



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**ANALÝZA SOUSTAV 5-TI TĚLES S VAZBAMI S PASIVNÍM
ÚČINKEM**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Adam Podešva

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Adam Podešva**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza soustav 5–ti těles s vazbami s pasivním účinkem

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Soustavy těles je možné rozdělit podle typu vazeb na soustavy s vazbami neutrálnými a s vazbami pasivními. Pro soustavy těles s nezanedbatelným ovlivňováním pohybu se používá model vazeb NNTP (s pasivními účinky) a při řešení se určují stykové výslednice v jednotlivých vazbách pro různé pohybové stavy, které mohou u soustavy nastat.

Cíle bakalářské práce:

1. Pro dvě soustavy s 5–ti tělesy s vazbami NNTP provést výpočet stykových sil ve vazbách pro různé pohybové stavy.
2. Posouzení funkčnosti vazeb a pohybového stavu.
3. Detailní analýza výsledků.

Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-x.

FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K., ONDRÁČEK, E. Mechanika těles - statika. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995, ISBN 80-214-0694-1

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá řešením soustav 5–ti těles s vazbami s pasivním účinkem (NNTP). Nejprve jsou zde popsány teoretické a fyzikální zákonitosti statiky a následně jsou řešeny konkrétní soustavy. Důležitými prvky při řešení jsou kinematický rozbor, uvolnění soustavy, následný statický rozbor, sestavení rovnic rovnováhy, jejich řešení a analýza výsledků. U první soustavy se zkoumá vliv pasivních účinků a změny průměru kladky na výsledné silové účinky v lanech. Ve druhé soustavě je dále práce rozšířena změnou trajektorie pohybu tělesa (závaží) pomocí nakloněné roviny z čehož následně vyplývají změny velikostí sil ve vazbách. Na konci práce se klade důraz na kontrolu těles proti překlopení.

Abstract

This work deals with the solution of systems of 5–bodies with passive effect (NNTP). Firstly, the theoretical and physical laws of statics are described and specific systems are solved. Important elements of the solution are kinematic analysis, system loosening, subsequent static analysis, equilibrium equations, their solution and analysis of results. In the first system, the influence of the passive effects and the change in the diameter of the pulley on the resulting force effects in the ropes are examined. Furthermore, in the second system, the work is extended by changing the trajectory of the movement of the body (weight) by means of an inclined plane, resulting in changes in the magnitude of the forces in the bonds. At the end of the work, the emphasis is on checking the bodies for rollover.

Klíčová slova

mechanika těles, statika, NNTP, nakloněná rovina, rovnice kružnice a tečny, síla, moment síly, pasivní účinky, překlopení těles

Keywords

solid mechanics, statics, NNTP, inclined plane, equation of circle and tangent, force, moment of force, passive effects, rollover

Bibliografická citace

PODEŠVA, Adam. *Analýza soustav 5–ti těles s vazbami s pasivním účinkem* [online]. Brno, 2019 [cit. 2019-05-22]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116972>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Vladimír Fuis.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Analýza soustav 5–ti těles s vazbami s pasivním účinkem“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a zdrojů uvedených v seznamu v příloze.

24. 5. 2019

Adam Podešva

.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu doc. Ing. Vladimíru Fuisovi za pomoc a výborné vedení při tvorbě bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

1.	Úvod.....	11
2.	Základní pojmy statiky	12
2.1	Axiomy statiky	12
2.2	Interakce a síla	12
2.3	Vazba	13
2.4	Moment síly	13
2.5	Statická ekvivalence a rovnováha.....	14
2.6	Silové soustavy	15
3.	Vazby typu NNTN a jejich uvolnění.....	16
3.1	Obecná vazba	16
3.2	Posuvná vazba	17
3.3	Rotační vazba	18
4.	Vazby typu NNTP a pasivní účinky	19
4.1	Podpora.....	19
4.1.1	Valení	20
4.1.2	Smykání	21
4.2	Posuvná vazba	21
4.3	Rotační vazba	22
5.	Algoritmus řešení soustav těles s vazbami s pasivními účinky (NNTP).....	24
5.1	Rozbor zadání	24
5.2	Klasifikace uložení tělesa	24
5.2.1	Kinematický rozbor	24
5.2.2	Určení charakteru relativního pohybu	24
5.3	Uvolnění	25
5.4	Statický rozbor.....	25
5.5	Sestavení podmínek statické rovnováhy doplněné o stykové závislosti	25
5.6	Řešení soustavy rovnic	26
5.6.1	Analytické řešení	26
5.6.2	Numerické řešení.....	26
5.7	Zhodnocení výsledků řešení	26
6.	Příklad 1 – jednoduchý výtah.....	27
6.1	Rozbor úlohy	27
6.2	Kinematický rozbor.....	28
6.3	Uvolnění těles.....	28
6.4	Statický rozbor.....	30

6.5	Řešení soustavy rovnic	30
6.6	Analýza výsledků	31
7.	Příklad 2 – soustava s vozíkem	32
7.1	Rozbor úlohy	32
7.2	Kinematický rozbor	34
7.3	Uvolnění	34
7.4	Statický rozbor	38
7.5	Numerické řešení soustavy rovnic	39
7.6	Analýza výsledků	39
8.	Rozšíření příkladu 2 – umístění závaží na nakloněnou rovinu	42
8.1	Rozbor úlohy	42
8.2	Kinematický rozbor	43
8.3	Uvolnění	44
8.4	Statický rozbor	45
8.5	Určení tečného bodu	46
8.6	Určení úhlu δ	47
8.7	Grafické závislosti	49
8.8	Vliv na síly ve vazbách	51
8.9	Překlopení tělesa	52
8.10	Analýza výsledků	53
	Závěr	54
	Seznam použité literatury	56

1. Úvod

Soustavy těles se rozdělují podle typu vazeb na dva druhy – soustavy s vazbami neutrálnými (soustava je nepohyblivá) a soustavy s vazbami pasivními (pohyblivá soustava). Pro tyto soustavy těles s nezanedbatelným ovlivňováním pohybu se používá model vazeb NNTP a při řešení se určují stykové výslednice v jednotlivých vazbách pro různé pohybové stavy, které mohou nastat.

Mezi pasivní účinky řadíme například smykové tření, čepové tření, pásové tření a odpor valení. Velikosti těchto nežádoucích účinků se následně určí pomocí charakteristických rozměrů těles a součinitelů tření. V teoretické části jsou všechny pasivní účinky, s kterými se setkáme v této práci popsány a vysvětleny.

V další části bakalářské práce jsou řešeny 2 příklady. První příklad je jednoduchý výtah, složený z kabiny výtahu, tří kladek a závaží. Klade se tam především důraz na pasivní účinky v kladkách a jejich následný vliv na tažné síly v lanech. Dále je příklad rozšířený změnou rozměrů jedné kladky, kde vychýlením lana o daný úhel sledujeme změnu silových účinků. K tomuto rozšíření bylo potřeba využít znalosti z matematiky pro výpočet souřadnic styku lana s kladkami, výpočet probíhal numericky prostřednictvím programu Octave.

Druhý příklad se skládá z vozíku, který po nakloněné rovině sváží nebo vyváží náklad. Soustava je doplněná o závaží a jednoduchý brzdový systém, který pomocí přitlačné síly působí na navíjecí buben a tím koriguje pohyb celé soustavy. Cílem je určit silové účinky ve vazbách a následně ověřit funkčnost vazeb. Nadstavbou příkladu je změna trajektorie pohybu závaží pomocí nakloněné roviny. Práce je doplněná o matematický výpočet tečného bodu navíjecího bubnu s lanem a pomocí zvolené geometrie se vyjádří přesná poloha uchycení lana k závaží, z čehož se potom určují změny charakteru a velikosti silových účinků ve všech vazbách. Následný úhel, který vznikne mezi nakloněnou rovinou a lanem, může způsobit překlopení závaží, což je prošetřeno v poslední části práce.

V teorii při uvolňování vazeb s pasivními účinky a při řešení obou příkladů počítáme s tíhovým polem Země.

$$F_g = m \cdot g$$

F_g	tíhová síla tělesa	[N]
-------	--------------------	-----

m	hmotnost tělesa	[kg]
-----	-----------------	------

g	tíhové zrychlení Země	$[m \cdot s^{-2}]$, $g = 9,81 m \cdot s^{-2}$
-----	-----------------------	--

Při sestavování rovnic rovnováhy jsou použity rovnice vytvořené v programu MathCad, za účelem úspory času.

2. Základní pojmy statiky

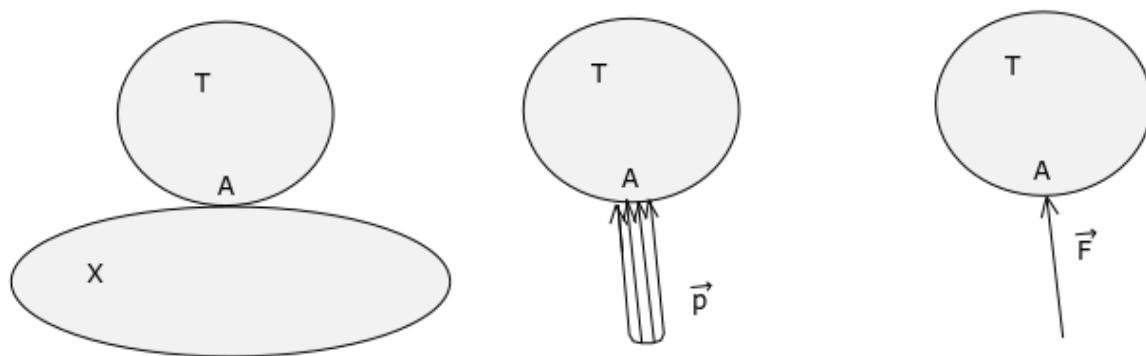
2.1 Axiomy statiky

V mechanice těles a ve statice využíváme matematického popisu poznatků. Teorii statiky můžeme vytvořit axiomatickým způsobem. Axiomy jsou základní věty, jejichž pravdivost je ověřena [1].

- Axiom o prostoru a čase – prostor je trojrozměrný, spojitý izotropní, euklidovský, inerciální a absolutní. Zároveň je čas skalární, spojitá, ve všech bodech prostoru shodná, kladná rovnoměrně rostoucí veličina, charakterizující současnost a následnost jevů v prostoru
- Axiom o hmotnosti – každému prvku tělesa lze přiřadit hmotnost (skalární veličina, charakterizuje gravitační a setrvační vlastnosti prvku)
- Axiom o energii a zachování energie – energie vyjadřuje míru změny děje (skalární veličina). U uzavřených soustav je energie konstantní
- Axiom o silovém působení
- Axiom o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení na těleso.
- Axiom o styku těles

2.2 Interakce a síla

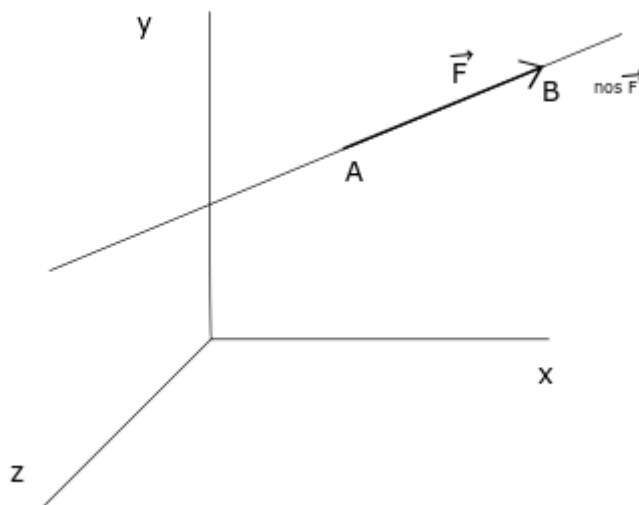
Interakce je vzájemné ovlivňování hmotných bodů nebo těles, mezi kterými existuje spojení [1]. Interakci jsme schopni popsat veličinami na vymezené rozlišovací úrovni. Silová interakce se ve statice nazývá silové působení. Nastane-li toto působení mezi dvěma tělesy, tak dochází k přenosu energie ve stykovém útvaru, což je prostorový nebo plošný útvar. Těleso je deformovatelné. Pokud je velikost tohoto útvaru nepodstatná, tak silové působení nahrazujeme silou.



obr. 1 Interakce hmotných bodů (převzato z [1])

Síla je fyzikální veličina, je určena velikostí, působištem, smyslem a směrem na přímce, kterou nazýváme silovou nositelkou [1]. Síla je vektorová veličina, její značka je F a jednotka je Newton [N].

Na obrázku níže můžeme vidět zobrazení vektoru síly v kartézském souřadném systému, kde tuto sílu můžeme rozložit na její složky do směru x, y a z.



obr. 2 Vymezení síly v prostoru

Velikost síly je možné následně vypočítat pomocí jejích složek promítnutých do jednotlivých směrů x, y, z pomocí následujícího vztahu.

$$F := \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

2.3 Vazba

Pokud jsou dva hmotné body v interakci, tak jsou i vzájemně vázané (existuje mezi nimi spojení) [1]. Toto spojení se nazývá vazba a je vymezeno veličinami. Mezi tělesy následně dochází k přenosu látky, energie a informace. Rozlišujeme dva typy vazeb z pohledu toho, jestli interakce nastává, či nikoliv.

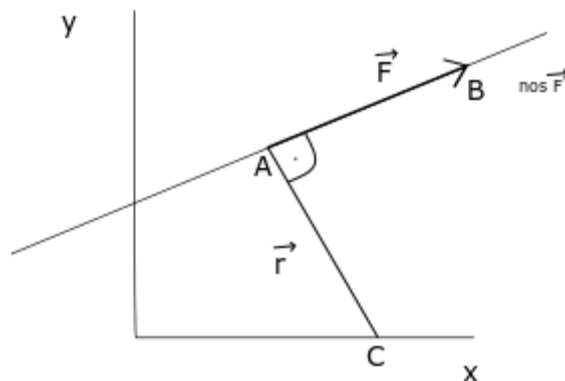
- vazba funkční – vazba existuje a interakce v daném okamžiku probíhá
- vazba nefunkční – vazba existuje, interakce je možná, ale v daném okamžiku neprobíhá

2.4 Moment síly

Moment síly je vektorová fyzikální veličina, která závisí na velikosti dané síly a na vzdálenosti od vztažného bodu, ke kterému moment určujeme, jednotkou je Newton-metr [Nm]. Každá síla, která působí na těleso, vyvolává otáčivý účinek, velikost tohoto otáčivého účinku nazýváme moment síly [1].

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Kde $\vec{M}$ je vektor výsledného momentu, $\vec{F}$ je vektor síly a $\vec{r}$ je kolmá vzdálenost od bodu k síle.



obr. 3 Moment síly k bodu C

2.5 Statická ekvivalence a rovnováha

Statická ekvivalence bude dosažena, pokud bude dosažena statická pohybová ekvivalence (dále SPE) a zároveň statická vazbová ekvivalence (dále SVE) [2]. SPE nastane tehdy, pokud je stejným pohybem tělesa jako celku mechanický klid. SVE nastane v případě, pokud je uložení tělesa staticky určité (tzn. že výsledné stykové síly můžeme určit z podmínek statické rovnováhy). Statickou ekvivalenci prošetřujeme například mezi dvěma silovými soustavami. Tyto silové soustavy získáme uvolněním silových a stykových vazeb. Můžeme je porovnávat pouze tehdy, známe-li vzájemnou závislost mezi působením silové soustavy na těleso a pohybem tělesa jako celku, vyjádřenou veličinami. Na základě axiomu, který vychází z druhého Newtona pohybového zákona, můžeme použít vztahy.

$$\frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

$\vec{v}$	rychlost translačního pohybu	[m/s]
m	hmotnost tělesa	[kg]
J	moment setrvačnosti tělesa	[kg · m ²]
$\vec{\omega}$	úhlová rychlost tělesa	[rad/s]
t	čas	[s]

Statická ekvivalence je mezi dvěma silovými soustavami dosažena, pokud je silová a momentová výslednice jedné soustavy rovna druhé soustavě [2].

Silová výslednice jedné soustavy $\vec{F}_V^1 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

Momentová výslednice jedné soustavy $\vec{M}_{VB}^1 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bi}$

Statická rovnováha tělesa nastane v případě, že se přesně vymezené veličiny nemění v čase, zároveň musí být těleso v mechanickém klidu [2]. Statickou rovnováhu můžeme potom vyjádřit těmito vztahy.

$$\begin{array}{lll} \text{Silové vztahy} & \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} & \Sigma \vec{M}_i = \vec{0} \\ \text{Pohybové vztahy} & m\vec{v} = \overrightarrow{\text{konst.}} & J\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{konst.}} \end{array}$$

2.6 Silové soustavy

Silovou soustavou nazýváme několik sil působících na těleso, kde každá jednotlivá síla může mít jiný směr a jinou velikost [3]. Silovou soustavu, pak můžeme nahradit jedinou silou, anebo silou a momentem, za předpokladu dodržení pohybové ekvivalence a statické rovnováhy. Rozlišujeme několik typů silových soustav [1].

- Soustava sil se společným působištěm
- Soustava sil na společné nositelce
- Centrální silová soustava
- Soustava sil v jedné rovině
- Soustava sil na dvou různoběžných přímkách
- Soustava rovnoběžných sil
- Soustava sil na dvou mimoběžných nositelkách
- Soustava sil v rovnoběžných rovinách
- Soustava sil v různoběžných rovinách protínajících jednu přímku
- Rotující soustava rovnoběžných sil

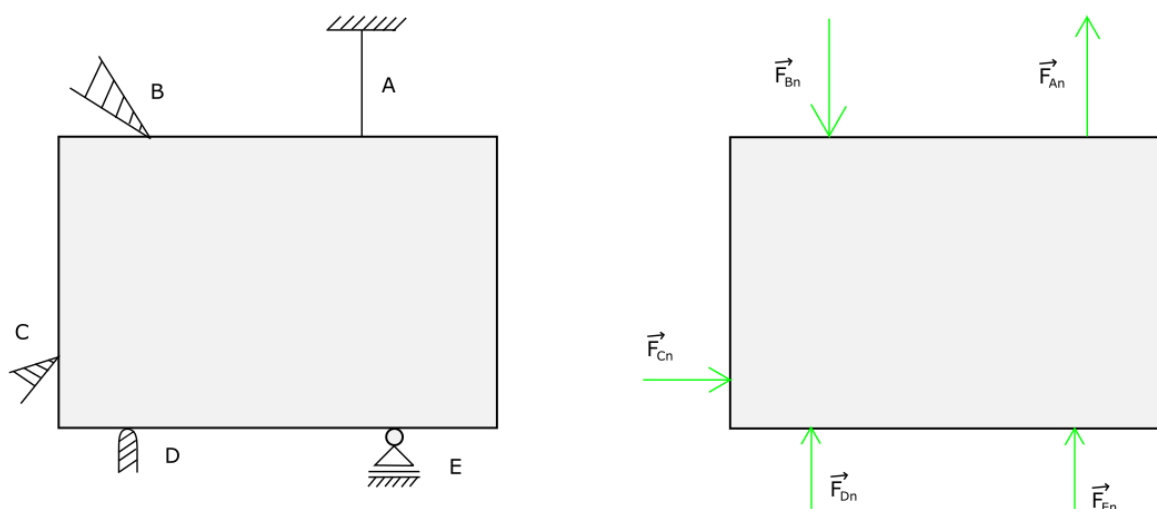
3. Vazby typu NNTN a jejich uvolnění

Vazba typu NNTN je styková vazba, jejíž styk je charakterizován nepropustností (N), neproměnností (N), tlakovostí (T) a neutrálností (N) [1]. Je to vazba s nejjednodušším modelem styku, jestliže jsou deformace, spojení těles, propustnost, hranice klidové stability a ztrátová energie ve styku u skutečného styku natolik malé, že jsou z pohledu řešeného problému nepodstatné.

V místě styku vazby a tělesa vznikají silová působení na základě akce a reakce, následně se vazby uvolňují pomocí silových a momentových účinků [1]. Každá vazba odebírá určitý počet stupňů volnosti. V této práci se řeší všechny příklady ve 2D, budeme se tudíž zabývat rovinnými vazbami a tělesa budou mít 3 stupně volnosti (posuvy v osách x , y a rotace v rovině xy kolem osy z).

3.1 Obecná vazba

Mezi vazbu obecnou řadíme podporu a lano. Obecnou vazbu uvolňujeme vždy jednou normálovou silou [4], podporu je vždy nutné uvolnit silou kolmou na danou hranu tělesa. Počet odebraných stupňů volnosti a podmínka funkčnosti vazeb jsou popsány pod obrázkem znázornění a uvolnění obecné vazby. Obrázek slouží pouze pro ilustraci různých typů obecných vazeb, neprošetřujeme statickou ekvivalenci, statickou rovnováhu ani statickou určitost.



obr. 4 Uvolnění různých druhů obecných vazeb

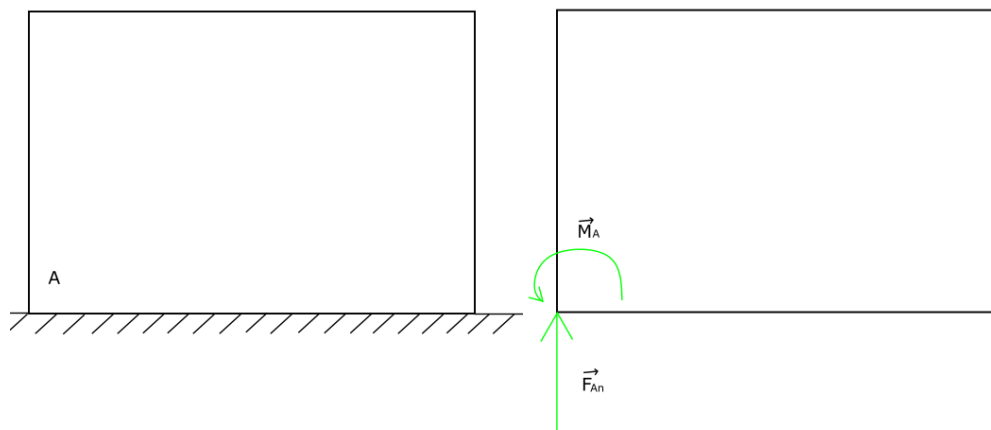
Počet odebraných stupňů volnosti $\xi = 1^\circ V$

Neznáme parametry $\{F_n\} = 1$

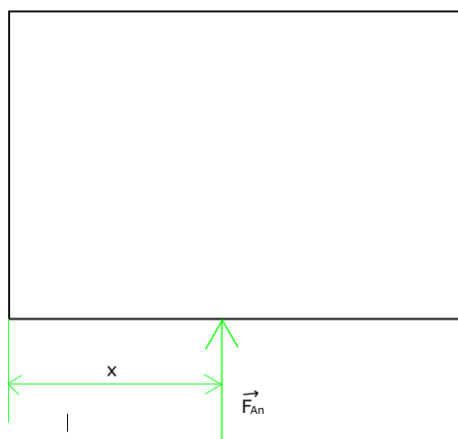
Podmínka funkčnosti vazeb $F_n > 0$

3.2 Posuvná vazba

Posuvnou vazbu rozlišíme od obecné tak, že stykový útvar těles není bodový, ale je to úsečka [4]. Uvolnění posuvné vazby je možné udělat dvěma způsoby. V obou případech uvolňujeme pomocí normálové síly opět kolmo na hranu tělesa, která je totožná se stykem. Nejsme schopni určit působíště této síly, takže je tam potřeba přidat buď moment, anebo příslušné rameno, na kterém bude závislé působíště normálové síly.



obr. 5 Posuvná vazba a uvolnění pomocí momentu, délka stykového útvaru je b



obr. 6 Posuvná vazba a uvolnění pomocí ramene

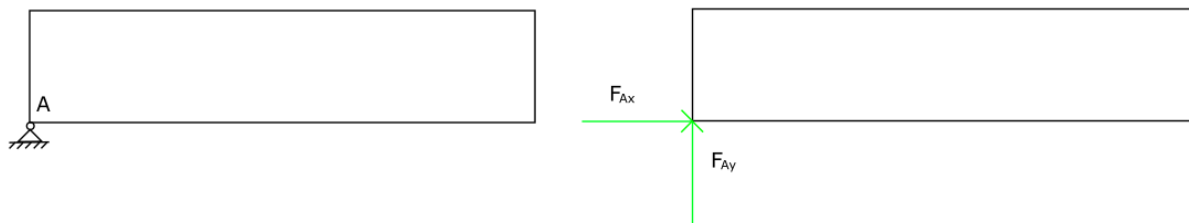
Počet odebraných stupňů volnosti $\xi = 2^\circ V$

Neznáme parametry $\{F_n, M_A\} = 2 / \{F_n, x\} = 2$

Podmínka funkčnosti vazeb $F_n > 0 \wedge M_A > 0 / F_n > 0 \wedge x \in \langle 0; b \rangle$

3.3 Rotační vazba

Rotační vazbou nazýváme typ spojení, který umožňuje tělesu rotovat. Zamezuje tělesu pohybovat se v obou směrech (vodorovný, svislý) a uvolňuje se pomocí dvou sil [4]. V rotační vazbě nemůže nikdy dojít k přerušení kontaktu mezi tělesem a vazbou, to znamená, že je vždy funkční. Rotační vazba je realizovaná často čepem nebo kloubem.



obr. 7 Rotační vazba a její uvolnění

Počet odebraných stupňů volnosti	$\xi = 2^{\circ V}$
Neznáme parametry	$\{F_{Ax}, F_{Ay}\} = 2$
Podmínka funkčnosti vazeb	Vždy funkční

4. Vazby typu NNTP a pasivní účinky

Vazba typu NNTP je styková vazba, jejíž styk je charakterizován nepropustností (N), neproměnností (N), tlakovostí (T), pasivností (P) [1]. Je to vazba s nejjednodušším modelem styku, jestliže deformace, spojení těles a propustnost jsou u skutečného styku nepodstatné, ale hranice klidové stability a ztrátová energie ve styku jsou podstatné. Tyto podstatné skutečnosti zohledňujeme při uvolnění vazeb ve smyslu pasivních účinků.

4.1 Podpora

Máme-li těleso vázané podporou, pak můžeme uvažovat různé pohybové stavy a to klid, smýkání nebo valení [4]. To, jaký pohybový stav nastane závisí na uložení těles a silovém působení na těleso. Pokud nebudou splněny podmínky funkčnosti podpory, tak může dojít ke ztrátě kontaktu tělesa s vazbou.

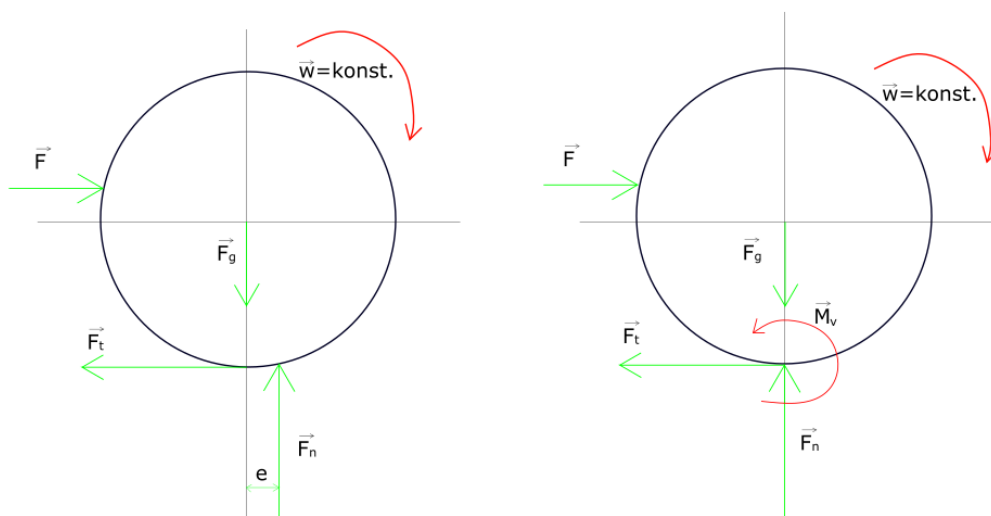
S podporou souvisejí dva pasivní odpory. Prvním je smykové tření, které vychází z Coulombova zákona [1]. Mechanismus smykového tření spočívá v tom, že mikroskopické nerovnosti, které se nacházejí na tělese zapadají do mikroskopických nerovností na podložce a zároveň dochází k deformaci obou ploch důsledkem vzájemného styku. Na základě toho musíme uvažovat při uvolnění tělesa třecí sílu, která působí proti směru pohybu a její velikost je závislá na normálové síle tělesa a součiniteli smykového tření.

$$F_T = f \cdot F_n$$

F_T	třecí síla	[N]
f	součinitel smykového tření	[-]
F_n	normálová síla	[N]

Hodnota součinitele smykového tření významně závisí na jakosti povrchu třecích ploch, materiálu třecích ploch, jakosti mazání a teplotě v místě styku [1].

Druhým pasivním odporem, který nastává při valení tělesa je valivý odpor. Při valení dochází k deformaci těles v místě styku [1]. Tyto deformace nám způsobí posunutí nositelky normálové síly o rameno valivého odporu proti pohybu tělesa v místě styku.



obr. 8 Ukázka pasivních účinků při valení

Při uvolnění tělesa, které se valí musíme kromě normálové síly uvažovat tečnou sílu a moment valivého odporu, které působí proti směru pohybu [1]. Pak platí vztah

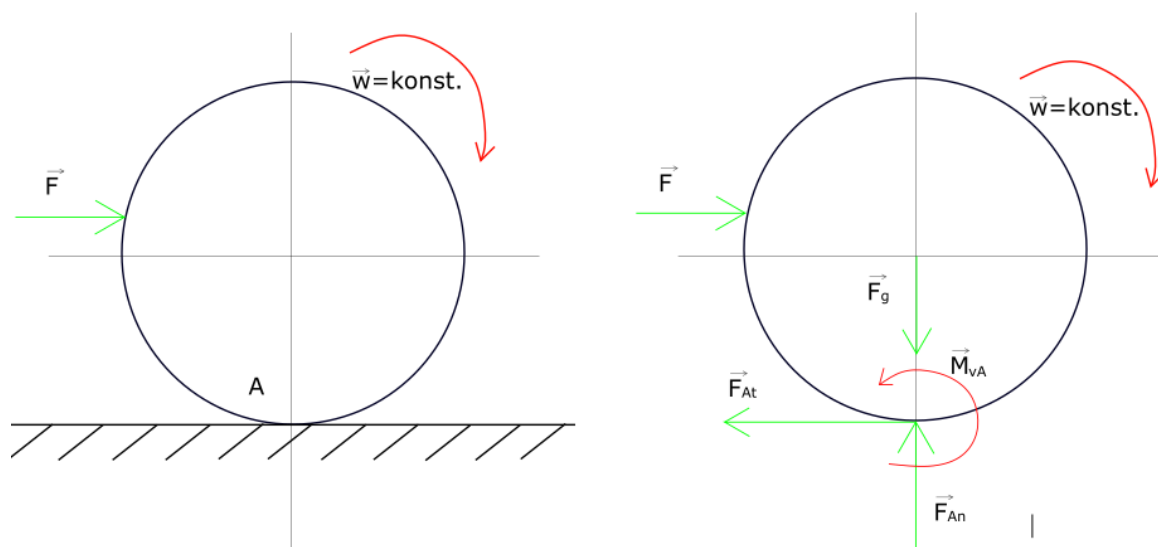
$$M_v = e \cdot F_n$$

M_v	moment valivého odporu	[Nm]
e	rameno valivého odporu	[m]
F_n	normálová síla	[N]

4.1.1 Valení

Pokud je z hlediska uložení tělesa možné valení, pak ho také předpokládáme, protože je pravděpodobnější, že nastane valení, než smýkání [1]. Po určení neznámých parametrů je nutné zkontrolovat podmínku pohybového stavu (valení), pokud nebude splněna, tak to znamená, že pohybový stav je špatně určený. Valení odebrává 2 stupně volnosti.

$$F_{At} < F_{AT} = f \cdot F_{An}$$

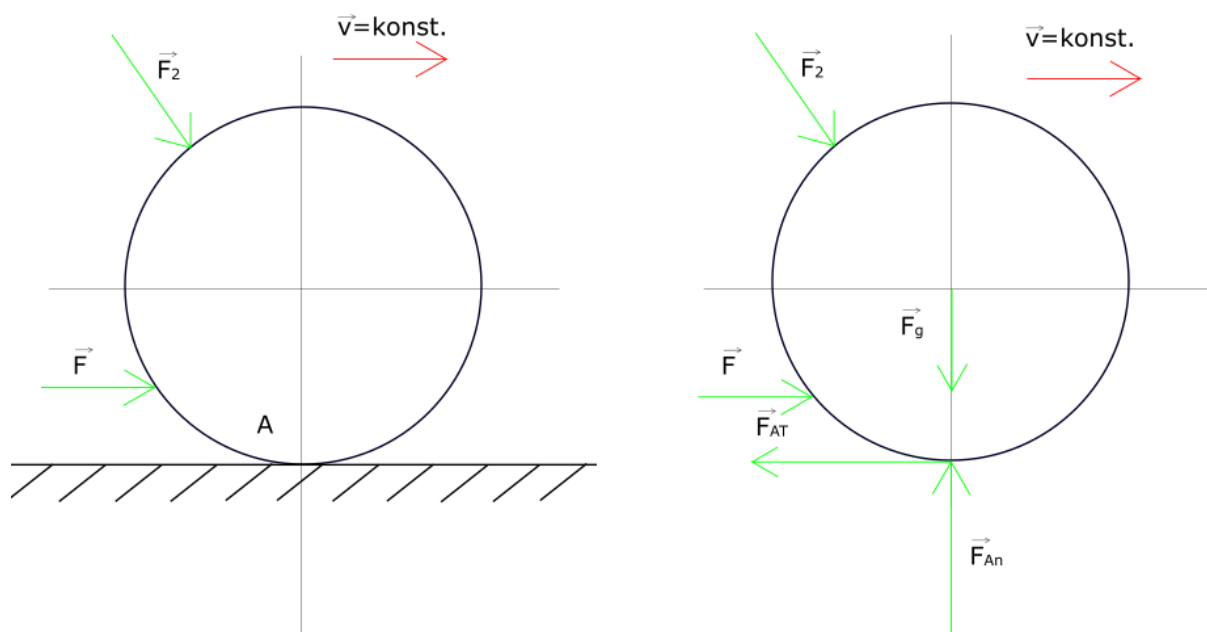


obr. 9 Uvolnění podpory za předpokladu valení

Počet odebraných stupňů volnosti	$\xi = 2^\circ V$
Počet neznámých parametrů	$\{F_{An}, F_{At}\} = 2$
Styková závislost	$M_{vA} = F_{An} \cdot e$
Podmínka pohybového stavu	$F_{At} < F_{AT} = f \cdot F_{An}$

4.1.2 Smýkání

Jestliže v podpoře nastává smýkání, pak vazba odebrává tělesu jeden stupeň volnosti [1]. U smýkání se nám vlivem deformací také posouvá nositelka normálové síly ve směru pohybu. Avšak rameno, o které je normálová síla vychýlena, dosahuje velice malých hodnot. Při řešení soustav těles toto rameno neovlivní výsledek, a tak jej na základě zjednodušení zanedbáme.



obr. 10 Uvolnění podpory za předpokladu smýkání

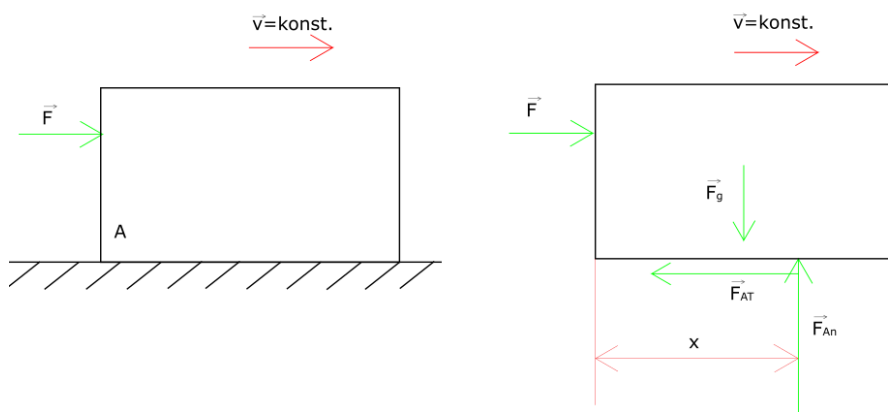
Počet odebraných stupňů volnosti $\xi = 1^{\circ}V$

Počet neznámých parametrů $\{F_{An}\} = 1$

Styková závislost $F_{AT} = f \cdot F_{An}$

4.2 Posuvná vazba

V případě jednostranné posuvné vazby můžeme z pohybového hlediska uvažovat klid, smýkání anebo může dojít k překlopení tělesa, kdy se vazba změní z posuvné na podporu (bodový kontakt) [4]. Může dojít i ke zrušení kontaktu. Funkční posuvná vazba odebrává 2 stupně volnosti.



obr. 11 Uvolnění posuvné vazby – smýkání, délka stykového útvaru je b

Počet odebraných stupňů volnosti	$\xi = 2^\circ V$
Počet neznámých parametrů	$\{F_{An}, x\} = 2$
Styková závislost	$F_{AT} = f \cdot F_{An}$
Podmínka pohybového stavu	$x < b$

Pokud budeme při uvolnění tělesa uvažovat klid, tak se nám změní třecí síla v tečnou a změní se i následující vztahy.

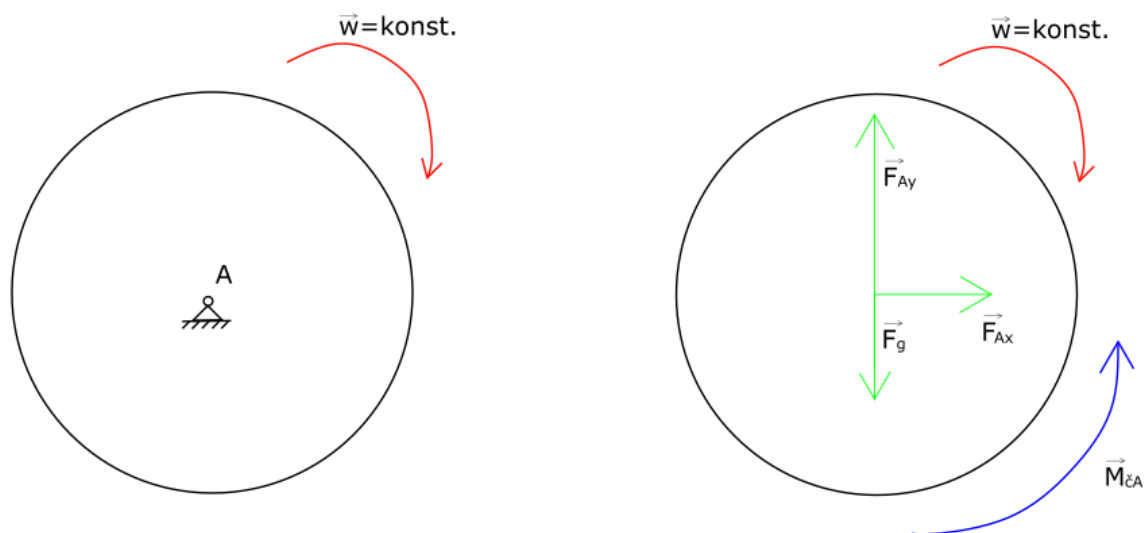
Počet odebraných stupňů volnosti	$\xi = 2^\circ V$
Počet neznámých parametrů	$\{F_{An}, F_{At}, x\} = 3$
Podmínky pohybového stavu	$F_{AT} < F \quad x < b$

4.3 Rotační vazba

U rotační vazby dochází za pohybu mezi tělesy ke smýkání ve válcové ploše. Vzniká tam pasivní účinek, který nazýváme čepové tření [1]. Při uvolnění rotační vazby typu NNTP zahrnujeme vliv čepového tření do momentu čepového tření M_{ξ} . Moment čepového tření působí vždy proti pohybu tělesa a jeho velikost se vypočítá pomocí vztahu. Následné uvolnění rotační vazby je zobrazeno na obr. 12.

$$M_{\xi} = r_{\xi} \cdot f_{\xi} \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

M_{ξ}	moment čepového tření	[Nm]
r_{ξ}	poloměr čepu	[m]
f_{ξ}	součinitel čepového tření	[-]
F_x, F_y	velikost stykových sil	[N]



obr. 12 Uvolnění rotační vazby

Počet odebraných stupňů volnosti $\xi = 2^\circ V$

Počet neznámých parametrů $\{F_{Ax}, F_{Ay}\} = 2$

Styková závislost $M_{\zeta A} = r_{\zeta} \cdot f_{\zeta} \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$

Při následném řešení podmínek statické rovnováhy numericky, musíme výše uvedený vztah pro výpočet momentu čepového tření převést do lineárního tvaru (všechny neznáme parametry musejí mít lineární charakter). K tomu využijeme přibližný lineární vztah podle Ponceoleta [6]. Tímto zjednodušením se dopouštíme chyby menší než 4 %, což je na dané rozlišovací úrovni v pořádku.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx F_x \cdot 0,4 F_y$$

Tento vztah platí, pokud je $F_x > F_y$, pokud nerovnost mezi velikostmi jednotlivých složek sil bude opačná, pak platí stejný vztah, jen se vymění číselné koeficienty [6]. Velikosti jednotlivých složek síly můžeme experimentálně odhadnout, popřípadě vypočítat ze soustavy těles použitím modelu NNTN.

5. Algoritmus řešení soustav těles s vazbami s pasivními účinky (NNTP)

5.1 Rozbor zadání

Nejprve musíme zkontrolovat zadané veličiny. Je potřeba, aby byly veškeré vazby, geometrické a silové prvky zadány tak, aby soustava byla řešitelná (zadání musí být úplné a správné) [1]. Následně rozhodneme, zda se jedná o 2D nebo 3D úlohu. Nakonec označíme jednotlivá tělesa čísly a jednotlivé vazby písmeny.

5.2 Klasifikace uložení tělesa

5.2.1 Kinematický rozbor

Pomocí kinematického rozboru ze vztahu níže uvedeného určíme pohyblivost soustavy [1].

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta \right)$$

i	počet stupňů volnosti soustavy
$(n - 1)$	počet těles bez základního tělesa
i_v	počet stupňů volnosti volného tělesa
$\sum \xi$	počet stupňů volnosti odebraných vazbami
η	počet omezených deformačních parametrů

Vázané těleso se může z hlediska pohybu jako celku a deformace nacházet v těchto základních stavech uložení [1].

Normální stavy uložení

$i > 0, \eta = 0$	těleso je uložené pohyblivě bez omezení deformačních parametrů
$i = 0, \eta = 0$	těleso je uložené nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů
$i = 0, \eta > 0$	těleso je uložené nepohyblivě s η omezenými deformačními parametry

Výjimkové stavy uložení

$i > 0, \eta > 0$	těleso je uložené pohyblivě s η omezenými deformačními parametry
-------------------	---

V řešeních příkladech v této práci a obecně při řešení soustav těles s pasivními účinky musíme docílit toho, aby se soustava pohybovala.

5.2.2 Určení charakteru relativního pohybu

U všech těles je nutné určit směr pohybu, na základě toho budeme dále posuzovat při uvolnění směry působení pasivních odporů. Ve směru geometricky možného pohybu vždy uvažujeme konstantní rychlosti [1].

5.3 Uvolnění

Dalším krokem je uvolnění jednotlivých těles. Při uvolnění platí princip akce a reakce [1]. Jednotlivé vazby uvolňujeme podle výše zmíněných pravidel. Při uvolnění je nutné znázornit směr pohybu těles. Pasivní odpory působí vždy proti směru pohybu.

5.4 Statický rozbor

Dále je nutné prověřit statickou určitost tělesa. Pro každý typ silové soustavy určíme počet použitelných podmínek rovnováhy [1].

Pro obecné těleso v rovině platí $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$

ν počet použitelných podmínek rovnováhy

ν_F počet silových použitelných podmínek rovnováhy

ν_M počet momentových použitelných podmínek rovnováhy

Poté určíme soustavy úplně zadaných a neúplně zadaných silových prvků a množinu neznámých nezávislých parametrů. Neznáme nezávislé parametry dělíme na silové, momentové a polohové [1].

$$\mu = \mu_F + \mu_M + \mu_r$$

μ celkový počet nezávislých neznámých parametrů

μ_F počet silových nezávislých neznámých parametrů

μ_M počet momentových nezávislých neznámých parametrů

μ_r počet polohových nezávislých neznámých parametrů

Nakonec je důležité ověřit nutné podmínky statické určitosti.

$$\mu = \nu \wedge \mu_M + \mu_r \leq \nu_M$$

Pokud nejsou splněny podmínky statické určitosti, tak úlohu nejsme schopni, až na výjimečné případy, řešit.

5.5 Sestavení podmínek statické rovnováhy doplněné o stykové závislosti

Na základě typu silové soustavy má každé těleso určitý počet použitelných podmínek rovnováhy. Obecná silová soustava v rovině má tři použitelné podmínky rovnováhy, které jsou závislé na zvoleném souřadném systému.

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_z = 0$$

$\sum F_x = 0$ suma všech sil působících v ose x je rovna nule

$\sum F_y = 0$ suma všech sil působících v ose y je rovna nule

$\sum M_z = 0$ suma všech momentů v libovolném bodě působících kolem osy z je rovna nule

Pasivní účinky vyjádříme pomocí stykových závislostí výše uvedených.

5.6 Řešení soustavy rovnic

5.6.1 Analytické řešení

Pokud se jedná o soustavu těles, kde se v podmínkách statické rovnováhy pro každé těleso vyskytuje právě stejný počet neznámých parametrů jako podmínek statické rovnováhy, tak je možné řešit úlohu analyticky. Pokud má soustava ovšem více jednotlivých těles (tzn. i více podmínek statické rovnováhy), tak je analytické řešení časově velmi náročné.

5.6.2 Numerické řešení

Pokud nejsme schopni vyřešit soustavu analyticky, tak použijeme numerické řešení, pomocí následující maticové rovnice. Soustava je řešena v programu Octave a podmínkou vyřešení soustavy je lineárnost neznámých parametrů [5].

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{A}$ matice soustavy

$\mathbf{x}$ sloupcový vektor neznámých parametrů

$\mathbf{b}$ sloupcový vektor známých parametrů

5.7 Zhodnocení výsledků řešení

Po vyřešení podmínek statické rovnováhy a určení neznámých parametrů musíme ověřit funkčnost vazeb, resp. podmínky pohybového stavu. Tyto podmínky jsou uvedené v kapitolách 3 a 4. Dále v závislosti na zadání vyhodnocujeme číselné výsledky daných neznámých parametrů.

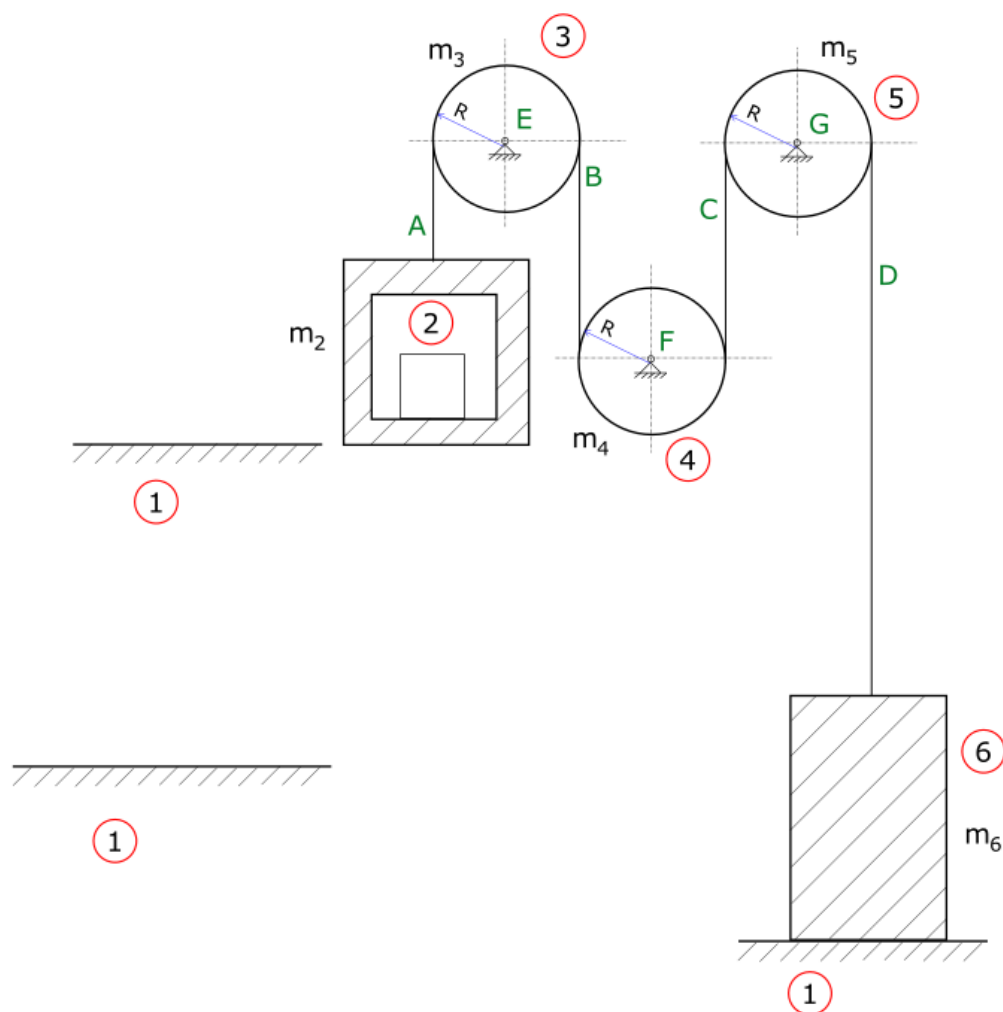
6. Příklad 1 – jednoduchý výtah

V první úloze je úkolem vyřešit ze statického hlediska jednoduchý kladkový výtah. Tento výtah je koncipován tak, že slouží k přepravě nákladu z vyššího bodu do nižšího, aby člověku ulehčil práci vykonanou při přenášení nákladu. Soustava se skládá z kabiny výtahu, tří kladek a pomocného závaží, díky kterému můžeme uvažovat malou a konstantní rychlost a tím zanedbat vliv setrvačných sil, a proto můžeme použít výpočtový model NNTP. Všechny tělesa jsou spojeny lany.

6.1 Rozbor úlohy

Soustava je řešena jako rovinná úloha. Cílem řešení tohoto příkladu je určit hmotnost závaží (těleso 6, $m_6 = ?$) při pohybu kabiny výtahu směrem dolů, tak aby soustava byla ve statické rovnováze a pohybovala se malou nenulovou a konstantní rychlostí. Dále budeme pozorovat, jak se mění síly v lanech účinkem pasivních odporů. Uvažujeme tíhové pole Země.

Na obrázku (obr. 13) vidíme zvolenou geometrii soustavy, jednotlivá očíslovaná tělesa, označené vazby a zvolené základní parametry, které jsou nutné ke kompletnímu výpočtu.



obr. 13 Řešená soustava těles – příklad 1

Všechny tělesa uvažujeme, že jsou vyrobené z oceli. Hmotnost všech lan zanedbáváme. Součinitel čepového tření závisí na druhu stýkajících se materiálů. Pro kombinaci ocel-ocel jeho hodnota nabývá $f_{\zeta} = 0,05$.

Zadané parametry

$$\begin{aligned} m_2 &= 150 \text{ kg} & R &= 0,15 \text{ m} \\ m_3 &= 16 \text{ kg} & r_{\zeta E} &= r_{\zeta F} = r_{\zeta G} = r_{\zeta} = 0,02 \text{ m} \\ m_4 &= 16 \text{ kg} & f_{\zeta E} &= f_{\zeta F} = f_{\zeta G} = f_{\zeta} = 0,05 \\ m_5 &= 16 \text{ kg} \end{aligned}$$

6.2 Kinematický rozbor

Vzhledem k tomu, že tělesa 2 a 6 budou konat pouze přímočarý pohyb v jedné ose, tak předpokládáme, že každé z těchto těles má pouze 1 stupeň volnosti. Ostatní tělesa mají 3 stupně volnosti.

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta \right)$$

A, B, C, D – lana, každé odebírá 1 stupeň volnosti $\xi = 1^\circ V$

E, F, G – rotační vazby, každá odebírá 2 stupně volnosti $\xi = 2^\circ V$

$$i = (6 - 1) \cdot 3 - 4 - (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 - 0)$$

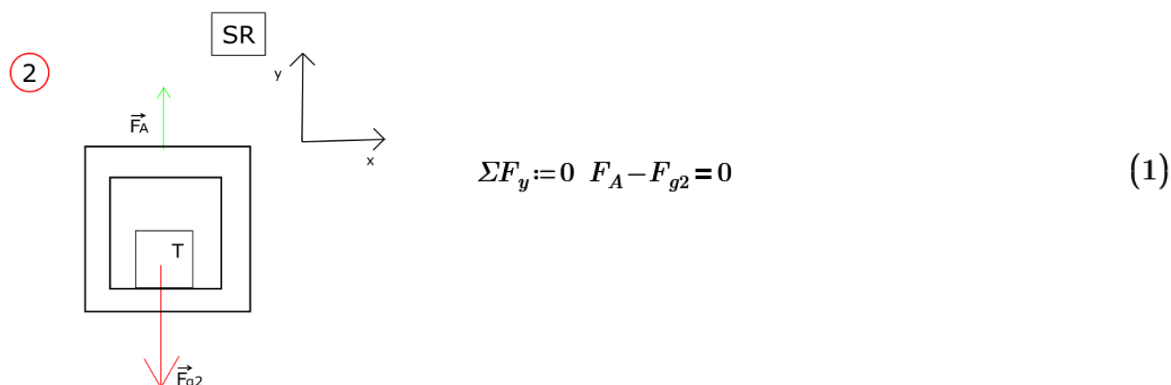
$$i = 1^\circ V, \eta = 0$$

Výsledek kinematického rozboru nám říká, že těleso je uložené pohyblivě bez omezení deformačních parametrů.

6.3 Uvolnění těles

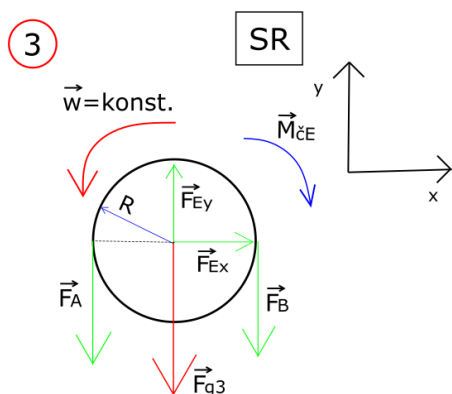
Dalším krokem je uvolnění těles se zapsáním příslušných soustav rovnic, které se v dalších krocích budou řešit.

Uvolnění tělesa 2



obr. 14 Uvolnění kabiny výtahu se závažím

Uvolnění tělesa 3



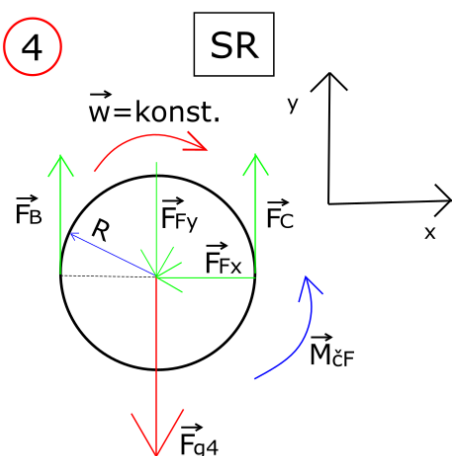
obr. 15 Uvolnění první kladky

$$\Sigma F_y := 0 \quad -F_A - F_B - F_{g3} + F_{Ey} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_{zX} := 0 \quad -M_{\check{c}E} - F_B \cdot R + F_A \cdot R = 0 \quad (3)$$

$$M_{\check{c}E} := r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} \cdot F_{Ey}$$

Uvolnění tělesa 4



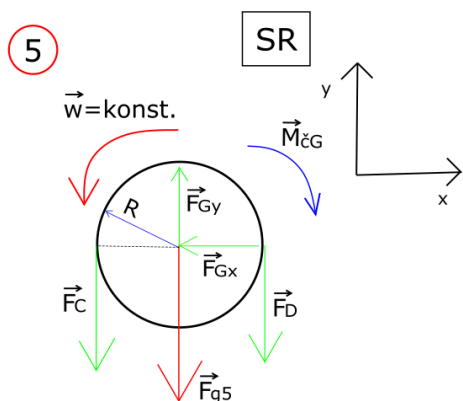
obr. 16 Uvolnění druhé kladky

$$\Sigma F_y := 0 \quad F_c + F_B - F_{g4} - F_{Fy} = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_{zX} := 0 \quad M_{\check{c}F} - F_B \cdot R + F_C \cdot R = 0 \quad (5)$$

$$M_{\check{c}F} := r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} \cdot F_{Fy}$$

Uvolnění tělesa 5



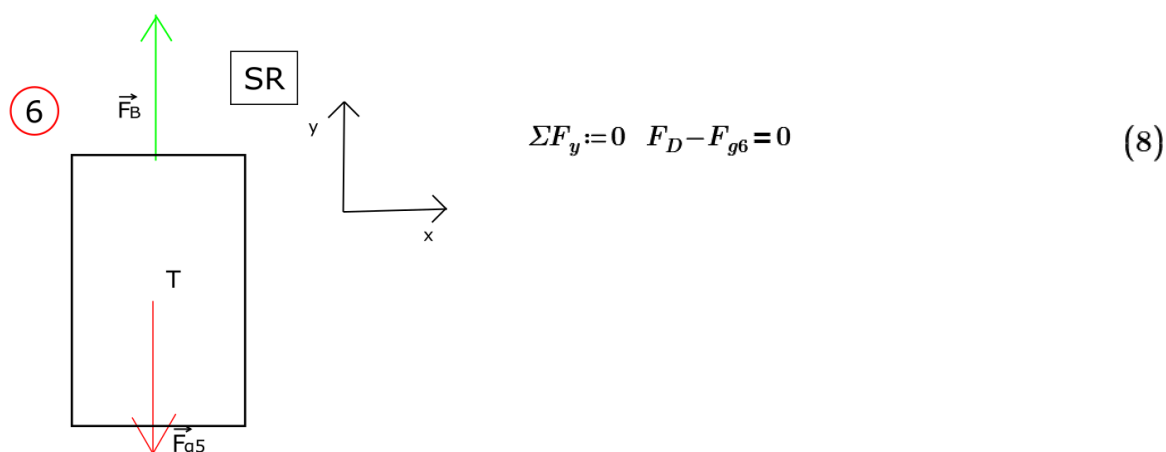
obr. 17 Uvolnění třetí kladky

$$\Sigma F_y := 0 \quad -F_C - F_D - F_{g5} + F_{Gy} = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma M_{zX} := 0 \quad -M_{\check{c}G} - F_D \cdot R + F_C \cdot R = 0 \quad (7)$$

$$M_{\check{c}G} := r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} \cdot F_{Gy}$$

Uvolnění tělesa 6



obr. 18 Uvolnění závaží

U kladek píšeme pouze 2 použitelné podmínky statické rovnováhy, protože x-ové složky sil v rotačních vazbách budou nulové.

6.4 Statický rozbor

Nejdříve je nutné zapsat množinu neznámých parametrů a následně ověřit statickou určitost.

$$NP = \{F_A; F_B; F_C; F_D; F_{Ey}; F_{Fy}; F_{Gy}; F_{g6};\} = \mu = 8$$

$$\nu = \nu_F + \nu_M + \nu_r = 5 + 3 + 0 = 8$$

$$\nu = \mu \wedge \nu_M \geq \mu_M + \mu_r$$

$$8 = 8 \wedge 3 \geq 0$$

Obě dvě podmínky jsou splněny, to znamená, že soustava je staticky určitá.

6.5 Řešení soustavy rovnic

Řešení soustav rovnic proběhlo u tohoto příkladu analyticky. Postupně je potřeba si ze všech rovnic vyjádřit neznámé parametry a následně dosazováním do ostatních rovnic získáme potřebné výsledky.

Na obr. 19 můžeme vidět výsledné vztahy pro neznámé parametry.

$$\begin{aligned}
F_A &:= m_2 \cdot g = (1.472 \cdot 10^3) \text{ N} & F_B &:= \frac{r_{\tilde{c}} \cdot f_{\tilde{c}} \cdot (F_A + m_3 \cdot g) - F_A \cdot R}{-r_{\tilde{c}} \cdot f_{\tilde{c}} - R} = (1.451 \cdot 10^3) \text{ N} \\
F_{Ey} &:= F_A + F_B + m_3 \cdot g = (3.079 \cdot 10^3) \text{ N} & F_{Fy} &:= \frac{R \cdot (2 \cdot F_B - m_4 \cdot g)}{r_{\tilde{c}} \cdot f_{\tilde{c}} + R} = (2.727 \cdot 10^3) \text{ N} \\
F_C &:= m_4 \cdot g + F_{Fy} - F_B = (1.433 \cdot 10^3) \text{ N} & F_{Gy} &:= \frac{R \cdot (2 \cdot F_C + m_5 \cdot g)}{r_{\tilde{c}} \cdot f_{\tilde{c}} + R} = (3.003 \cdot 10^3) \text{ N} \\
F_D &:= F_{Gy} - F_C - m_5 \cdot g = (1.413 \cdot 10^3) \text{ N} & m_6 &:= \frac{F_D}{g} = 144.014 \text{ kg}
\end{aligned}$$

obr. 19 Řešení soustavy rovnic analyticky

6.6 Analýza výsledků

V tabulce níže (tabulka 1) jsou uvedené jednotlivé neznámé parametry a jejich vypočítané hodnoty. Dále jsou prošetřeny podmínky funkčnosti vazeb, a to konkrétně v lanech.

Tabulka 1 Výsledné neznámé parametry (NP) a ověření funkčnosti vazeb

NP	Hodnota	Podmínka funkčnosti	Ověření
F_A	1472 N	$F_A > 0$	$1472 > 0$
F_B	1451 N	$F_B > 0$	$1451 > 0$
F_C	1433 N	$F_C > 0$	$1433 > 0$
F_D	1413 N	$F_D > 0$	$1413 > 0$
F_{Ey}	3079 N	—	—
F_{Fy}	2727 N	—	—
F_{Gy}	3003 N	—	—
F_{g6}	1413 N	—	—

$$m_6 = \frac{F_{g6}}{g} = 144 \text{ kg}$$

Úkolem bylo zjistit takovou hmotnost m_6 , aby kabina výtahu sjížděla dolů konstantní a malou rychlostí. Z výsledků vidíme, že hmotnost závaží je přibližně o 10 % menší než hmotnost kabiny s převáženým závažím. Tento rozdíl je způsobený vlivem pasivních účinků, které jsou většinou považovány za negativní a nechtěné ovlivňování pohybu. V tomto případě ovšem pomáhají s brzděním kabiny výtahu.

Pasivní účinky mají také vliv na síly v lanech. Podle výsledků můžeme usoudit, že ztráty tažné síly v laně, jsou v každé kladce přibližně 1,5 %.

7. Příklad 2 – soustava s vozíkem

Ve druhém příkladě je řešena soustava vozíku na nakloněné rovině, který pomocí lana vyváží anebo sváží náklad. Lano je navíjeno na navíjecí buben, který je ve styku s pákovou brzdou. Celou soustavu doplňuje závaží, které má pomocný brzdný účinek, když vozík jede dolů a naopak, když se vozík pohybuje směrem nahoru, tak ho závaží svou hmotností pomáhá vytahovat.

7.1 Rozbor úlohy

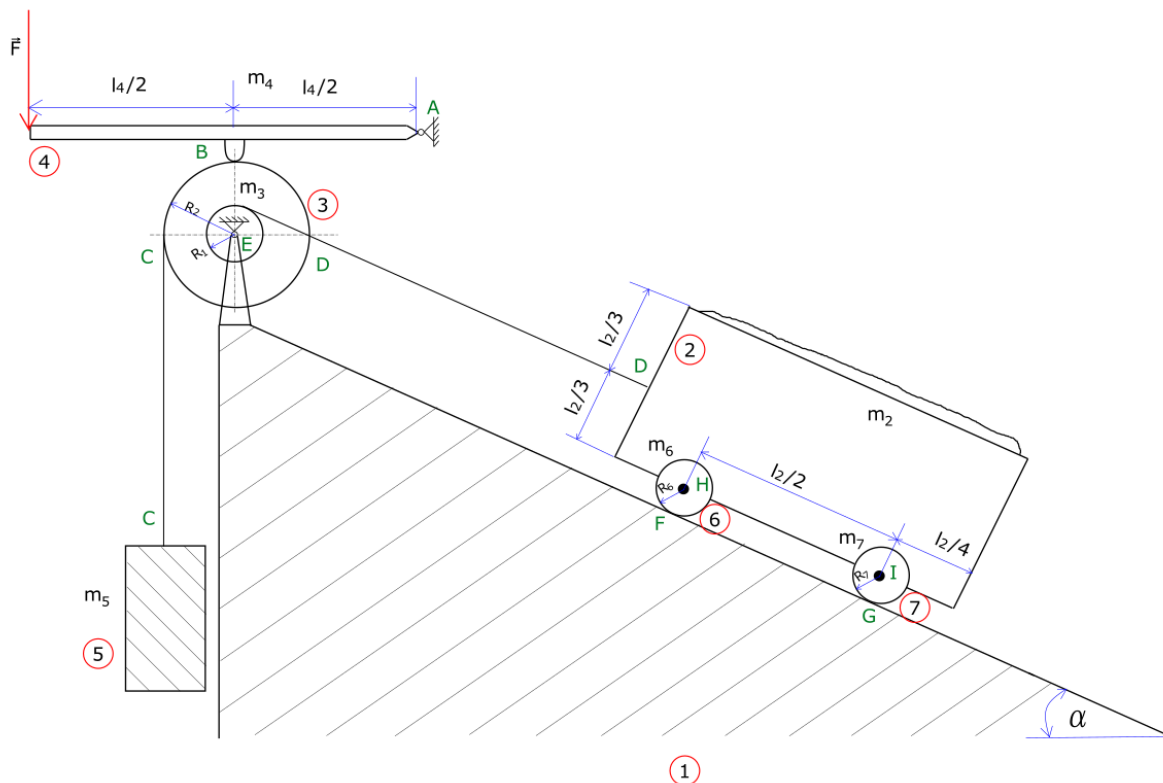
Soustava těles je řešena, jako rovinná úloha. Řešení je rozděleno na několik částí. V této práci se budeme zabývat dvěma pohybovými stavy. Nejprve se budeme zabývat stavem, kdy vozík sváží náklad dolů a poté, když bude vytahován prázdný zpět nahoru. Při řešení uvažujeme tíhové pole Země.

Když vozík pojede dolů naložený, tak bude úkolem určit hmotnost závaží (m_5), tak aby brzdná síla (F) měla nulovou velikost a rychlosti všech těles byly konstantní. Jakmile se bude vozík vracet směrem nahoru prázdný, tak bude nutné přidat do řešení brzdnu sílu, která zabrání síle od závaží, aby nezačala vytahovat vozík se zrychlením. Úkolem bude určit velikost této síly, k výpočtu je využit model NNTP.

V příloze na externím datovém nosiči je dodatečné numerické řešení varianty, kdy je vozík táhnut nahoru, vezoucí náklad a spouštěn dolů bez nákladu, přičemž při pohybu vozíku nahoru je úkolem určit hmotnost závaží (m_5), tak aby brzdná síla byla nulová a vozík se pohyboval bez zrychlení a při pohybu dolů je potřeba určit za stejných předpokladů velikost brzdné síly (F).

V další kapitole umístíme závaží na nakloněnou rovinu. Úhel nakloněné roviny budeme měnit a budeme sledovat, jak se změní výsledné silové účinky ve vazbách. V této části budeme předpokládat pohybový stav, kdy vozík jede naložený dolů.

Na obrázku (obr. 20) je znázorněna geometrie soustavy těles, jsou v ní pospány jednotlivá tělesa a vazby, dále jsou zobrazeny parametry, které potřebujeme k výpočtu (hmotnost vozíku m_2 je proměnná, závisí na tom, jestli je vozík naložen, nebo je prázdný).



obr. 20 Geometrie soustavy těles s vozíkem

Všechny tělesa jsou vyrobeny z oceli. To znamená, že ve všech vazbách, kde uvažujeme vliv pasivních účinků čepového tření, resp. valivého odporu, nabývají součinitelé tření tyto hodnoty: $f_{\check{c}} = 0,05$, resp. $f = 0,1$. Hmotnost obou lan zanedbáváme.

Zadané parametry (pohyb dolů, vozík naložený)

$m_2 = 210 \text{ kg}$ – hmotnost plného vozíku	$l_2 = 0,8 \text{ m}$	$f_{\check{c}h} = f_{\check{c}I} = f_{\check{c}E} = f_{\check{c}} = 0,05$
$m_3 = 24 \text{ kg}$	$l_4 = 1 \text{ m}$	$e_F = e_G = e = 0,0004 \text{ m}$
$m_4 = 4 \text{ kg}$	$R_1 = 0,1 \text{ m}$	$f_B = f_F = f_G = f = 0,1$
$m_6 = m_7 = 8 \text{ kg}$	$R_2 = 0,3 \text{ m}$	$r_H = r_I = 0,01 \text{ m}$
$R_6 = R_7 = 0,15 \text{ m}$	$\alpha = 20^\circ$	$r_E = 0,015 \text{ m}$

7.2 Kinematický rozbor

Vzhledem k tomu, že těleso 5 bude konat pouze přímočarý pohyb v jedné ose, tak předpokládáme, že má pouze 1 stupeň volnosti. Ostatní tělesa mají 3 stupně volnosti.

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta \right)$$

C, D lano $\xi = 1^\circ V$

A, E, H, I rotační vazba $\xi = 2^\circ V$

B podpora, smýkání $\xi = 1^\circ V$

F, G podpora, valení $\xi = 2^\circ V$

$$i = (7 - 1) \cdot 3 - 2 - (1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 - 0)$$

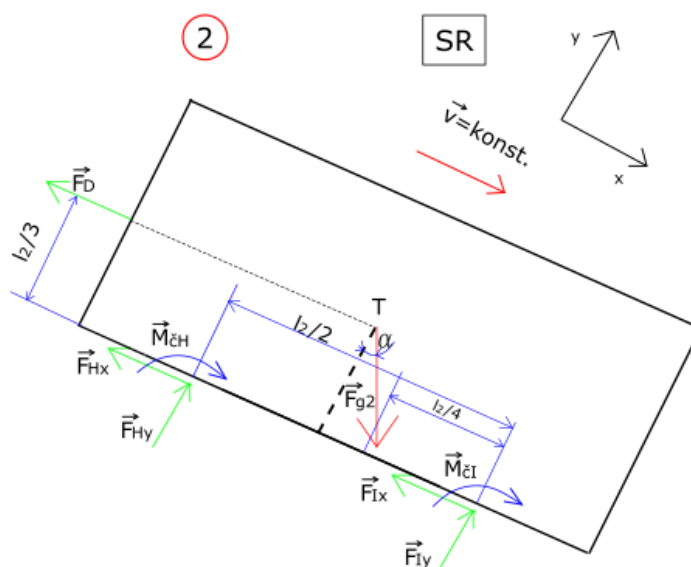
$$i = 1^\circ V$$

Výsledek kinematického rozboru nám říká, že těleso je uložené pohyblivě bez omezení deformačních parametrů.

7.3 Uvolnění

Dalším krokem je uvolnění těles se zapsáním příslušných soustav rovnic, které se v dalších krocích budou řešit.

Těleso 2



obr. 21 Uvolnění tělesa 2

$$\Sigma F_x := 0 \quad -F_D - F_{Hx} - F_{Ix} + F_{g2} \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (9)$$

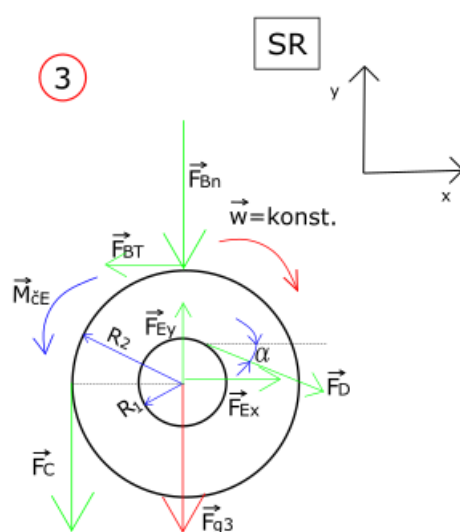
$$\Sigma F_y := 0 \quad F_{Hy} + F_{Iy} - F_{g2} \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad (10)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad -M_{\check{c}H} - M_{\check{c}I} + F_{Iy} \cdot \frac{l_2}{4} - F_{Ix} \cdot \frac{l_2}{3} - F_{Hy} \cdot \frac{l_2}{4} - F_{Hx} \cdot \frac{l_2}{3} = 0 \quad (11)$$

$$M_{\check{c}H} := r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} \cdot (0.4 \cdot F_{Hx} + F_{Hy})$$

$$M_{\check{c}I} := r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} \cdot (0.4 \cdot F_{Ix} + F_{Iy})$$

Těleso 3



obr. 22 Uvolnění tělesa 3

$$\Sigma F_x := 0 \quad -F_{BT} + F_{Ex} + F_D \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad (12)$$

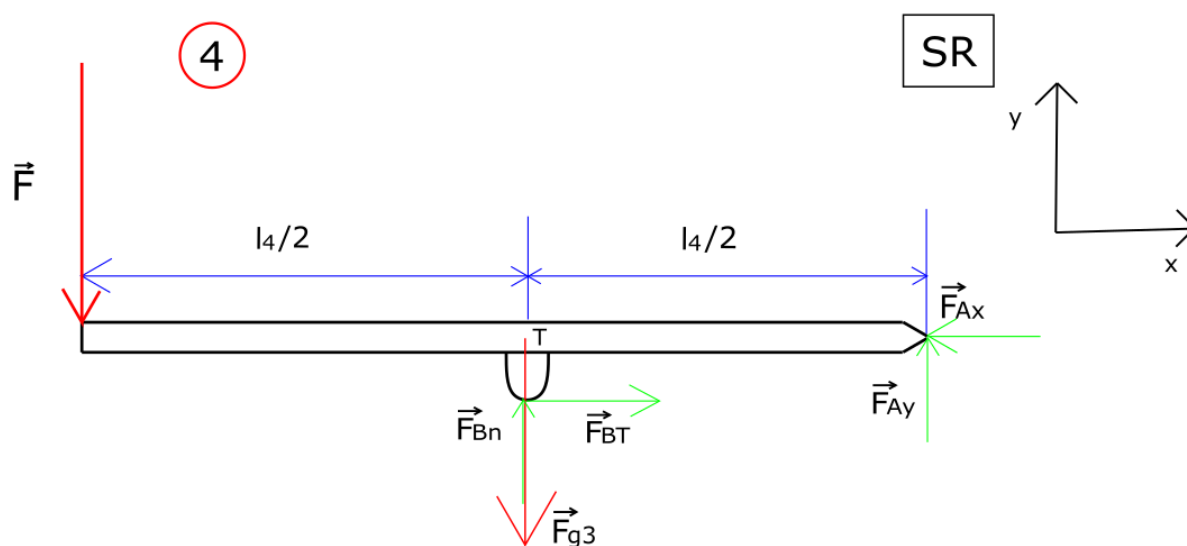
$$\Sigma F_y := 0 \quad -F_{Bn} - F_C - F_{g3} + F_{Ey} - F_D \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (13)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad M_{\check{c}E} + F_c \cdot R_2 + F_{BT} \cdot R_2 - F_D \cdot R_1 = 0 \quad (14)$$

$$M_{\check{c}E} := r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} \cdot (0.4 \cdot F_{Ex} + F_{Ey})$$

$$F_{BT} := f \cdot F_{Bn}$$

Těleso 4



obr. 23 Uvolnění tělesa 4 (velikost síly F je nulová)

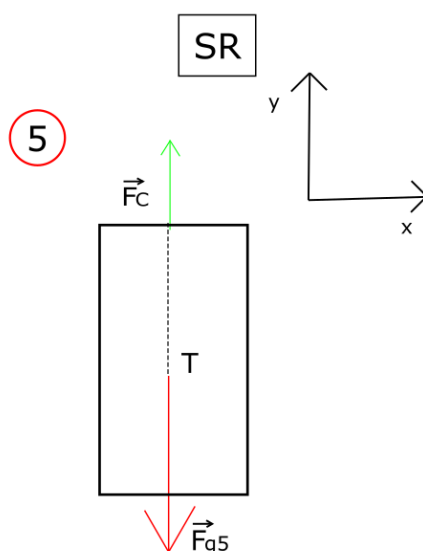
$$\Sigma F_x := 0 \quad F_{BT} - F_{Ax} = 0 \quad (15)$$

$$\Sigma F_y := 0 \quad -F - F_{g4} + F_{Bn} + F_{Ay} = 0 \quad (16)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad F_{Ay} \cdot \frac{l_4}{2} + F_{Ax} \cdot \frac{l_4}{40} = 0 \quad (17)$$

$$F_{BT} := f \cdot F_{Bn}$$

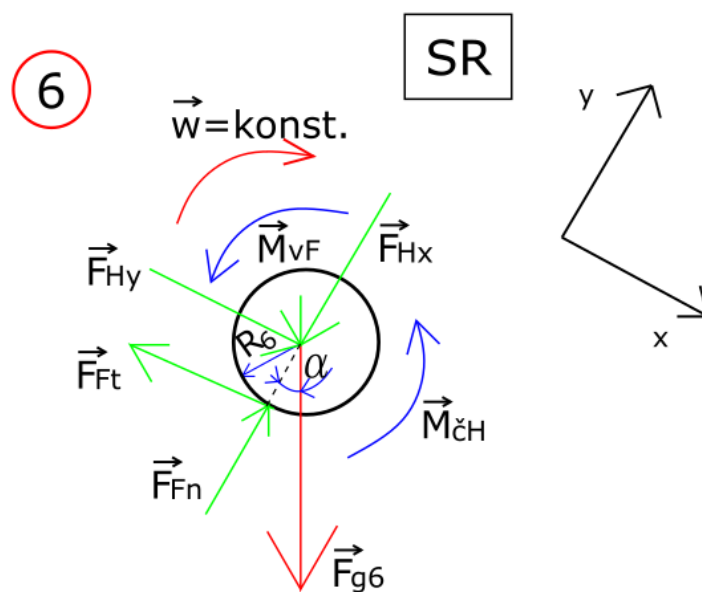
Těleso 5



obr. 24 Uvolnění tělesa 5

$$\Sigma F_y := 0 \quad F_c - F_{g5} = 0 \quad (18)$$

Těleso 6



obr. 25 Uvolnění tělesa 6

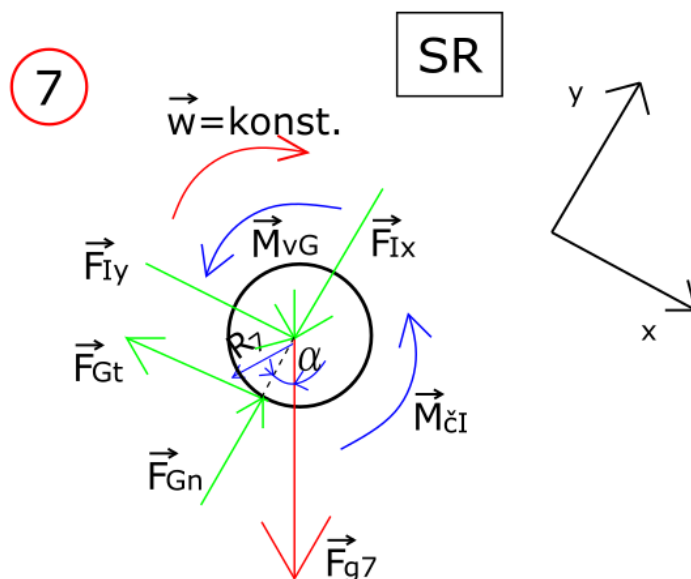
$$\Sigma F_x := 0 \quad -F_{Ft} + F_{Hx} + F_{g6} \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (19)$$

$$\Sigma F_y := 0 \quad F_{Fn} - F_{Hy} - F_{g6} \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad (20)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad M_{VF} + M_{cH} - F_{Ft} \cdot R_3 = 0 \quad (21)$$

$$M_{VF} := e \cdot F_{Fn}$$

$$M_{cH} := r_{\dot{c}} \cdot f_{\dot{c}} \cdot (0.4 \cdot F_{Hx} + F_{Hy})$$



obr. 26 Uvolnění tělesa 7

$$\Sigma F_x := 0 \quad -F_{Gt} + F_{Ix} + F_{g7} \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (22)$$

$$\Sigma F_y := 0 \quad F_{Gn} - F_{Iy} - F_{g7} \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad (23)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad M_{VG} + M_{cI} - F_{Gt} \cdot R_3 = 0 \quad (24)$$

$$M_{VF} := e \cdot F_{Fn}$$

$$M_{cI} := r_c \cdot f_c \cdot (0.4 \cdot F_{Ix} + F_{Iy})$$

Při uvolnění prázdného vozíku, který se bude pohybovat směrem nahoru, budeme uvažovat ve všech tělesech opačné směry pohybu. Všechny pasivní účinky budou mít opačnou orientaci, a to se v rovnicích statické rovnováhy projeví opačným znaménkem při zapisování všech pasivních účinků.

7.4 Statický rozbor

Nejdříve je nutné zapsat množinu neznámých parametrů a následně ověřit statickou určitost.

$$NP = \{F_{Ax}; F_{Ay}; F_{Bn}; F_C; F_D; F_{Ex}; F_{Ey}; F_{Hx}; F_{Hy}; F_{Ix}; F_{Iy}; F_{Gn}; F_{Gt}; F_{Fn}; F_{Ft}; F_{g5};\} = \mu = 16$$

$$\nu = \nu_F + \nu_M + \nu_r = 11 + 5 + 0 = 16$$

$$\nu = \mu \wedge \nu_M \geq \mu_M + \mu_r$$

$$16 = 16 \wedge 5 \geq 0$$

Obě dvě podmínky jsou splněny, to znamená, že soustava je staticky určitá.

7.5 Numerické řešení soustavy rovnic

Z podmínek statických rovnic můžeme zapsat soustavu 16 rovnic o 16 neznámých. Analyticky by vyřešení stálo spoustu času, a tak je soustava vyřešena numericky pomocí programu Octave. Přílohy obsahují dané matice pro výpočet neznámých parametrů.

Název souborů pro výpočet sváženého naloženého vozíku

00_dolu_nalozeny_volne_zavazi

Název souborů pro výpočet vytahování prázdného vozíku

00_nahoru_prazdny_volne_zavazi

Dále je zde připojeno i řešení opačné varianty základního zadání, kdy vozík vytahujeme plně naložený a spouštíme ho dolů prázdný.

Název souborů pro výpočet vytahování naloženého vozíku

01_nahoru_nalozeny_volne_zavazi

Název souborů pro výpočet sváženého prázdného vozíku

01_dolu_prazdny_volne_zavazi

7.6 Analýza výsledků

V tabulce (Tabulka 2) jsou uvedené vypočítané neznáme parametry při pohybu naloženého vozíku dolů.

Tabulka 2: Hodnoty neznámých parametru, při pohybu naloženého vozíku dolů

NP	Hodnota	NP	Hodnota
F_{Ax}	3,9 N	F_{Hy}	993,4 N
F_{Ay}	-0,2 N	F_{Ix}	-21 N
F_{Bn}	39,4 N	F_{Iy}	942,5 N
F_C	243,6 N	F_{Gn}	1016,3 N
F_D	746,3 N	F_{Gt}	5,8 N
F_{Ex}	-697,4 N	F_{Fn}	1067,1 N
F_{Ey}	773,3 N	F_{Ft}	6,1 N
F_{Hx}	-20,7 N	F_{g5}	243,6 N

Hmotnost závaží se následně vypočítá za vztahu $m_5 = \frac{F_{g5}}{g} = 24,83 \text{ kg}$

V tabulce (Tabulka 3) jsou uvedené vypočítané neznámé parametry při pohybu prázdného vozíku nahoru. Hmotnost prázdného vozíku je $m_2 = 65 \text{ kg}$. Hmotnost závaží $m_5 = 24,83 \text{ kg}$.

Tabulka 3 Hodnoty neznámých parametru, při pohybu prázdného vozíku nahoru

NP	Hodnota	NP	Hodnota
F_{Ax}	-147 N	F_{Hy}	338,7 N
F_{Ay}	-711,6 N	F_{Ix}	-28,6 N
F_{Bn}	1469 N	F_{Iy}	260,5 N
F_C	243,6 N	F_{Gn}	334,2 N
F_D	275,7 N	F_{Gt}	1,72 N
F_{Ex}	-406 N	F_{Fn}	412,5 N
F_{Ey}	2043,2 N	F_{Ft}	2,19 N
F_{Hx}	-29 N	F	719 N

Aby se vozík pohyboval nahoru konstantní rychlostí a soustava byla ve statické rovnováze, tak síla $\vec{F}$ musí mít velikost $F = 719 \text{ N}$.

Ověření valení, funkčnosti vazeb a dopočet třecí síly ve vazbě B je zpracováno v tabulce (Tabulka 4).

Tabulka 4: Ověření valení, funkčnosti vazeb a dopočet třecí síly

Podmínka	Směr dolů	Směr nahoru
$F_{Gt} < f \cdot F_{Gn}$	$5,8 < 0,1 \cdot 1016,3$	$1,72 < 0,1 \cdot 334,2$
$F_{Ft} < f \cdot F_{Fn}$	$6,1 < 0,1 \cdot 1067,1$	$2,19 < 0,1 \cdot 412,5$
$F_{Bn} > 0$	$39,4 > 0$	$1469 > 0$
$F_{Gn} > 0$	$1016,3 > 0$	$334,2 > 0$
$F_{Fn} > 0$	$1067,1 > 0$	$412,5 > 0$
$F_C > 0$	$243,6 > 0$	$243,6 > 0$
$F_D > 0$	$746,3 > 0$	$275,7 > 0$
$F_{BT} = f \cdot F_{Bn}$	$F_{BT} = 0,1 \cdot 39,4 = 3,94 \text{ N}$	$F_{BT} = 0,1 \cdot 1469 = 146,9 \text{ N}$

Z tabulky vidíme, že všechny podmínky jsou splněny, tam kde jsme předpokládali valení, tak tam také probíhá. Všechny vazby jsou funkční. Záporné velikosti sil v rotačních vazbách jsou způsobeny směrem uvolnění. Záporná hodnota značí, že síla bude působit opačným směrem, než, ve kterém byla uvolněna.

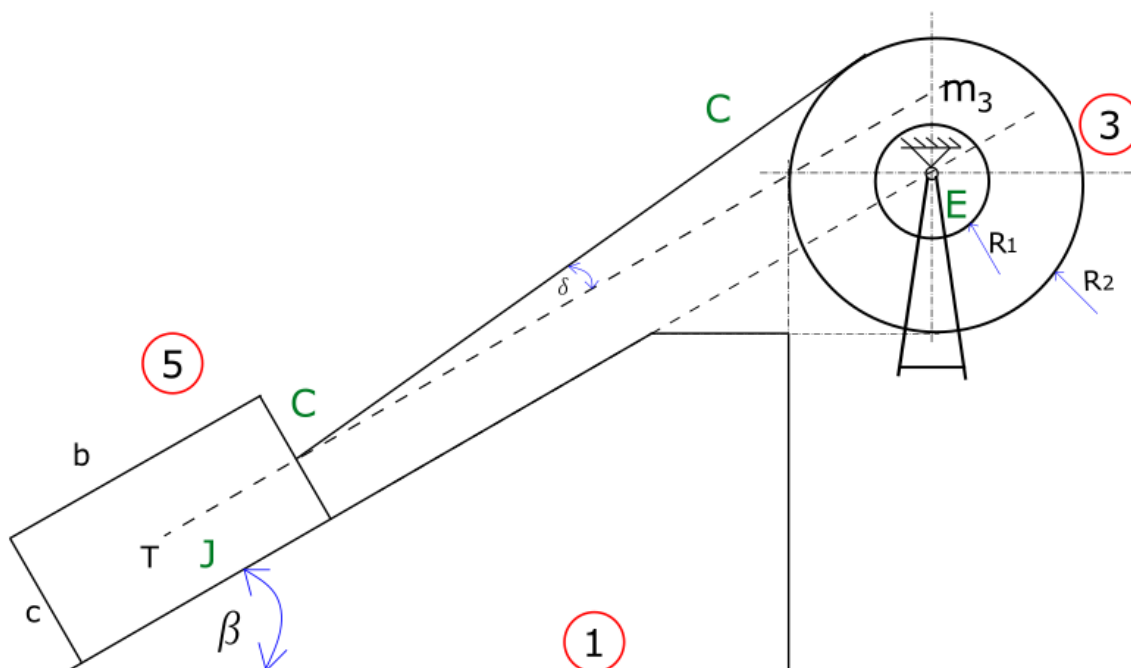
Hmotnost m_5 je přibližně 10x menší než váha vozíku. Důvody, proč je hmotnost závaží tak malá jsou nakloněná rovina, na které je umístěný vozík, všechny pasivní účinky, které uvažujeme (mají brzdňý efekt) a rozlišná velikost momentu od síly v jednotlivých lanech. Na základě velikostí sil v rotačních vazbách můžeme usoudit, že vztah podle Poncelotova byl použit správně.

8. Rozšíření příkladu 2 – umístění závaží na nakloněnou rovinu

8.1 Rozbor úlohy

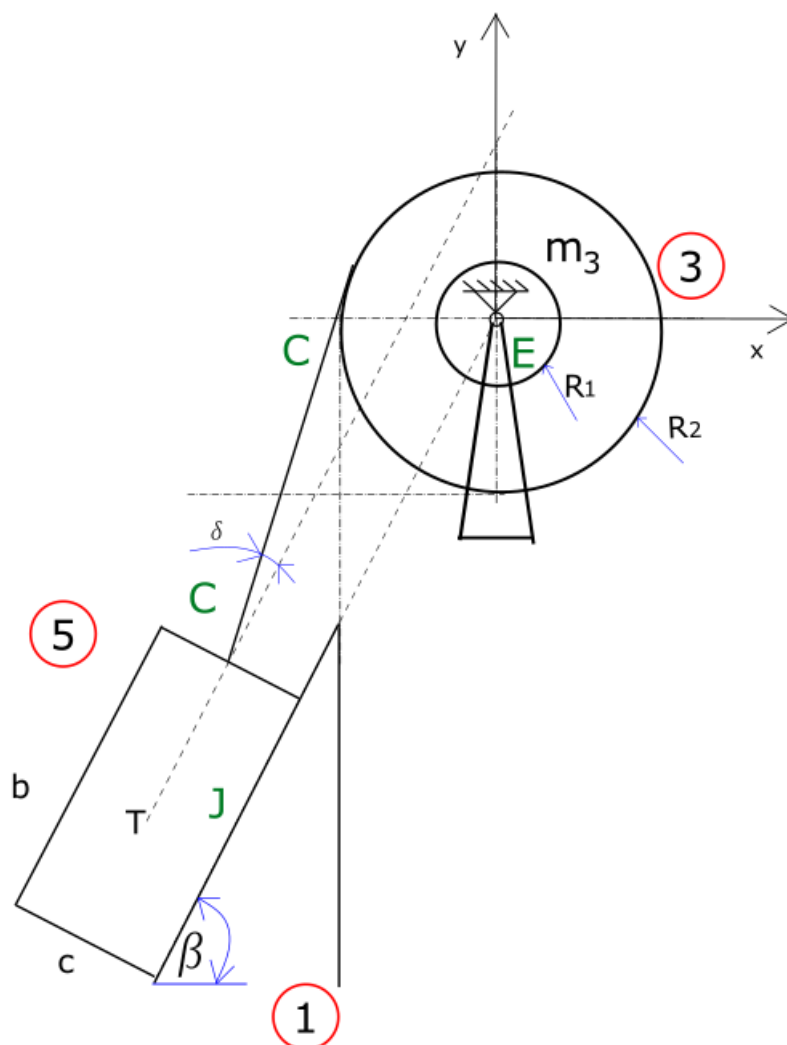
Závaží umístíme na nakloněnou rovinu, pod určitým úhlem. Pohybový stav budeme uvažovat takový, že závaží se pohybuje směrem nahoru po nakloněné rovině a vozík se spouští naložený dolů. Důležitým bodem tohoto rozšíření je správné zvolení geometrie, aby bylo možné vypočítat podle zadaných parametrů, rovnic kružnice a tečny, tečný bod na navíjecím bubnu, kde se bude navíjet lano vytahující závaží. Tento tečný bod je nutné znát, aby mohla být určena velikost úhlu mezi nakloněnou rovinou a lanem, který tam bude vznikat. Postupný posun závaží nahoru bude způsobovat zvyšování úhlu mezi nakloněnou rovinou a lanem. Dále bude pozorována změna velikosti úhlu v závislosti na změně místa uchycení lana k závaží. V případě existence velkého úhlu by mohlo dojít k překlopení tělesa, což bude prošetřeno.

Aby byla geometrie jednoznačně určená a šlo určit tečný bod (navíjecí buben a lano), tak bylo nutné rozdělit geometrii na dvě části. Na obrázku (obr. 27) je vytvořena geometrie, která je platná pro úhel nakloněné roviny β , $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$.



obr. 27 Zadaná geometrie soustavy platná pro $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$.

Na obrázku (obr. 28) je vytvořena geometrie, která je platná pro úhel nakloněné roviny β , $\beta = \langle 45^\circ; 90^\circ \rangle$.



obr. 28 Zadaná geometrie soustavy platná pro $\beta = \langle 45^\circ; 90^\circ \rangle$.

Ostatní tělesa celkové soustavy těles, která nejsou zobrazena v této části řešení mají stejné rozměry a parametry. Jediné, co je potřeba doplnit jsou rozměry závaží. Hmotnost závaží je rovna vypočítané z kapitoly 7. Síla F je neznámý parametr.

$$b = 0,6 \text{ m} \quad c = 0,4 \text{ m} \quad m_5 = 24,83 \text{ kg}$$

Kinematický rozbor, uvolnění těles 3 a 5 a statický rozbor bude platit pro obě varianty. Při uvolnění bude rozlišný akorát úhel β . Uvolnění ostatních těles se nezmění.

8.2 Kinematický rozbor

Všechna tělesa mají tři stupně volnosti.

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta \right)$$

C, D	lano	$\xi = 1^\circ V$
A, E, H, I	rotační vazba	$\xi = 2^\circ V$
B	podpora, smýkání	$\xi = 1^\circ V$
F, G	podpora, valení	$\xi = 2^\circ V$
J	posuvná vazba	$\xi = 2^\circ V$

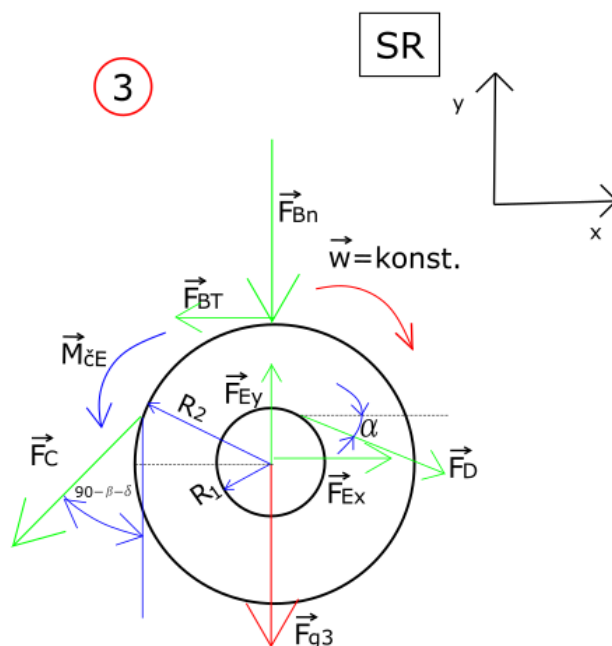
$$i = (7 - 1) \cdot 3 - (1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 - 0)$$

$$i = 1^\circ V$$

Výsledek kinematického rozboru nám říká, že těleso je uložené pohyblivě bez omezení deformačních parametrů.

8.3 Uvolnění

Těleso 3



obr. 29 Uvolnění tělesa 3

$$\Sigma F_x := 0 \quad -F_{BT} + F_{Ex} + F_D \cdot \cos(\alpha) - F_C \cdot \sin(90 - \beta - \delta) = 0 \quad (25)$$

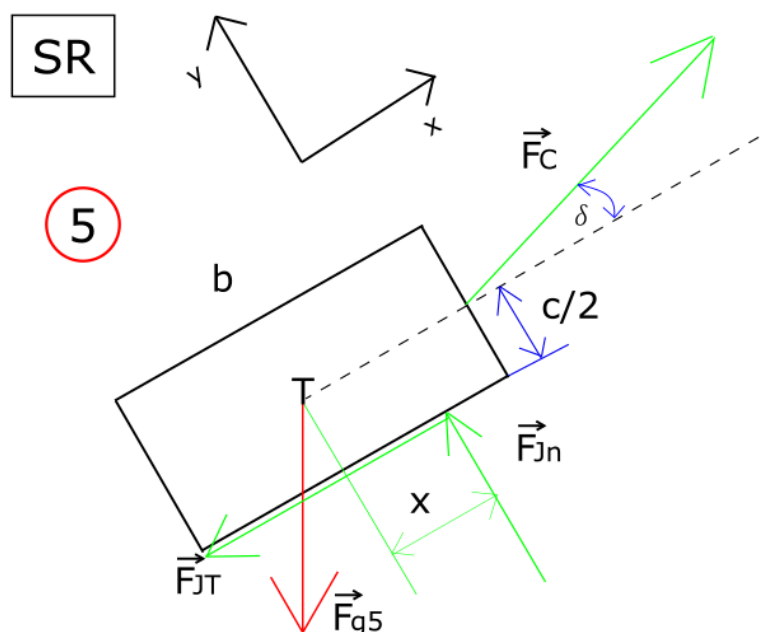
$$\Sigma F_y := 0 \quad -F_{Bn} - F_C \cdot \cos(90 - \beta - \delta) - F_{g3} + F_{Ey} - F_D \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (26)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad M_{cE} + F_c \cdot R_2 + F_{BT} \cdot R_2 - F_D \cdot R_1 = 0 \quad (27)$$

$$M_{cE} := r_c \cdot f_c \cdot (0.4 \cdot F_{Ex} + F_{Ey})$$

$$F_{BT} := f \cdot F_{Bn}$$

Těleso 5



obr. 30 Uvolnění tělesa 5

$$\Sigma F_x := 0 \quad -F_{g5} \cdot \sin\beta + F_C \cdot \cos\delta - F_{JT} = 0 \quad (28)$$

$$\Sigma F_y := 0 \quad -F_{g5} \cdot \cos\beta + F_C \cdot \sin\delta + F_{Jn} = 0 \quad (29)$$

$$\Sigma M_z := 0 \quad F_{Jn} \cdot x + F_C \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin\delta - F_{JT} \cdot \frac{c}{2} = 0 \quad (30)$$

$$F_{JT} := f \cdot F_{Jn}$$

8.4 Statický rozbor

Nejdříve je nutné zapsat množinu neznámých parametrů a následně ověřit statickou určitost.

$$NP = \{F_{Ax}; F_{Ay}; F_{Bn}; F_C; F_D; F_{Ex}; F_{Ey}; F_{Hx}; F_{Hy}; F_{Ix}; F_{Iy}; F_{Gn}; F_{Gt}; F_{Fn}; F_{Ft}; F; F_{Jn}; x\} = \mu$$

$$\mu = 18$$

$$\nu = \nu_F + \nu_M + \nu_r = 12 + 6 + 0 = 18$$

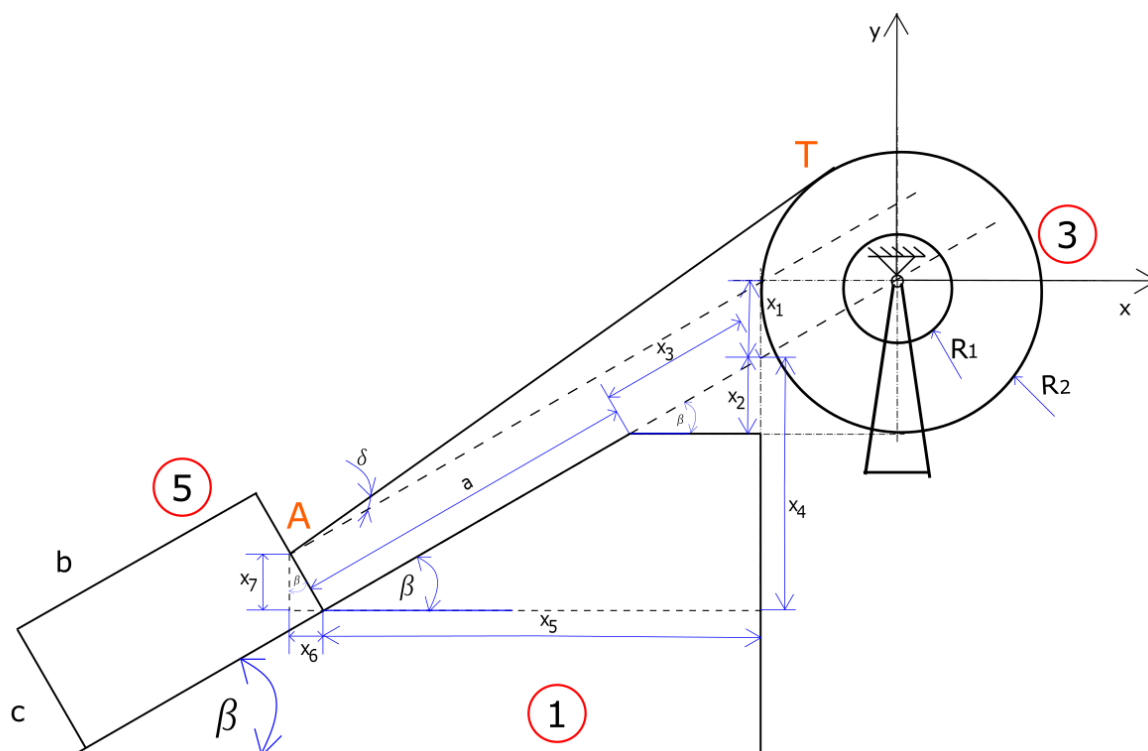
$$\nu = \mu \wedge \nu_M \geq \mu_M + \mu_r$$

$$18 = 18 \wedge 6 \geq 1$$

Obě dvě podmínky jsou splněny, to znamená, že soustava je staticky určitá.

8.5 Určení tečného bodu

Tečný bod určíme pomocí rovnice kružnice (poloměr R_2) a rovnice tečny, kterou zde představuje lano (vazba C). K matematickému řešení daného problému je nutné zvolit si souřadný systém. Jeho počátek je umístěn do středu prošetřované kružnice. Orientace os je zobrazena na obrázcích (obr. 31, obr.32).



obr. 31 Okótovaná soustava pro určení bodů A a T, platná pro $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$

Abychom mohli sestavit soustavu rovnic kružnice a tečny, tak je potřeba znát bod, který leží na tečně. V tomto případě je nejjednodušší určit bod A. Na obrázcích (obr. 31, obr. 32) je zobrazené okótování soustavy, které umožní definovat bod A. Poté můžeme použít a vyřešit tuto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Rovnice kružnice $(x - m)^2 \cdot (y - n)^2 = r^2$

Rovnice tečny $(x_A - m) \cdot (x - m) + (y_A - n) \cdot (y - n) = r^2$

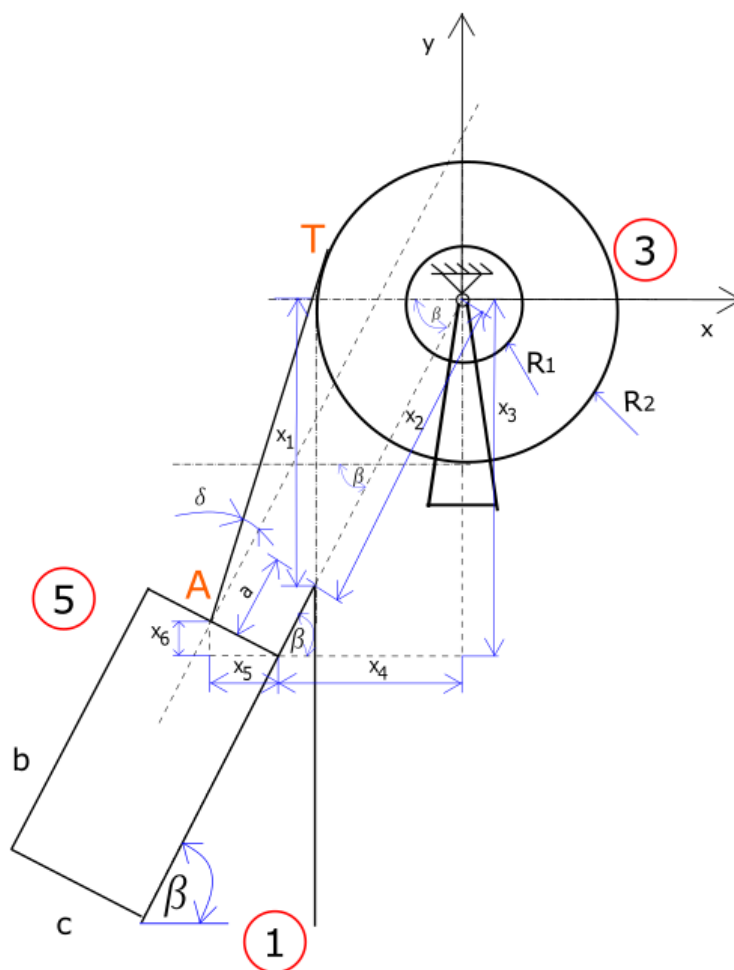
x, y souřadnice tečného bodu

x_A, y_A souřadnice bodu A

m, n souřadnice středu kružnice (v tomto případě $m = 0, n = 0$)

r poloměr kružnice (v tomto případě $r = R_2$)

Kompletní vyjádření bodu A, výpočet tečného bodu T a následné numerické řešení pomocí programu Octave je k dispozici v přílohách. Pomocí cyklu *for* byly vypočítány hodnoty bodů A a T pro několik úhlů β z daných intervalů (pro každých 5°) a pro délku a , která je definována, jako vektor, kde $a \in (0\text{ m}; 8\text{ m})$ s krokem $k = 0,1\text{ m}$.



obr. 32 Okótovaná soustava pro určení bodů A a T, platná pro $\beta = \langle 45^\circ; 90^\circ \rangle$

Název souboru pro numerické řešení bodů A a T pro $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$

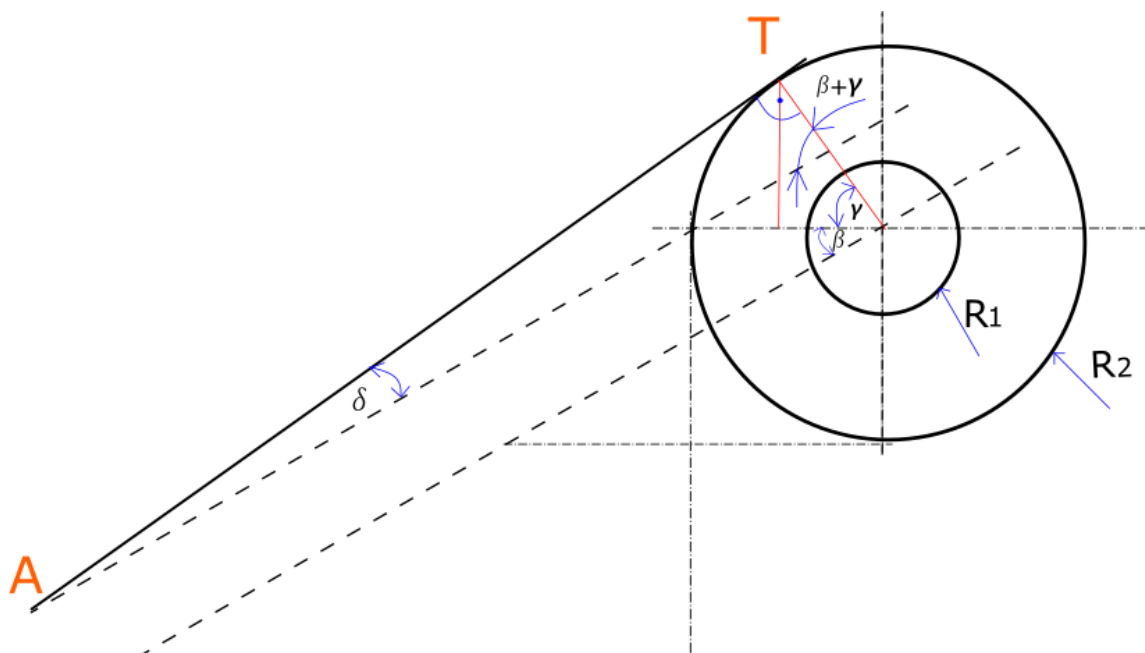
02_A_v_pulce_c_bety_do_pi_ctvrt

Název souboru pro numerické řešení bodů A a T pro $\beta = \langle 45^\circ; 90^\circ \rangle$

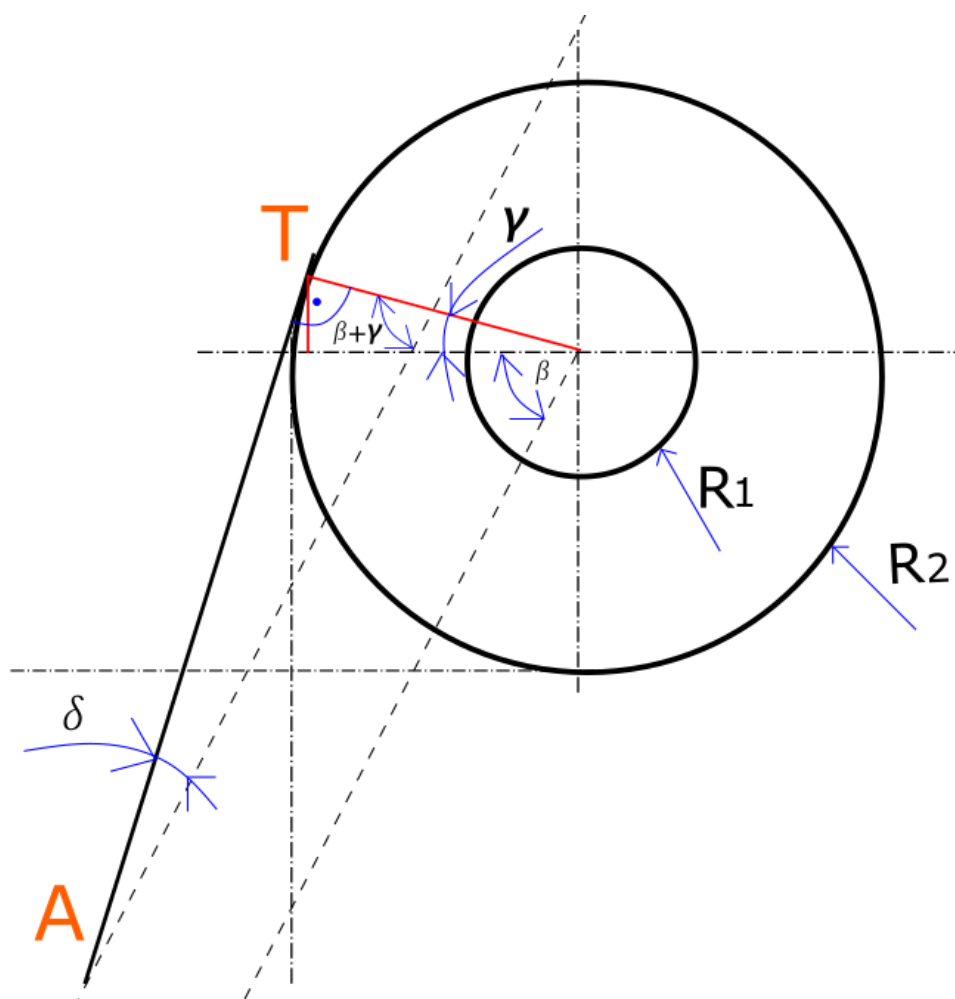
02_A_v_pulce_c_bety_od_pi_ctvrt

8.6 Určení úhlu δ

Jakmile jsou určeny body A a T, tak můžeme určit vztah pro úhel δ . K tomu je potřeba určení úhlu γ , který určíme z pravoúhlého trojúhelníku zobrazeném na obrázcích (obr. 33, obr. 34). Hodnota svislé oranžové čáry je y_T . Poté už stačí jen využít trojúhelníkovou podobnost a určit úhel δ .



obr. 33 Určení úhlu δ , platí pro $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$

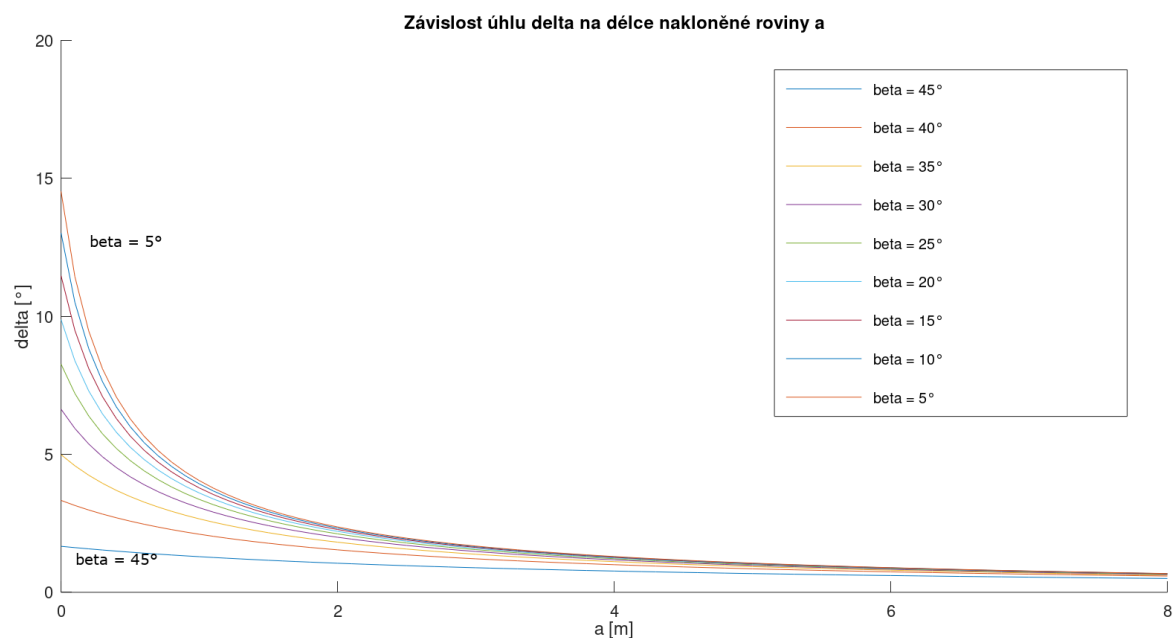


obr. 34 Určení úhlu δ , platí pro $\beta = (45^\circ; 90^\circ)$

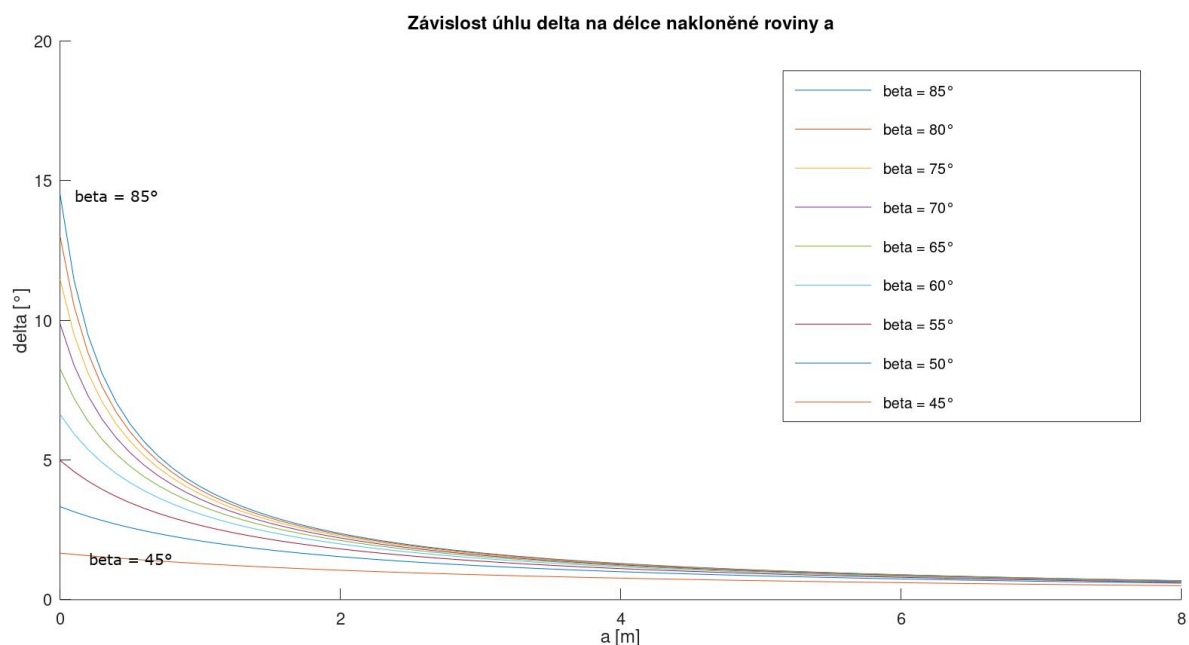
Numerické řešení je součástí scriptů výše uvedených, ve kterých se určovali body A a T.

8.7 Grafické závislosti

Důležitou částí řešení této problematiky a následným řešením překlacení tělesa je vliv úhlu δ mezi nakloněnou rovinou a lanem. Závaží postupně stoupá po nakloněné rovině a tím se daný úhel zvětšuje. Graf 1 a Graf 2 popisuje závislost úhlu δ na délce nakloněné roviny a . V obou případech bylo lano upevněno na závaží ve výšce $\frac{c}{2}$.



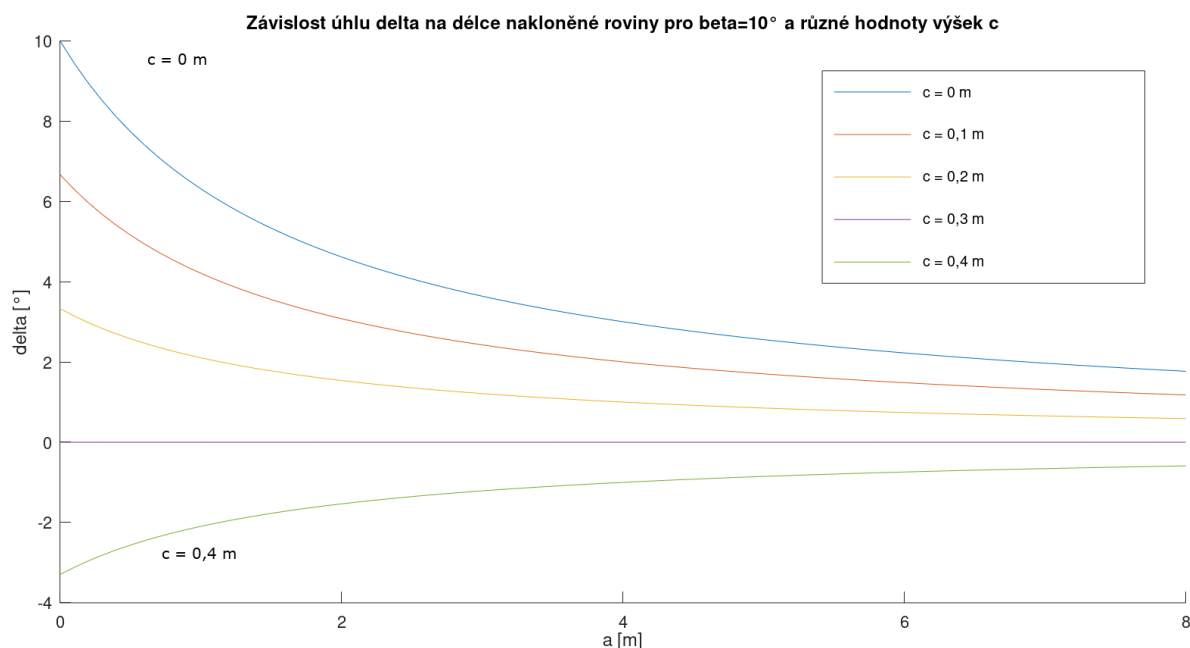
Graf 1 Závislost úhlu δ na délce nakloněné roviny a , platí pro $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$



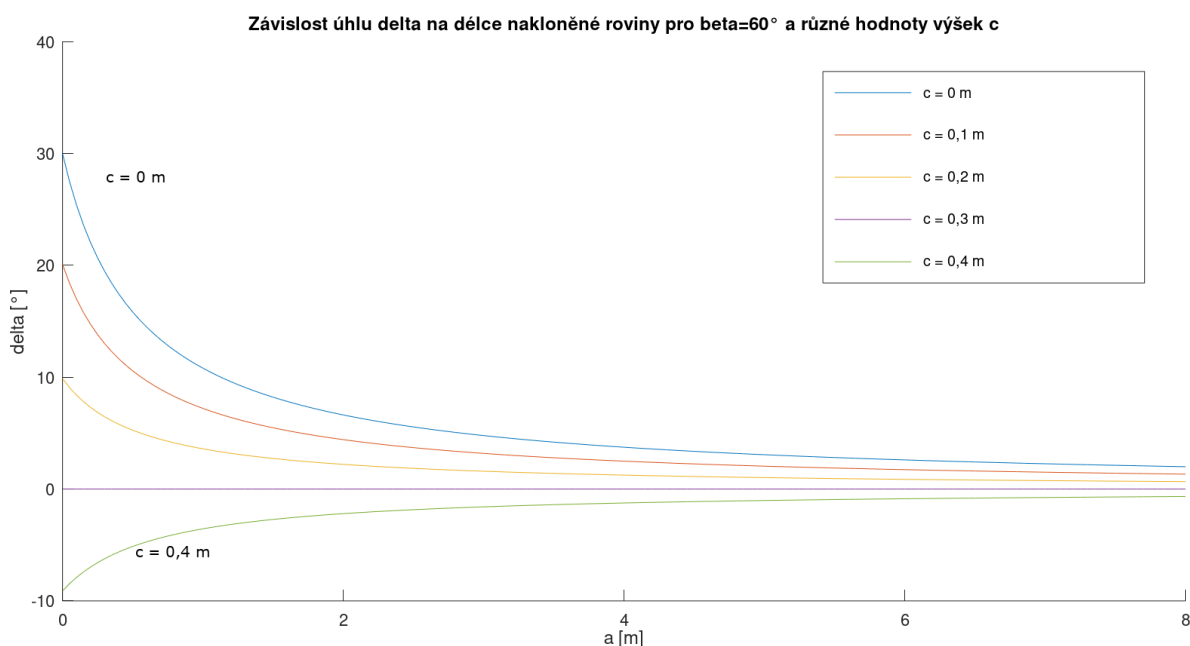
Graf 2 Závislost úhlu δ na délce nakloněné roviny a , platí pro $\beta = (45^\circ; 90^\circ)$

Z grafů můžeme vyčíst, že hodnoty úhlů se začnou výrazně zvětšovat, když závaží urazí dráhu dlouhou přibližně 6 m. Vyplývá z nich také skutečnost, že hodnoty úhlu δ jsou totožné pro oba intervaly. V intervalu $\beta = (0^\circ; 45^\circ)$ se postupně se snižující hodnotou úhlu β zvyšují, a naopak v intervalu $\beta = (45^\circ; 90^\circ)$ se zvyšují postupně s rostoucí hodnotou úhlu β . To je způsobeno volbou geometrie.

V dalších grafech (Graf 3, Graf 4) se sleduje vliv místa upnutí lana k závaží. V programu Octave je vytvořen script, který na základě parametrického zadání výšky upnutí lana popisuje změnu velikosti úhlu δ . Pro přehlednost grafů je zvoleno 5 různých bodů upnutí lana (bod A) a fixně je v obou intervalech úhlu β zvolena jedna konkrétní hodnota tohoto úhlu.



Graf 3 Závislost úhlu δ na délce nakloněné roviny, platí pro $\beta = 10^\circ$ a různé hodnoty výšky tělesa c



Graf 4 Závislost úhlu δ na délce nakloněné roviny, platí pro $\beta=60^\circ$ a různé hodnoty výšky tělesa c

Z grafů lze určit, že pokud těleso upneme přímo u podložky ($c = 0\text{ m}$), tak hodnota úhlu δ bude postupně stoupat nejstrměji a bude dosahovat největších hodnot. Pokud bude těleso upnuto ve výšce $c = 0,3\text{ m}$, což je i zároveň hodnota poloměru R_2 , tak bude úhel δ nulový. Ve výšce upnutí $c > 0,3\text{ m}$, budou hodnoty úhlu δ nabývat záporných hodnot, z důvodů toho, že poloha upnutí lana bude ve větší výšce, než je tečný bod.

Numerické řešení první části grafů (Graf 1 Graf 2)

02_A_v_pulce_c_bety_do_pi_ctvrt

02_A_v_pulce_c_bety_od_pi_ctvrt

Numerické řešení druhé části grafů (Graf 3 Graf 4)

02_beta_deset_ruzne_body_A

02_beta_sedesat_ruzne_body_A

8.8 Vliv na síly ve vazbách

Závaží na nakloněné rovině bude mít vliv na výsledné síly ve vazbách. Výpočet provedeme numericky pro $\beta=30^\circ$, $a = 2\text{ m}$ a upnutí lana $c = 0,2\text{ m}$. Ze scriptu 02_A_v_pulce_c_bety_do_pi_ctvrt je potřeba vyjádřit konkrétní hodnotu úhlu δ a tu potom použít do výpočtu stykových sil ve vazbách.

Do numerického řešení nevkládáme jako neznámou rameno x , ale momentovou neznámou M_J . Důvodem je, že momentová rovnice (30) s neznámým parametrem x není lineární. Výslednou hodnotu ramene, vypočítáme z následujícího vztahu.

$$x = \frac{M_J}{F_{Jn}}$$

Výsledky numerického řešení jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 5 Výsledky numerického řešení soustavy se závažím na nakloněné rovině

NP	Hodnota	NP	Hodnota
F_{Ax}	70,6 N	F_{Hy}	993,4N
F_{Ay}	-334,92 N	F_{Ix}	-21 N
F_{Bn}	705 N	F_{Iy}	942,5 N
F_C	175 N	F_{Gn}	1016,3 N
F_D	746,33 N	F_{Gt}	5,82 N
F_{Ex}	-482,3 N	F_{Fn}	1067,1 N
F_{Ey}	1289,8 N	F_{Ft}	6,13 N
F_{Hx}	-20,7 N	F_{Jn}	535,6 N
F	331,4 N	M_J	8,68 Nm

$$x = \frac{M_J}{F_{Jn}} = \frac{8,68}{535,6} = 0,016 \text{ m}$$

8.9 Překlopení tělesa

Těleso, u kterého uvažujeme zavazbení posuvnou vazbou a předpokládáme smýkání je vždy nutné zkontrolovat, jestli se nepřeklopilo. Překlopení je nežádoucí účinek, ve chvíli, kdy se těleso překlopí, tak numerické i analytické řešení rovnic statické rovnováhy přestane být platné a velikosti neznámých parametrů nejsou pravdivé.

Úkolem je provést analýzu soustav těles s vozíkem a se závažím a zkontrolovat, jestli se závaží nepřeklopí. Zadané parametry jsou následující.

$$a = 0,23 \text{ m}$$

$$\beta = 60^\circ$$

Uchycení tělesa předpokládáme ve výšce $c = 0 \text{ m}$.

Následuje numerické řešení, které je uvedeno v přílohách pod názvem *03_preklopeni*.

Z numerického řešení získáme parametry, které jsou uvedeny v tabulce 6.

Tabulka 6 Výsledky numerického řešení při prošetřování překlopení

NP	Hodnota	NP	Hodnota
F_{Ax}	12,5 N	F_{Hy}	993,4N
F_{Ay}	-43,2 N	F_{Ix}	-21 N
F_{Bn}	125,1 N	F_{Iy}	942,5 N
F_C	234,8 N	F_{Gn}	1016,3 N
F_D	746,33 N	F_{Gt}	5,82 N
F_{Ex}	-652,9 N	F_{Fn}	1067,1 N
F_{Ey}	847,3N	F_{Ft}	6,13 N
F_{Hx}	-20,7 N	F_{Jn}	79,5 N
F	42,6 N	M_J	-23,9 Nm

$$x = \frac{M_J}{F_{Jn}} = \frac{-23,9}{79,5} = -0,30 \text{ m}$$

Z výsledků vyplývá, že se síla F_{Jn} přemístí přesně na levý roh závaží a hodnota parametru x je maximální možná hodnota, kdy ještě nedojde k překlopení. Pokud by záporná hodnota byla větší, tak by došlo k překlopení a z posuvné vazby s uvažováním smýkání by se stala podpora, ve které by byl pohybový stav smýkání.

8.10 Analýza výsledků

Opět je nutné prošetřit podmínky valení a funkčnosti vazeb, jak bylo vyřešeno v kapitole 7 v tabulce 4. V této kapitole, tabulka řešena už nebude. Vidíme, že všechny normálové síly jsou kladné, stejně tak jako síly v lanech. Podmínky valení jsou splněny.

Je potřeba se zaměřit na výsledné změny sil ve vazbách. Pokud porovnáme výsledky z tabulky 2 a tabulky 5, tak jsou patrné změny výsledných sil v tělesech 3, 4 a 5. Naopak ve všech vazbách v tělesech 2, 6 a 7 zůstali silové účinky ve vazbách stejné. Na základě ověření funkčnosti numerického výpočtového modelu, se veškeré změny projeví jen u závaží, brzdy a navíjecího bubnu.

Při kontrole na překlopení tělesa bylo zjištěno, že pokud bychom uvažovali závaží na nakloněné rovině s úhlem $\beta = 60^\circ$, upnuté ve výšce závaží $c = 0 \text{ m}$, tak bychom nemohli se závažím stoupat až na konec nakloněné roviny. Nejvyšší bod, kde by se těleso ještě nepřeklopilo, je $a = 0,23 \text{ m}$.

Název souboru pro numerické řešení pro závaží na nakloněné rovině

03_dolu_nalozeny_naklonena_rovina

Název souboru pro numerické řešení překlopení

03_preklopeni

Závěr

Bakalářská práce se zabývá řešením soustav s vazbami s pasivními účinky, k jejichž řešení je využit výpočtový model NNTP. V první části práce se vymezili základní statické pojmy a popsaly se základy teorie, které jsou nutné k vyřešení zadaných soustav těles. Bylo ukázané uvolnění, jak vazeb NNTN, tak i vazeb s nezanedbatelnými pasivními účinky. Nejdůležitějším bodem teorie je popis algoritmu řešení soustavy rovnic NNTP.

Následovalo řešení prvního příkladu, kterým byl jednoduchý výtah. Cílem řešení tohoto příkladu bylo stanovit potřebnou váhu závaží, tak aby se celá soustava pohybovala konstantní rychlostí. Dále se sledovaly vlivy pasivních účinků v kladkách, konkrétně vlivy čepových tření na síly v lanech. Analytickým výpočtem jsme zjistili, že každá kladka odebere vlivem pasivního účinku přibližně 1,5 % tažné síly lana, což v našem případě byl pozitivní efekt, protože výsledná váha závaží byla nižší, než kdybychom pasivní účinky neuvažovali. Dále bylo úkolem změnit poloměr jedné kladky a sledovat změny tažných sil v lanech a vlivy jednotlivých pasivních účinků. Bohužel tento bod se v práci nenachází, z důvodu časové komplikace při řešení rozšíření příkladu 2. Nicméně v tomto bodě bylo stěžejní určit pomocí rovnice kružnice a tečny tečné body mezi lanem a kladkami a na základě toho, vyřešit rovnice statické rovnováhy, což je řešeno právě v rozšíření příkladu 2.

V příkladu 2 se řešila soustava těles, která se skládala z pákové brzdy, navíjecího bubnu, závaží a vozíku na nakloněné rovině, který byl svážený směrem dolů, anebo tažený nahoru. Důležitým prvkem bylo určení směrů pohybů jednotlivých těles a klasifikace vazeb s uvažováním pasivních účinků. Příklad byl rozdělen na několik částí.

V první části se řešil pohyb naloženého vozíku směrem dolů. Neznámými parametry byly silové účinky ve vazbách, a především hmotnost závaží, které bylo volně pověšeno. Po uvolnění těles a sepsání podmínek statické rovnováhy následovalo sestavení matice řešené soustavy a její numerické řešení v programu Octave. Následně se začal prázdný vozík vytahovat směrem nahoru. V tomto případě byla neznámým parametrem brzdná síla F , která zaručovala pohyb vozíku nahoru s konstantní rychlostí. V přílohách na externím datovém nosiči je vyřešena dále varianta, kdy je naložený vozík táhnut nahoru a neznámým parametrem je opět hmotnost závaží a následně je prázdný spouštěn dolů, kdy je opět potřeba vypočítat velikost brzděné síly, aby soustava setrvala ve statické rovnováze.

Ve druhé části se soustava těles rozšířila tak, že se závaží uložilo na nakloněnou rovinu. Prošetřoval se opět pohyb naloženého vozíku směrem dolů. Abychom mohli sepsat podmínky statické rovnováhy, tak bylo nutné určit polohu síly v tažném laně (určit úhel mezi nakloněnou rovinou a lanem), které spojovalo závaží s navíjecím bubnem. Bylo potřeba vymyslet přesnou geometrii těles, kterou bylo nakonec potřeba rozdělit na dvě části, vzhledem k velikosti úhlu nakloněné roviny a následně pomocí zvoleného souřadného systému, rovnice kružnice a tečny zjistit polohu tečného bodu lana s vnější kružnicí navíjecího bubnu. Dále se zjistil bod upnutí lana k závaží a pomocí již zmíněné zvolené geometrie se vypočítal hledaný úhel. Hodnota úhlu mezi lanem a nakloněnou rovinou je funkcí vzdálenosti závaží od navíjecího bubnu, dále velikostí úhlu nakloněné roviny, a také výškou upnutí lana k závaží. Výška upnutí lana k závaží je v numerickém řešení vyjádřena parametricky. Tyto závislosti jsou zpracovány v grafech v řešení práce.

Posledním úkolem bylo řešení soustavy těles se závažím na nakloněné rovině a výpočet stykových sil ve vazbách a jejich porovnání s první částí řešeného příkladu. Z výsledků vyplývá, že touto změnou geometrie se změnily síly jen v některých vazbách a tělesech. Síly ve vazbách vozíku, v jeho kolech a v laně, které vozík spouští zůstaly stejné. Nakonec se pro jednu konkrétní polohu závaží a pro konkrétní úhel nakloněné roviny prošetřilo, zda se závaží překloupí, či nikoliv.

Soustava těles s vozíkem byla řešena důkladně a bylo by možné ji vyřešit nejen ze statického pohledu, ale i z dynamického. Pomocí metody redukce, obecné rovnice dynamiky, anebo použitím Langrangeových rovnic 2. druhu, by se problematika mohla rozšířit i o dynamické řešení.

Seznam použité literatury

- [1] FLORIAN, Zdeněk, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘIKRYL. Mechanika těles: statika. Vyd. 7., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007, 182 s.: il. ISBN 978-80-214-3440-0.
- [2] ŠREJTR, Josef a Oldřich BRŮHA. Technická mechanika. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1970.
- [3] Juliš K., Brepta R.: Mechanika I. díl - Statika a kinematika SNTL Praha 1986
- [4] FLORIAN, Zdeněk, Karel PELLANT a Miroslav SUCHÁNEK. Technická mechanika I – statika. V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004, 181 s.
- [5] NEDOMA, Josef. Matematika I. Vyd. 3. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 267 s.: il.; ISBN 978-80-214-3690-9.
- [6] LEINVEBER, Jan a Pavel VÁVRA. Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření. 4., dopl. vyd. Úvaly: Albra, 2008. ISBN 978-80-7361-051-7.