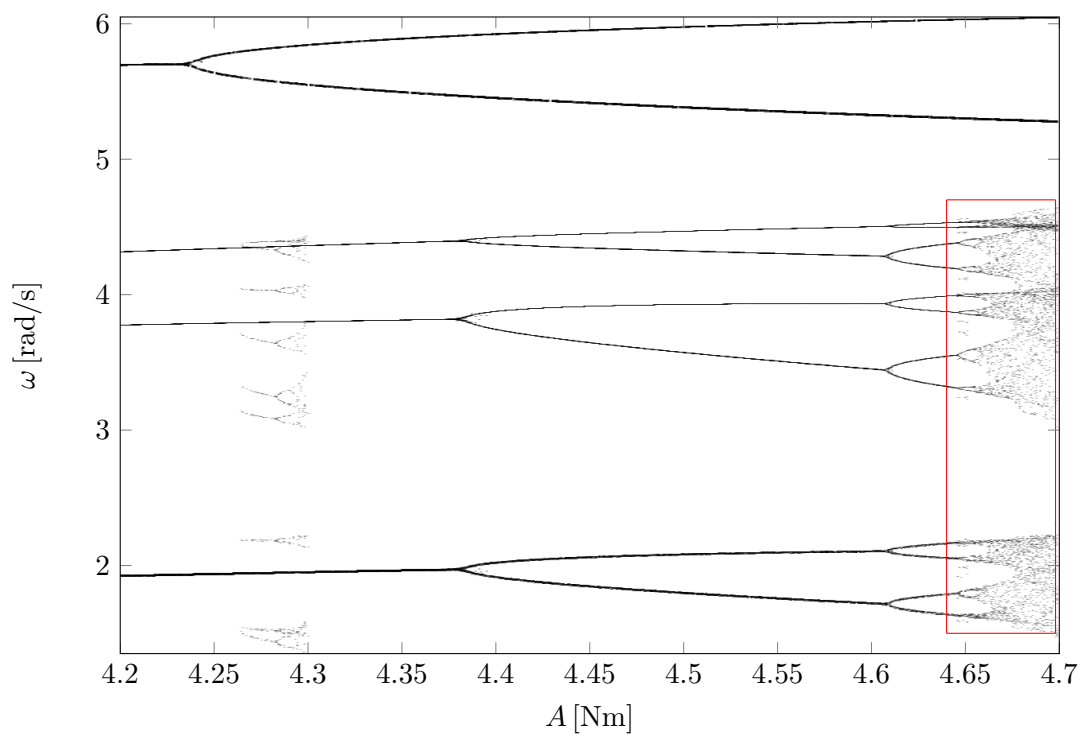
Obrázek 5.11: Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru vytvořený snižováním amplitudy za chodu simulace.



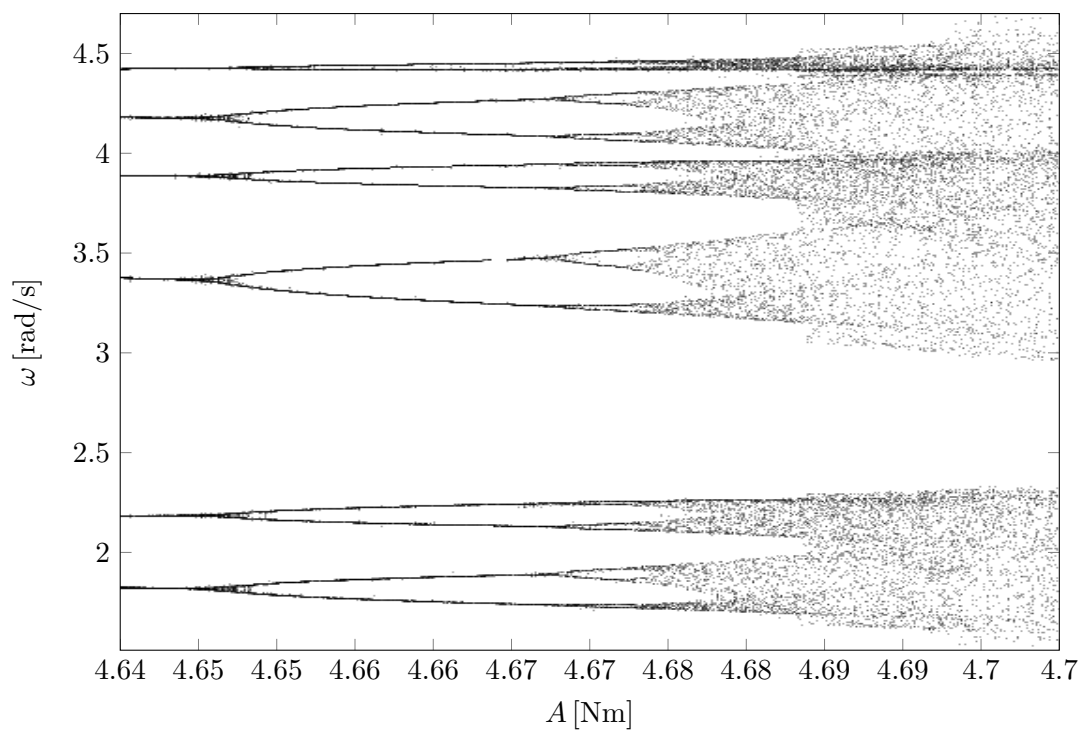
Obrázek 5.12: Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru získaný opakovaním simulace pro $\varphi = 0, \omega_0 = 0$.



Obrázek 5.13: Bifurkační diagram jednoduchého rotátoru získaný mnoha simulacemi s náhodnými počátečními podmínkami.



Obrázek 5.14: Detail bifurkačního diagramu 5.13.



Obrázek 5.15: Detail bifurkačního diagramu 5.14.

5.5 Strukturální nestabilita a bifurkace

V předchozích částech práce byly ukázány nástroje pro studium chování dynamických systémů. Cílem takového zkoumání dynamického systému je objevení a diagnostika stavů systému pro všechny konfigurace systému. V případě nelineárních systémů je taková kompletní analýza velmi náročná, spíše nemožná.

K problému se proto přistupuje pragmatictěji: při studiu chování systému v závislosti na měnícím se parametru se snažíme identifikovat oblasti s kvalitativně podobným chováním, viz [5]. Přechod mezi kvalitativně odlišným chováním se děje zpravidla náhle v jediném bodě, který nazýváme *bifurkační bod*, viz [14] nebo [15]. V místě *bifurkace* dochází ke strukturální nestabilitě systému, v bifurkačním diagramu nelze stanovit první derivaci křivky podle měněného parametru - rychlost vzdalování bodů v Poincarého mapě je teoreticky nekonečná.

Systém může obecně ztratit stabilitu mnoha způsoby. Ukazuje se, že jevy ztráty stability a složité limitní chování jsou společné pro dynamické systémy napříč vědními odvětvími. Takové společné vlastnosti se nazývají *generické vlastnosti* dynamických systémů. Původ mnoha těchto jevů zůstává stále neobjasněn a je předmětem intenzivního výzkumu.

5.5.1 Bifurkace v dynamických systémech

Jev ztráty stability je důležitou kvalitou modelu, která slouží pro posouzení podobnosti modelu vzhledem k modelované konstrukci. Samotná kritická hodnota parametru, kde k bifurkaci dochází (poloha bifurkačního bodu), je potom zásadním ověřením kvantitativní výstižnosti modelu. Ukažme proto dále zástupce nejčastějších druhů ztráty stability, viz [34]. Proměnným parametrem budiž obecná síla F a úhlová rychlost kmitání ω nechť je zaznamenána Poincarého mapami.

Hopfova bifurkace

Druh bifurkace, který popsal rakouský matematik EBERHARD HOPF², je charakteristický vznikem limitního cyklu ze stabilního ohniska. Na bifurkačním diagramu, viz obrázek 5.16, je zobrazena ztráta statické stability tláčeného vetknutého prutu, viz kapitola 10.

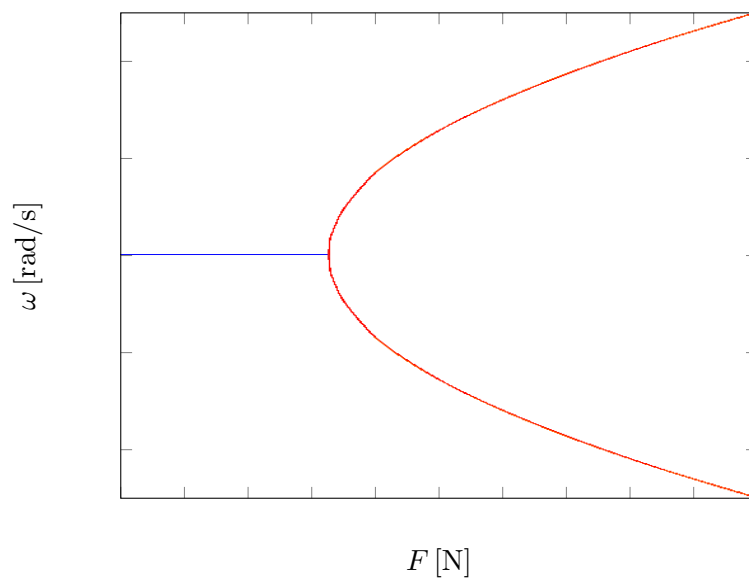
Bifurkační diagram je s výhodou vyobrazen jako histogram četností průsečíku trajektorie s řeznou rovinou v trilineární barevné škále. Je vidět, že od hodnoty kritické síly systém začíná kmitat v limitním cyklu. Průsečíky v mapě Poincarého se od sebe rychle vzdalují a vzniká stabilní jednoduchý limitní cyklus.

Popsaná forma Hopfovy bifurkace se nazývá *superkritická*. Jejím opakem je *subkritická* forma, kdy vzniká nestabilní limitní cyklus.

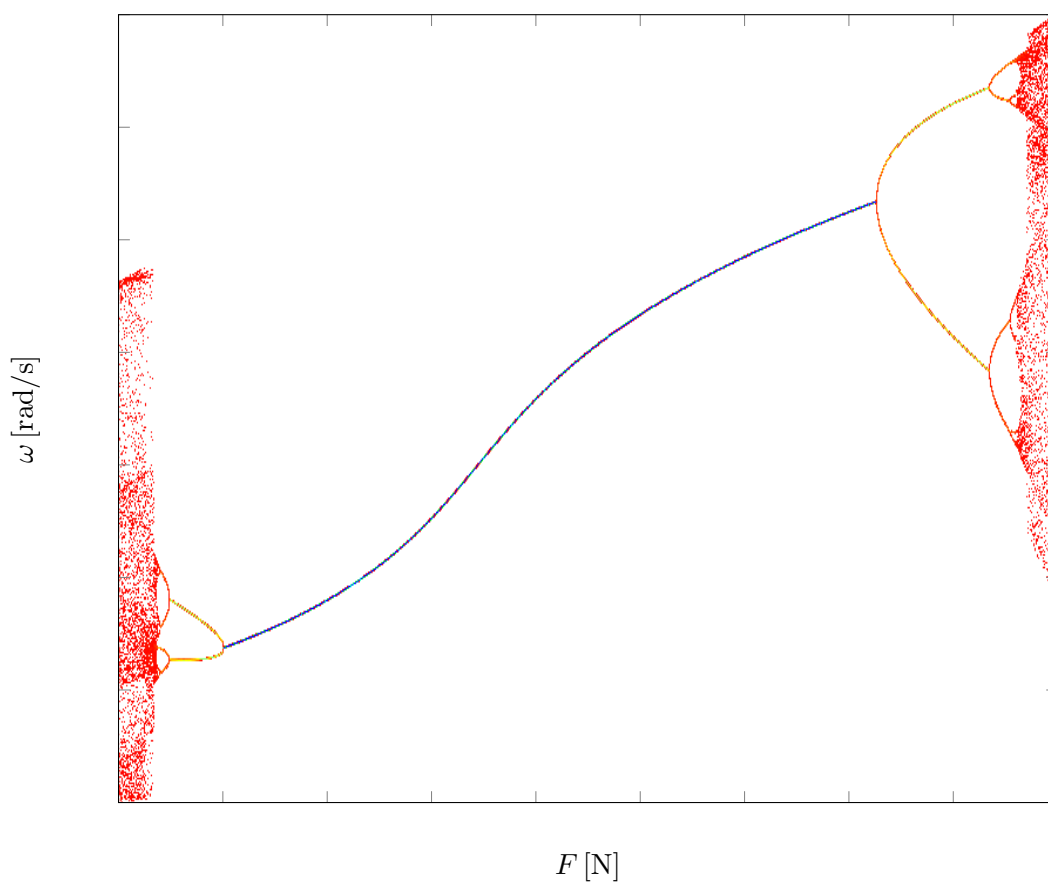
Zdvojení a půlení periody

Nachází-li se systém v limitním cyklu, změna sledovaného parametru může vést ke kvalitativnímu skoku - zdvojení nebo půlení periody limitního cyklu. Postupné zdvojování periody často vede k chaotickému chování (přes *kaskádu bifurkací*). Postupné dělení periody naopak vede k *řádu*. Takový vývoj je názorně ukázán na obrázku 5.17. Lokální zdvojení periody a návrat systému k předchozí kvalitě znázorňuje obrázek 5.18.

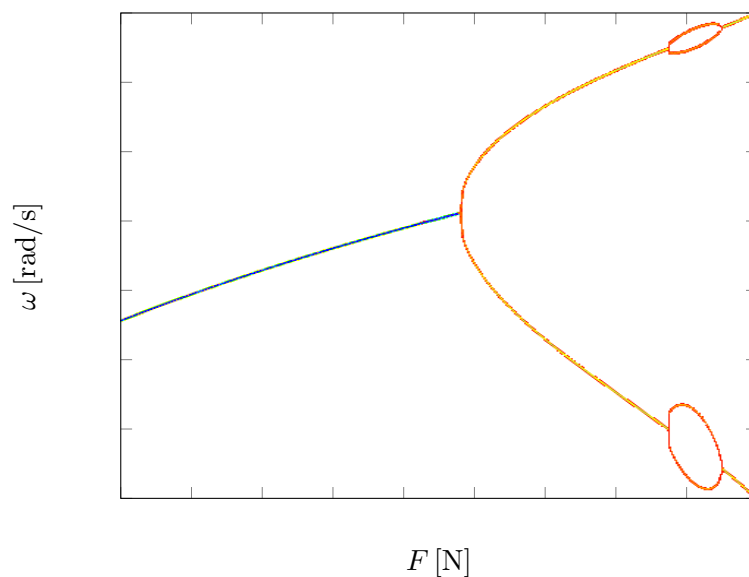
² Bifurkace známa také jako POINCARÉHO-ANDRONOVOVA-HOPFOVA.



Obrázek 5.16: Superkritická Hopfova bifurkace.



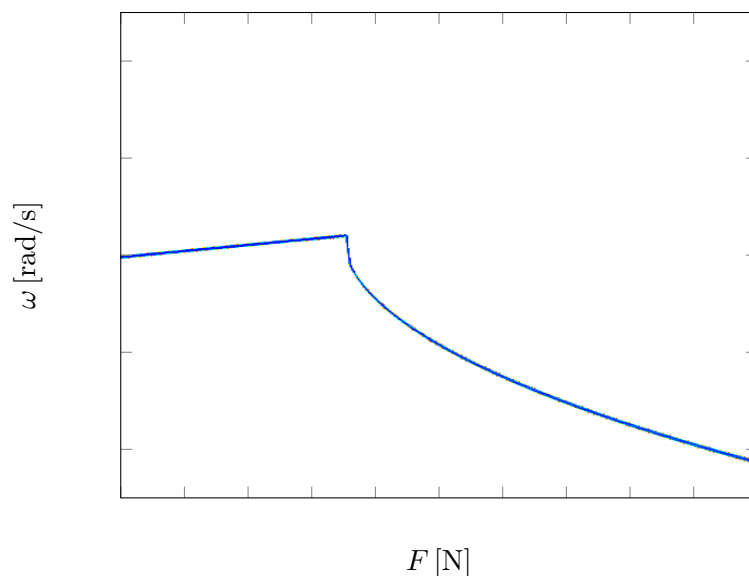
Obrázek 5.17: Zdvojování a půlení periody jako přechod mezi řádem a chaosem.



Obrázek 5.18: Lokální zdvojení periody limitního cyklu.

Vidličková bifurkace

Superkritická vidličková bifurkace (pitchfork bifurcation) je jevem, kdy dynamický systém přechází z limitního cyklu do jedné z minimálně dvou možných stabilních limitních množin, viz obrázek 5.19. Jedna z možných limitních množin bývá zpravidla zvýhodněna imperfekcemi nebo počátečními podmínkami. Podobně jako u Hopfovy bifurkace, i zde existuje subkritická varianta.



Obrázek 5.19: Superkritická vidličková bifurkace.

5.5.2 Kaskáda bifurkací a Feigenbaumovy konstanty

Kaskáda bifurkací vzniká postupným zdvojováním period limitních cyklů systému. Bifurkace limitních cyklů se v bifurkačním diagramu objevují stále častěji. Typickou vlastností kaskád bifurkací je jev, kdy poměry délek úseků mezi bifurkacemi konvergují k pevné hodnotě.

V roce 1975 ukázal americký matematik MITCHELL FEIGENBAUM, že poměr následujících vzdáleností mezi bifurkačními body skutečně konverguje k transcendentním³ hodnotám:

- 4.669 201 609..., neboli Feigenbaumova konstanta δ je limitní poměr délek po sobě jdoucích úseků mezi bifurkacemi ve směru měnícího se parametru (zde ve vodorovném směru). Pomocí konstanty δ lze přibližně odhadovat, kdy v systému vznikne chaos. Konstantu δ lze aproximovat výrazem:

$$\delta \approx \frac{2\varphi}{\log(2)} = 4.669, \quad (5.3)$$

kde φ je hodnota zlatého řezu:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\,033\,988..., \quad (5.4)$$

- 2.502 907 875..., neboli Feigenbaumova konstanta α je limitní poměr šířek mezi po sobě jdoucími bifurkačními body (zde ve svislém směru). Konstantu α lze aproximovat výrazem:

$$\alpha \approx \frac{2\varphi + 1}{\log(2) + 1} = 2.502. \quad (5.5)$$

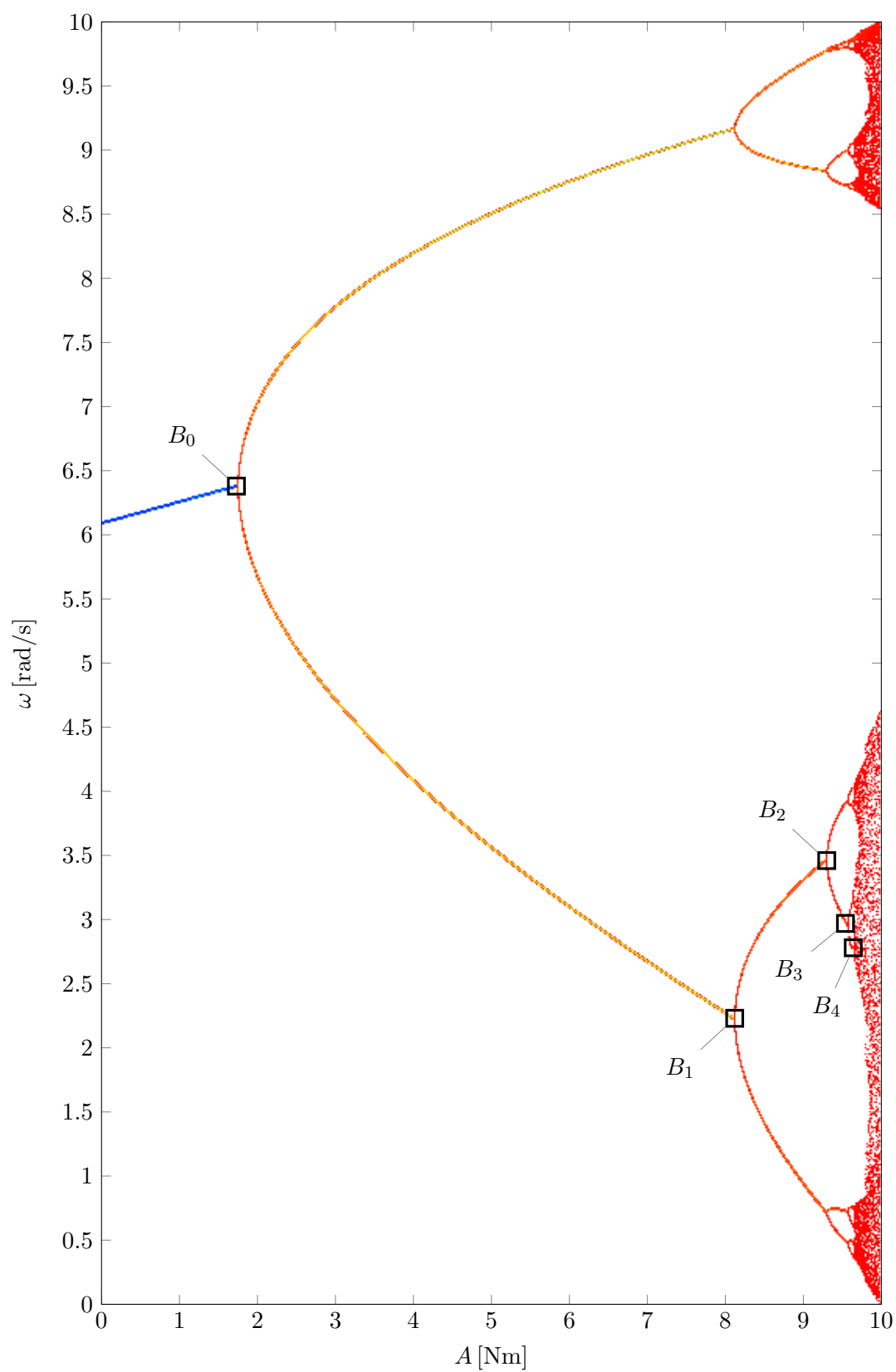
Použijme nyní detail bifurkačního diagramu jednoduchého rotátoru, viz sekce 7, k demonstraci uvedeného. Bifurkační diagram na obrázku 5.20 je pro přehlednost převeden do relativních souřadnic.

V průběhu výpočtu byly zjištěny souřadnice vybraných bifurkačních bodů B_i , viz obrázek 5.20. Tabulka 5.1 ukazuje konvergenci poměrů vzdáleností bifurkačních bodů k Feigenbaumovým konstantám δ a α .

Bifurk. bod	A	$\frac{c_{n-1}-c_{n-2}}{c_n-c_{n-1}}$	ω	$\frac{\omega_{n-1}-\omega_{n-2}}{\omega_n-\omega_{n-1}}$
B_0	1.7311	-	6.3812	-
B_1	8.1208	-	2.2587	-
B_2	9.3002	5.4178	3.4603	3.4308
B_3	9.5499	4.7233	2.9901	2.5555
B_4	9.6032	4.6848	2.8052	2.5430

Tabulka 5.1: Konvergence souřadnic bifurkačních bodů k Feigenbaumovým konstantám.

³ Transcendentní číslo je číslo, které není algebraické - tedy není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Příkladem budiž Ludolfovo, Eulerovo nebo Liouvillovo číslo.



Obrázek 5.20: Kaskáda bifurkací konvergující k Feigenbaumovým konstantám.

Kapitola 6

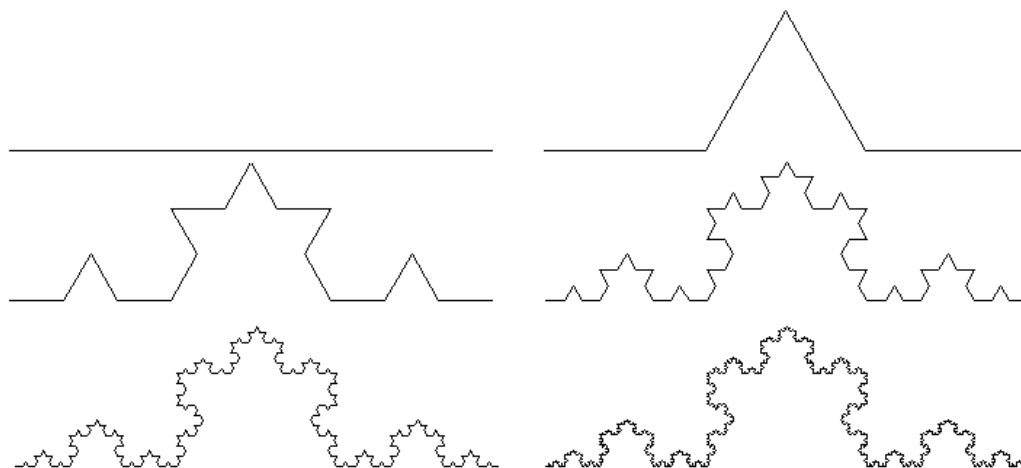
Fraktály

V dosavadním obsahu práce bylo na mnoha místech bez dalšího vysvětlení poznamenáno, že při nelineárním a chaotickém chování lze pozorovat vznik útvarů, jež mají fraktální kvality. Následující kapitola si proto klade za cíl poskytnout čtenáři spojitý úvod do fraktální geometrie.

6.1 Soběpodobnost

Fraktály jsou geometrické útvary, jejichž hlavní společnou vlastností je tzv. *soběpodobnost*. Tím je myšleno, že dvě části daného útvaru v různém měřítku jsou si *podobné*. Matematicky řečeno, části jsou kvalitativně ekvivalentní, tedy existuje vzájemně jednoznačné zobrazení jednoho úseku na druhý, viz [24].

Důsledkem soběpodobnosti je *absolutně relativní měřítko* - libovolně malý detail fraktálu má stejnou složitost jako prvotní útvar, viz [28]. Výsledný geometrický útvar se proto vyznačuje teoreticky nekonečnou složitostí. Výše popsané dobře znázorňuje klasická Kochova křivka na obrázku 6.1.



Obrázek 6.1: Konstrukce Kochovy křivky.

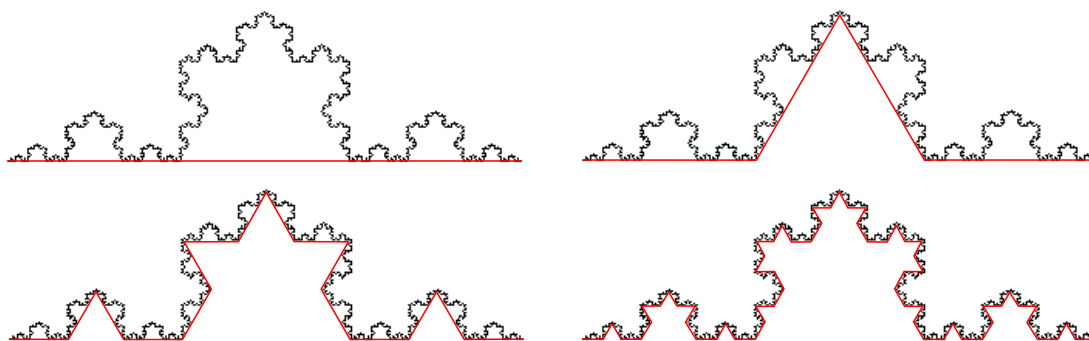
6.2 Fraktální dimenze

Velmi častou vlastností¹ fraktálních útvarů je jejich fraktální (neceločíselná) dimenze. Jako zástupce *zdánlivě* jednorozměrných útvarů využijme uvedenou Kochovu křivku. Nekonečná složitost křivky způsobuje, že její teoretická délka je nekonečná.

Navzdory tomu, že se tato nekonečná křivka zřejmě rozkládá na konečné ploše, není na ní plochy, kterou bychom mohli měřit. V určitém smyslu proto lze tvrdit, že dimenze D takového útvaru je v intervalu $1 < D < 2$.

Ukažme nyní způsob stanovení fraktální dimenze Kochovy křivky, viz obrázek 6.2. Za předpokladu, že délka počáteční úsečky při nulté iteraci, viz obrázek 6.1, se rovná jedné, měříme délku Kochovy křivky l_i kružítkem o poloměru r_i :

$$r_i = \left\{ \frac{1}{3^0}, \frac{1}{3^1}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^i} \right\}. \quad (6.1)$$



Obrázek 6.2: Měření délky Kochovy křivky.

Provedený experiment ukáže, že stanovené délky nekonvergují se zmenšováním poloměru kružítky r ke konstantní hodnotě, ale neustále rostou, viz tabulka 6.1. Konkrétně pro Kochovu křivku platí výraz:

$$l_i = \left(\frac{4}{3} \right)^i. \quad (6.2)$$

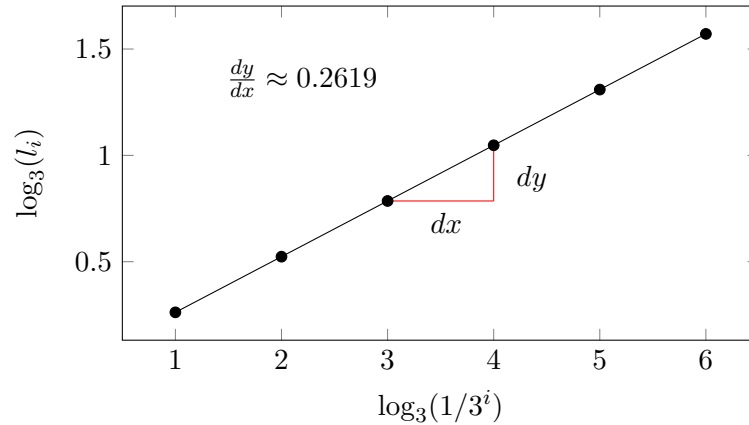
Poloměr r_i	$1/3^0$	$1/3^1$	$1/3^2$	$1/3^3$	$1/3^4$	$1/3^5$	...	$1/3^{25}$
Délka l_i	1.000	1.333	1.778	2.370	3.160	4.214	...	1329

Tabulka 6.1: Zjištěné délky Kochovy křivky.

¹ Existují také útvary, které vyhovují definici fraktálu jako soběpodobného útvaru a zároveň mají celočíselnou dimenzi. Například Dáblovo schodiště (Devil's staircase) s dimenzí 1.0 nebo Peanova křivka s dimenzí 2.0, viz [28].

Nyní zobrazme získané výsledky v grafu s výhodným logaritmickým měřítkem $\log_3(1/3^i)$ - $\log_3(L_i)$, viz obrázek 6.3. Je vidět, že v dvojité logaritmickém zobrazení dostáváme lineární závislost se směrnici přímky a :

$$a = \frac{\log_3(L_i)}{\log_3\left(\frac{1}{r_i}\right)} = \frac{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)^i}{\log_3(3)^i} = \frac{i \log_3\left(\frac{4}{3}\right)}{i \log_3(3)} = \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2619 \quad (6.3)$$



Obrázek 6.3: Naměřené délky Kochovy křivky v dvojité logaritmickém měřítku.

Podobná analýza geometrických útvarů s celočíselnou dimenzí zřejmě povede ke zjištění, že stanovení jejich rozměrů není závislé na použitém měřítku. Například: nezáleží, kolika úsečkami pokryjeme hrany čtverce, abychom zjistili jeho obvod, ani kolika čtverci pokryjeme jím ohraničenou oblast, abychom zjistili jeho plochu.

Existuje mnoho druhů dimenzí které lze u geometrického útvaru vyčíslit. Takovým podrobným studiem potom vzniká tzv. *spektrum dimenzí*, viz [5]. Vzhledem k rozsahu práce zmiňme nejpoužívanější definované dimenze, viz [28]:

- topologická dimenze D_T ,
- pokrývající dimenze D_P ,
- fraktální (Hausdorffova) dimenze D_H ,
- soběpodobnostní dimenze D_S ,
- kapacitní (Kolmogorovova) dimenze D_C .

Určeme nyní například kapacitní dimenzi D_C studované Kochovy křivky podle definice:

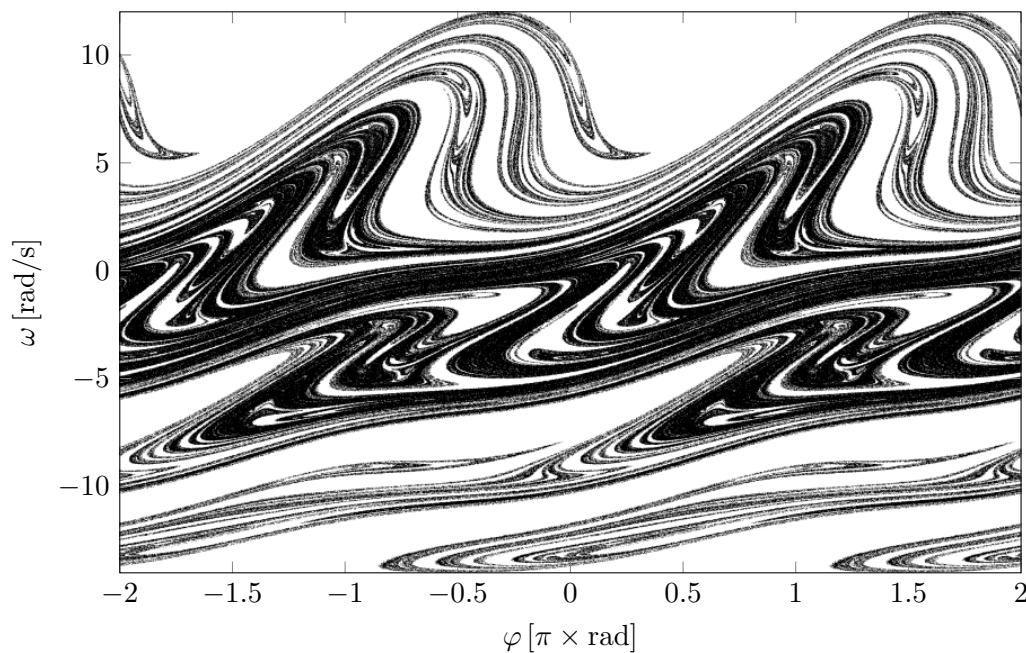
$$D_C = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln n_i(r)}{\ln\left(\frac{1}{r_i}\right)}, \quad (6.4)$$

kde n_i je minimální počet útvarů, kterými je třeba měřený objekt pokrýt při délce každého útvaru rovné r_i . V případě Kochovy křivky můžeme vzhledem k předchozímu studiu psát:

$$D_C = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.2619. \quad (6.5)$$

Dimenze útvaru Kochovy křivky tedy odpovídá předpokladu $1 < 1.2619 < 2$. Navzdory tomu, že Kochova křivka je patrně liniový útvar, její nekonečná vrstevnatost způsobuje nárůst její dimenze na hodnotu větší než 1, avšak menší než 2, neboť křivka nemá plošný charakter.

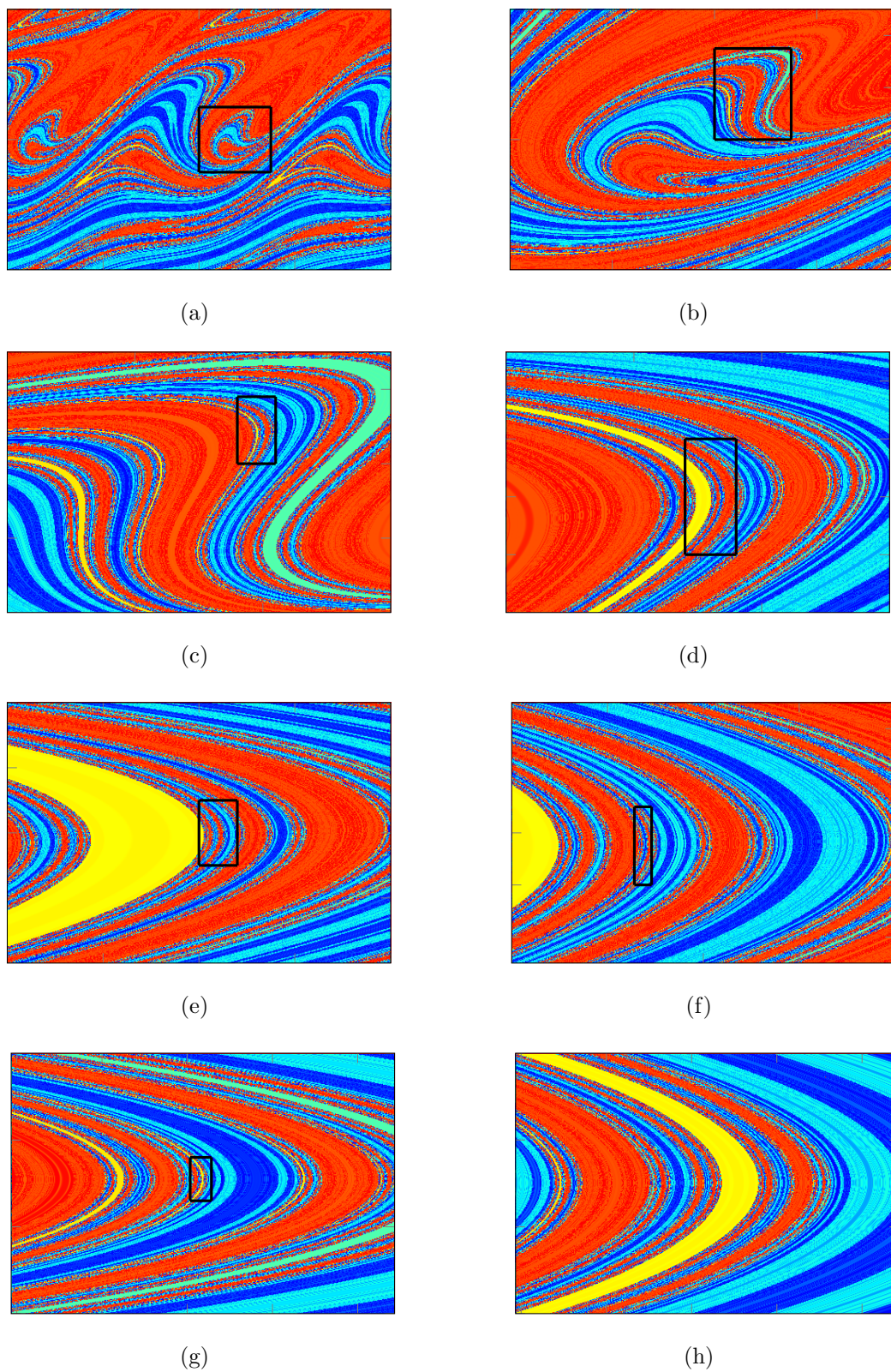
Podobně lze chápat fraktalitu plošných útvarů. Například řez chaotickým atraktorem, viz obrázek 6.4, se zřejmě rozkládá v ploše. Avšak při zvyšování rozlišení zjišťujeme, že jeho hranice je nekonečně složitá, což vede k dimenzi útvaru v rozmezí $2 < D < 3$.



Obrázek 6.4: Poincarého mapa chaotického atraktoru.

Nekonečná složitost rozhraní (separatrix) mezi dvěma útvary má za následek tzv. *difuzní charakter*. Takové rozhraní je nejasné a ani při přibližování nelze jednoznačně stanovit hranici mezi útvary. Demonstrujme difuzní charakter takového rozhraní na bazénech přitažlivosti, viz obrázek 6.5.

Zachování složitosti útvaru při přibližování bylo zřetelné také na obrázcích 5.14 a 5.15 znázorňujících kaskády bifurkací.



Obrázek 6.5: Rozhraní bazénů přitažlivosti.

Část II

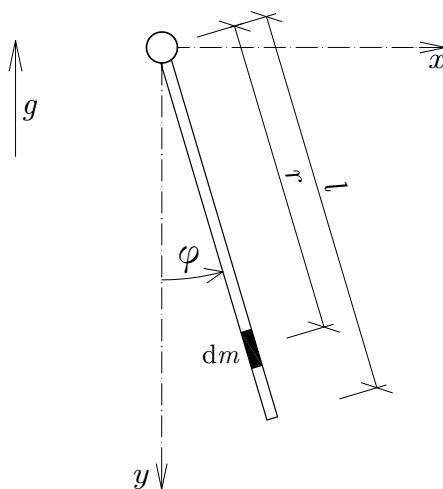
Numerické simulace nelineárních dynamických systémů

Kapitola 7

Jednoduchý rotátor

Model jednoduchého rotátoru, tedy tuhého matematického rovinného kyvadla, je prvním a nejjednodušším prezentovaným modelem. Dynamický systém jednoduchého rotátoru má pro potřeby práce několik vhodných vlastností. Tyto plynou především ze skutečnosti, že pro popis modelu stačí dvě stavové proměnné - úhel natočení rotátoru φ a úhlová rychlost rotátoru ω . Jak bude ukázáno, při simulaci není třeba řešit soustavu rovnic a výpočet je velmi rychlý.

Takto popsán, model nemůže vykazovat chaotické chování. Je zapotřebí třetí nezávislá stavová proměnná, zde konkrétně harmonická budící síla $f(t) = A \sin(\Omega t)$, kde A je amplituda a Ω je úhlová frekvence budící síly. Vratný mechanismus zajišťuje působící gravitační zrychlení g . Tlumení modelu je jednoduché lineární viskózní. Pro ilustraci a potřeby odvození je model znázorněn na obrázku 7.1.



Obrázek 7.1: Model jednoduchého rotátoru.

7.1 Odvození modelu

Odvození všech prezentovaných numerických modelů bude vzhledem k rozsahu práce uvedeno bez širšího teoretického podkladu. Princip odvození soustavy pohybových rovnic za pomoci Lagrangeovské mechaniky, D'Alembertova a Hamiltonova principu byl již podrobně popsán v bakalářské práci, viz [25].

Pro odvození numerického modelu bude nejprve sestavena Lagrangeova funkce $\mathcal{L}$, viz [10], [20] a [33], jako rozdíl kinetické a potenciální energie modelu:

$$\mathcal{L} = Ek - Ep. \quad (7.1)$$

Pohybové rovnice potom obdržíme užitím vztahu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \frac{\partial Ek}{\partial a} - \frac{\partial Ep}{\partial a}, \quad (7.2)$$

kde a je zobecněná souřadnice systému a $\dot{a}$ je zobecněná rychlost, viz [25].

Nejprve sestavme složky translačních rychlostí diferenciálního elementu v_x a v_y . S přihlédnutím k obrázku 7.1 platí:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega r \cos(\varphi), \\ v_y &= -\omega r \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (7.3)$$

kde $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ je úhlová rychlost rotátoru. Absolutní translační rychlost elementu v je potom zřejmé:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (7.4)$$

Kinetickou energii diferenciálního elementu dEk vyjádříme podle vztahu:

$$dEk = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho dr v^2, \quad (7.5)$$

kde m je hmotnost elementu, ρ je hustota materiálu rotátoru a dr je délka diferenciálního elementu. Integrací přes celou délku rotátoru l získáváme kinetickou energii rotátoru Ek :

$$\begin{aligned} Ek &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l v^2 dr = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\omega^2 r^2 \cos^2(\varphi) + \omega^2 r^2 \sin^2(\varphi) \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\omega^2 r^2 \right) dr = \frac{1}{6} \rho \left[\frac{1}{3} \omega^2 r^3 \right]_0^l = \frac{1}{6} \rho \omega^2 l^3 = \frac{1}{6} m \omega^2 l^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Jedinou složkou potenciální energie rotátoru Ep je polohová energie v důsledku působení gravitačního zrychlení g . Výraz pro potenciální energii diferenciálního elementu dEp je podle obrázku 7.1:

$$dEp = m g h = m g r [-\cos(\varphi) + 1] = \rho dr g [-\cos(\varphi) + 1]. \quad (7.7)$$

Potenciální energii celého rotátoru Ep opět získáme integrací přes celou délku rotátoru:

$$\begin{aligned} Ep &= \rho g \int_0^l \left[r (-\cos(\varphi) + 1) \right] dr = \rho g (-\cos(\varphi) + 1) \frac{l^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} m g l (-\cos(\varphi) + 1). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Nyní je na místě sestavit výraz pro Lagrangeovu funkci systému $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = Ek - Ep = \frac{1}{6}m\omega^2 l^2 - \frac{1}{2}mgl(-\cos(\varphi) + 1). \quad (7.9)$$

Podle tvrzení (7.2) nyní zderivujeme Lagrangeovu funkci podle všech stavových proměnných. Zde tedy pouze podle úhlu natočení φ a úhlové rychlosti ω :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}mgl \sin(\varphi), \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{1}{3}m\omega l^2. \quad (7.11)$$

Posledním zbývajícím krokem je derivace výrazu (7.11) podle času:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) = \frac{1}{3}m\dot{\omega} l^2. \quad (7.12)$$

Pohybová rovnice konzervativního modelu má tedy tvar:

$$\frac{1}{3}m\dot{\omega} l^2 = -\frac{1}{2}mgl \sin(\varphi). \quad (7.13)$$

Po přidání složky lineárního viskózního tlumení a harmonické budící síly je konečná podoba pohybové rovnice jednoduchého rotátoru následující:

$$\frac{1}{3}m\dot{\omega} l^2 = -\frac{1}{2}mgl \sin(\varphi) - c\omega + A \sin(\Omega t), \quad (7.14)$$

kde c je koeficient lineárního útlumu, A je amplituda a Ω je úhlová frekvence budící síly.

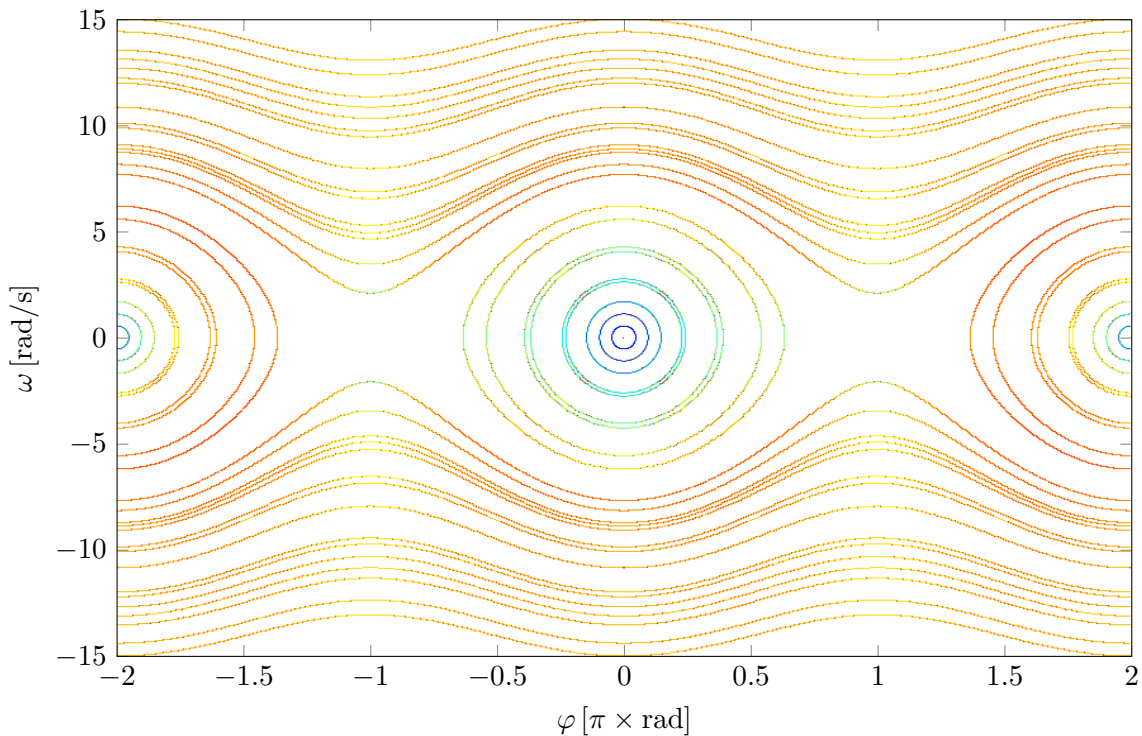
7.2 Vybrané příklady

Model jednoduchého rotátoru byl využit pro ilustrace v rámci teoretického základu práce. Proto dále budou uvedeny výsledky simulací, které nebyly dosud ukázány. Doplňme, že všechny simulace jsou prováděny s modelem délky $l = 2$ m a hmotnosti $m = 10$ kg v gravitačním poli $g = 9.81$ m s⁻². Hodnota koeficientu tlumení je $c = 0.1$ Nm s rad⁻¹, není-li uvedeno jinak. Časový krok výpočtu byl zvolen $h = 0.005$ s, použita byla přednostně semi-implicitní Eulerova metoda řešení.

7.2.1 Fázové portréty

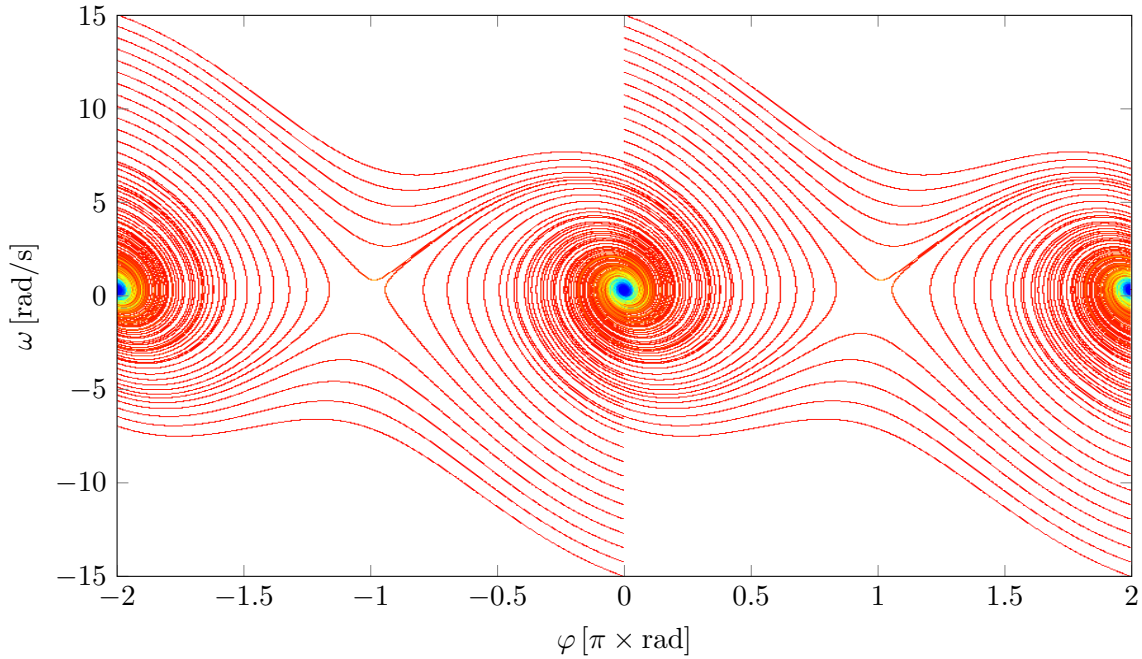
Jako první je ukázán fázový portrét, viz sekce 2.2.2, netlumeného a nebuzeňého jednoduchého rotátoru. Fázový portrét, viz obrázek 7.2, byl konstruován zaznamenáváním trajektorií ve fázovém prostoru $\varphi - \omega$. Počáteční rychlost pro trajektorie se měnila v rozmezí $\omega(t_0) = (-15; 15)$ rad s⁻¹ s krokem $\Delta\omega = 0.2$ rad s⁻¹. Počáteční úhel zůstal pro všechny trajektorie shodný $\varphi(t_0) = 0$ rad.

Fázový portrét je s výhodou znázorněn jako histogram v trilineární barevné škále. Barevná hodnota tak udává počet bodů trajektorie připadajících na daný pixel. Jinými slovy, barva udává rychlost toku bodů trajektorie ve fázovém prostoru, viz odstavec 2.2.3.



Obrázek 7.2: Fázový portrét netlumeného jednoduchého rotátoru.

Druhý fázový portrét, viz obrázek 7.3, ukazuje stejný experiment, avšak s hodnotou koeficientu lineárního útlumu $c = 0.5$ Nm s rad⁻¹.



Obrázek 7.3: Fázový portrét tlumeného jednoduchého rotátoru.

7.2.2 Identifikace limitních stavů

Na případě jednoduchého rotátoru lze snadno demonstrovat také přínos zobrazení v mapě Poincarého. Dále budou ukázány vždy dvojice zobrazení limitního stavu: trajektorie v rovině fázového prostoru $\varphi - \omega$ a odpovídající zobrazení téhož limitního cyklu v Poincarého mapě.

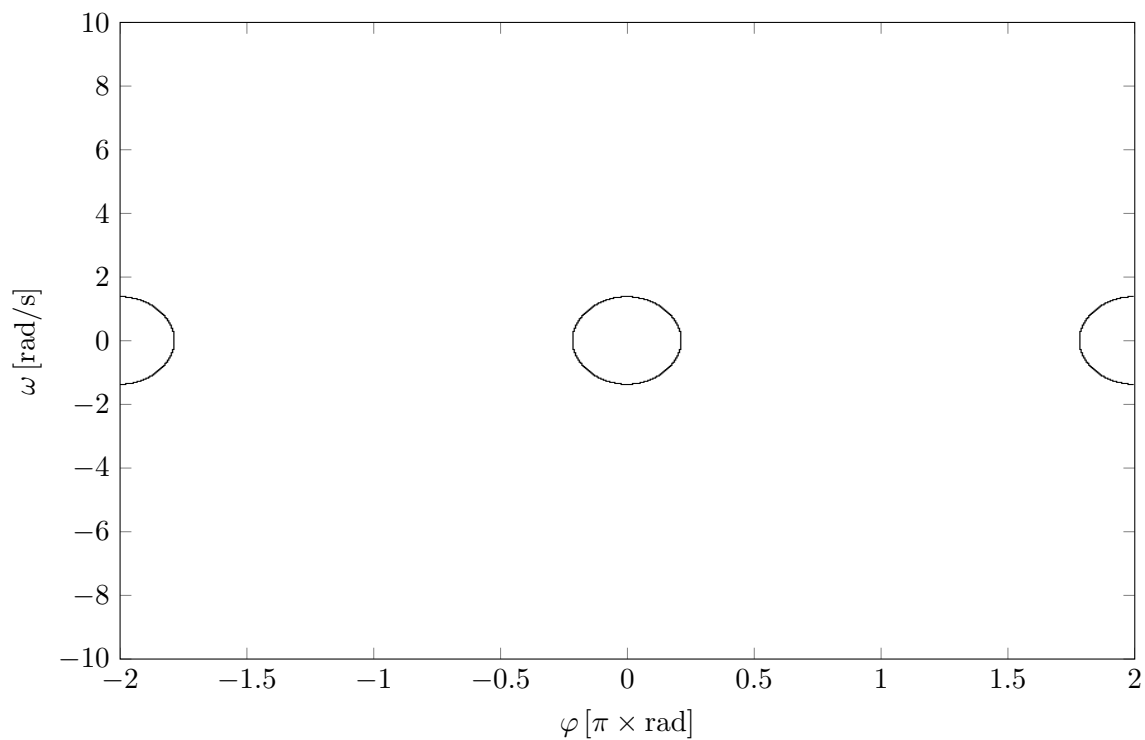
Jako rozumný způsob konstrukce Poincarého mapy se jeví zaznamenávání hodnot stavových proměnných $\varphi(t)$ a $\omega(t)$, a to vždy v počátku periody budící síly $\theta = 2k\pi$. Podmínku pro přidání bodu $P = [\varphi_P; \omega_P]$ do Poincarého mapy lze formulovat jako:

$$\begin{aligned}
 f(t) < 0 \quad \wedge \quad f(t+h) > 0, \\
 \varphi_P &= \varphi(t) + \left(\varphi(t+h) - \varphi(t) \right) \frac{f(t+h)}{f(t) + f(t+h)}, \\
 \omega_P &= \omega(t) + \left(\omega(t+h) - \omega(t) \right) \frac{f(t+h)}{f(t) + f(t+h)}.
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

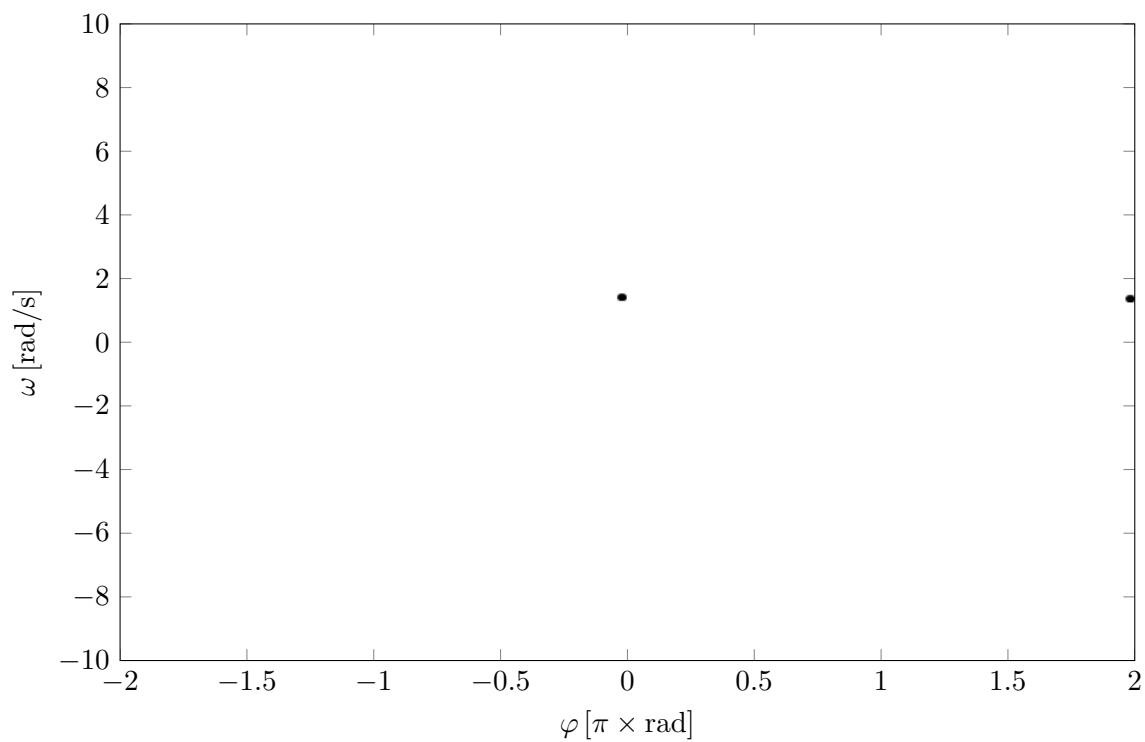
Obrázky 7.4 a 7.5 ukazují jednoduchý limitní cyklus rotátoru při hodnotách parametrů $A = 2.0 \text{ Nm}$ a $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$. Po zvýšení amplitudy na hodnotu $A = 7.5 \text{ Nm}$ se rotátor ustálí v kvalitativně odlišném, avšak stále jednoduchém limitním cyklu, viz obrázky 7.6 a 7.7.

Při hodnotě amplitudy $A = 7.6 \text{ Nm}$ dochází ke zdvojení periody limitního cyklu, jak ukazují obrázky 7.8 a 7.9. Další zvýšení amplitudy na hodnotu $A = 7.7 \text{ Nm}$ vede k ustálení systému v ztrojeném limitním cyklu, viz obrázky 7.10 a 7.11.

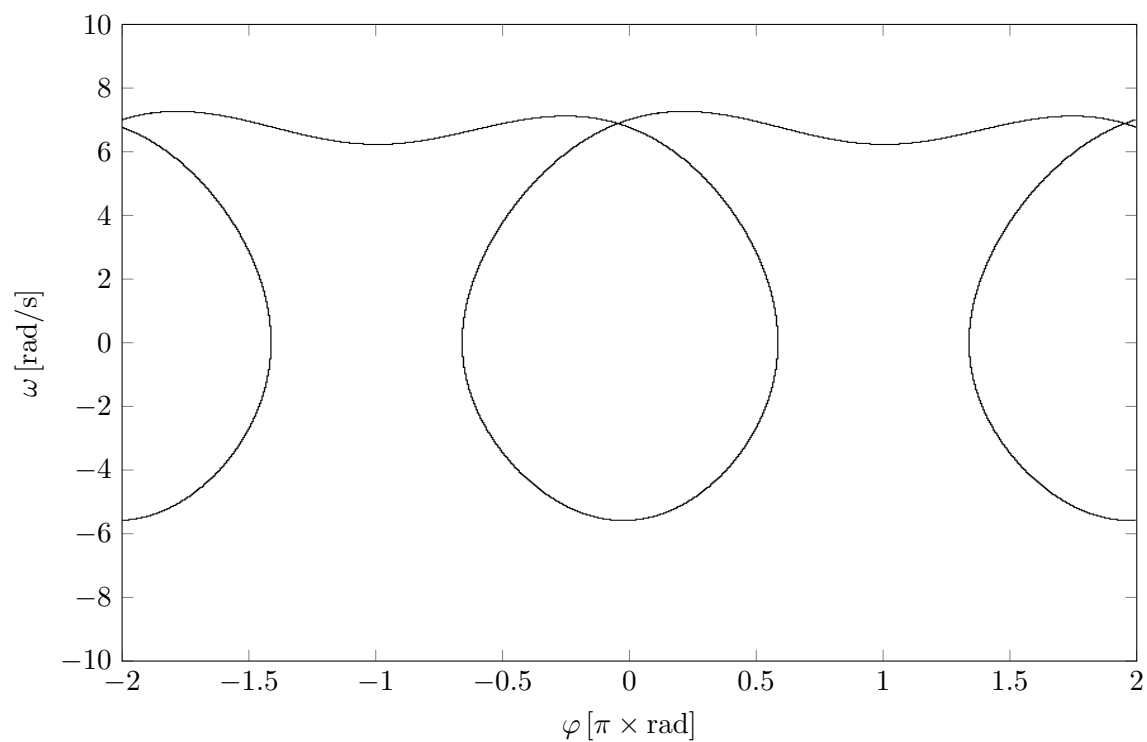
Při navýšení amplitudy na $A = 8.0 \text{ Nm}$ se systém začíná chovat chaoticky. Zobrazení trajektorie 7.12 bylo pro přehlednost provedeno jako histogram v tetralineární barevné škále stejně jako příslušná Poincarého mapa, tedy řez chaotickým atraktorem, viz obrázek 7.13. V případě Poincarého map lze barevnou hodnotu v pixelu chápat jako četnost průniků trajektorie řeznou rovinou.



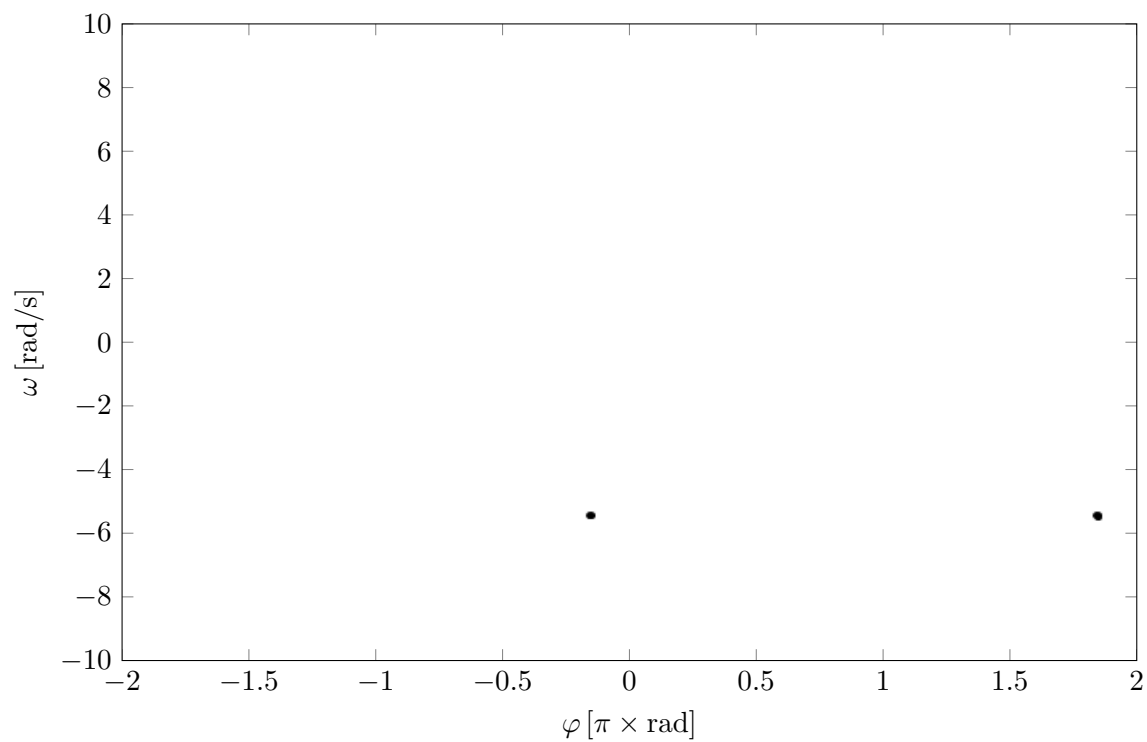
Obrázek 7.4: Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 2.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$.



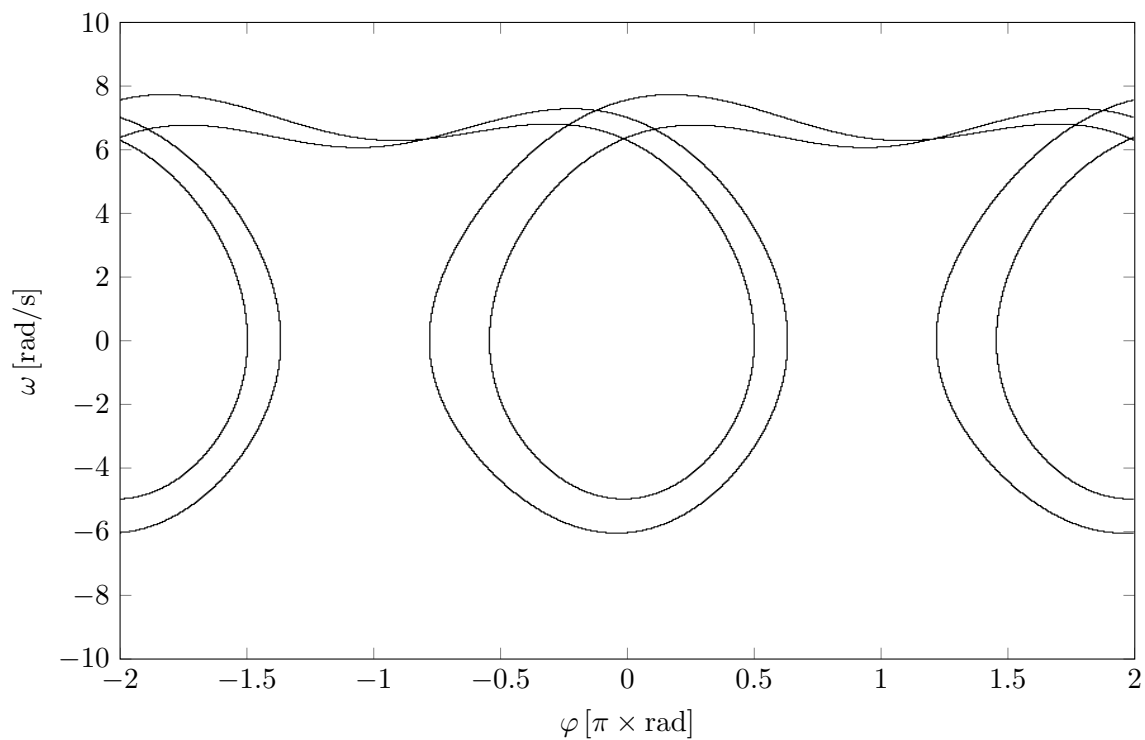
Obrázek 7.5: Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 2.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$.



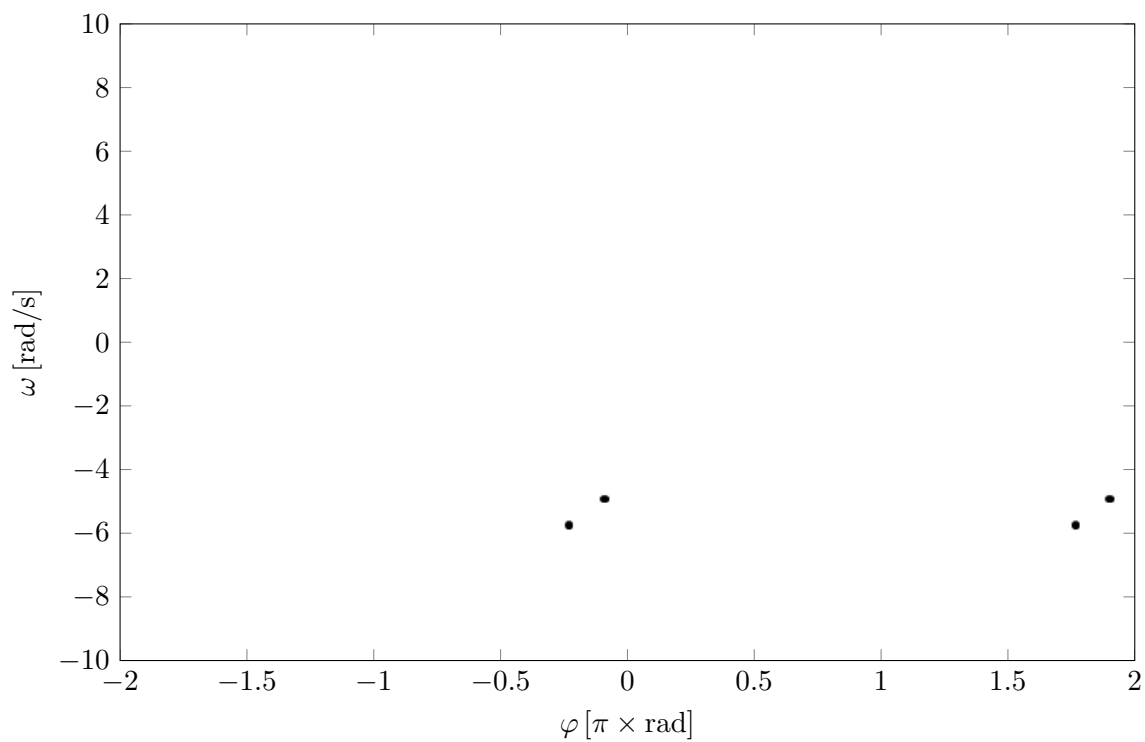
Obrázek 7.6: Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 7.5 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$.



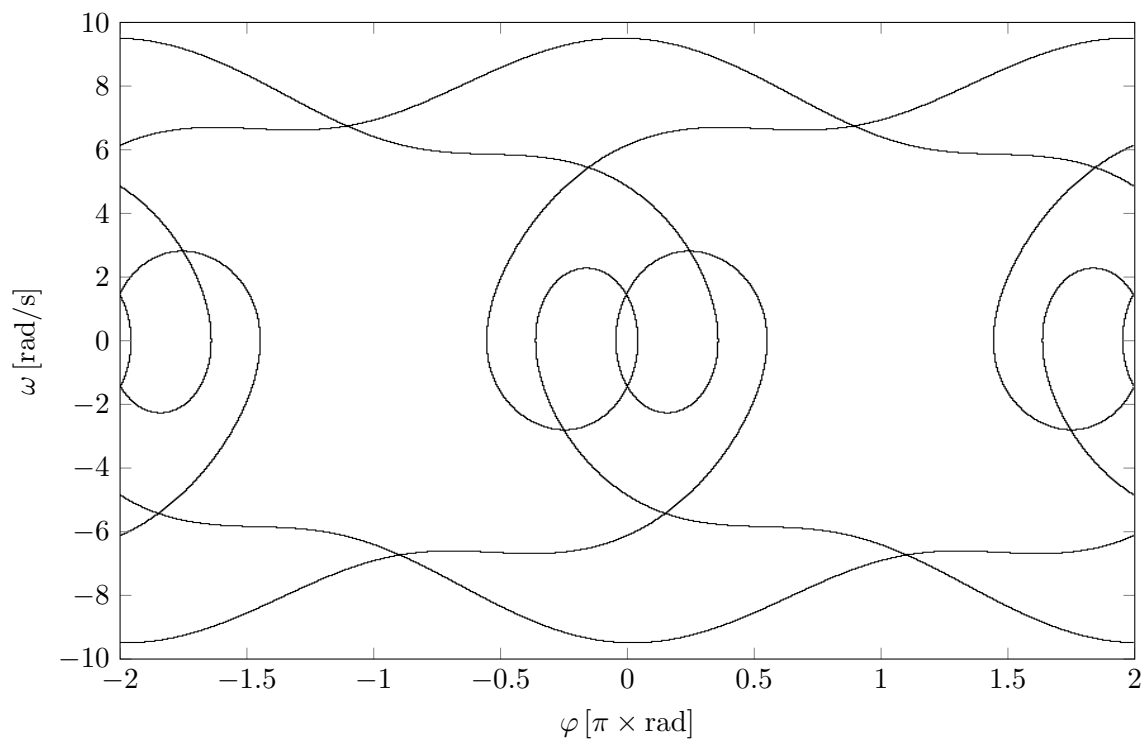
Obrázek 7.7: Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 7.5 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$.



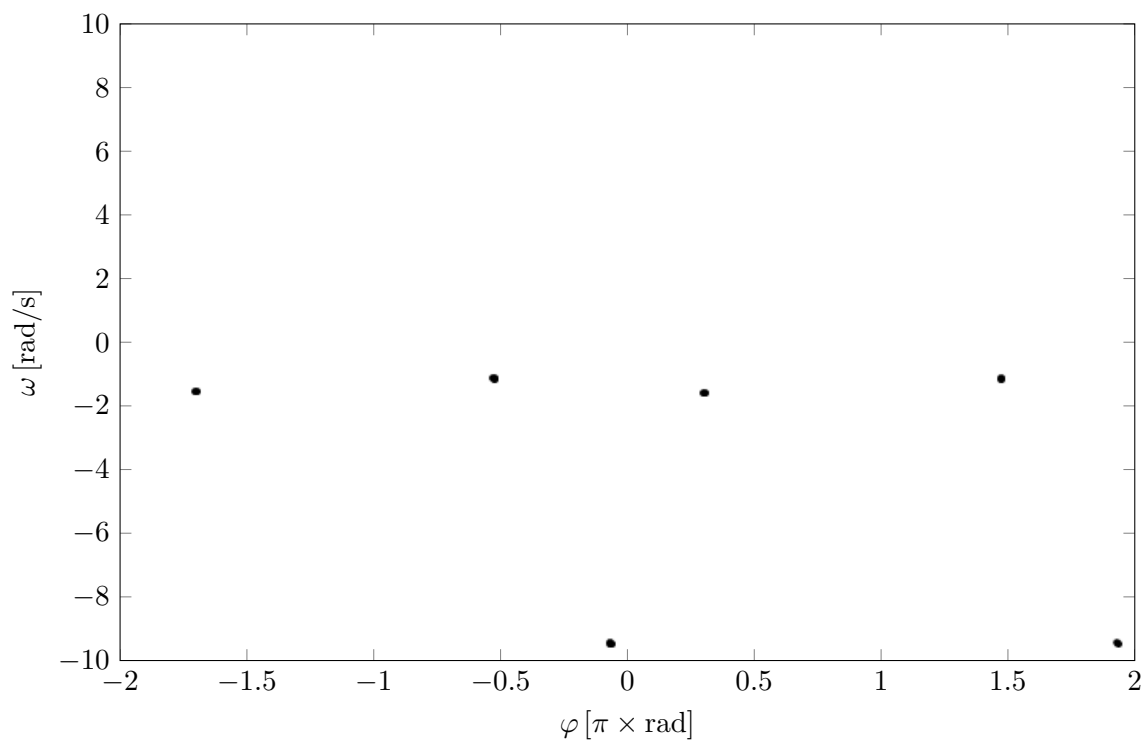
Obrázek 7.8: Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 7.6 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$.



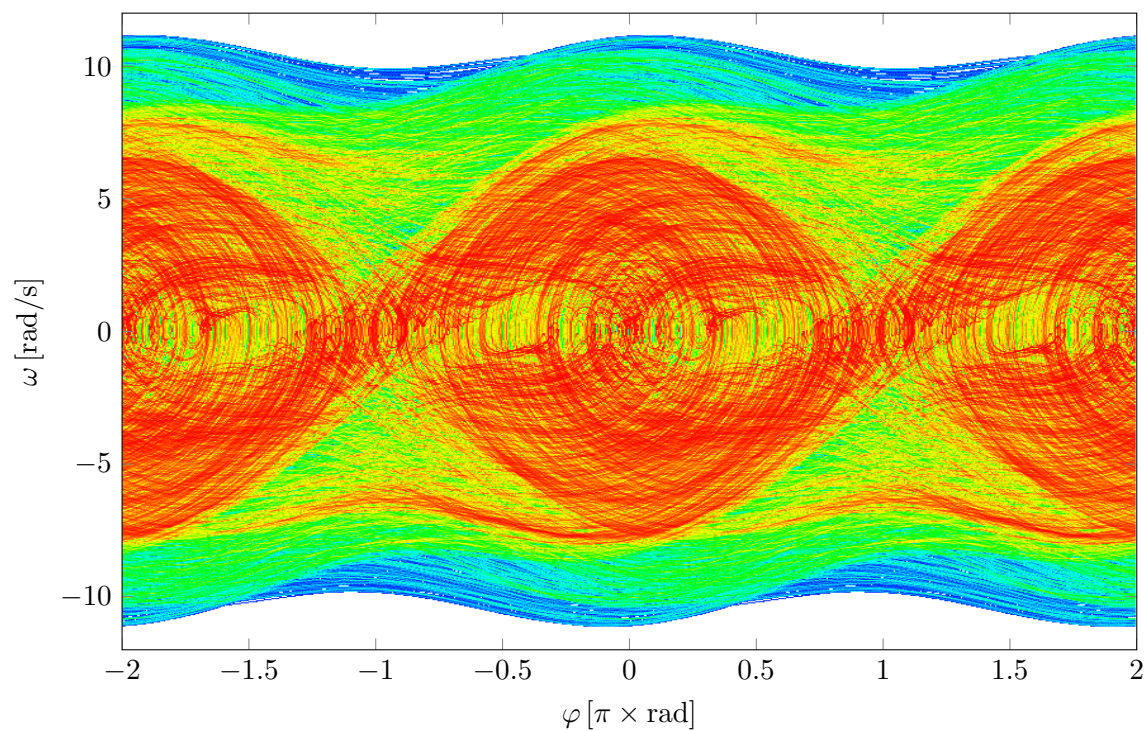
Obrázek 7.9: Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 7.6 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$.



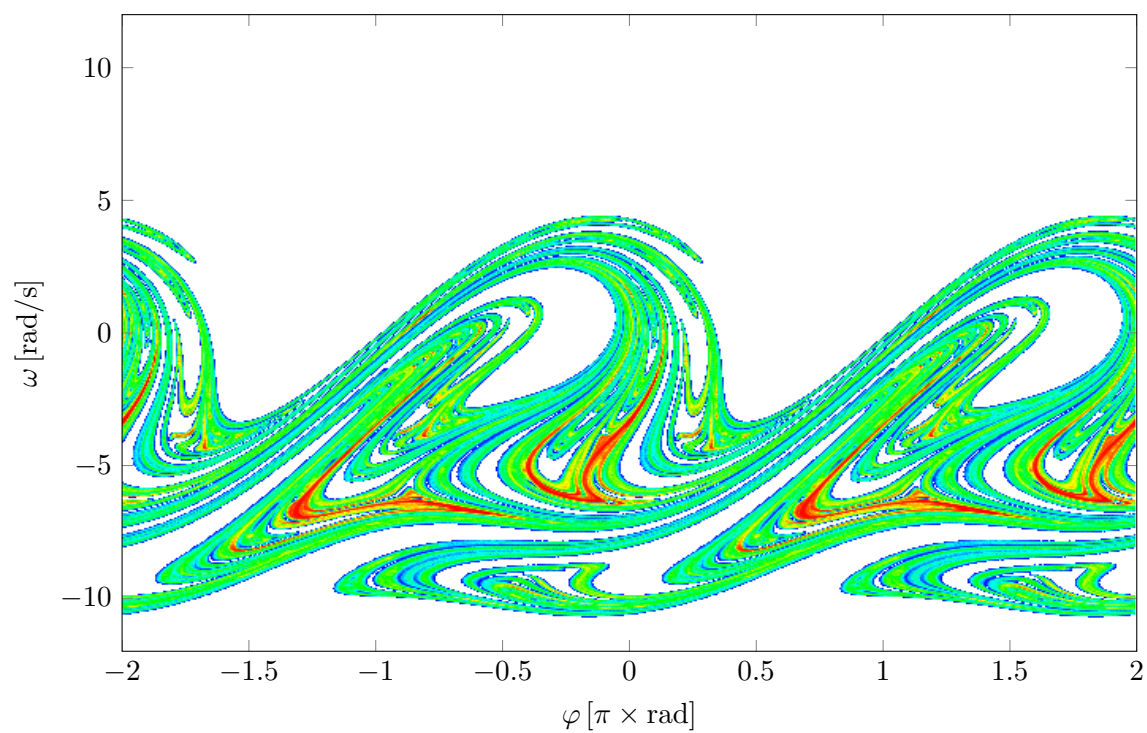
Obrázek 7.10: Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 7.7 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$.



Obrázek 7.11: Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 7.7 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$.

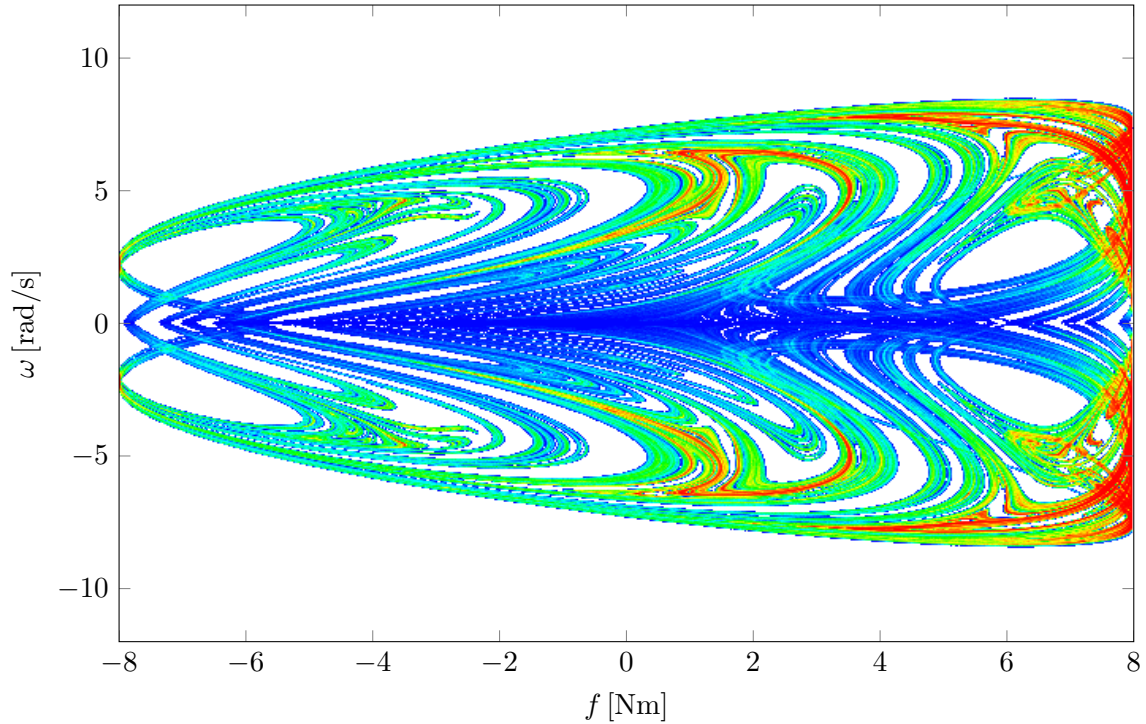


Obrázek 7.12: Trajektorie limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$ v prostoru $\varphi - \omega$.



Obrázek 7.13: Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$.

Obrázek 7.14 ukazuje Poincarého mapu téhož limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$. Řez chaotickým atraktorem byl však konstruován při průchodu trajektorie rovinou $\varphi = 0 \text{ rad}$. Na vodorovné ose tak musí být odpovídající hodnota třetí stavové proměnné, budící síly f .



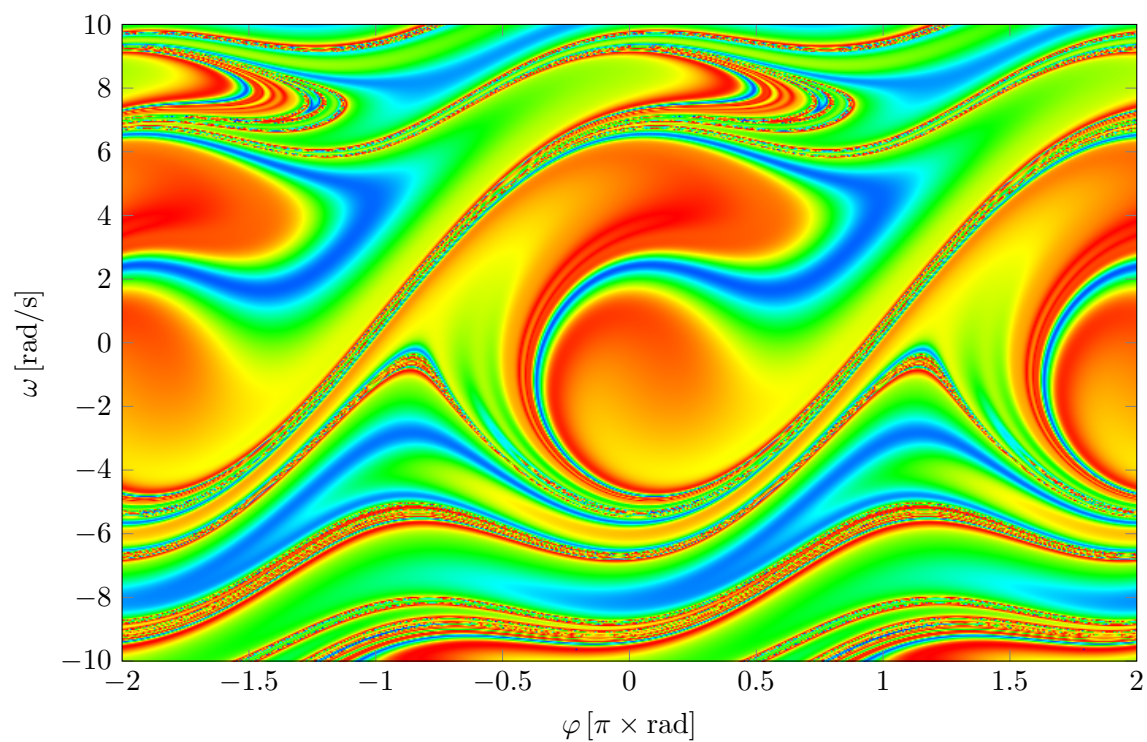
Obrázek 7.14: Poincarého mapa limitního cyklu pro parametry $A = 8.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 2.0 \text{ s}^{-1}$.

7.2.3 Bazény přitažlivosti

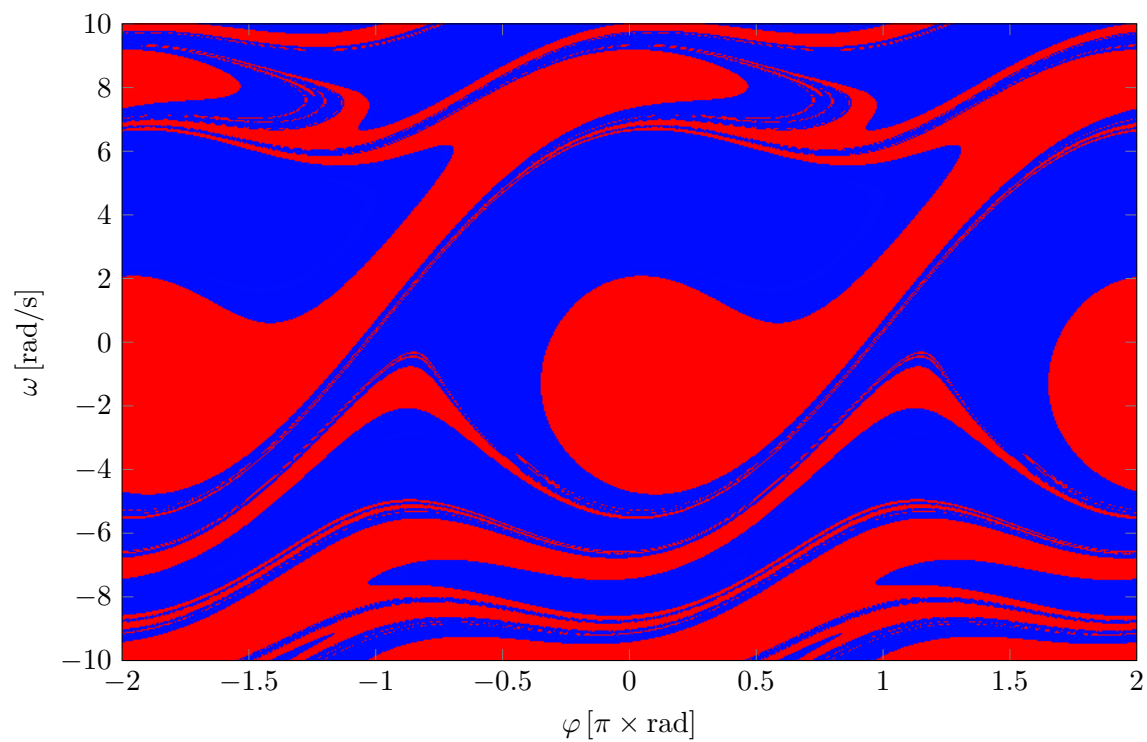
Konstrukce bazénů přitažlivosti limitních cyklů byla již naznačena v sekci 5.2. Ukažme způsob identifikace množin počátečních podmínek vedoucích k různým ustáleným stavům. Vyjdeme z bifurkačních diagramů 5.10 a 5.11. Je vidět, že pro amplitudu budící síly kolem hodnoty $A \approx 1.5 \text{ Nm}$ se systém může v závislosti na počátečních podmínkách ustálit ve dvou různých jednoduchých limitních cyklech.

Pro identifikaci limitního cyklu je třeba zjistit hodnotu úhlové rychlosti ω v Poincarého mapě pro konkrétní počáteční podmínky. Uvažujme rozmezí počátečních podmínek $\varphi(t_0) = (-2\pi; 2\pi) \text{ rad}$ a $\omega(t_0) = (-10; 10) \text{ rad s}^{-1}$.

Obrázek 7.15 ukazuje hodnoty úhlových rychlostí zaznamenané po době simulace 10 s. Je vidět, že systém ještě není dostatečně ustálený a nelze rozlišit právě dvě hodnoty úhlové rychlosti. V případě simulace dlouhé 100 s, jak ukazuje obrázek 7.16, je již zobrazení dostatečně vypovídající. Je vidět, pro které hodnoty počátečních podmínek se systém ustálil v limitním cyklu s vyšší (červenou) hodnotou úhlové rychlosti a pro které s nižší (modrou) hodnotou úhlové rychlosti.



Obrázek 7.15: Konstrukce bazénů přitažlivosti, nedostatečně ustálený stav.



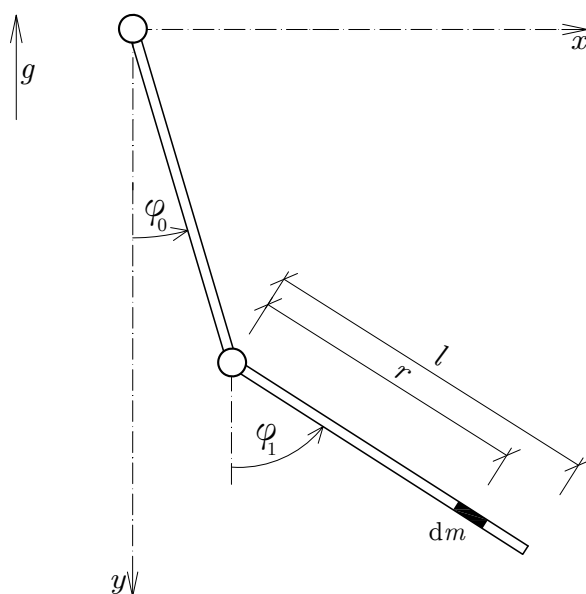
Obrázek 7.16: Konstrukce bazénů přitažlivosti, dostatečně ustálený stav.

Kapitola 8

Dvojitý rotátor

Model dvojitého rotátoru vzniká rozšířením modelu jednoduchého rotátoru o další tuhý dílec, viz obrázek 8.1. Je zřejmé, že fázový prostor modelu již není jednoduchý - model je popsán dvojicí úhlů natočení φ_0, φ_1 a dvojicí úhlových rychlostí dílců ω_0, ω_1 .

Fázový prostor modelu je již více než třírozměrný a v pohybových rovnicích lze očekávat dostatečně silné nelineární složky. Model tedy bude pravděpodobně vykazovat chaotické chování i bez vnějšího buzení. První dílec kyvadla bude i přesto pro účely práce buzen vnější harmonickou silou jako v předchozím případě. Shodně s předcházejícím modelem zůstávají složky vlivu gravitačního pole a lineární viskózní tlumení.



Obrázek 8.1: Model dvojitého rotátoru.

8.1 Odvození modelu

Dvojitý rotátor uvažujeme jako rozšíření modelu jednoduchého rotátoru. Pro kompletní Lagran-geovu funkci modelu dvojitého rotátoru tedy zbývá odvodit složky kinetické a potenciální energie druhého dílce.

Při vyjádření rychlostí druhého dílce uvažujeme, že složky obvodové rychlosti v_{x0} a v_{y0} na konci prvního dílce jsou rovny:

$$\begin{aligned} v_{x0} &= \omega_0 l \cos(\varphi_0), \\ v_{y0} &= -\omega_0 l \sin(\varphi_0). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Složky translační rychlosti v_{x1} a v_{y1} diferenciálního elementu na druhém dílci jsou potom zřejmé:

$$\begin{aligned} v_{x1} &= \omega_0 l \cos(\varphi_0) + \omega_1 r \cos(\varphi_1), \\ v_{y1} &= -\omega_0 l \sin(\varphi_0) - \omega_1 r \sin(\varphi_1). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Absolutní rychlost diferenciálního elementu na druhém dílci vyjádříme jako:

$$v_1 = \sqrt{\left[\omega_0 l \cos(\varphi_0) + \omega_1 r \cos(\varphi_1)\right]^2 + \left[-\omega_0 l \sin(\varphi_0) - \omega_1 r \sin(\varphi_1)\right]^2}, \quad (8.3)$$

a po úpravě:

$$v_1 = \sqrt{\omega_0^2 l^2 + 2\omega_0 \omega_1 l r \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \omega_1^2 r^2}. \quad (8.4)$$

Výraz pro kinetickou energii diferenciálního elementu dEk_1 sestavíme podobně jako v předchozím případě:

$$dEk_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dr v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dr \left(\omega_0^2 l^2 + 2\omega_0 \omega_1 l r \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \omega_1^2 r^2 \right), \quad (8.5)$$

a konečně celkovou kinetickou energii druhého dílce Ek_1 získáme integrací přes celou délku dílce l :

$$\begin{aligned} Ek_1 &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\omega_0^2 l^2 + 2\omega_0 \omega_1 l r \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \omega_1^2 r^2 \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \left(\omega_0^2 + \omega_0 \omega_1 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{1}{3} \omega_1^2 \right). \end{aligned} \quad (8.6)$$

V případě potenciální energie diferenciálního elementu na druhém dílci je zapotřebí uvažovat přírůstek výšky díky natočení prvního dílce. Vztah potom nabývá podoby:

$$\begin{aligned} dEp_1 &= m g (h_0 + h_1) = m g \left[l \left(-\cos(\varphi_0) + 1 \right) + r \left(-\cos(\varphi_1) + 1 \right) \right] = \\ &= \rho dr g \left[l \left(-\cos(\varphi_0) + 1 \right) + r \left(-\cos(\varphi_1) + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Integrací přes délku druhého dílce pak obdržíme výraz pro celkovou potenciální energii druhého dílce Ep_1 :

$$\begin{aligned} Ep_1 &= \rho g \int_0^l \left[l \left(-\cos(\varphi_0) + 1 \right) + r \left(-\cos(\varphi_1) + 1 \right) \right] dr = \\ &= m g l \left[\left(-\cos(\varphi_0) + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(-\cos(\varphi_1) + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Nyní sečtením výrazů (7.6) a (8.6) získáváme výraz pro celkovou kinetickou energii modelu Ek :

$$Ek = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{4}{3} \omega_0^2 + \omega_0 \omega_1 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{1}{3} \omega_1^2 \right), \quad (8.9)$$

a podobně sečtením výrazů (7.8) a (8.8) dostáváme výraz pro celkovou potenciální energii modelu Ep :

$$Ep = m g l \left[\frac{3}{2} \left(-\cos(\varphi_0) + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(-\cos(\varphi_1) + 1 \right) \right]. \quad (8.10)$$

Dále je zapotřebí provést derivace Lagrangeovy funkce podle stavových proměnných. Pro přehlednost budeme zacházet zvlášť se složkami Ek a Ep . Derivujme nejdříve kinetickou energii Ek podle úhlů natočení dílců φ_0 a φ_1 :

$$\frac{\partial Ek}{\partial \varphi_0} = -\frac{1}{2} m l^2 \omega_0 \omega_1 \sin(\varphi_0 - \varphi_1), \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial Ek}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} m l^2 \omega_0 \omega_1 \sin(\varphi_0 - \varphi_1). \quad (8.12)$$

Podobně provedeme derivace potenciální energie Ep podle φ_0 a φ_1 :

$$\frac{\partial Ep}{\partial \varphi_0} = \frac{3}{2} m g l \sin(\varphi_0), \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial Ep}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} m g l \sin(\varphi_1). \quad (8.14)$$

Nyní derivujme kinetickou energii Ek podle úhlových rychlostí dílců ω_0 a ω_1 :

$$\frac{\partial Ek}{\partial \omega_0} = m l^2 \left(\frac{4}{3} \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_1 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) \right), \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial Ek}{\partial \omega_1} = m l^2 \left(\frac{1}{3} \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) \right). \quad (8.16)$$

Derivace potenciální energie podle úhlových rychlostí dílců ω_0 a ω_1 jsou zřejmě nulové:

$$\frac{\partial Ep}{\partial \omega_0} = 0, \quad \frac{\partial Ep}{\partial \omega_1} = 0. \quad (8.17)$$

Jako poslední je třeba derivovat výrazy (8.15) a (8.16) podle času. Tedy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ek}{\partial \omega_0} \right) &= m l^2 \left[\frac{4}{3} \dot{\omega}_0 + \frac{1}{2} \dot{\omega}_1 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \omega_0 \omega_1 \sin(\varphi_0 - \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin(\varphi_0 - \varphi_1) \right], \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ek}{\partial \omega_1} \right) &= m l^2 \left[\frac{1}{3} \dot{\omega}_1 + \frac{1}{2} \dot{\omega}_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \omega_0^2 \sin(\varphi_0 - \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \omega_0 \omega_1 \sin(\varphi_0 - \varphi_1) \right]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Vše potřebné je nyní připraveno k sestavení soustavy dvou pohybových rovnic podle předpisů:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ek}{\partial \omega_0} \right) &= \frac{\partial Ek}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial Ep}{\partial \varphi_0}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ek}{\partial \omega_1} \right) &= \frac{\partial Ek}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial Ep}{\partial \varphi_1}.\end{aligned}\tag{8.20}$$

Soustavu rovnic lze po úpravě zapsat v maticovém tvaru:

$$ml^2 \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_0 \\ \dot{\omega}_1 \end{Bmatrix} = ml^2 \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} \omega_0^2 \\ \omega_1^2 \end{Bmatrix} - mlg \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix},\tag{8.21}$$

kde $\mathbf{M}$ je symetrická matice hmotných momentů setrvačností, viz [25]:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi_1) \\ \frac{1}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi_1) & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\tag{8.22}$$

matice $\mathbf{Q}$ je antisymetrická matice transformačních momentů setrvačností:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \sin(\varphi_0 - \varphi_1) \\ \frac{1}{2} \sin(\varphi_1 - \varphi_0) & 0 \end{bmatrix},\tag{8.23}$$

a matice $\mathbf{K}$ je matice tuhosti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \sin(\varphi_0) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin(\varphi_1) \end{bmatrix}.\tag{8.24}$$

Přidáním matice materiálového tlumení $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\tag{8.25}$$

násobené koeficientem viskózního tlumení c , a přidáním vektoru vnějšího zatížení $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} A \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix},\tag{8.26}$$

získáváme kompletní model dvojitého rotátoru:

$$ml^2 \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_0 \\ \dot{\omega}_1 \end{Bmatrix} = ml^2 \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} \omega_0^2 \\ \omega_1^2 \end{Bmatrix} - mlg \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} + c \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} + \mathbf{F}.\tag{8.27}$$

8.2 Vybrané příklady

Pro účely numerických simulací byl použit model s délkou dílce $l = 1$ m a hmotností dílce $m = 10$ kg. Velikost gravitačního zrychlení zůstává $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, stejně jako hodnota koeficientu tlumení $c = 0.1 \text{ Nm s rad}^{-1}$. Časový krok výpočtu byl zvolen $h = 0.001$ s, k řešení byla použita semi-implicitní Eulerova metoda.

8.2.1 Bifurkační diagramy

Výpočet bifurkačních diagramů byl proveden pro hodnotu úhlové frekvence budící síly $\Omega = 5.0 \text{ s}^{-1}$. Obrázky 8.2 a 8.3 ukazují bifurkační diagramy prvního a druhého dílce vytvořené postupným zvyšováním amplitudy budící síly za chodu simulace.

Bifurkační diagramy získané mnoha simulacemi s různými počátečními podmínkami pro stejnou hodnotu amplitudy budící síly jsou na obrázcích 8.4 a 8.5. Kombinace počátečních podmínek byly uvažovány v rozmezí:

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(t_0) &= (-2\pi; 2\pi) \text{ rad}, \\ \omega_{0,1}(t_0) &= (-10; 10) \text{ rad s}^{-1}.\end{aligned}\tag{8.28}$$

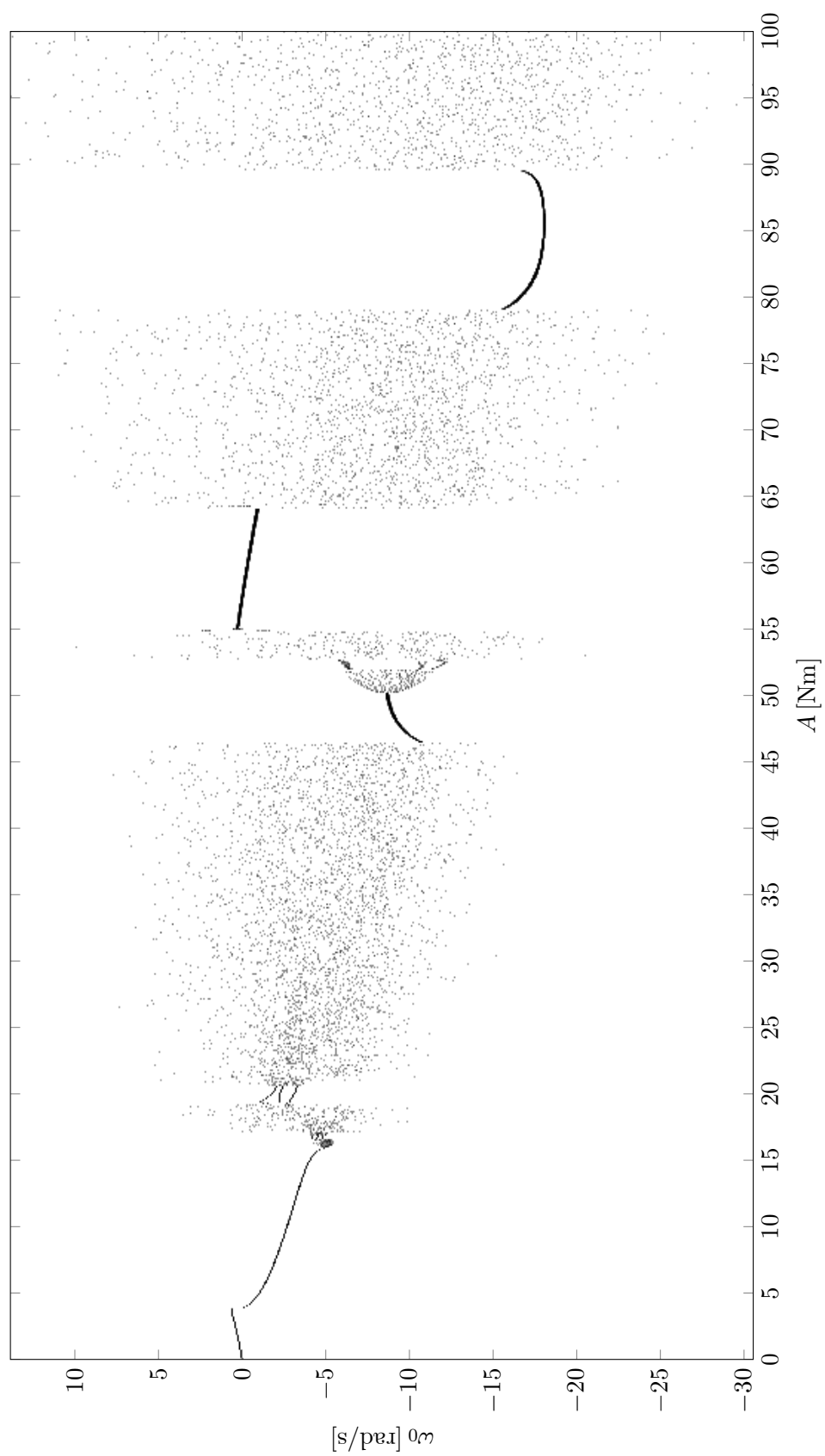
Při porovnání rozdílů mezi bifurkačními diagramy lze diskutovat, zda rozmezí hodnot úhlových rychlostí $\omega_{0,1}(t_0)$ bylo zvoleno dostatečně široké nebo zda byl proveden dostatečný počet výpočtů pro každou hodnotu amplitudy budící síly.

8.2.2 Poincarého mapy

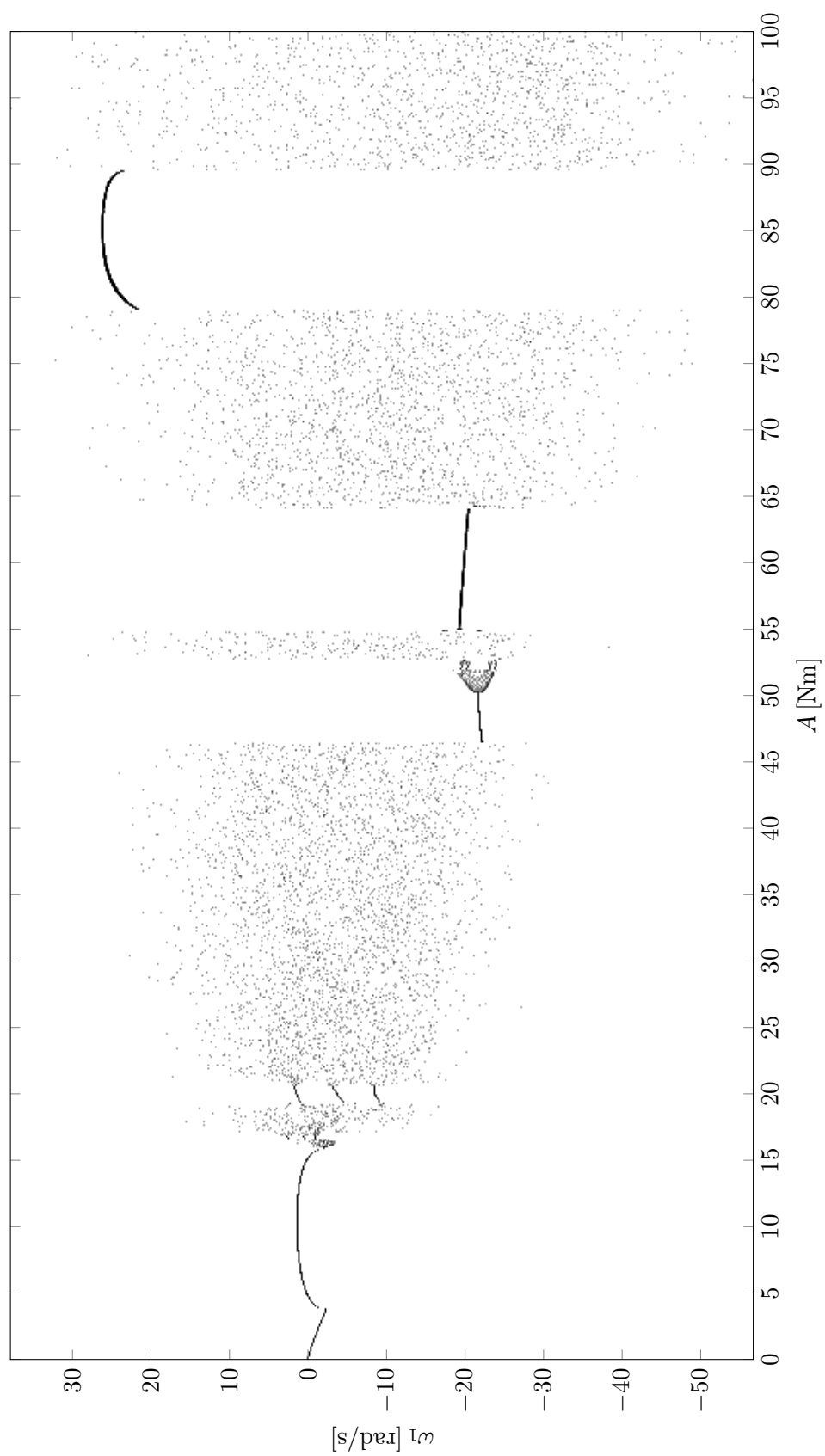
Pro ukázkou je uvedeno také několik zajímavých příkladů Poincarého map. Na obrázcích 8.6 a 8.7 jsou ukázány Poincarého mapy ustáleného chování pro hodnoty parametrů $A = 18.0 \text{ Nm}$ $\Omega = 5.0 \text{ s}^{-1}$ při počátečních podmínkách $\varphi_{0,1}(t_0) = 0 \text{ rad}$, $\omega_{0,1}(t_0) = 0 \text{ rad s}^{-1}$.

Z ukázaných Poincarého map lze vyvodit některé závěry. V porovnání s modelem jednoduchého rotátoru, viz kapitola 7, vykazuje model dvojitého rotátoru odlišný charakter chaotického chování. Zatímco trajektorie jednoduchého rotátoru se poměrně rovnoměrně pohybují v celém objemu chaotického atraktoru, trajektorie dvojitého rotátoru se často drží v užší oblasti, kdy se v systému hromadí energie a periodicky dochází k velmi nestabilnímu chování, kdy se systém utlumí.

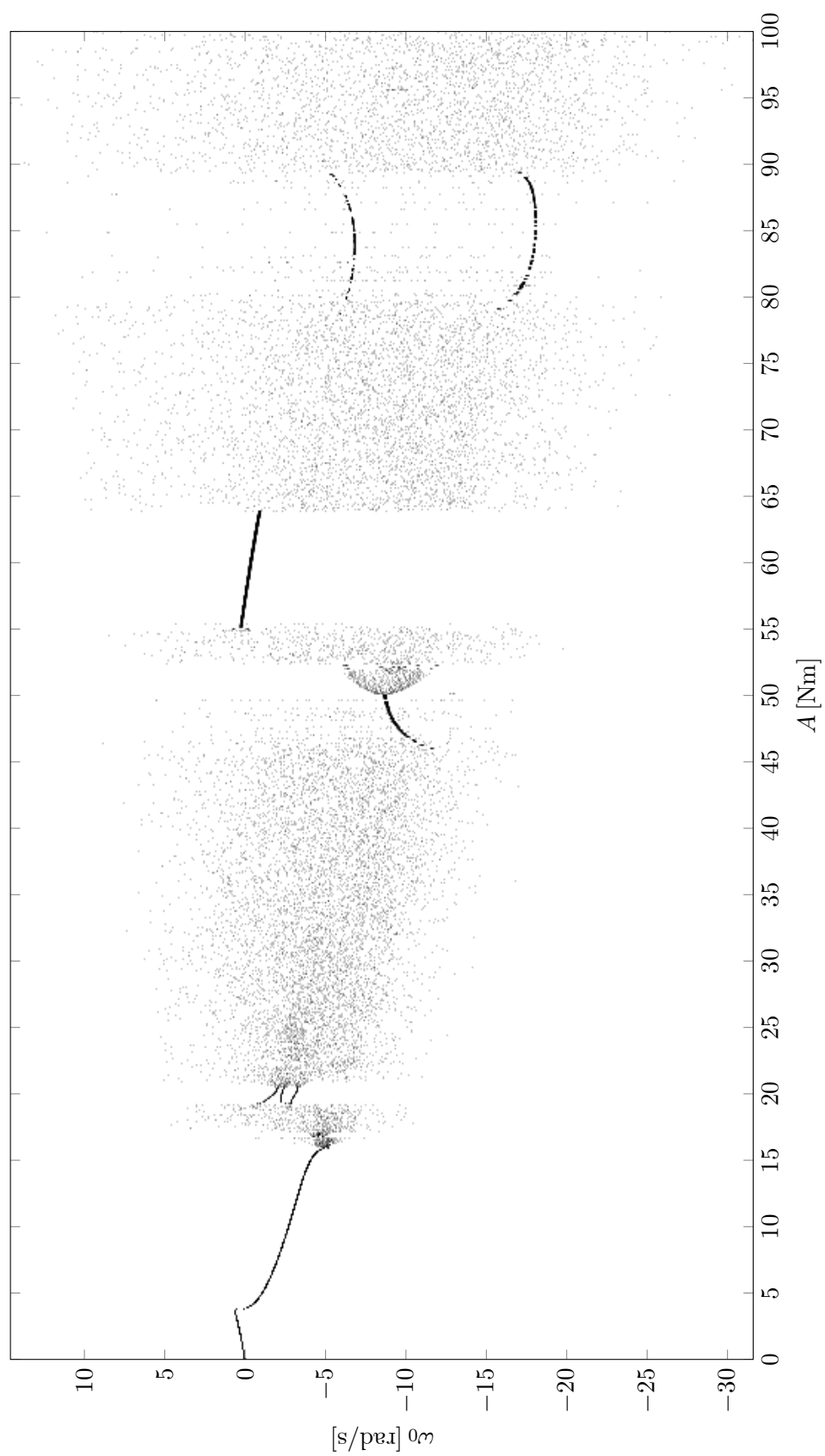
Tato skutečnost ztěžuje také kvalitní vykreslení Poincarého map. Z uvedeného je zřejmé, že okrajové body jsou velmi málo časté. Naopak vnitřní části Poincarého mapy jsou velmi podrobně vykresleny, neboť zde se trajektorie zdržují dlouho.



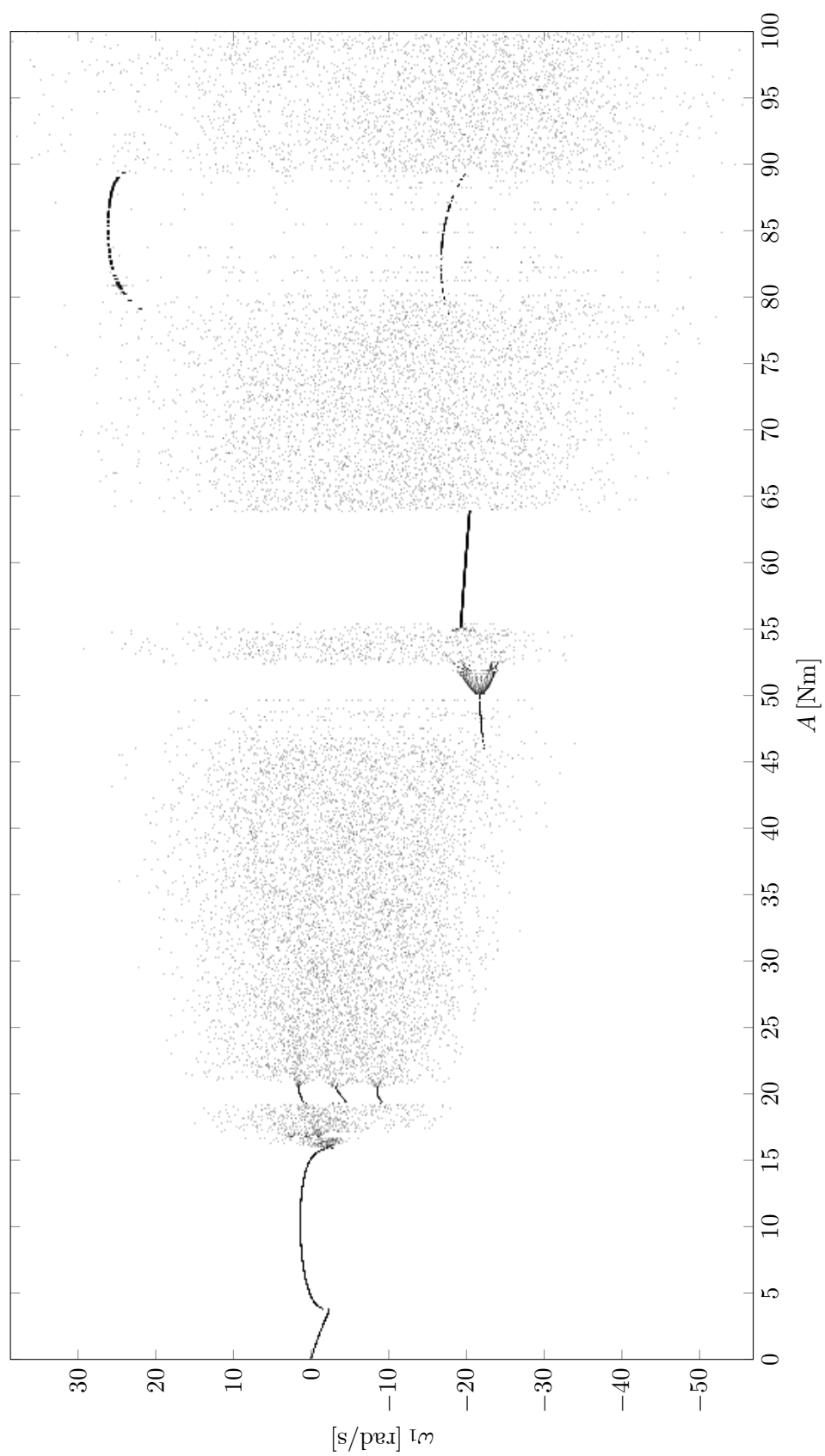
Obrázek 8.2: Bifurkační diagram prvního dílce dvojitého rotátoru vytvořený zvyšováním amplitudy za chodu simulace.



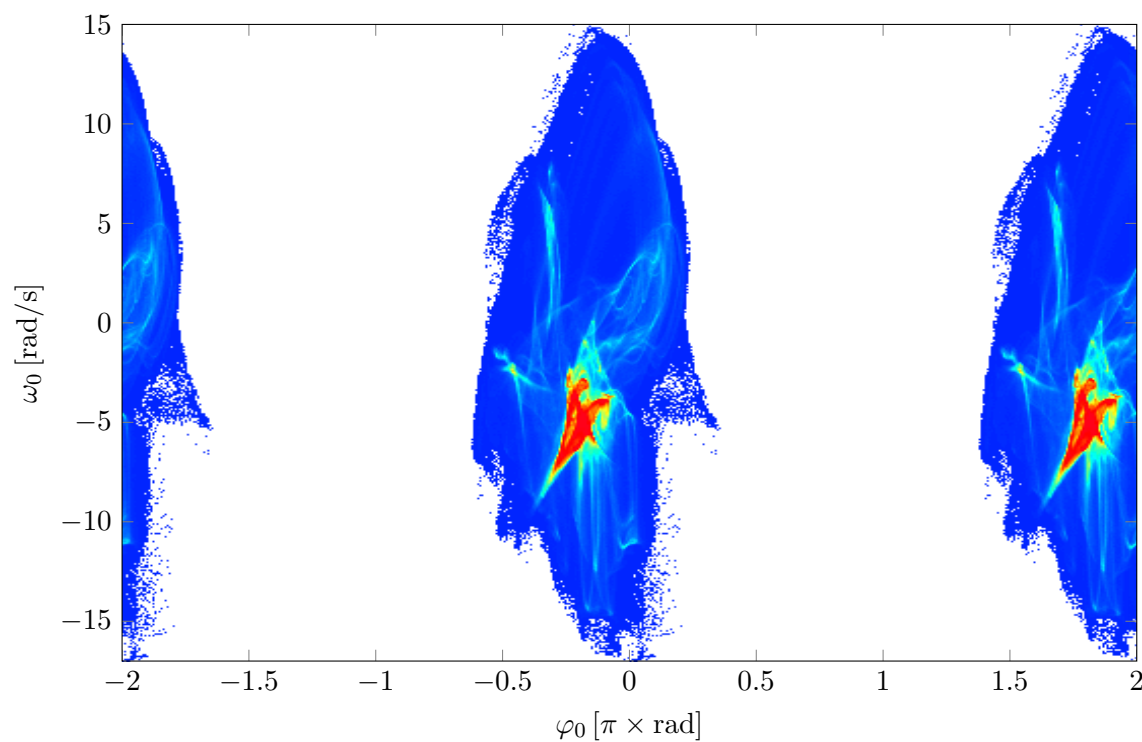
Obrázek 8.3: Bifurkační diagram druhého dílce dvojitého rotátoru vytvořený zvyšováním amplitudy za chodu simulace.



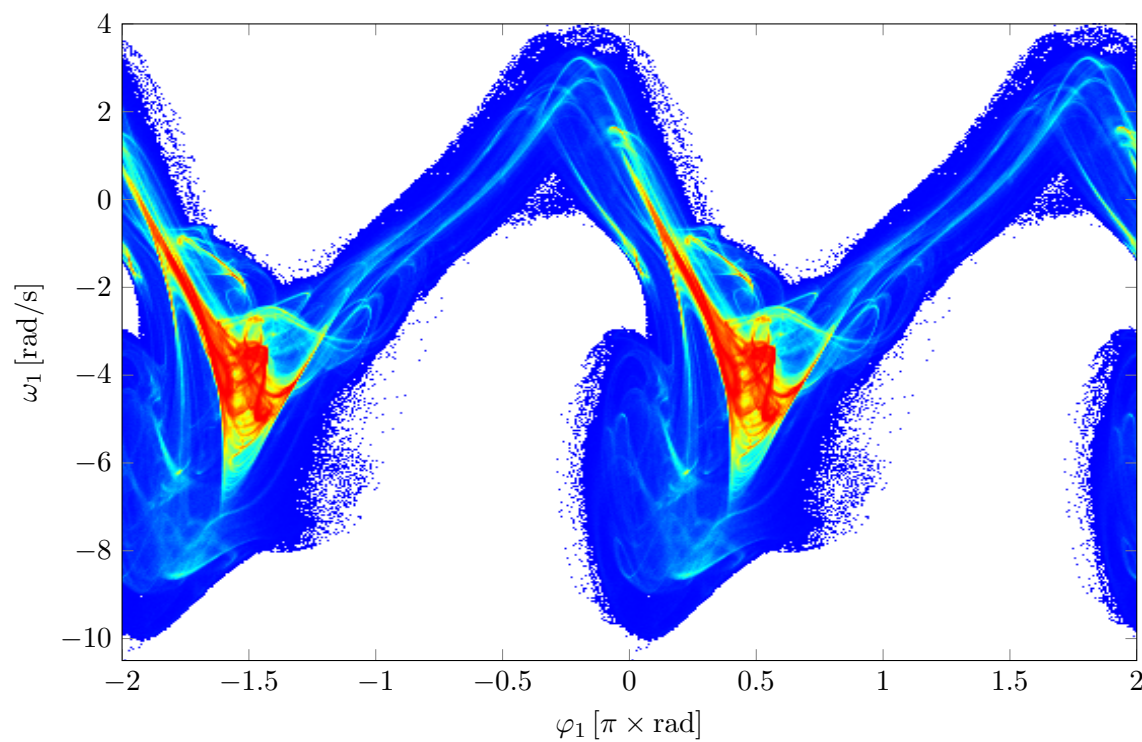
Obrázek 8.4: Bifurkační diagram prvního dílce dvojitého rotátoru získaný mnoha simulacemi s náhodnými počátečními podmínkami.



Obrázek 8.5: Bifurkační diagram druhého dílce dvojitého rotátoru získaný mnoha simulacemi s náhodnými počátečními podmínkami.



Obrázek 8.6: Poincarého mapa prvního dílce v limitním cyklu pro parametry $A = 5.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 5.0 \text{ s}^{-1}$.



Obrázek 8.7: Poincarého mapa druhého dílce v limitním cyklu pro parametry $A = 5.0 \text{ Nm}$, $\Omega = 5.0 \text{ s}^{-1}$.

Kapitola 9

Volný prut

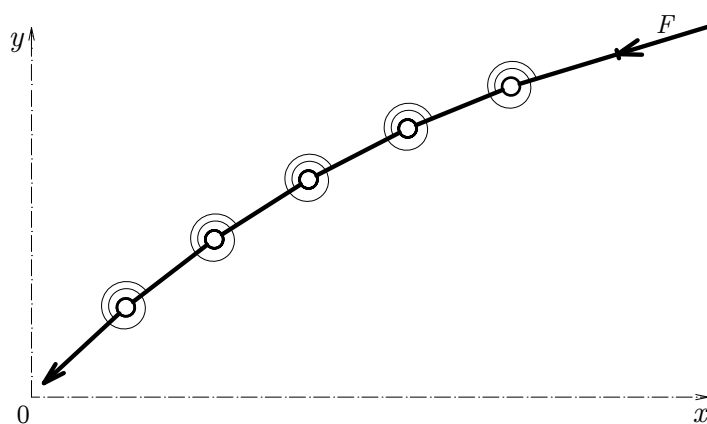
Odvození a ověření modelu volného prutu zatíženého sledující silou, viz obrázek 9.1, bylo předmětem bakalářské práce, viz [25]. Byla ověřena shoda vlastních frekvencí prutu, viz [26], a prokázána byla i výborná shoda s analytickou hodnotou kritické sledující síly, viz [12] a [13]. Rovněž byla prokázána řádově nižší časová náročnost výpočtu v porovnání s aplikací FyDiK, viz [9].

Volný prut je uvažován konstantního průřezu s hmotností M , délkou L a ohybovou tuhostí EI . Výpočtový model rozděluje prut na n tuhých dílců vzájemně spojených klouby. V místech kloubů nahrazují ohybovou tuhost lineární rotační pružiny, neboť díky dostatečné štíhlosti prutu uvažujeme materiál jako lineárně pružný. Lze ukázat, že pro prvky modelu platí:

$$m = \frac{M}{n}, \quad l = \frac{L}{n}, \quad k = \frac{EI}{l}, \quad (9.1)$$

kde m je hmotnost tuhého dílce, l je délka tuhého dílce a k je tuhost rotační pružiny. Výpočetní náročnost je výrazně snížena zanedbáním podélného kmitání prutu, při kterém jsou u oceli dosahovány zdaleka nejvyšší frekvence.

Pro potřeby diplomové práce slouží model volného prutu jako zástupce dynamického systému s mnoha stupni volnosti. Studium chování takového modelu komplikují mnohé překážky, o kterých bude řeč dále.



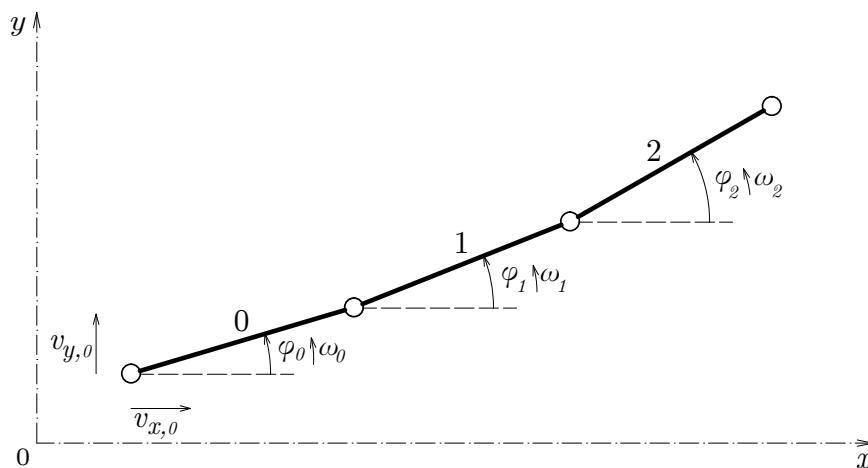
Obrázek 9.1: Volný prut zatížený sledující silou.

9.1 Dynamický model

Odvození modelu volného prutu bylo podrobně ukázáno v bakalářské práci, viz [25]. Vzhledem k rozsahu diplomové práce zde nebude uvedeno v celém rozsahu. Numerické modely jsou vytvářeny s využitím metody tuhých dílců, viz například [11], [5] a [25].

Postup odvození modelu je podobný jako v případě předchozích modelů. Stavovými proměnnými modelu, viz obrázek 9.2 jsou:

- souřadnice počátku prutu x_0, y_0 ,
- translační rychlosti počátku prutu v_{x0}, v_{y0} ,
- úhly natočení dílců φ_i ,
- úhlové rychlosti dílců ω_i .



Obrázek 9.2: Model volného prutu.

Aplikovaný model zapsaný v maticovém tvaru má následující podobu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} \frac{d}{dt}(v + \omega) &= \mathbf{Q}\omega^2 - \mathbf{K}\varphi - \mathbf{D}_i\omega - \mathbf{D}_e + \mathbf{A} + \mathbf{F}, \\
 \frac{d}{dt}\varphi &= \omega, \\
 \frac{d}{dt}s &= v,
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

kde v , ω a φ jsou vektory stavových proměnných systému - translačních rychlostí, úhlových rychlostí a úhlů jednotlivých dílců.

Matice $\mathbf{M}$ je matice hmotných momentů setrvačnosti dílců. Lze si všimnout, že při malých malých deformacích prutu zůstávají její hodnoty přibližně konstantní, což přibližně odpovídá linearizovanému řešení - momenty setrvačnosti dílců nejsou závislé na deformaci konstrukce. Matice $\mathbf{Q}$ je matice transformačních momentů setrvačnosti. Její hodnoty zřejmě rostou s deformací prutu, matice tedy představuje příspěvek nelineárního řešení.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = \frac{1}{2}m & \begin{bmatrix} 2n & 0 & -l \sin \varphi_0 & -l \sin \varphi_1 & \dots & -l \sin \varphi_i & -l \sin \varphi_{n-1} \\ & 2n & l \cos \varphi_0 & l \cos \varphi_1 & \dots & l \cos \varphi_i & l \cos \varphi_{n-1} \\ & & 2l^2(\frac{1}{3} + (n-1)) & 2l^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_0) & \dots & 2l^2 \cos(\varphi_i - \varphi_0) & l^2 \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_0) \\ & & & 2l^2(\frac{1}{3} + (n-2)) & \dots & 2l^2 \cos(\varphi_i - \varphi_1) & l^2 \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_1) \\ & & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & 2l^2(\frac{1}{3} + (n-i-1)) & l^2 \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_i) \\ & & & & & & \frac{2}{3}l^2 \end{bmatrix}, \tag{9.3}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} l \cos \varphi_0 & l \cos \varphi_1 & l \cos \varphi_2 & \dots & l \cos \varphi_i & l \cos \varphi_{n-1} \\ l \sin \varphi_0 & l \sin \varphi_1 & l \sin \varphi_2 & \dots & l \sin \varphi_i & l \sin \varphi_{n-1} \\ 0 & l^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_0) & l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_0) & \dots & l^2 \sin(\varphi_i - \varphi_0) & l^2 \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_0) \\ l^2 \sin(\varphi_0 - \varphi_1) & 0 & l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \dots & l^2 \sin(\varphi_i - \varphi_1) & l^2 \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_1) \\ l^2 \sin(\varphi_0 - \varphi_2) & l^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) & 0 & \dots & l^2 \sin(\varphi_i - \varphi_2) & l^2 \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l^2 \sin(\varphi_0 - \varphi_i) & l^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_i) & l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_i) & \dots & 0 & l^2 \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_i) \\ l^2 \sin(\varphi_0 - \varphi_{n-1}) & l^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_{n-1}) & l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_{n-1}) & \dots & l^2 \sin(\varphi_i - \varphi_{n-1}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Matice $\mathbf{K}$ je matice tuhosti prutu násobená tuhostí k rotačních pružin spojujících tuhé dílce:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Matice $\mathbf{D}_i$ je matice materiálového tlumení násobená koeficientem lineárního útlumu c_{int} a hmotností dílců m :

$$\mathbf{D}_i = c_{int} m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Vektor $\mathbf{D}_e$ je výsledkem snahy vystihnout tlumení vznikající interakcí konstrukce se vzduchem. Skládá se z translačních účinků výslednice tlumících sil a momentů tlumících sil k jednotlivým kloubům modelu:

$$\mathbf{D}_e = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n D_{x,i} \\ \sum_{i=0}^n D_{y,i} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi_0) \sum_{i=1}^n D_{x,i} \\ \sin(\varphi_1) \sum_{i=2}^n D_{x,i} \\ \vdots \\ \sin(\varphi_{k-1}) \sum_{i=k}^n D_{x,i} \\ \sin(\varphi_{n-1}) D_{x,n} \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\varphi_0) \sum_{i=1}^n D_{y,i} \\ \cos(\varphi_1) \sum_{i=2}^n D_{y,i} \\ \vdots \\ \cos(\varphi_{k-1}) \sum_{i=k}^n D_{y,i} \\ \cos(\varphi_{n-1}) D_{y,n} \end{pmatrix}, \quad (9.7)$$

kde $D_{x,i}$ a $D_{y,i}$ jsou složky tlumících sil vznikajících kvůli rozdílu ve mezi směrem pohybu dílců a jejich úhlu natočení, viz bakalářská práce [25].

Vektor $\mathbf{A}$ zahrnuje vliv působení gravitačního pole. Skládá se ze složky translačního působení a momentů setrvačných sil ke kloubům modelu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ M g \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - g m l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (n - \frac{1}{2}) \cos(\varphi_0) \\ (n - \frac{1}{2} - 1) \cos(\varphi_1) \\ \vdots \\ (n - \frac{1}{2} - i) \cos(\varphi_i) \\ \frac{1}{2} \cos(\varphi_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

kde g je gravitační zrychlení ve svislém směru, m je hmotnost dílce a M je hmotnost konstrukce.

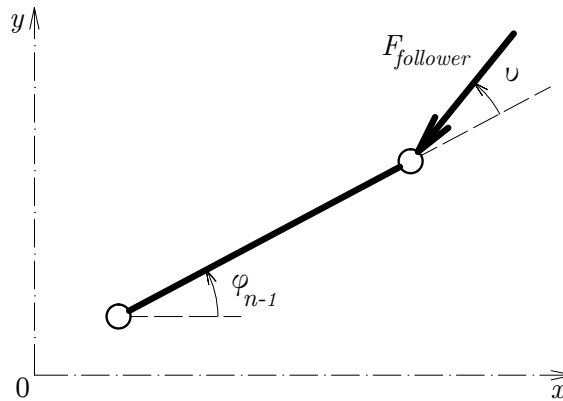
Vektor $\mathbf{F}$ vyjadřuje vliv sledující síly. Zahrnuje složku translačního působení sledující síly a momentů sledující síly vůči kloubům mezi dílci:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{\text{follower},x} \\ F_{\text{follower},y} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + F_{\text{follower},x} l \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_1) \\ \vdots \\ \sin(\varphi_{n-2}) \\ \sin(\varphi_{n-1}) \end{Bmatrix} - F_{\text{follower},y} l \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\varphi_0) \\ \cos(\varphi_1) \\ \vdots \\ \cos(\varphi_{n-2}) \\ \cos(\varphi_{n-1}) \end{Bmatrix}, \quad (9.9)$$

kde $F_{\text{follower},x}$ a $F_{\text{follower},y}$ jsou složky sledující síly F_{follower} :

$$\begin{aligned} F_{\text{follower},x} &= F_{\text{follower}} \cos(\varphi_{n-1} + v), \\ F_{\text{follower},y} &= F_{\text{follower}} \sin(\varphi_{n-1} + v), \end{aligned} \quad (9.10)$$

kde φ_{n-1} je úhel pootočení posledního dílce modelu a v je úhel imperfekce působení síly - odchylka síly od úhlu posledního dílce, viz obrázek 9.3.



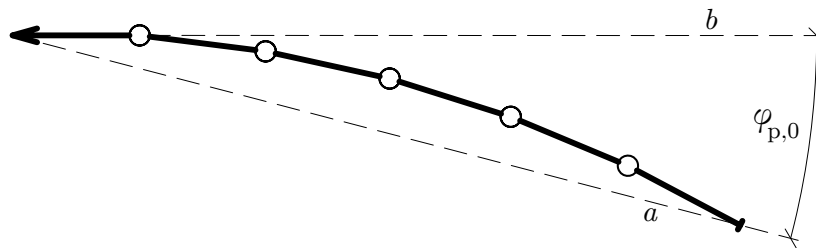
Obrázek 9.3: Působení sledující síly.

9.2 Podmínky pro konstrukci Poincarého mapy

V případě modelu volného prutu je jistě výzvou definovat řeznou rovinu pro konstrukci Poincarého mapy. Volný prut se bez omezení pohybuje prostorem, proto nelze zavést jakýsi *pevný* geometrický předpis řezné roviny.

Uvažujme, že bude rozumné sledovat pohyb posledního dílce volného prutu, tedy konstruovat Poincarého mapu v rovině $\varphi_{n-1} - \omega_{n-1}$.

První navrženou podmínku pro konstrukci Poincarého mapy ukazuje obrázek 9.4. Veďme přímku a spojující počátek prvního dílce s koncem posledního dílce konstrukce. Dále vytvoříme přímku b , víme-li, že její podmnožinou je úsečka prvního dílce modelu. Nyní jistě můžeme sledovat úhel $\varphi_{p,0}$ sevřený přímkami a a b .

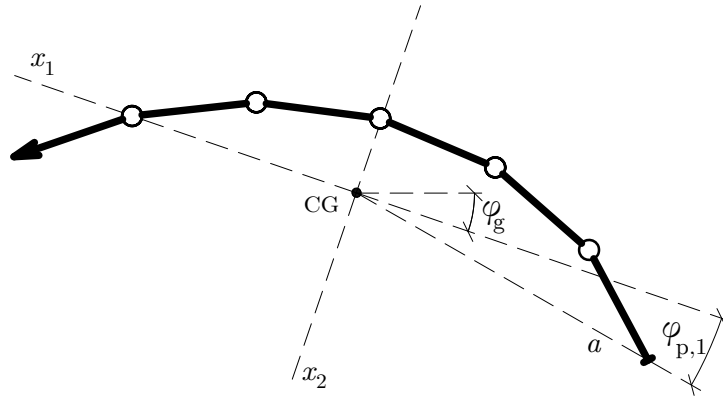


Obrázek 9.4: První podmínka konstrukce Poincarého mapy.

Bod P o souřadnicích $[\varphi_P; \omega_P]$ do Poincarého mapy potom zaznamenáme ve chvíli, kdy úhel $\varphi_{p,0}$ překračuje nulu. Lze předpokládat, že bude navíc vhodné sledovat derivaci úhlu $\varphi_{p,0}$ podle času a zaznamenávat jen polovinu událostí se shodným směrem derivace. Dodejme ještě, že zaznamenávané úhly natočení posledního dílce budou relativizovány vzhledem k úhlu natočení prvního dílce. Popsanou podmínku pro konstrukci Poincarého mapy lze formulovat:

$$\begin{aligned}
 &\varphi_{p,0}(t) < 0 \quad \wedge \quad \varphi_{p,0}(t+h) > 0, \\
 &\varphi_I = \varphi_{n-1}(t) - \varphi_0(t), \\
 &\varphi_{II} = \varphi_{n-1}(t+h) - \varphi_0(t+h), \\
 &\omega_I = \omega_{n-1}(t), \\
 &\omega_{II} = \omega_{n-1}(t+h), \\
 &\varphi_P = \varphi_I + \left(\varphi_{II} - \varphi_I \right) \frac{\varphi_{p,0}(t+h)}{\varphi_{p,0}(t) + \varphi_{p,0}(t+h)}, \\
 &\omega_P = \omega_I + \left(\omega_{II} - \omega_I \right) \frac{\varphi_{p,0}(t+h)}{\varphi_{p,0}(t) + \varphi_{p,0}(t+h)}.
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Druhou variantu podmínky pro konstrukci Poincarého mapy ukazuje obrázek 9.5. Součástí simulace numerického modelu je výpočet souřadnic těžiště a úhlů hlavních os setrvačnosti. Využijme znalosti souřadnic těžiště modelu a veďme přímku a jako spojnicí těžiště modelu a konce posledního dílce. Potom lze, podobně jako v předchozím případě, sledovat úhel $\varphi_{p,1}$ sevřený přímkou a a hlavní (měkkou) osou setrvačnosti x_1 . Úhel posledního dílce zaznamenávaný do Poincarého mapy bude nyní vztažen k úhlu natočení hlavních os setrvačnosti φ_g .

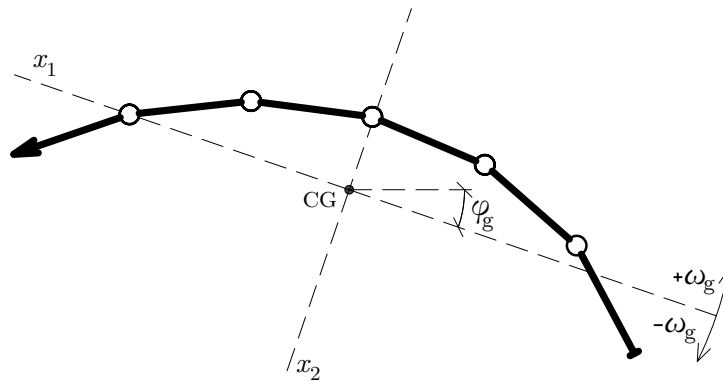


Obrázek 9.5: Druhá podmínka konstrukce Poincarého mapy.

Formulace druhé podmínky je tedy podobná:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{p,1}(t) < 0 \quad \wedge \quad \varphi_{p,1}(t+h) > 0, \\
 \varphi_I &= \varphi_{n-1}(t) - \varphi_g(t), \\
 \varphi_{II} &= \varphi_{n-1}(t+h) - \varphi_g(t+h), \\
 \omega_I &= \omega_{n-1}(t), \\
 \omega_{II} &= \omega_{n-1}(t+h), \\
 \varphi_P &= \varphi_I + \left(\varphi_{II} - \varphi_I \right) \frac{\varphi_{p,0}(t+h)}{\varphi_{p,0}(t) + \varphi_{p,0}(t+h)}, \\
 \omega_P &= \omega_I + \left(\omega_{II} - \omega_I \right) \frac{\varphi_{p,0}(t+h)}{\varphi_{p,0}(t) + \varphi_{p,0}(t+h)}.
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Poslední z předkládaných možností plně využívá potenciálu využití hlavních os setrvačnosti konstrukce. Uvažujme, že známe souřadnice těžiště modelu a úhel natočení hlavních os setrvačnosti φ_g , viz obrázek 9.6.



Obrázek 9.6: Třetí podmínka konstrukce Poincarého mapy.

Jistě je možné numericky derivovat úhel φ_g podle času a získat tak hodnotu úhlové rychlosti hlavních os setrvačnosti ω_g . Derivací úhlové rychlosti ω_g podle času dále obdržíme

hodnotu úhlového zrychlení hlavních os setrvačnosti α_g , tedy:

$$\begin{aligned}\omega_g &= \frac{d\varphi_g}{dt}, \\ \alpha_g &= \frac{d\omega_g}{dt}.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Jako rozumné se nyní jeví zaznamenávat body do Poincarého mapy ve chvíli, kdy je zrychlení hlavních os setrvačnosti α_g nulové, tedy úhlová rychlost hlavních os setrvačnosti je maximální ω_g . Podobně jako v předchozích případech berme do úvahy pouze události s kladnou derivací úhlového zrychlení podle času:

$$\begin{aligned}\alpha_g(t) &< 0 \quad \wedge \quad \alpha_g(t+h) > 0, \\ \varphi_I &= \varphi_{n-1}(t) - \varphi_g(t), \\ \varphi_{II} &= \varphi_{n-1}(t+h) - \varphi_g(t+h), \\ \omega_I &= \omega_{n-1}(t), \\ \omega_{II} &= \omega_{n-1}(t+h), \\ \varphi_P &= \varphi_I + \left(\varphi_{II} - \varphi_I \right) \frac{\varphi_{p,0}(t+h)}{\varphi_{p,0}(t) + \varphi_{p,0}(t+h)}, \\ \omega_P &= \omega_I + \left(\omega_{II} - \omega_I \right) \frac{\varphi_{p,0}(t+h)}{\varphi_{p,0}(t) + \varphi_{p,0}(t+h)}.\end{aligned}\tag{9.14}$$

Již nyní lze předběžně ohodnotit kvality tří předložených podmínek pro konstrukci Poincarého mapy. Výhodou první podmínky je její jednoduchost. Vypočtený úhel $\varphi_{p,0}$ bude relativně přesný, neboť vyžaduje v podstatě pouze hodnoty známých stavových proměnných φ_i . Potíží, kterou lze čekat, je nestabilita úhlu úsečky a jako prodloužení prvního dílce. Bude ukázáno, že díky složitému kmitání prvního dílce, potažmo celé konstrukce, bude získaná Poincarého mapa (označme ji jako **P0**) obsahovat více *parazitních* průniků, které budou též splňovat použitou podmínku (9.11).

U hlavních os setrvačnosti se dá očekávat jednodušší charakter kmitání než u jednotlivých dílců. Proto by výskyt zmíněných nežádoucích artefaktů měl být v mapách **P1** (podle podmínky (9.12)) a **P2** (podle podmínky (9.14)) omezen. Na druhou stranu je třeba mít na paměti, že při výpočtu souřadnic těžiště a úhlu hlavních os setrvačnosti je potřeba použít souřadnice kloubů modelu, které nejsou přímo stavovými proměnnými a musí být dopočteny z úhlů dílců φ_i . Takový výpočet již bude zřejmě zatížen větší chybou než v prvním případě.

V krajním případě mapy **P2** je pro posouzení podmínky (9.14) zapotřebí úhel hlavních os setrvačnosti φ_g ještě dvakrát numericky derivovat podle předpisu:

$$f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h},\tag{9.15}$$

což může vnášet do výpočtu zásadní nepřesnost. Obzvlášť při potřebě velmi dlouhé doby simulace a mnoha průniků trajektorie řeznou rovinou.

Při znalosti modelu volného prutu lze dále hovořit o skutečnosti, že při vlastním kmitání složeném ze symetrických vlastních tvarů (kmitání způsobené symetrickou počáteční deformací prutu) nezaznamenáme na mapě **P2** žádnou známku kmitání. Úhel hlavních os setrvačnosti se totiž nijak nemění.

9.3 Vybrané příklady

Pro numerické simulace byl použit model volného prutu délky $L = 5$ m, jednotkové hmotnosti $M = 1$ kg a tuhosti $EI = 1$ Nm². Volný prut byl rozdělen na deset tuhých dílců. Hodnota koeficientu lineárního tlumení byla nastavena $c_{int} = 0.1$ Nm s rad⁻¹. K řešení byla použita semi-implicitní Eulerova metoda s časovým krokem $h = 0.001$ s.

S ohledem na zkušenosti s modely volného a vetknutého prutu nebyla použita úhlová imperfekce působení seldující síly. Lepších výsledků je dosaženo při vnesení imperfekce pomocí malé počáteční úhlové rychlosti posledního dílce $\omega_9(t_0) = 10^{-10}$ rad s⁻¹.

Před samotnou diskusí nad výsledky je třeba uvážit fyzikální charakteristiky použitého modelu. Zvolený volný prut se vyznačuje velmi malou ohybovou tuhostí EI , hmotností M a značnou délkou L . Tyto hodnoty byly zvoleny ze zřejmého důvodu: při simulaci je dosahováno nižších hodnot zrychlení, řešení je tedy stabilnější a může být prováděno s větším časovým krokem. I tak jsou numerické simulace časově náročné – vykreslení dostatečně podrobných Poincarého map trvalo průměrně 36 hodin.

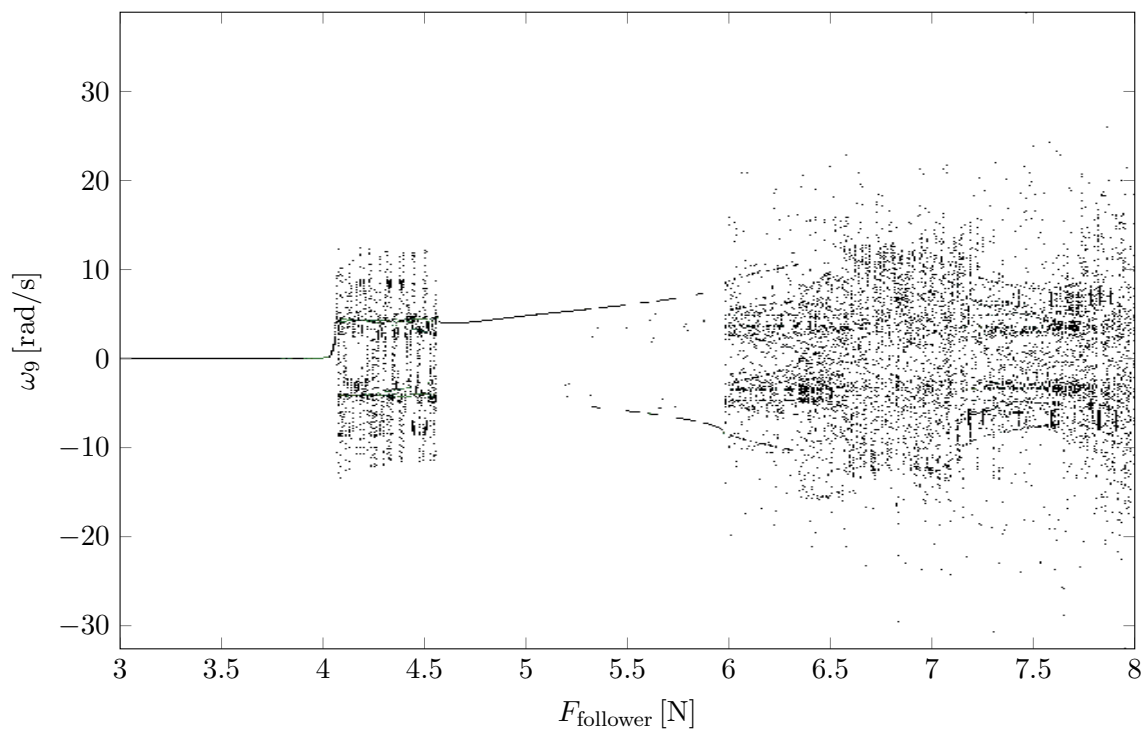
9.3.1 Výsledky simulací

Jak bylo zmíněno, pro konstrukci Poincarého map a bifurkačních diagramů byly použity tři různé přístupy, viz předchozí sekce 9.2. Bifurkační diagramy byly konstruovány pro rozsah sledující síly $F_{\text{follower}} = (3.0; 8.0)$ N.

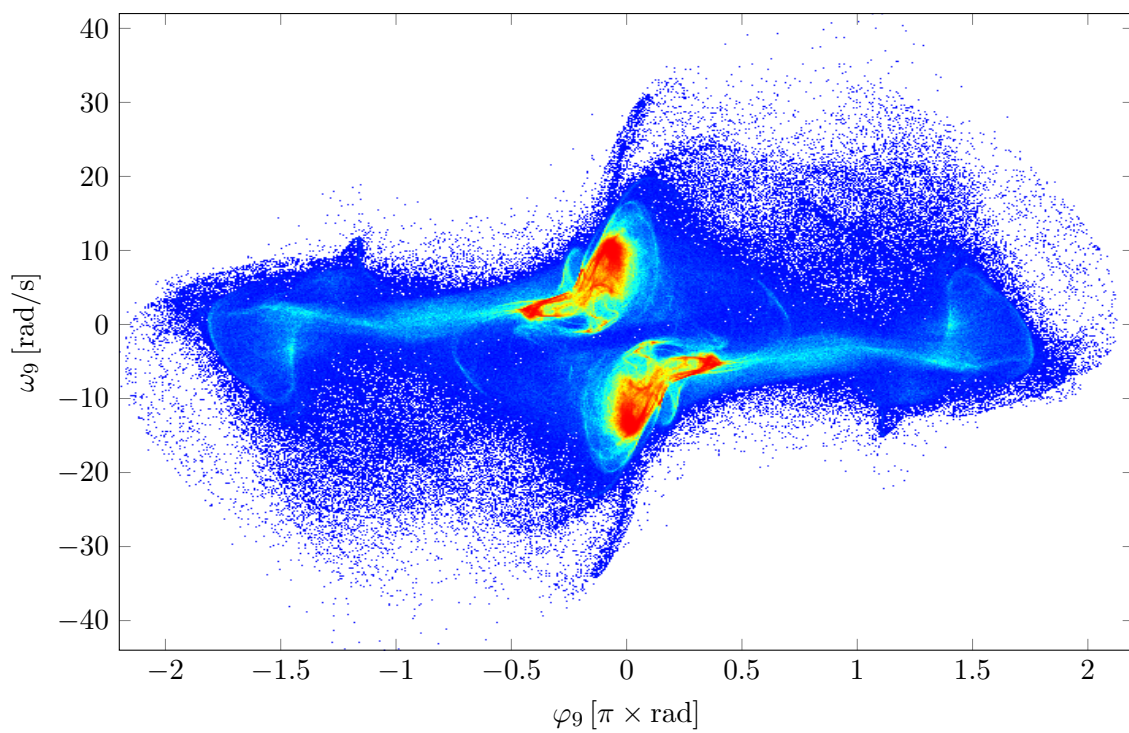
Na obrázcích 9.7, 9.9 a 9.11 jsou ukázány bifurkační diagramy získané pomocí Poincarého map **P0**, **P1** a **P2**. Bifurkační diagramy byly vytvořeny provedením simulace s počátečními podmínkami $\varphi_{0-9}(t_0) = 0$ rad, $\omega_{0-8}(t_0) = 0$ rad s⁻¹ pro každou hodnotu parametru F_{follower} .

Bifurkační diagramy jsou doplněny Poincarého mapami **P0**, **P1** a **P2**, viz obrázky 9.8, 9.10 a 9.12. Poincarého mapy byly vykresleny pro hodnotu parametru $F_{\text{follower}} = 7.0$ N.

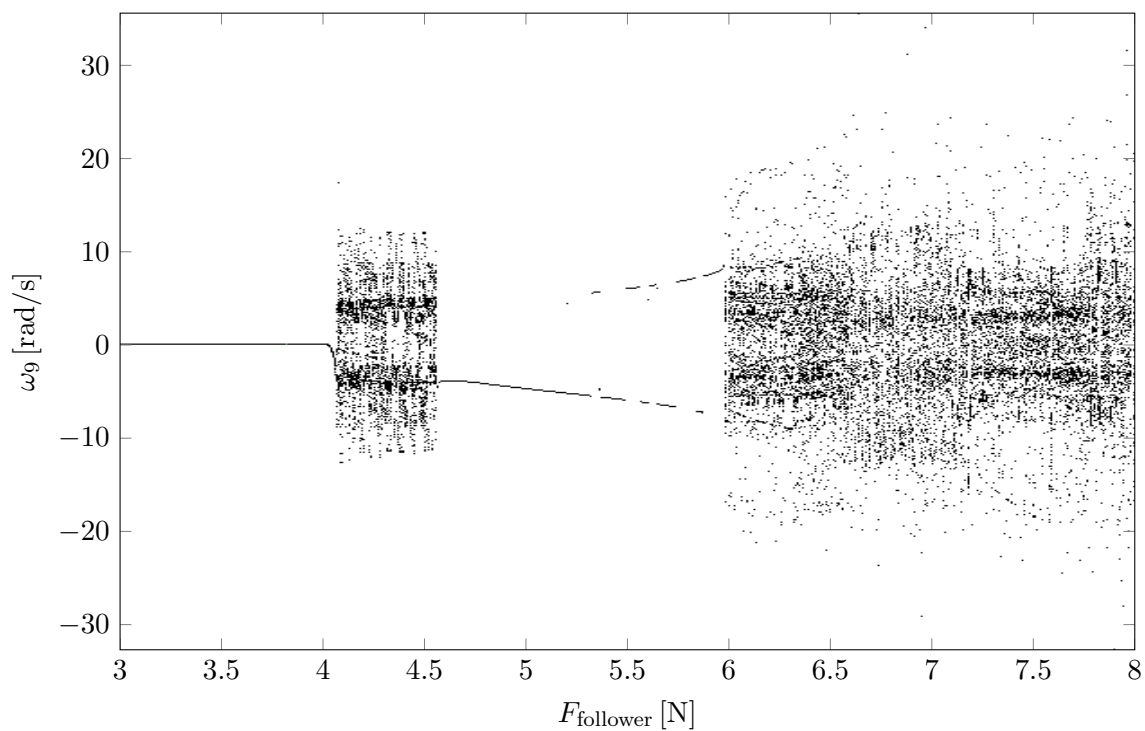
Lze konstatovat, že všechny přístupy ke konstrukci Poincarého map poskytují použitelné výsledky pro konkrétní ohybově měkký volný prut. Popsané nevýhody jednotlivých podmínek se pravděpodobně více projeví u prutu ohybově tužšího. Především mapa **P2** bude trpět numerickou nepřesností v důsledku vysokých zrychlení při kmitání prutu. Na základě prezentovaných výsledků lze upřednostnit použití Poincarého mapy **P1** jako rozumného kompromisu mezi fyzikálním významem a přesností výpočtu.



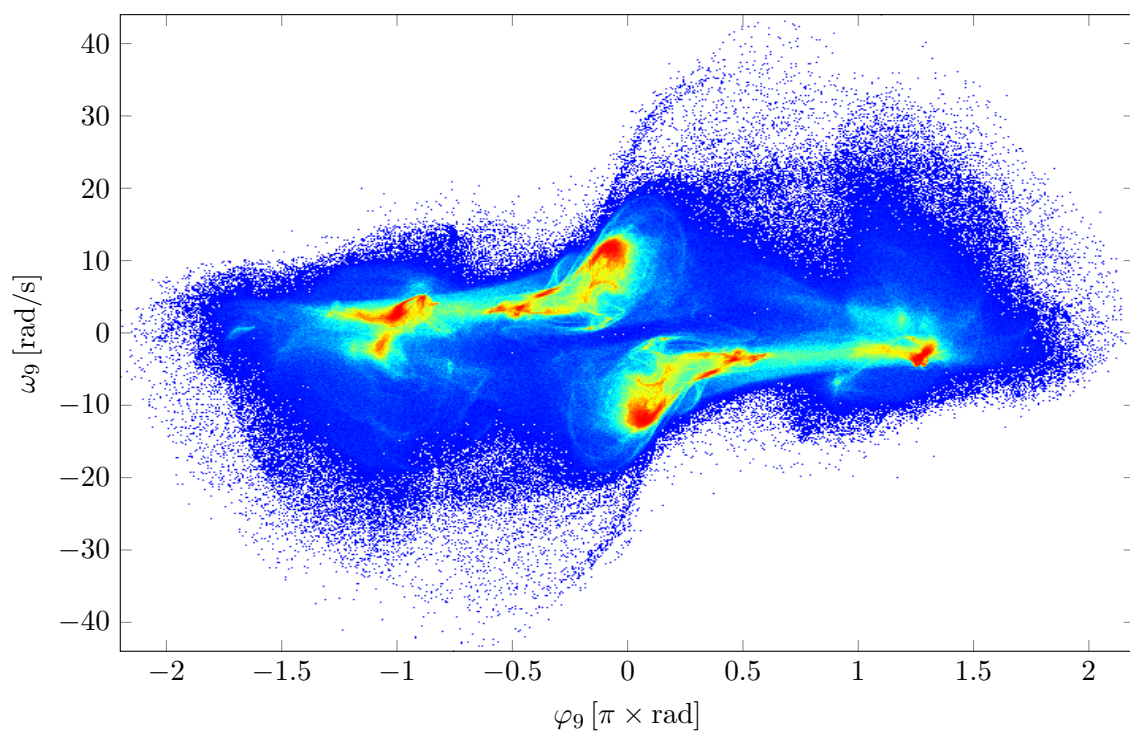
Obrázek 9.7: Bifurkační diagram volného prutu vytvořený užitím Poincarého map **P0**.



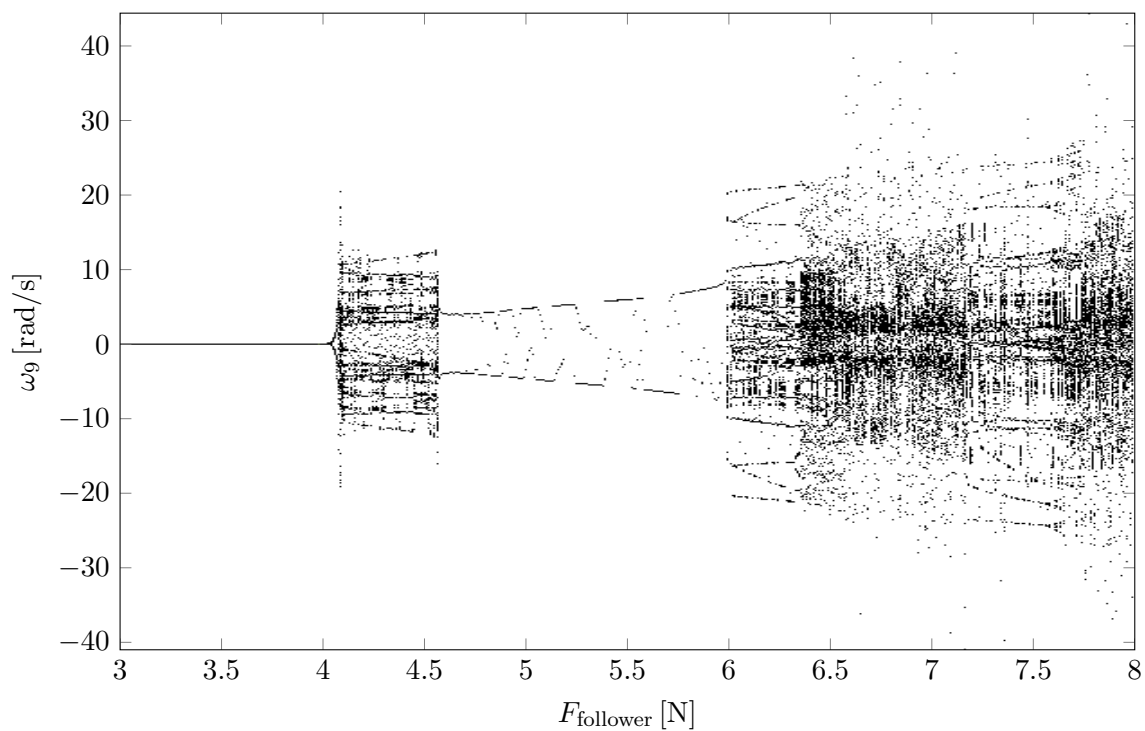
Obrázek 9.8: Poincarého mapa **P0** pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 7.0 \text{ N}$.



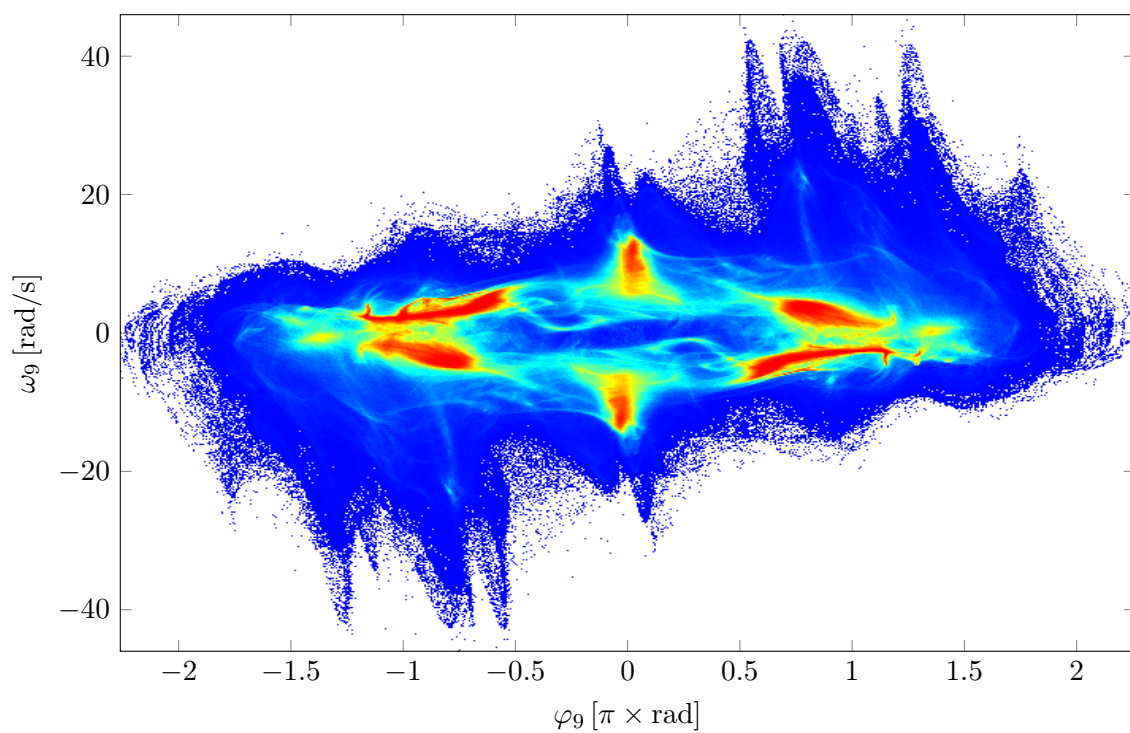
Obrázek 9.9: Bifurkační diagram volného prutu vytvořený užitím Poincarého map **P1**.



Obrázek 9.10: Poincarého mapa **P1** pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 7.0 \text{ N}$.



Obrázek 9.11: Bifurkační diagram volného prutu vytvořený užitím Poincarého map **P2**.



Obrázek 9.12: Poincarého mapa **P2** pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 7.0$ N.

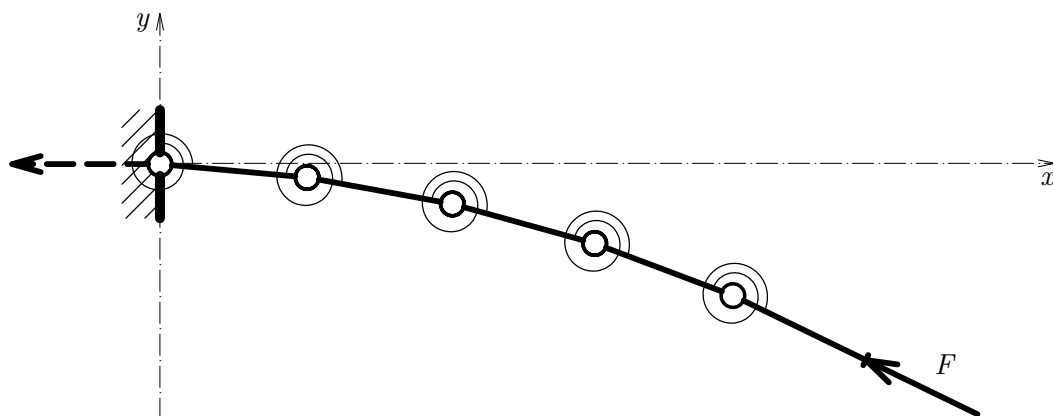
Kapitola 10

Vetknutý prut

Model vetknutého prutu zatíženého sledující silou, viz obrázek 10.1, vznikl úpravou modelu volného prutu. V soustavě pohybových rovnic byly zavedeny následující okrajové podmínky:

$$\begin{aligned}v_{x0} &= 0, \\v_{y0} &= 0, \\ \varphi_0 &= 0,\end{aligned}\tag{10.1}$$

a zároveň byla zvýšena tuhost první rotační pružiny, viz například [5]. Odvození a ověření modelu vetknutého prutu bylo rovněž předmětem bakalářské práce, viz [25]. Podobně jako model volného prutu, i model vetknutého prutu prokázal dobrou shodu s analytickými hodnotami vlastních frekvencí, průhybu, pootočení a kritické sledující síly, viz [3], [17], [18] a [6], [7].



Obrázek 10.1: Model vetknutého prutu.

10.1 Vybrané příklady

Numerické simulace vetknutého prutu byly provedeny pro prut stejných charakteristik jako v předchozí kapitole. Použitý model má tedy délku $L = 5$ m hmotnost $M = 1$ kg a tuhost $EI = 1$ Nm². Při dělení prutu na deset dílců je efektivní délka konzoly L_{eff} s přihlédnutím k obrázku 10.1 rovna $L_{\text{eff}} = (5 - 5/10) = 4.5$ m.

Hodnota koeficientu lineárního tlumení zůstává $c_{\text{int}} = 0.1$ Nmsrad⁻¹. K řešení byla použita semi-implicitní Eulerova metoda s časovým krokem $h = 0.001$ s.

10.1.1 Výsledky simulací

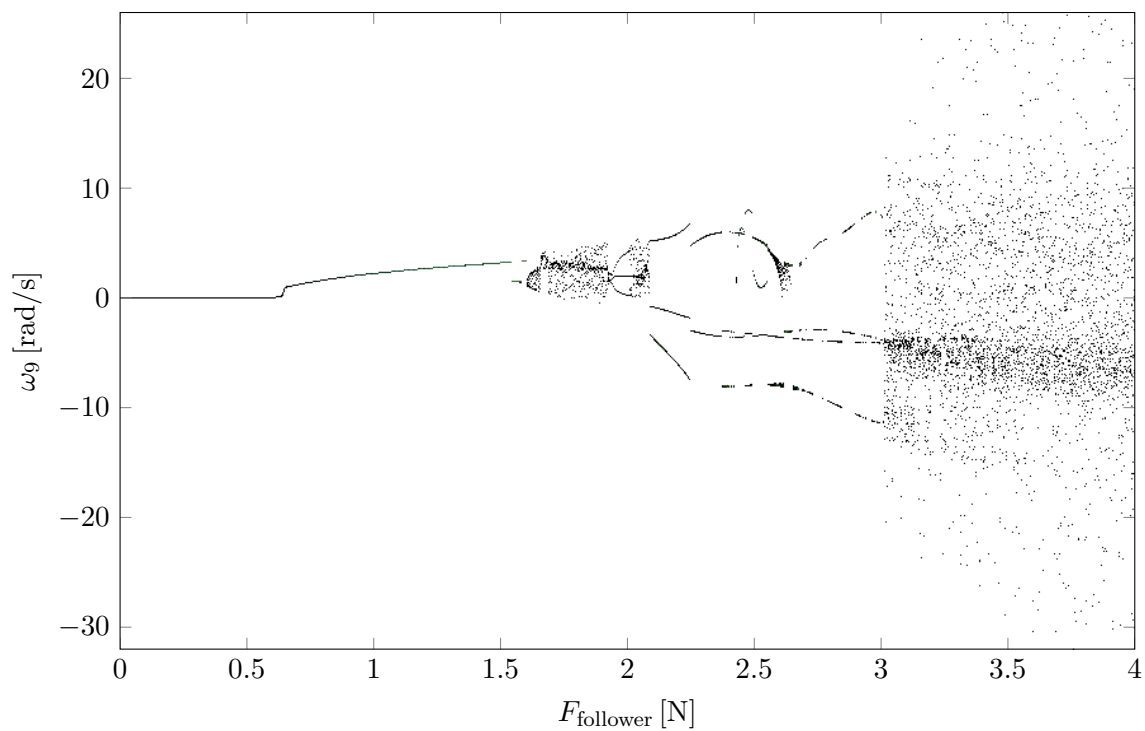
Pro vetknutý prut byly použity podmínky konstrukce Poincarého map odvozené pro volný prut v sekci 9.2. Bifurkační diagramy byly vykresleny pro hodnotu sledující síly v rozmezí $F_{\text{follower}} = (0; 4.0)$ N.

Jednotlivé bifurkační diagramy získané použitím Poincarého map **P0**, **P1** a **P2** jsou ukázány na obrázcích 10.2, 10.4 a 10.6. Podobně jako u modelu volného prutu byly bifurkační diagramy vytvořeny provedením simulace s počátečními podmínkami $\varphi_{1-9}(t_0) = 0$ rad, $\omega_{1-8}(t_0) = 0$ rad s⁻¹ pro každou hodnotu parametru F_{follower} .

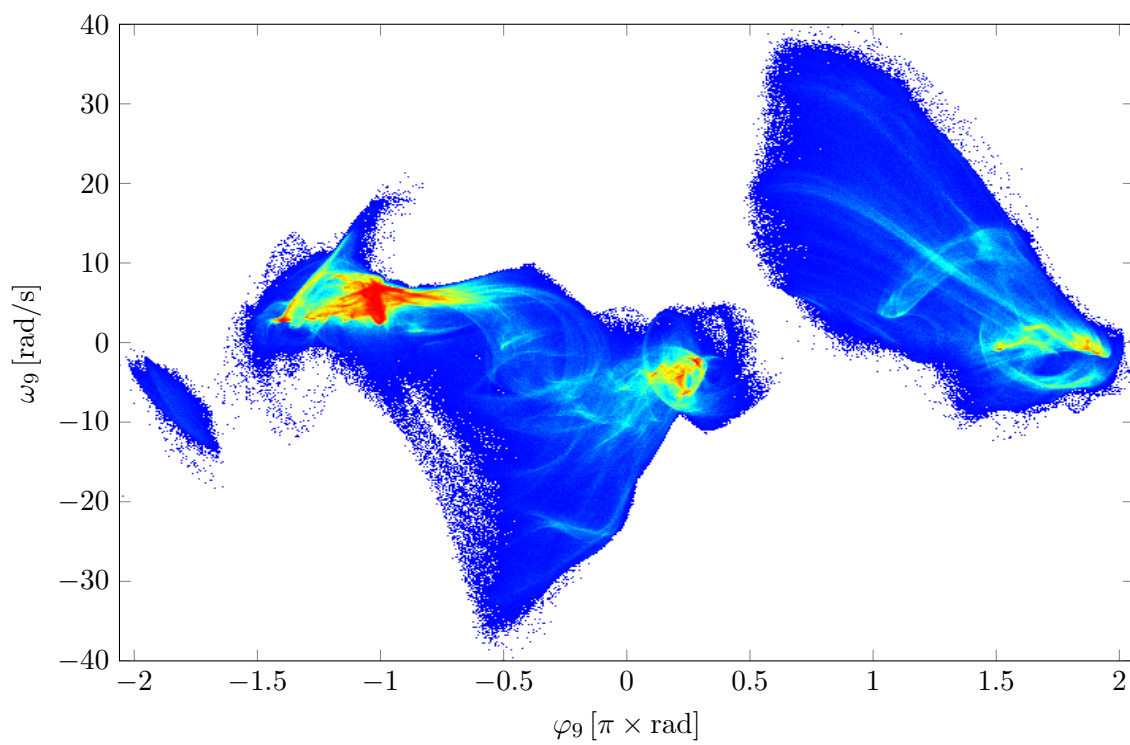
Pro porovnání jsou rovněž nabídnuty Poincarého mapy **P0**, **P1** a **P2** pro shodnou hodnotu parametru $F_{\text{follower}} = 4.0$ N, viz obrázky 10.3, 10.5 a 10.7.

V případě vetknutého prutu se zřejmě osvědčily především Poincarého mapy **P0** a **P1**, které poskytují velmi přehledné bifurkační diagramy. Obzvláště mapa **P0** má výhodný fyzikální podtext a vzhledem k fixaci úhlu prvního dílce konzoly bude pravděpodobně fungovat dobře i pro jiné konfigurace.

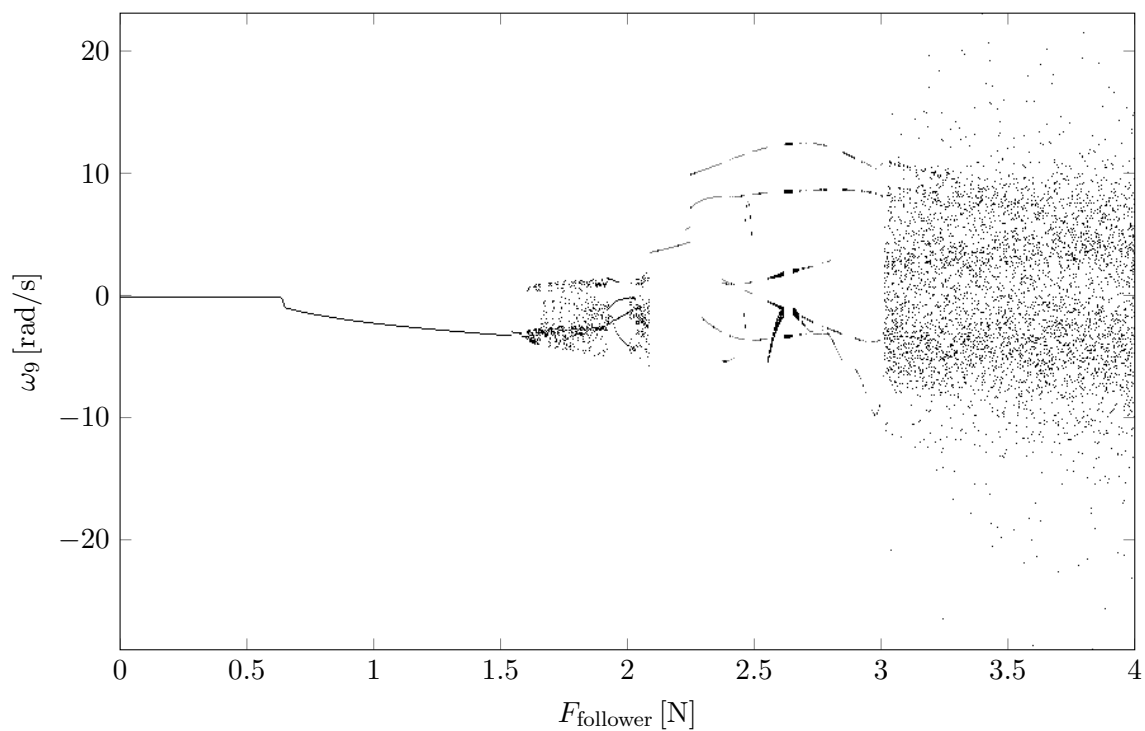
Užití Poincarého mapy **P2** pro vetknutý prut je třeba zvážit vzhledem k velkým změnám souřadnic těžiště modelu a natočení hlavních os setrvačnosti. Získané výsledky lze ale přesto označit za velmi dobré.



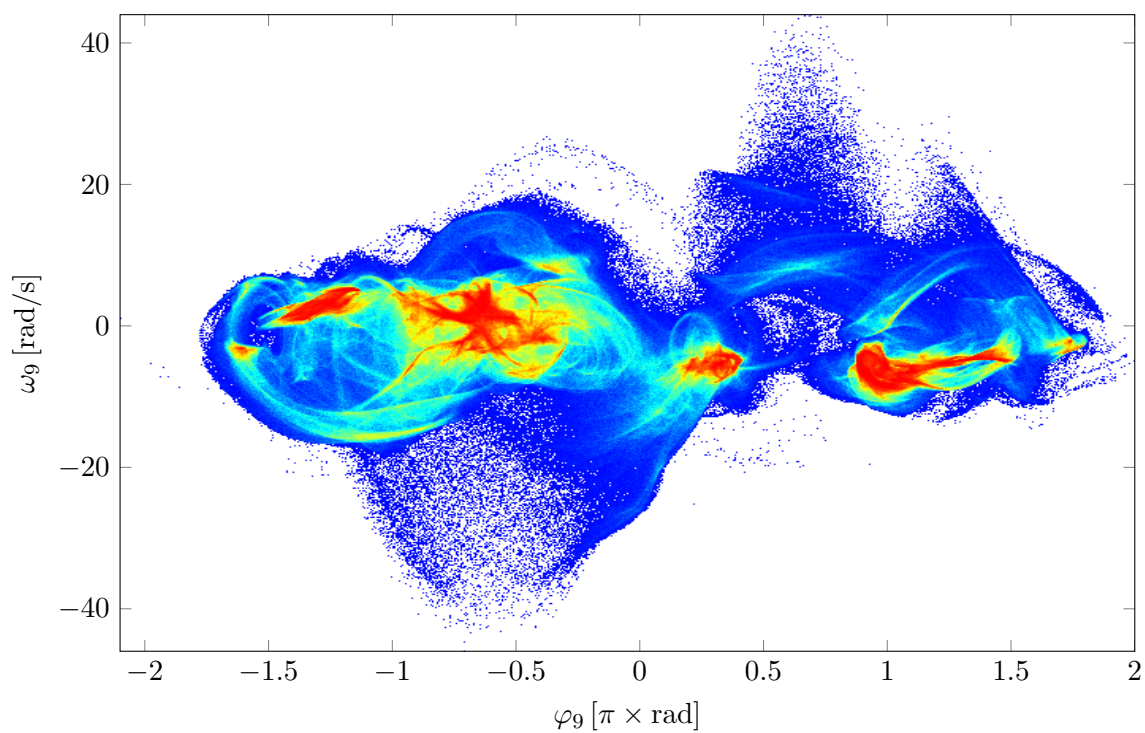
Obrázek 10.2: Bifurkační diagram vetknutého prutu vytvořený užitím Poincarého mapy **P0**.



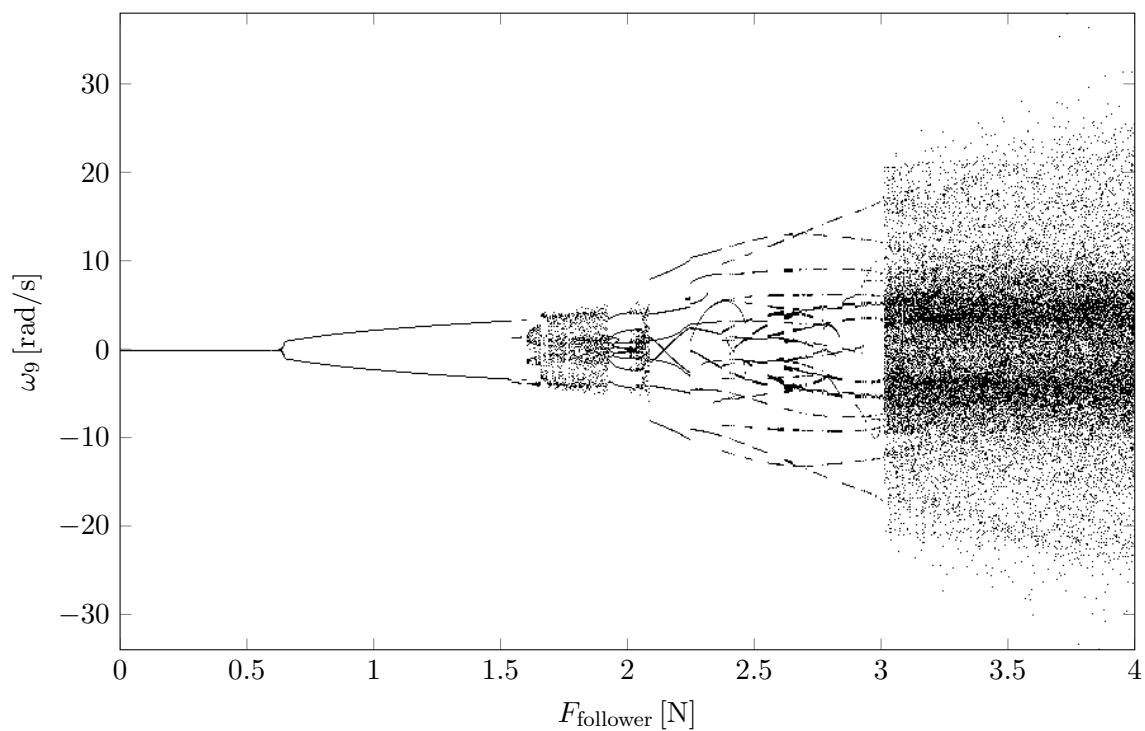
Obrázek 10.3: Poincarého mapa **P0** pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 4.0$ N.



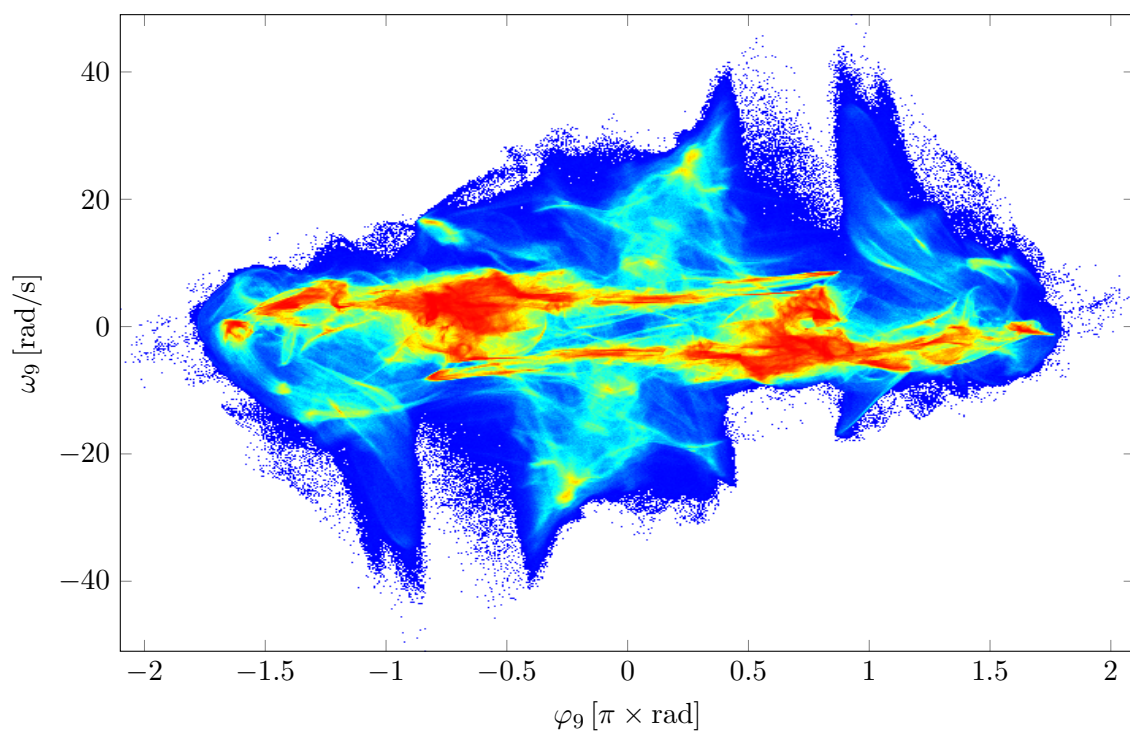
Obrázek 10.4: Bifurkační diagram vetknutého prutu vytvořený užitím Poincarého mapy **P1**.



Obrázek 10.5: Poincarého mapa **P1** pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 4.0$ N.



Obrázek 10.6: Bifurkační diagram vetknutého prutu vytvořený užitím Poincarého mapy **P2**.



Obrázek 10.7: Poincarého mapa **P2** pro hodnotu sledující síly $F_{\text{follower}} = 4.0$ N.

Kapitola 11

Závěr

Předložená diplomová práce se ve své první části zabývala aplikací teorie dynamických systémů na modely mechanických konstrukcí.

Čtenáři byl nabídnut kompaktní úvod do problematiky dynamických systémů. Představena byla jednotná terminologie a způsob úplného popisu deterministického systému. Dále byla studována stabilita řešení dynamických systémů a způsoby posouzení stability trajektorií až k obecné Ljapunovově definici. Rozebrán byl pojem deterministického chaosu, podmínky vzniku chaotického chování a stručně diskutován význam studia deterministického chaosu.

Teoretický základ práce se poté zaměřil na metody numerického řešení soustav diferenciálních rovnic a přednesl klasifikaci forem zatížení, tlumení a dynamické odezvy dynamicky zatížené konstrukce.

Významná pozornost byla věnována nelineárním jevům včetně chaotického chování, které lze pozorovat při numerických simulacích i u skutečných konstrukcí. Byly předneseny způsoby zkoumání vývoje dynamických systémů, a to především zobrazení trajektorií ve fázovém prostoru, konstrukce Poincarého map, bifurkačních diagramů a bazénů přitažlivosti limitních cyklů. Ukázány byly zároveň odpovídající projevy druhů ustáleného chování a poukázáno bylo rovněž na překážky, které se při konstrukci takových zobrazení objevují. Jako nezbytná součást studované problematiky doplňuje práci úvod do teorie bifurkací, klasifikace jevů ztráty stability a zkoumány jsou vlastnosti kaskád bifurkací.

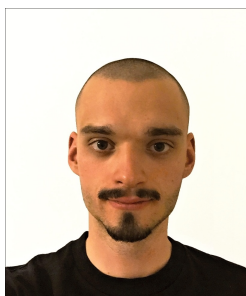
První část práce uzavírá úvod do fraktální geometrie. Studovány jsou kvality geometrických útvarů jako soběpodobnost a neceločíselná dimenze. Naznačen je způsob měření fraktální dimenze. Závěrem jsou poznatky převedeny na útvary vznikající při simulacích dynamických systémů.

Druhá část práce využívá teoretického základu a ukazuje uplatnění poznatků při simulacích konkrétních numerických modelů. Prvním a nejjednodušším modelem je model buzeného jednoduchého rotátoru. Tento splňuje základní předpoklady pro existenci jevu deterministického chaosu a díky rychlosti výpočtu je také hojně využíván pro demonstrace v teoretickém základu. Opodstatněným krokem je zařazení modelu buzeného dvojitého rotátoru. Fázový prostor se stává složitějším a při studiu chování systému tak ve větší míře dochází ke zkreslování.

Na modely matematických kyvadel navazují zástupci modelů s mnoha stupni volnosti: volný a vetknutý prut zatížený sledující silou, které byly odvozeny a ověřeny v rámci bakalářské práce. Podrobně je rozebrána problematika podmínek pro vytváření Poincarého map a diskutovány jsou kvality jednotlivých variant. Je ukázáno, že diagnostika chování složitých modelů vyžaduje specifický přístup.

Implementace numerických modelů, nástrojů pro řešení, zobrazování, barevných škál a ostatních součástí práce byla provedena v programovacím jazyce Java, viz [36], a v prostředí Eclipse Kepler, viz [37]. V rámci práce nebyly použity balíky třetích stran a veškerá implementace je výhradně dílem autora práce. Vzhledem k rozsahu práce je implementace přiložena na kompaktním disku.

Autor



Jméno: **Jan Mašek**
 Narozen: 5. 12. 1990 v Jihlavě
 E-mail: masekj@outlook.cz

Vzdělání

2010-2014, Fakulta stavební VUT v Brně

Bakalářský studijní program Stavební inženýrství, obor Konstrukce a dopravní stavby, specializace Stavební mechanika.

Téma bakalářské práce: Volný prut zatížený sledující silou, diskrétní dynamický model.
 Vedoucí práce: Ing. Petr Frantík, Ph.D.

2014-2016, Fakulta stavební VUT v Brně

Navazující magisterský studijní program Stavební inženýrství, obor Konstrukce a dopravní stavby, specializace Stavební mechanika.

Téma diplomové práce: Modelování postkritických stavů štíhlých konstrukcí.
 Vedoucí práce: Ing. Petr Frantík, Ph.D.

Odborné zaměření

Matematické modelování založené na fyzikální diskretizaci. Nelineární statická a dynamická analýza modelů. Velké deformace, chaotické chování dynamických systémů. Optimalizace úloh pomocí genetických algoritmů. Programování, vývoj software.

Výzkumná činnost

2014-2016, Ústav stavební mechaniky, FAST VUT v Brně

Studentská pedagogicko-vědecká síla, vývoj software pro hromadné zpracování bodových posloupností GTDiPS.

2015-2016, Ústav telekomunikací, FEKT VUT v Brně

Výzkumná skupina WISLAB, projekt Smart Home Multipurpose Gateway. Vývoj řešení pro detekci zařízení a přenos multimediálního obsahu v počítačových sítích.

Publikace

MAŠEK, P.; HOŠEK, J.; ZEMAN, K.; ŠTŮSEK, M.; KOVÁČ, D.; ČÍKA, P.; MAŠEK, J.; ANDREEV, S., KRÖPFL, F. . Implementation of True IoT Vision: Survey on Enabling Protocols and Hands-on Experience. Submitted to Hindawi International Journal Of Distributed Sensor Networks, IF:0.665.

HAVLÍKOVÁ, I.; FRANTÍK, P.; MAŠEK, J.; SOBEK, J.; ŠIMONOVÁ, H.; VESELÝ, V.; KERŠNER, Z.; SEITL, S.; MERTA, I.; SCHNEEMAYER, A. . Evaluation of Fracture Tests of Concrete Specimens via Advanced Tool for Experimental Data Processing. In Applied Mechanics and Materials: Engineering Mechanics 2015. Applied Mechanics and Materials. Switzerland: Trans Tech Publications, s. 585-590. ISBN: 978-3-03835-700- 1. ISSN: 1660-9336.

HAVLÍKOVÁ, I.; FRANTÍK, P.; MAŠEK, J.; SOBEK, J.; ŠIMONOVÁ, H.; VESELÝ, V.; KERŠNER, Z.; SEITL, S.; MERTA, I.; SCHNEEMAYER, A. Evaluation of Fracture Tests of Concrete Specimens via Advanced Tool for Experimental Data Processing. Book of Extended Abstracts of the 21st Conference on Engineering Mechanics. Engineering mechanics 2014. Prague: Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. v. i., 2015. s. 86-87. ISBN: 978-80-86246-42- 0. ISSN: 1805- 8248.

MAŠEK, P.; UHLÍŘ, D.; ZEMAN, K.; MAŠEK, J.; BOUGIOUKLIS, C.; HOŠEK, J. Multi-Radio Mobile Device: Evaluation of Hybrid Node Between WiFi and LTE Networks. International Journal of Advances in Telecommunications, Electrotechnics, Signals and Systems, 2015, roč. 4, č. 2, s. 49-54. ISSN: 1805- 5443.

ŠTŮSEK, M.; HOŠEK, J.; KOVÁČ, D.; MAŠEK, P.; ČÍKA, P.; MAŠEK, J.; KRÖPFL, F. Performance Analysis of the OSGi-based IoT Frameworks on Restricted Devices as Enablers for Connected- Home. In 2015 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Brno, Czech Republic: 2015. s. 211-216. ISBN: 978-1-4673-9282- 2.

GURAN, A.; FRANTÍK, P.; MAŠEK, J. Dynamic stability of non-conservative elastic systems: a reminiscent of Horst Leipholz (1919-1988). Computational mechanics 2013. Špičák: 2013. s. 33-34. ISBN: 978-80-261-0282- 3.

MAŠEK, J. Modelování volného prutu zatíženého sledující silou. Sborník anotací konference Juniorstav 2014. Juniorstav. Brno, Česká republika: Omega Design, s.r.o., 2014. ISBN: 978-80-214-4851- 3

Část III

Přílohy

Příloha A: Kompaktní disk

Na přiloženém kompaktním disku se nachází:

- elektronická verze diplomové práce ve formátu pdf,
- kompletní zdrojové kódy numerických modelů a ostatních použitých nástrojů.

Literatura

- [1] ARNOLD, V.I., Ordinary Differential Equations. M.I.T. Press: Cambridge, MA, 1973, 290s. ISBN 978-026-2010-375
- [2] AUSLOOS, Marcel; DIRICKX, Michel (ed.). The logistic map and the route to chaos: From the beginnings to modern applications. Springer Science Business Media, 2006. ISBN 3-540-28366-8
- [3] BECK, M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik, Volume 3, Issue 3, 1952, p. 225-228.
- [4] CVITANOVIC, Predrag, et al. Chaos: classical and quantum. ChaosBook. org (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2005), 2005. ISBN 978-1-86094-795-7
- [5] FRANTÍK, P. Nelineární projevy mechanických konstrukcí, dizertační práce, Ústav stavební mechaniky FAST VUT v Brně, Brno 2004, 117 s.
- [6] FRANTÍK, P. Post-critical behaviour of beam loaded by follower force. CD proceedings of national conference Engineering Mechanics 2009, Svatka, Česká republika, 2009, 9 s. ISBN 80-86246-35-2
- [7] FRANTÍK, P., MACUR, J. Kritická síla imperfektovaných systémů. Modelování a měření nelineárních jevů v mechanice, sborník příspěvků, Nečtiny, Česká republika, 2006, str. 67-70, ISBN 80-02-01827-3
- [8] FRANTÍK, P. Implementace Rychlé Fourierovy transformace, Java balík. Dostupné z: www.kitnarf.cz/java/.
- [9] FRANTÍK, P. Aplikace FyDiK. Dostupné z: <http://fydik.kitnarf.cz/>
- [10] GOLDSTEIN, H. Classical mechanics, 3 edition. Addison-Wesley, 2001, 680 s. ISBN 978-020-1657-029.
- [11] HENRYCH, J. Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje, studie 6.85 ČSAV, Praha 1985, 165 s.
- [12] GURAN, A., OSSIA, K. On the stability of a flexible missile under an end thrust. Math. Comput. Modelling, Vol. 14, 1990, 5 s.
- [13] HERMANN, G. Dynamics and stability of mechanical systems with follower forces. Stanford University, Stanford, California, 1971, 234 s.

-
- [14] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press, 2012. ISBN: 978-0-12-382010-5
- [15] HOBILL, David; BURD, Adrian; COLEY, Alan A. (ed.). Deterministic chaos in general relativity. Springer Science Business Media, 2013. ISBN 978-1-4757-9993-4
- [16] KUHN, T.S. Struktura vědeckých revolucí, Oikoymenh, 2008, 208 s. ISBN 80-86005-54-2.
- [17] KADLČÁK, J., KYTÝR J. Statika stavebních konstrukcí: základy stavební mechaniky, staticky určité prutové konstrukce. 3. vyd. Brno: VUTUM, 2010, 349 s. ISBN 978-80-214-3419-6.
- [18] KADLČÁK, J., KYTÝR J. Statika stavebních konstrukcí. Třetí dostisk druhého vyd. V Brně: VUTUM, 2009, 431 s. ISBN 978-80-214-3428-8.
- [19] LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S. Stability by Liapunov's Direct Method. Academic Press: New York, 1961, 134 s.
- [20] LEECH, J. W. Klasická mechanika (orig. Butler & Tanner Ltd., Frome, 1958), SNTL - nakladatelství tech. lit., Praha 1970, 133 s.
- [21] LEGGATT, Stuart. Aristotle: On the Heavens. Aris Phillips, 1995. ISBN 978-0856686627
- [22] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. Von dem Verhängnisse. Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, 1956, 2: 129-134.
- [23] MACUR, J. Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace. 1. vyd. Brno: VUT, 1995, 87 s. ISBN 80-214-0698-4.
- [24] MACUR, J. Dynamické systémy. [online]. [cit. 2014-05-03]. Dostupné z: <http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys/>
- [25] MAŠEK, J. Modelování volného prutu zatíženého sledujícím zatížením. Brno, 2014. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Petr Frantík, Ph.D.
- [26] MELCER, J. Kuchárová, D.: *Dynamika stavebních konstrukcí*, Žilinská univerzita, Žilina 2004, 240 s.
- [27] NEWTON, Isaac. The principia: mathematical principles of natural philosophy. S.l.: Snowball Pub, New York 2010. 991 s. ISBN 16-079-6240-3.
- [28] PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. Chaos and fractals: new frontiers of science. Springer Science Business Media, 2006. ISBN 0-387-20229-3
- [29] POINCARÉ, Henri. Science and method. Courier Corporation, 2013. ISBN 0-486-43269-6.

- [30] SCOTT, Alwyn C. The nonlinear universe: chaos, emergence, life. Springer Science Business Media, 2007. ISBN 978-3-540-34152-9
- [31] TALEB, Nassim Nicholas. Černá labuť. Nakladatelství Paseka, Překlad Jan Hořínek, 2009, 440 s. 978-80-7432-128-3.
- [32] TAYLOR, John R. Classical mechanics. Sausalito, Calif.: University Science Books, 2005, xiv, 786 s. ISBN 18-913-8922-X.
- [33] TORBY, B. *Energy Methods. Advanced Dynamics for Engineers*, CBS College Publishing, New York 1984, 426 s.
- [34] WIGGINS, Stephen. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer Science Business Media, 2003. ISBN 978-0-387-21749-9
- [35] ZASLAVSKY, George M. The physics of chaos in Hamiltonian systems. 2007. ISBN: 978-1-86094-795-7
- [36] <http://www.oracle.com/technetwork/java/>
- [37] <https://www.eclipse.org/>

Seznam symbolů

x_i	stavová proměnná systému
$\mathbf{x}(t)$	trajektorie
v	translační rychlost
ω	úhlová rychlost
t	čas
v_x, v_y, v_z	složky vektoru rychlosti
O	orbita
V	Ljapunovova funkce
T_{Lyap}	Ljapunovuv čas
Φ	Operátor toku
D	dimenze
$\mathbf{P}$	Poincarého mapa
φ	obecný úhel
$\mathbf{a}$	zrychlení
m	hmotnost hmotného bodu
E_p, T	potenciální energie
E_k, V	kinetická energie
k	tuhost pružiny
$E_{p,ts}$	potenciální energie akumulovaná v translační pružině
$E_{p,rs}$	potenciální energie akumulovaná v rotační pružině
g	gravitační zrychlení
l	délka dílce, kyvadla
a_i	zobecněná souřadnice systému
$\dot{a}_i$	zobecněná rychlost systému
$\mathcal{L}$	Lagrangeova funkce
k_1, k_2, k_3, k_4	koefficienty R-K metody
E	modul pružnosti
ε	poměrné přetvoření
σ	napětí

∇	gradient
L	délka prutu
M	hmotnost prutu
I	moment setrvačnosti
n	počet dílců
h	časový krok
$F_{follower}$	sledující síla
c	koeficient tlumení
c_{int}	koeficient materiálového tlumení
c_{ext}	koeficient tlumení vlivem vnějšího prostředí
a_m	koeficient zohledňující rozdílné natočení dílců a směru jejich pohybu
$\mathbf{D}$	tlumící síla
$\mathbf{F}_g$	gravitační síla
g	gravitační zrychlení působící na dílec
f	frekvence
Ω	úhlová frekvence
F_{cr}	kritická síla

Matice a vektory

$\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{F}$	vektorové pole, dynamický systém
$\mathbf{M}$	matice hmotných momentů setrvačnosti
$\mathbf{Q}$	matice transformačních momentů setrvačnosti
$\mathbf{K}$	matice tuhostí rotačních pružin
$\mathbf{D}_i$	matice materiálového útlumu
$\mathbf{F}$	vektor zatížení sledující silou
$\mathbf{v}$	vektor translačních rychlostí
$\boldsymbol{\omega}$	vektor úhlových rychlostí
$\mathbf{D}_e$	vektor tlumení vlivem vnějšího prostředí
$\mathbf{A}$	vektor vlivu gravitačního pole