

TRANSIENT EFFECT AT THE OUTPUT OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM CONTROLLED PULSE-WIDTH MODULATION

Martin Petera

Master Degree Programme (1), FEEC BUT

E-mail: xpeter16@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Pavel Jura

E-mail: jura@feec.vutbr.cz

Abstract: The goal of this work is to determine the size of overshoot produced at the output of a linear continuous second order system controlled by pulse width modulation. This work contains the calculation of the output signal response of the system in the time domain using the Laplace transform. The calculations of the amplitude of the output signal based on the pulse width modulation and system parameters are performed in this work. Finally the possibilities were given to determine the suitable period of pulse width modulation for required ripple. All the important calculations were compared with the simulations in the MATLAB-SIMULINK program and with the measurement at the real inertia second order cell.

Keywords: Pulse width modulation, Laplace transform, system, transfer function, signal, input, output, ripple.

1 ÚVOD

Pulsní šířková modulace (PWM) se dnes s úspěchem používá v mnoha oblastech řízení a regulace systémů. Důležitou roli hraje PWM u výkonných elektronických měničů v energetice, elektronice a elektrických pohonech. Frekvence zde použité PWM je v řádu jednotek až stovek kHz.

Druhou významnou oblastí využití PWM, které bych se chtěl v této práci zejména věnovat, je tzv. on-off řízení systémů, tedy řízení pomocí relé, stykačů, ventilů apod. V tomto případě, na rozdíl od první jmenované oblasti, se požaduje co nejmenší frekvence PWM, aby nedocházelo k opotřebování a snižování životnosti použitých akčních členů. Cílem práce je na základě parametrů řízeného systému a požadovaného zvlnění výstupního signálu určit vhodnou frekvenci PWM.

2 ŘEŠENÍ

2.1 Úvod

V této práci se nejprve zaměřím na analytické odvození velikosti zvlnění výstupního signálu systému druhého řádu řízeného pulsně šířkovou modulací pomocí Laplaceovy transformace. Následně uvedu způsob, jak lze jednoduše odhadnout velikost zvlnění výstupního signálu systému pomocí první harmonické složky výstupního signálu. Poslední částí je ověření uvedených výpočtů.

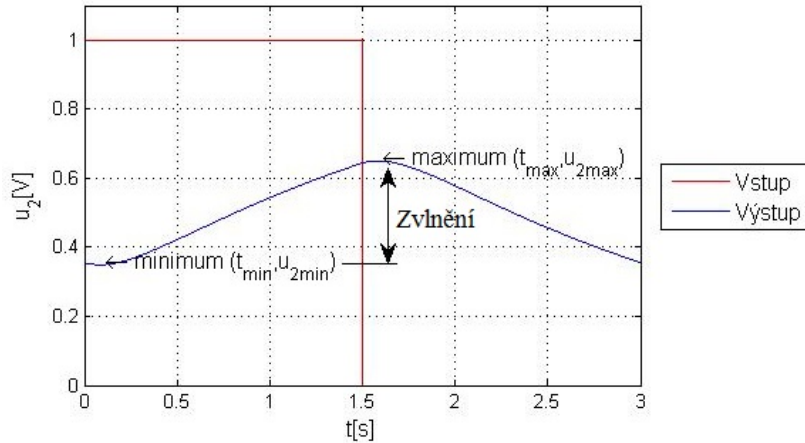
2.2 ANALYTICKÝ VÝPOČET ZVLNĚNÍ VÝSTUPNÍHO SIGNÁLU

Jednu periodu pulsní šířkové modulace (PWM), která vstupuje do systému a která má výšku impulzů 1, lze matematicky popsat časovou funkcí $u_{1T}(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon T)$, kde $u_{1T}(t)$ je označení pro jednu periodu signálu PWM v časové oblasti, σ je označení pro jednotkový skok, T je perioda PWM, ε vyjadřuje střídu PWM a t je proměnná vyjadřující časovou závislost. Periodickým opakováním tohoto pulsu tak modeluji celý signál PWM. Pokud se tento signál převede pomocí Laplaceovy transformace

do operátorové oblasti a vynásobí se operátorovým přenosem lineárního systému druhého řádu, vyjde vztah [1]:

$$U_2(p) = \frac{(1 - e^{-p\epsilon T})}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(1 - e^{-pT})}, \quad (1)$$

kde T_1 a T_2 jsou časové konstanty systému, $U_2(p)$ je obraz výstupního signálu systému a p je komplexní nezávisle proměnná. Je vidět, že výraz na pravé straně neodpovídá žádnému výrazu, který



Obrázek 1: Časový průběh vstupního a výstupního signálu systému a definice zvlnění.

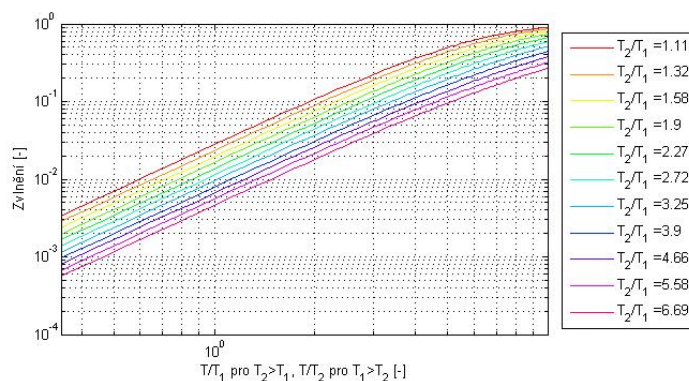
by bylo možné snadno do časové oblasti převést například pomocí tabulek s již vypočtenými předměty. Pro výpočet předmětu lze použít postup odvozený v [1]. Výsledkem zpětné transformace je funkce vyjadřující odezvu systému druhého řádu na vstupní PWM signál. Výsledná funkce se skládá ze dvou složek. První je přechodná složka, která exponenciálně klesá k nule a její vliv lze po dostatečně dlouhé době zanedbat. Druhá je periodická složka $u_{2per}(t)$, která způsobuje zvlnění výstupního signálu (Obrázek 1).

$$u_{2per}(t) = \begin{aligned} & \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot \frac{e^{\frac{\epsilon T}{T_1}} - e^{\frac{T}{T_1}}}{1 - e^{\frac{T}{T_1}}} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{e^{\frac{\epsilon T}{T_2}} - e^{\frac{T}{T_2}}}{1 - e^{\frac{T}{T_2}}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad t \in \llcorner nT; \epsilon T + nT \rceil \\ & \left(\frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot \frac{e^{\frac{\epsilon T}{T_1}} - 1}{1 - e^{\frac{T}{T_1}}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{e^{\frac{\epsilon T}{T_2}} - 1}{1 - e^{\frac{T}{T_2}}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} \right) \quad t \in \llcorner \epsilon T + nT; (n+1)T \rceil \\ & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Zvlnění výstupního signálu je definováno jako rozdíl minimální a maximální hodnoty periodické složky výstupního signálu (Obrázek 1). Velikost tohoto zvlnění lze odvodit ze vztahu (2). Nejprve je nutné najít čas maxima a minima a tyto hodnoty dosadit za proměnnou t ve vztahu (2). Po několika úpravách a pro hodnotu střidy PWM 50%, kdy je zvlnění největší, vyjde výsledný vzorec pro zvlnění [1]:

$$R = 2 \frac{\left(1 + e^{\frac{T}{2T_1}} \right)^{\frac{T_1}{T_2 - T_1}}}{\left(1 + e^{\frac{T}{2T_2}} \right)^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}}} - 1, \quad (3)$$

kde R je výsledná hodnota zvlnění. Pro snazší použití vztahu (3) na zjištění vhodné periody PWM byl vytvořen graf závislosti zvlnění pro určitý rozsah hodnot časových konstant systému a periody PWM (Obrázek 2). Pokud tedy známe časové konstanty systému a požadované zvlnění, lze pomocí tohoto grafu určit vhodnou periodu PWM.



Obrázek 2: Graf velikosti zvlnění v závislosti na časových konstantách systému a periody PWM.

2.3 ODHAD VELIKOSTI ZVLNĚNÍ POMOCÍ PRVNÍ HARMONICKÉ SLOŽKY

Výpočet zvlnění ze vztahu (3) nemusí být vždy jednoduchý. Proto, pokud jsou známy frekvenční charakteristiky systému, může být jednodušší odhadnout velikost zvlnění právě z frekvenčních charakteristik, a to z amplitudy první harmonické složky výstupního signálu. Její velikost je dána amplitudou první harmonické složky signálu PWM a zesílením systému na frekvenci PWM (f_{PWM}) [1].

$$R_{1,h} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(T_1^2 \omega_0^2 + 1)(T_2^2 \omega_0^2 + 1)}}, \quad (4)$$

kde $\omega_0 = 2\pi f_{PWM}$.

2.4 OVĚŘENÍ VÝPOČTŮ

Ověření teoretických výpočtů proběhlo ve dvou fázích. V první fázi bylo vytvořeno simulační schéma v programu SIMULINK pro ověření vztahů pro časový průběh výstupního signálu (2) a zvlnění (3), které se cyklicky volalo ze skriptu s různými časovými konstantami a parametry PWM. Odsimulované hodnoty se poté porovnávaly s analyticky odvozenými. Ve druhé fázi byl z pasivních součástek v laboratoři sestaven setrvačný člunek druhého řádu a ten byl buzen signálem PWM z funkčního generátoru. Vstupní i výstupní signál setrvačného člunku byl zobrazován a měřen na osciloskopu. Pomocí funkce pro měření hodnoty peak-to-peak osciloskopu byly odečítány změřené hodnoty zvlnění, které se poté porovnávaly s teoreticky vypočítanou hodnotou zvlnění.

3 ZÁVĚR

Podařilo se teoreticky odvodit časový průběh výstupního signálu ze systému druhého řádu, který je řízen pulsně šířkovou modulací (2) a vztah pro výpočet zvlnění výstupního signálu systému druhého řádu (3). Oba vztahy byly ověřeny nejprve simulací, přičemž analyticky odvozené a odsimulované průběhy byly shodné. Ve druhé fázi byly výpočty ověřeny v laboratoři na setrvačném člunku druhého řádu. Rozdíl mezi teoretickým výpočtem a měřením byl pro různé hodnoty frekvence PWM a časových konstant systému různý. Maximální odchylka pro provedená měření však činila 8,56%.

REFERENCE

- [1] Petera, Martin. *Přechodový děj na výstupu lineárního spojitého systému řízeného pulsně šířkovou modulací*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2014. 75 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Pavel Jura, CSc.