



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**URČENÍ CHARAKTERISTIKY KÓNICKÉ VINUTÉ TLAČNÉ  
PRUŽINY**

ASSESSMENT OF CHARACTERISTIC OF A HELICAL CONUS-SHAPED SPRING UNDER COMPRESSION

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Libor Loveček**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.**

**BRNO 2016**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Libor Loveček**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.**  
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Určení charakteristiky kónické vinuté tlačné pružiny

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Tlačné válcové vinuté pružiny jsou výpočtově i výrobně jednoduché, jejich nevýhodou je skokový nárůst síly při dosednutí závitů na doraz. Tento zlom charakteristiky pružiny (závislosti síla-deformace) lze zcela odstranit vinutou pružinou kónického tvaru. Její analytický výpočet je však podstatně složitější.

### Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši zadané problematiky v dostupných vysokoškolských učebnicích a skriptech, příp. jiné literatuře.
- 2) Pomocí analytických nebo numerických metod určit výpočtově charakteristiku (závislost síla-deformace) zvolené vinuté pružiny kónického tvaru a vymežit její platnost.
- 3) Pokusit se o experimentální ověření vypočítané charakteristiky.

### Seznam literatury:

Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J.: Mechanika těles, Pružnost a pevnost I, skriptum VUT Brno, CERM, Brno 2004.

Janíček, P., Florian, Z.: Mechanika těles, Úlohy z pružnosti a pevnosti I, skriptum VUT Brno, CERM, Brno 1990.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Předkládaná bakalářská práce se zabývá chováním kónické vinuté tlačné pružiny pod zatížením. V práci je uveden analytický výpočet dle teorie slabě zakřivených prutů. Výpočet je vytvořen pro konkrétní kónickou vinutou pružinu v matematickém prostředí MAPLE. Výsledky jsou porovnány s daty získanými pomocí experimentálního zkoušení pružiny.

## **Abstract**

The presented bachelor thesis pursue the behaviour of coiled conical pressure spring while loaded. Thesis includes analytical calculation in accordance to the slightly curved rod theory. Calculation is designed for a specific coiled conical spring in a MAPLE environment. The results are compared with data acquired while experimenting with the spring.

## **Klíčová slova**

Kónický, pružina, zakřivený, prut, stoupání, deformace, průběh zatěžování

## **Key words**

Conus, Cylindric, spring, curved, rod, gradient, deformation, spring characteristics



## **Bibliografická citace**

LOVEČEK, L. *Určení charakteristiky kónické vinuté tlačné pružiny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 53 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D..



## **Prohlášení**

Tímto prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně na základě svých vědomostí, rad a pokynů vedoucího bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D. a získaných informací z použitých zdrojů.

V Brně, dne 26. 5. 2016

.....  
Libor Loveček



## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu této bakalářské práce prof. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph.D. za velmi důležité a odborné rady a pokyny k mé práci. Dále děkuji doc. Ing. Tomáši Návratovi, Ph.D. za ochotu při provádění experimentálního měření a zpracování naměřených dat a Ing. Kamilu Novákovi za cenné rady k matematickému programu MAPLE.



# Obsah

|       |                                                              |    |
|-------|--------------------------------------------------------------|----|
| 1     | Úvod.....                                                    | 14 |
| 2     | Definice prutu v pružnosti a pevnosti .....                  | 15 |
| 2.1   | Geometrické předpoklady.....                                 | 15 |
| 2.2   | Vazbové a zatěžující předpoklady .....                       | 15 |
| 2.3   | Deformační předpoklady .....                                 | 16 |
| 2.4   | Napjatostní deformace .....                                  | 16 |
| 2.5   | Rozdělení prutů dle tvaru střednice .....                    | 16 |
| 3     | Teorie zakřivených prutů .....                               | 17 |
| 3.1   | Rozdělení zakřivených prutů .....                            | 17 |
| 3.1.1 | Silně zakřivený prut.....                                    | 17 |
| 3.1.2 | Slabě zakřivený prut .....                                   | 19 |
| 3.2   | Kvantifikované napěťové rozčlenění zakřivených prutů.....    | 21 |
| 4     | Teoretický výpočet válcové tlačné vinuté pružiny .....       | 22 |
| 4.1   | Určení VVÚ a složek napětí .....                             | 22 |
| 4.2   | Deformace (stlačení) pružiny .....                           | 24 |
| 4.3   | Závěr teoretického výpočtu válcové pružiny.....              | 25 |
| 5     | Kónická tlačná vinutá pružina .....                          | 27 |
| 5.1   | Popis pružiny .....                                          | 27 |
| 5.2   | Teoretický výpočet deformace (stlačení) kónické pružiny..... | 27 |
| 5.3   | Postup výpočtu závislosti síly na deformaci (stlačení).....  | 29 |
| 6     | Aplikované výpočty a experiment .....                        | 33 |
| 6.1   | Vlastnosti kónické pružiny .....                             | 33 |
| 6.2   | Výpočet válcových pružin .....                               | 35 |
| 6.2.1 | Válcová pružina s minimálním poloměrem.....                  | 36 |
| 6.2.2 | Válcová pružina s maximálním poloměrem.....                  | 36 |
| 6.3   | Výpočet kónické pružiny .....                                | 36 |
| 6.4   | 1. kontrola výpočtu kónické pružiny .....                    | 39 |
| 6.5   | 2. kontrola výpočtu kónické pružiny .....                    | 40 |
| 6.6   | Experiment.....                                              | 41 |
| 7     | Výsledky .....                                               | 43 |
| 7.1   | Diskuze výsledků.....                                        | 45 |
| 8     | Závěr .....                                                  | 48 |
|       | Seznam použitých zdrojů .....                                | 49 |
|       | Seznam příloh.....                                           | 50 |
|       | Příloha 1 – výpis zdrojového kódu.....                       | 50 |
|       | Seznam použitých veličin.....                                | 52 |

# 1 Úvod

Ačkoliv jsou šroubovitě vinuté pružiny v dnešní době nahrazovány jinými druhy pružin, pro jejich jednoduchost jsou stále nejpoužívanějším typem pružin ve všech oborech. Slouží k vyvození síly nebo momentu a k akumulaci mechanické energie. Mají výbornou schopnost elastické deformace, která je dána použitím materiálu o vysoké poddajnosti nebo vhodným tvarem pružiny. Tyto vlastnosti velmi ovlivňují jejich chování (závislost síla – deformace).

Nejpoužívanější vinuté pružiny jsou válcové, které mají lineární průběh. Při jejím maximálním stlačení závity na sebe narazí a to se projeví jako skokový nárůst síly. V charakteristice nastane zlom. Při tomto nárazu může dojít k poškození pružiny nebo k její trvalé deformaci.

Uvedenou nevýhodu válcové pružiny lze zcela odstranit použitím vinutou pružinou kónického tvaru. Při dosedání závitů je nárůst síly plynulý a zlom nenastane.

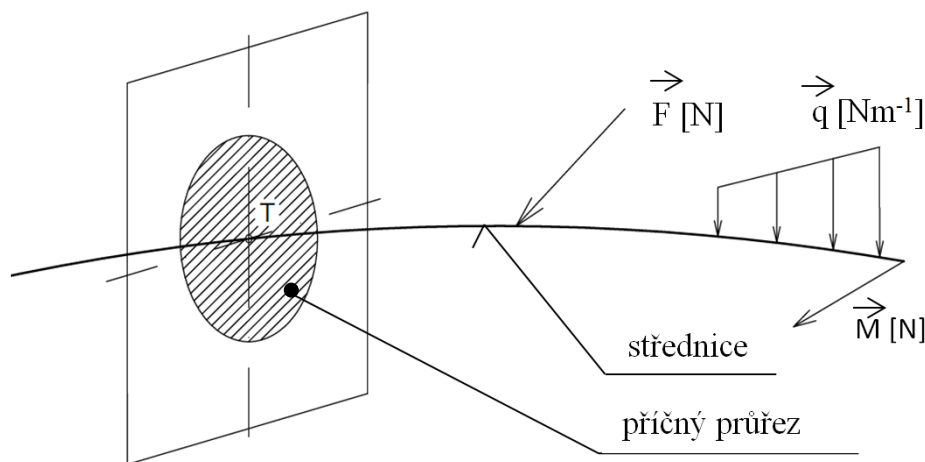
Cílem této bakalářské práce je analytický výpočet kónické vinuté pružiny, který bude srovnán s experimentálním měřením. Toto srovnání popisuje nepřesnost výpočtu oproti skutečnosti. V rešeršní části práce budou popsány předpoklady a vlastnosti teoretického zakřiveného prutu, podle kterých bude výpočet vytvořen.

## 2 Definice prutu v pružnosti a pevnosti

Vypracováno podle [1]

Obor pružnost a pevnost (viz PP) se zabývá řešením problémů spojené s napjatostí, deformací a porušováním součástí technických objektů. V technické praxi se vyskytují tvarově jednoduché nebo složité objekty.

Jako teoretický model reálného tělesa nám pro výpočet vinuté pružiny postačí prut v PP. Ten je charakterizován jako nejjednoduššího typ modelu z hlediska napjatosti a deformace. Aby splňoval podmínky pružnosti a pevnosti, musí splňovat geometrické, deformační a napjatostní předpoklady. Označují se jako prutové předpoklady a jsou uvedeny v podkapitolách 2.1 až 2.4.



Obr. 1 Zatížený Prut se zakřivenou střednicí a s kruhovým příčným průřezem, převzato z [1]

### 2.1 Geometrické předpoklady

Vypracováno podle [1]

- Prut je určen střednicí (křivkou) a v každém bodě střednice příčným průřezem, ve kterém leží všechny body tělesa ležící v normálové rovině. Průsečík střednice a příčného průřezu je geometrickým těžištěm T průřezu. (viz obr. 1)
- Střednice je spojitá a hladká křivka konečné délky. Může být rovinná nebo prostorová křivka<sup>1</sup>.
- Příčný průřez je spojitá jedno nebo vícenásobně souvislá rovinná oblast kolmá na střednici.
- Délka střednice musí být minimálně stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu.

### 2.2 Vazbové a zatěžující předpoklady

Vypracováno podle [1]

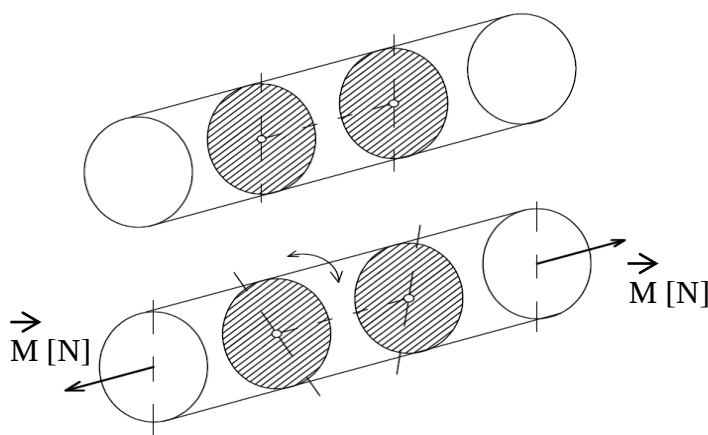
- „Vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice“
- Zatížení působí na střednici prutu, tj. zatížení má působiště na střednici, obr. 1.

<sup>1</sup> Prostorová křivka je např. šroubovice. Střednice vinuté pružiny má tvar šroubovice a délka této střednice je potřebná pro výpočet deformace (stlačení) pružiny.

## 2.3 Deformační předpoklady

Vypracováno podle [1]

- Střednice prutu zůstává při průběhu deformace spojitá a hladká (nebo pro speciální pruty po částech hladká. Jedná se o pruty s konečným počtem bodů nespojitosti v hladkosti střednice, např. rámy)
- V příčných průřezích se během deformace nemění jejich rovinnost a kolmost k deformované střednici. Dle druhu namáhání se příčné průřezy:
  - „vzájemně oddalují a deformují - TAH“,
  - „vzájemně přibližují a deformují - TLAK“,
  - „natáčeji kolem osy ležící v příčném průřezu a deformují se - OHYB“,
  - „natáčeji kolem osy kolmé k příčnému průřezu a deformují se – KRUT<sup>2</sup>“,



Obr. 2 Pootočení příčných průřezů přímého prutu při namáhání v krutu., převzato z [1]

- „posouvají se bez deformace - SMYK“

## 2.4 Napjatostní deformace

Vypracováno podle [1]

- „Napjatost v prutu je určena normálním a smykovým napětím v příčném průřezu. Je to zvláštní typ napjatosti označovaná jako **prutová napjatost**“.

## 2.5 Rozdělení prutů dle tvaru střednice

Vypracováno podle [1]

Podle tvaru střednice se pruty rozdělují na:

- pruty přímé – střednice je hladká rovinná přímka,
- pruty zakřivené – střednice je hladká rovinná nebo prostorová křivka,
- pruty s po částech hladkou střednicí – střednice má konečný počet bodů nespojitosti v hladkosti, přičemž v místech nespojitosti buď není zaručena vzájemná pohyblivost prvků (tzv. rámy), nebo je zaručena vzájemná pohyblivost prvků.

<sup>2</sup> Namáhání v krutu je dominantní při zatížení vinuté pružiny, která má malý úhel stoupání. Poškození prutu vzniká pootočením (zkroucením) příčných průřezů vůči sobě na konkrétní délce.

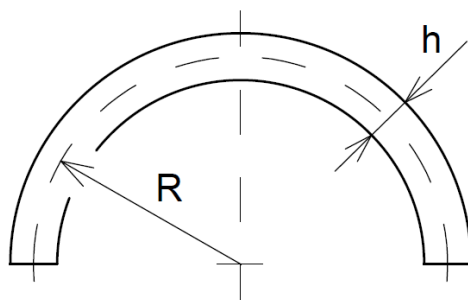
### 3 Teorie zakřivených prutů

Vypracováno podle [1], [4]

Tato práce řeší výpočet kónické vinuté pružiny, která má tvar zakřiveného trojrozměrného prutu. Střednice je hladká šroubovice, tudíž nemá smysl se dále zabývat ostatními tvary prutů.

Kapitola 3 popisuje odvození deformace napjatosti rovinného zakřiveného prutu pomocí teorie silně a slabě zakřivených prutů. Výpočet dle teorie slabě zakřivených prutů je stejný jako pro přímý prut a jeho postup je jednodušší. Cílem této kapitoly je určit jejich procentuální odchylku. Pro prostorový prut musí platit stejné zásady jako pro rovinný, avšak postup výpočtu je komplikovanější, tudíž není nutné si ho uvádět. Před použitím zjednodušené teorie je nutné provést rozbor prutu, protože nelze ji použít pro libovolný zakřivený prut. Rozbor spočívá v určení tvarových, silových, aj. charakteristik prutu. Ty je nutné si uvědomit pro určení správného charakteru namáhání. Zde je několik charakteristik uvedeno:

- poměru poloměru křivosti střednice ( $R$ ) k charakteristickému rozměru příčného průřezu ( $h$ ), obr. 3 (slabě nebo silně zakřivené)
- „tvaru střednice prutu (typ křivky, rovinnost, prostorovost, otevřenost, uzavřenost),“
- „typu silové soustavy působící na prut“.



Obr. 3 Zakřivený prut, převzato z [1]

Charakter namáhání nemusí být vždy stejný. Ve strojírenství se velmi často vyskytují různé zakřivené pruty zatížené různými silovými soustavami.

Nejčastější jsou:

- rovinné pruty zatížené silovými dvojicemi působící v rovině prutu, které jsou namáhány na ohyb,
- rovinné pruty zatížené příčnými silami ležící v rovině prutu, které jsou namáhány na kombinaci ohybu, tahu (tlaku) a smyku,
- rovinné nebo prostorové pruty namáhané kombinací všech 4 základních namáhání.

#### 3.1 Rozdělení zakřivených prutů

##### 3.1.1 Silně zakřivený prut

Vypracováno podle [1], [4]

Silně zakřivené pruty mají poměr poloměru křivosti střednice k charakteristickému rozměru příčného průřezu řádově rovno jedné ( $R/h \approx 1$ ). Rovinnost řezu zůstává zachována, napjatost a deformace avšak nelze řešit stejně jako slabě zakřivených prutů.

Uvedme si zde několik základních vzorců, abychom porovnali rozdíl mezi výpočtem slabě a silně zakřiveného prutu (podrobný postup lze nalézt od str. 144 po str. 150 ve zdroji

[1]). Vzorce jsou odvozeny pro rovinný zakřivený prut zatížený rovinou silovou soustavou (obr. 4), přičemž rovina silové soustavy je totožná s rovinou příčného průřezu  $\psi$ . Příčný průřez je konstantní po celé délce prutu. Namáhání je kombinace ohybu, tahu (tlaku) a smyku. Předpokládáme, že prut splňuje prutové předpoklady, takže pro výpočet napětí od normální síly  $N$  (tj. tahová resp. tlaková napjatost) použijeme vztah (3.1).

$$\sigma_N = \frac{N}{S} \quad [\text{MPa}] \quad (3.1)$$

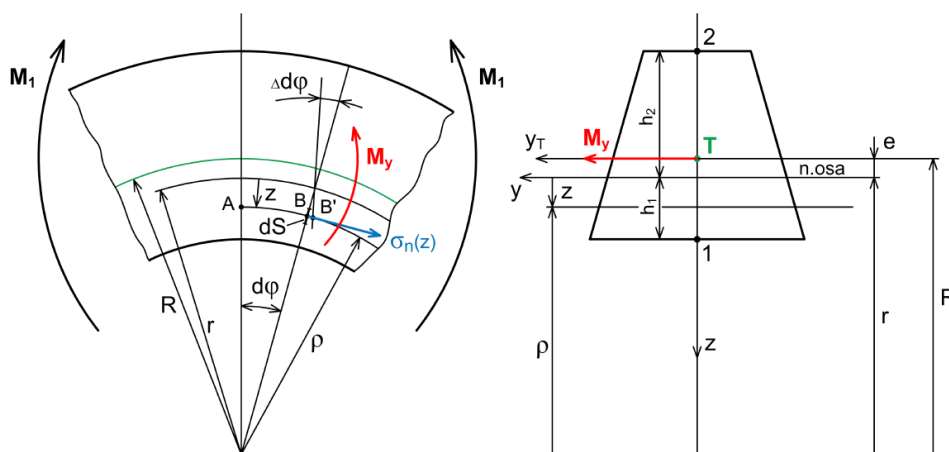
Nositelka posouvající síly  $T$  je totožná s osou symetrie a smykové napětí od posouvající síly má stejný směr jako posouvající síla (obr. 4). Z toho vyplývá, že můžeme použít vztah (3.2) pro výpočet celkového smykového napětí (tzv. Žuravského vzorec).

$$\tau = \frac{T(x) \cdot U_{y\psi 1}}{b \cdot J_y} \quad [\text{MPa}] \quad (3.2)$$

Uvedené 2 vztahy lze použít jak pro přímý prut, tak pro zakřivený prut. Napětí od ohybového momentu se však mění. Změna je dána posunutím neutrální osy<sup>3</sup> z těžiště příčného průřezu blíže ke středu poloměru ohybu o vzdálenost  $e$  (obr. 4) a zdeformováním (změnou rozměrů) příčného průřezu. Neutrální osa je osa, ve které působí nulové napětí. Napětí od ohybového momentu se vypočítá ze vzorce (3.3). [1]

$$\sigma_{Mo} = \frac{M_y}{S \cdot e} \cdot \frac{z}{r - z} \quad [\text{MPa}] \quad (3.3)$$

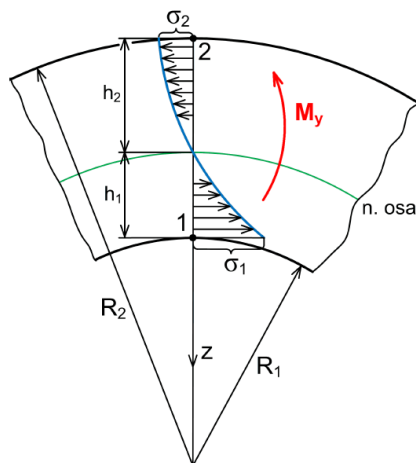
, kde  $z$  je vzdálenost obecného bodu příčného průřezu od neutrální osy.



Obr. 4 Zatížení zakřiveného prutu ohybovým momentem (charakteristický rozměr prutu je v tomto obrázku dán součtem  $h = h_1 + h_2$ ), převzato z [4]

U zakřiveného prutu namáhaného ohybem jsou normální napětí v příčném průřezu rozložena podle hyperboly (obr. 4).

<sup>3</sup> Neutrální osa je osa s nulovou hodnotou normálního napětí pro namáhání ohybem zakřiveného prutu. V neutrální ose se u ohybu také mění směr napětí.



Obr. 5 Průběh namáhání normálních napětí zakřiveného prutu, převzato z [4]

Jelikož se nám neutrální osa posunula, poloměr neutrální osy se změnil. Posunutý poloměr křivosti jsme schopni vypočítat ze vzorce 3.4 [1]

$$r = \frac{S}{\int_{\psi} \frac{dS}{\rho}} \quad [mm] \quad (3.4)$$

Energie napjatosti vyjadřuje energii naakumulovanou v materiálu prutu od všech namáhání působících na prut. Vyjadřuje se jako součet všech napětíových účinků od jednotlivých normálních a smykových napětí [1] :

$$W = W_{\sigma} + W_{\tau} = \frac{1}{2 \cdot E} \int_{(V)} \sigma^2 dV + \frac{1}{2 \cdot G} \int_{(V)} \tau^2 dV \quad (3.5)$$

Po dosazení vztahů 3.1, 3.2 a 3.3 do rovnice 3.5 a následné matematické úpravě dostaneme výslednou energii napjatosti pro zakřivený prut. Tento vztah definuje celkovou energii napjatosti pro konečný prvek s délkou střednice  $\gamma$ , která má všechny body stejné jako osa x (úplná matematická úprava je na str. 148 [1]):

$$W = \int_{\gamma} \frac{M_y^2(x) ds}{2ES(x)eR} - \int_{\gamma} \frac{M_y(x)N(x)}{ES(x)eR} ds + \int_{\gamma} \frac{N^2(x) ds}{2ES(x)} + \int_{\gamma} \frac{\beta T^2(x) ds}{2GS(x)} \quad (3.6)$$

Veličina  $x$  určuje konkrétní bod (souřadnici) na střednici  $\gamma$ , pro který je energie počítána. Konstanta  $\beta$  je závislá na tvaru příčného průřezu. Pro kruhový průřez je  $\beta = 32/27$ , pro obdélníkový  $\beta = 1,2$ .

### 3.1.2 Slabě zakřivený prut

Vypracováno podle [1], [4]

Tento typ zakřiveného prutu má velký poměr poloměru křivosti k charakteristickému rozměru průřezu ( $R/h \gg 1$ ). Můžeme také říct, že charakteristický rozměr  $h$  je mnohem menší jak poloměr křivosti  $R$  a z tohoto důvodu platí, že  $z \ll r$  (viz obr. 4). Díky této podmínce můžeme posunutí neutrální osy (zmenšení poloměru křivosti) zanedbat.

Normální napětí a smykové napětí od posouvající síly se počítají ze stejných vzorců jako u silně zakřivených prutů (vzorce 3.1, 3.2). U těchto napětí tedy nezáleží na křivosti prutu. Zjednoduší se nám vzorec pro výpočet napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{Mo} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z, \quad [\text{MPa}] \quad (3.7)$$

kde  $J_y^4$  je kvadratický moment k ose y procházející těžištěm příčného průřezu.

Dosadíme-li jednotlivé druhy napětí (3.1, 3.2, 3.7) do vztahu pro výpočet celkové energie napjatosti (3.5), dostaneme po matematické úpravě výslednou energii napjatosti pro slabě zakřivený prut:

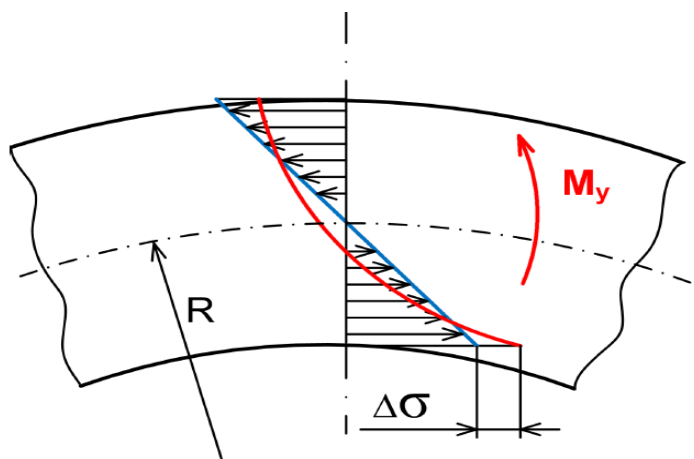
$$W = \int_V \frac{M_y^2(x) ds}{2EJ_y(x)} + \int_V \frac{N^2(x) ds}{2ES(x)} + \int_V \frac{\beta T^2(x) ds}{2GS(x)}, \quad (3.8)$$

ze kterého pomocí Castiglianovy věty je možné vypočítat posuv  $u_F$  ve směru osamělé síly, který je potřebný pro určení závislosti síly na deformaci pružiny:

$$u_F = \int_V \frac{M_y(x)}{EJ_y(x)} \frac{\delta M_y}{\delta F} ds + \int_V \frac{N(x)}{ES(x)} \frac{\delta N}{\delta F} ds + \int_V \frac{\beta T(x)}{GS(x)} \frac{\delta T}{\delta F} ds \quad (3.9)$$

Výsledná energie napjatosti je dle vztahu (3.9) určena superpozicí energie napjatosti od ohybového momentu, normální a posouvající síly. Tento vztah platí i pro pruty přímý a proto můžeme tedy souhrnně konstatovat: „**Napětí a energie napjatosti na dané rozlišovací úrovni lze u slabě zakřivených prutů určovat podle vztahů platných pro přímé pruty**“.

Toto zjednodušení má také svou nevýhodu. Výsledné napětí vychází menší pro řešení prutu jako přímý než u řešení jako zakřivený prut, tzv. dopouštíme se větší chyby. Tato nevýhoda je způsobena jejich průběhem napětí (obr. 6).



Obr. 6 Rozdíl napětí ( $\Delta\sigma$ ) mezi průběhem přímého prutu (modrá křivka) a zakřiveného prutu (červená křivka), převzato z [4]

<sup>4</sup> Kvadratický moment k ose y se vypočítá ze vztahu  $J_y = \int_V z^2 ds$ . Jedná se o průřezovou charakteristiku. Závisí tedy na tvaru a rozměrech příčného průřezu (viz str.62, [1]).

### 3.2 Kvantifikované napěťové rozčlenění zakřivených prutů

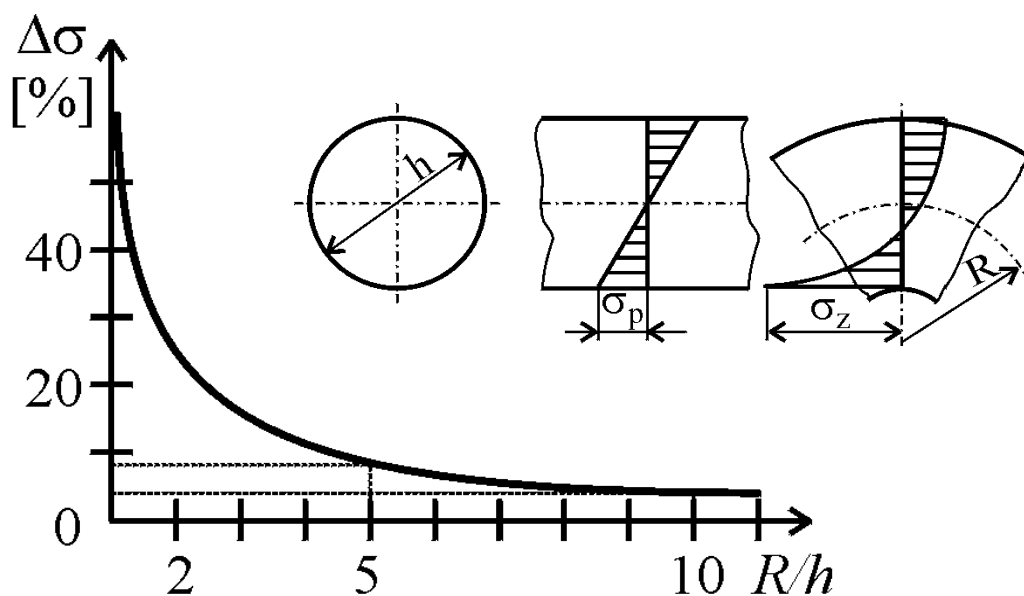
Vypracováno podle [1], [3]

Je důležité umět číselně vyjádřit už zmíněnou chybu, které se ve výsledku dopouštíme pro řešení prutu jako slabě zakřiveného a zda se vůbec můžeme rozhodnout pro toto zjednodušení.

„Kvantifikované rozčlenění prutů na slabě a silně zakřivené souvisí s rozlišovací úrovní určování napětí“. Obr. 7 znázorňuje závislost poměru  $R/h$  pro danou geometrii prutu na veličině  $\Delta\sigma$ , která charakterizuje poměrnou odchylku mezi ohybovým napětím pro zakřivené pruty  $\sigma_z$  (vztah 3.10) a ohybovým napětím pro pruty přímé  $\sigma_p$ . Odchylka napětí se pro každý poměr  $R/h$  se stavoví ze vztahu:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_z - \sigma_p}{\sigma_z} \cdot 100 \quad [\%] \quad (3.10)$$

a vznikne závislost  $\Delta\sigma$  na poměru  $R/h$  (obr. 7). Tento graf platí obecně pro zakřivené pruty a lze z něho určit nepřesnost této metody. [1]



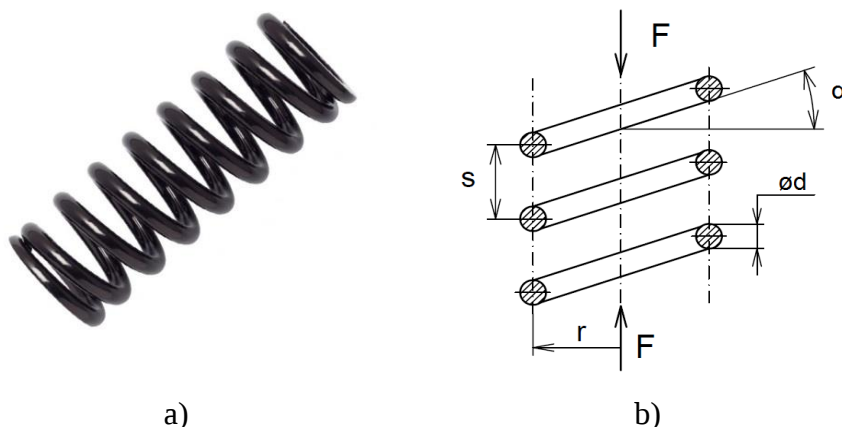
Obr. 7 Závislost  $\Delta\sigma$  na poměru  $R/h$  prutu, převzato z [3]

Např. pro poměr  $R/h = 10$  je  $\Delta\sigma \cong 4,1\%$ , pro  $R/h = 5$  je  $\Delta\sigma \cong 8,2\%$ , což jsou pořád přijatelné chyby. Ale pro poměr  $R/h = 2$  už chyba narůstá na přibližně 25% a je vhodnější použít metodu silně zakřivených prutů. [1]

Vztahy pro silně zakřivené pruty byly odvozeny za předpokladu zachování rovinnosti příčných průřezů při procesu zatěžování a při existenci prutové napjatosti. Avšak pro extra zakřivené pruty ( $R/h < 1$ ) nelze rovinnost příčných průřezů jednoduše zanedbat. Napjatost u těchto prutů bude obecnější než prutová. Tudíž nelze tohle těleso řešit jako prut, ale jako těleso v obecné pružnosti a pevnosti.

## 4 Teoretický výpočet válcové tlačné vinuté pružiny

Vypracováno podle [2], [5]



Obr. 8 a) Válcová pružina, převzato z [5], b) Schéma válcové pružiny v řezu, převzato z [2]

Válcová vinutá pružina je jednoznačně určena průměrem drátu  $\varnothing d$ , středním poloměrem vinutí  $r$ , počtem závitů, stoupáním  $s$  a úhlem stoupání  $\alpha$ . Kapitola 4 se zabývá výpočtem, kde všechny uvedené rozměry jsou konstantní pro celou funkční část pružiny. [2]

Do výpočtu můžeme dosazovat libovolnou velikost síly  $F$ , protože potřebujeme získat průběhy zatěžování teoretických pružin, jejichž závislosti síla – deformace slouží ke srovnání s kónickou pružinou. Nejedná se tedy o skutečné pružiny, a proto nemusíme řešit skokový nárůst síly při dosednutí pružin.

Jako matematický model lze použít teorii slabě zakřivených prutů, protože kónická pružina má  $r/d > 1$ . Přesné poměry jsou uvedeny ve vztazích (6.6, 6.7) v kap. 6.1. Předpokládají se tedy malé deformace a to znamená, že změna veličin  $d$ ,  $r$ ,  $\alpha$  je v průběhu zatěžování pružiny zanedbatelná.

### 4.1 Určení VVÚ a složek napětí

Vypracováno podle [2], [5]

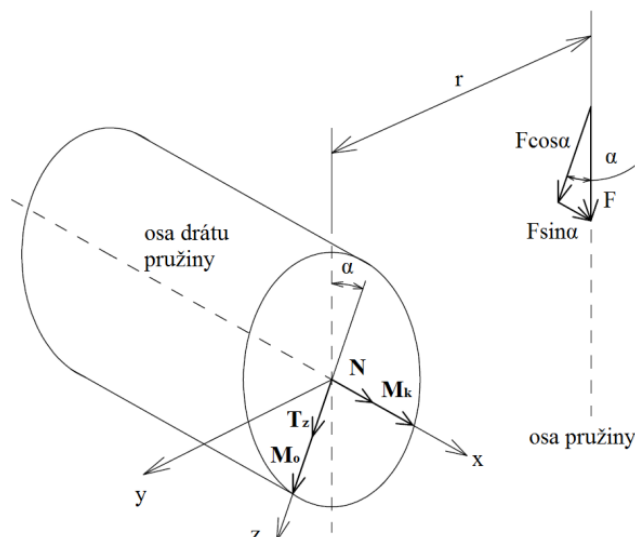
Pružinu zatížíme silou kolmou na dosedací plochy (čela). Síla působí v ose pružiny. Materiálové vlastnosti jsou známé. Řezem kolmým k ose drátu uvolníme určitý prvek a provedeme VVÚ. Zapišeme všechny použitelné podmínky rovnováhy uvolněného prvku dle obr. 9:

$$\sum F_x = 0 : N + F \cdot \sin(\alpha) = 0 \rightarrow N = -F \cdot \sin(\alpha) \quad [N] \quad (4.1)$$

$$\sum F_z = 0 : T_z + F \cdot \cos(\alpha) = 0 \rightarrow T_z = -F \cdot \cos(\alpha) \quad [N] \quad (4.2)$$

$$\sum M_x = 0 : M_k - F \cdot r \cdot \cos(\alpha) = 0 \rightarrow M_k = F \cdot r \cdot \cos(\alpha) \quad [Nm] \quad (4.3)$$

$$\sum M_y = 0 : M_o - F \cdot r \cdot \sin(\alpha) = 0 \rightarrow M_o = -F \cdot r \cdot \sin(\alpha) \quad [Nm] \quad (4.4)$$



Obr. 9 Zobrazení jednotlivých VVÚ působících v ose drátu pružiny, převzato z [2]

Tlačná pružina je namáhána kombinací tlaku, ohybu, krutu a smyku. Všechny VVÚ dosazujeme do výpočtu extrémních napětí v příčném průřezu v absolutních hodnotách, protože vzorce (4.5, 4.6, 4.7, 4.8) popisují pouze jejich velikost.

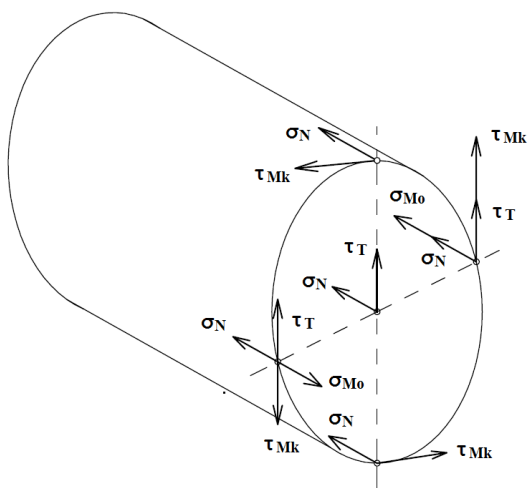
$$\sigma_N = \frac{N}{S} = \frac{4 \cdot F \cdot \sin(\alpha)}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.5)$$

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{32 \cdot F \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (4.6)$$

$$\tau_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_z}{S} = \frac{16}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos(\alpha)}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.7)$$

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 \cdot F \cdot r \cdot \cos(\alpha)}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (4.8)$$

Nyní využijeme znaménkové konvence jednotlivých VVÚ a podle nich určíme směry jednotlivých napětí v jednotlivých bodech příčného průřezu (obr. 10).



Obr. 10 Znázornění všech napětí působící na kruhový příčný průřez pružiny, převzato z [2]

V každém bodě vzniká rovinná napjatost. Nejnebezpečnější místo v příčném průřezu je bod na vnitřní straně pružiny, kde všechny normálové napětí směřují stejným směrem a všechny smykové směřují ve stejném směru. Pokud by tedy v tomto případě došlo k přetížení pružiny, došlo by k poškození materiálu na vnitřní straně drátu.

Z obr. 9 je zřejmé, že pro malé úhly stoupání  $\alpha$  cosinová složka síly  $F$  je nepatrně menší než 1, a proto lze předpokládat, že při stejném ramenu  $r$  bude tato složka vytvářet mnohem větší moment než složka sinová. Toto tvrzení lze jednoduše matematicky vyjádřit podělením vyjádřených extrémních napětí smykovým napětím  $\tau_{Mk}$  [2].

$$\frac{\sigma_N}{\tau_{Mk}} = \frac{d}{4 \cdot r} \operatorname{tg}(\alpha) \quad (4.9)$$

$$\frac{\sigma_{Mo}}{\tau_{Mk}} = 2 \operatorname{tg}(\alpha) \quad (4.10)$$

$$\frac{\tau_T}{\tau_{Mk}} = \frac{d}{3 \cdot r} \quad (4.11)$$

Po dosazení stejných hodnot do výše uvedených poměrů vyjdou velmi malá čísla až skoro zanedbatelná. Budeme-li mít malé stoupání  $\alpha$  a malé deformace (změny úhlu  $\alpha$  během zatěžování), nastane  $\sigma_{Mo} \ll \tau_{Mk}$  a  $\sigma_{Mo} \ll \tau_{Mk}$ . Pokud bude platit  $d \ll r$ , pak i  $\tau_T \ll \tau_{Mk}$ . Na základě těchto poměrů lze tedy konstatovat: „*U tlačných (tažených) válcových pružin s malým úhlem stoupání  $\alpha$  a malým poměrem  $d/r$  je v případě malých deformací významným namáháním krut. V příčných průřezích je výpočtovým modelem napjatosti smyková napjatost určená napětím  $\tau_{Mk}$  (ostatní napětí se zanedbávají)*“.

#### 4.2 Deformace (stlačení) pružiny

Tato deformační charakteristika pružiny se stanoví integrálním přístupem. Nejdříve je důležité vyjádřit celkovou délku pružiny, která je závislá na počtu závitů a úhlu stoupání pružiny. Tu lze dosadit do výpočtu energie napjatosti v krutu (vztah 4.14). Deformaci následně vypočítám dle Castiglianovy věty parciální derivací energie napjatosti přes působící sílu. [2]

$$l = 2\pi r \frac{n}{\cos(\alpha)} \quad [mm] \quad (4.12)$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad [mm^4] \quad (4.13)$$

$$W = \frac{M_k^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J_p} \quad (4.14)$$

Dosadíme-li do vzorce 4.14 vzorce 4.3, 4.12 a 4.13, dostaneme výslednou energii napjatosti: [2]

$$W = \frac{F^2 r^2 (\cos(\alpha))^2 2\pi r \frac{n}{\cos(\alpha)}}{2 \cdot G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{32 \cdot F^2 \cdot r^3 \cdot n \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot d^4}, \quad (4.15)$$

kde  $n$  je počet činných závitů pružiny. Pro malé úhly stoupání  $\alpha$  lze říct, že  $\cos(\alpha) = 1$  a vztah 4.15 přepsat na: [2]

$$W = \frac{32 \cdot F^2 \cdot r^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (4.16)$$

Deformace (stlačení neboli posuv čel pružiny) se vypočte dle Castiglianovy věty z parciální derivace vztahu 4.16 podle síly [2]:

$$u = \frac{\delta W}{\delta F} = \frac{32 \cdot F \cdot r^3 \cdot n \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot d^4}. \quad [mm] \quad (4.17)$$

Pro malé  $\alpha$  blíží se nule lze vztah 4.17 přepsat na [2]:

$$u = \frac{32 \cdot F \cdot r^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad [mm] \quad (4.18)$$

Charakteristické vlastnosti pružiny se nazývají tuhost a poddajnost. Tuhost pružiny se značí písmenem  $k$  a vypočítá se ze vztahu [2]:

$$k = \frac{F}{u} = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot r^3 \cdot n}. \quad [Nmm^{-1}] \quad (4.19)$$

Poddajnost pružiny se značí  $c$  a vypočítá se jako převrácená hodnota tuhosti [2]:

$$c = \frac{1}{k} = \frac{64 \cdot r^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad [N^{-1}mm] \quad (4.20)$$

Na závěr je také vhodné uvést výpočet stoupání jednoho závitu, které bude použito pro výpočet úhlu stoupání kónické vinuté pružiny:

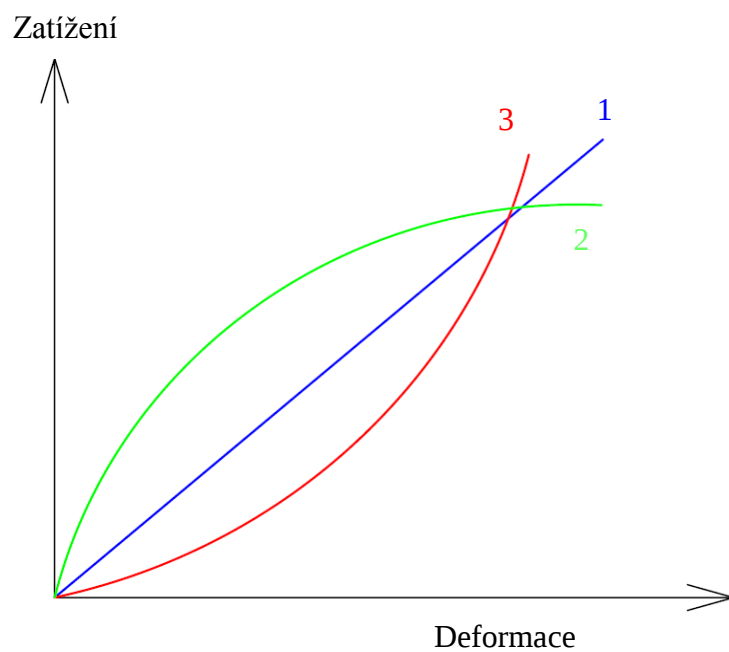
$$s = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \tan(\alpha). \quad [mm] \quad (4.21)$$

### 4.3 Závěr teoretického výpočtu válcové pružiny

Uvedené vlastnosti (4.19, 4.20) jsou konstantní pro válcovou pružinu, protože její poloměr je konstantní. Deformace je přímo úměrná stlačující síle  $F$ , tudíž jejich závislost  $F(u)$  je lineární. Uvedenou závislost je nutné znát pro každý typ pružiny. Některé mechanismy (např. pojistné spojky, atd.) jsou konstruovány tak, aby se pružina při přetížení (při zatížení určitou silou) stlačila a vykonala určený úkon.

V některých případech však lineární závislost nestačí. Při stejné síle potřebujeme větší nebo menší deformaci. Tento problém se řeší použitím pružiny s jiným tvarem než válcovým, která má jiný průběh zatěžování a tím vznikají určité výhody nebo nevýhody oproti válcové pružině. Jednotlivé průběhy mohou být (obr. 11):

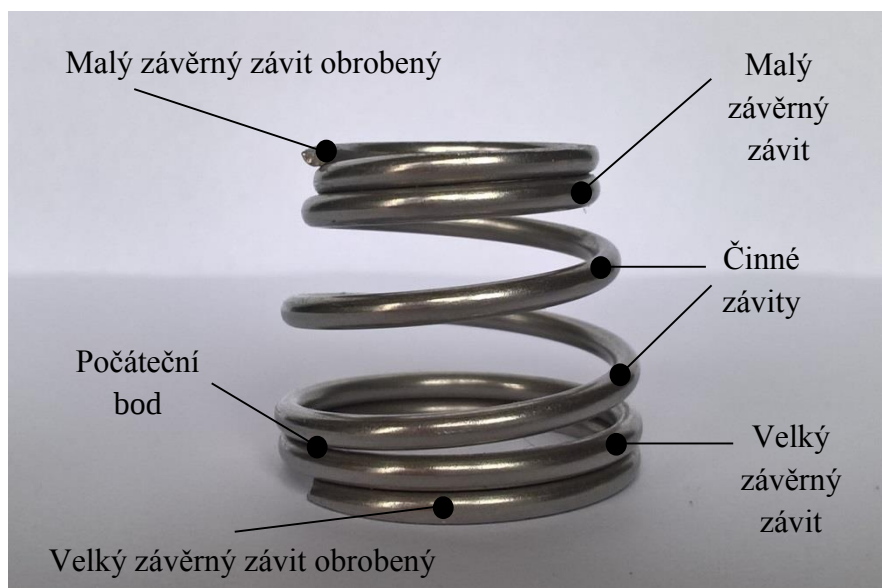
- a) Lineární (válcová šroubovitá pružina),
- b) Progresivní (např. kónická šroubovitá tlačná pružina),
- c) Degresivní (např. talířová pružina).



Obr. 11 Průběhy zatěžování pružin (1 – lineární, 2 – degresivní, 3 – progresivní), vytvořeno v grafickém editoru

## 5 Kónická tlačná vinutá pružina

### 5.1 Popis pružiny



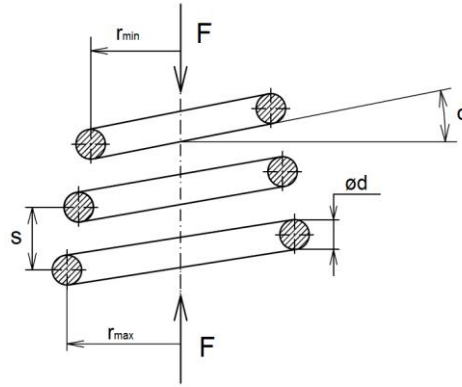
Obr. 12 Popis kónické vinuté tlačné pružiny

Kónická vinutá pružina má tvar komolého kužele. Funkční (činné) závity pružiny se tedy rozšiřují od minimálního průměru po maximální průměr (obr. 12). Tato tvarová vlastnost by měla odstranit přímé dosednutí závitů na závit, při kterém vzniká skokový nárůst síly v závislosti síla – deformace. Uvedená vlastnost dává možnost širšího použití vinutých pružin.

Závěrné závity jsou krajní závity pružiny, sousedí s činnými závity, jejichž úhel stoupání se při funkční deformaci pružiny nemění. U tlačných pružin se zpravidla používá jeden závěrný závit na obou koncích pružiny, avšak není to pravidlo, protože jak můžete vidět na obr. 11, na obou koncích pružiny jsou použity dva závěrné závity. Obrobením krajního závitu se vytvoří rovinná plocha kolmá k ose pružiny, která slouží k tomu, aby osa pružiny při zatížení byla neustále kolmá na dosedací plochu. Obrobení je od tří čtvrtin nebo poloviny závěrného závitu až po jeho volný konec a běžně se provádí u pružin s průměrem drátu  $d > 1$  mm. Smysl vinutí pružin bývá zpravidla pravotočivý, levotočivý se používá pouze tehdy, kdy je to konstrukčně nezbytné.

### 5.2 Teoretický výpočet deformace (stlačení) kónické pružiny

Teoretické vyjádření VVÚ a jednotlivých složek napětí je stejný jako u válcové pružiny (kap. 4.1). Problém by vznikl při číselném dosazení, protože poloměr  $r$  není konstantní. Výpočet jednotlivých napěťových složek není cílem této práce, avšak z uvedených poměrů napětí 4.9 až 4.11 lze konstatovat, že dominantním namáháním je krut a ostatní namáhání zaujímají tak malé procento z celkového namáhání, že je možné je zanedbat.



Obr. 13 Schéma kónické tlačné vinuté pružiny v řezu, vytvořeno v grafickém editoru

Na základě znalosti poměru  $r/d$ , lze tuto pružinu řešit přes teorii slabě zakřivených prutů. Jako u válcové pružiny se předpokládá velmi malé deformace (změny rozměrů pružiny). Poloměr křivosti pružiny si vyjádříme pomocí funkce:

$$r = r_{max} - \frac{\varphi}{\varphi_{max}} (r_{max} - r_{min}), \quad (5.1)$$

kde  $\varphi_{max}$  je maximální obvodový úhel všech činných závitů, který závisí na počtu závitů (např. pokud má pružina 2 závity,  $\varphi_{max} = 720^\circ = 4 \cdot \pi \text{ rad}$ ) a  $\varphi$  je proměnná.

Výpočet deformace (stlačení) kónické pružiny není tak jednoduchý jako pro válcovou pružinu. Nevystupují nám tu už pouze samé konstanty, ale také funkce (5.1). Tuto funkci je nutné integrovat přes délku činné části pružiny.

Nejprve si určíme akumulovanou energii napjatosti od krutu pro konečný zakřivený elementární prvek<sup>5</sup> o úhlu  $\varphi$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \frac{M_k^2 r d\varphi}{G \cdot J_p}. \quad (5.2)$$

Deformace (stlačení) se vypočte dle Castiglianovy věty z parciální derivace vztahu (5.2) podle zatěžující síly:

$$u = \frac{\delta W}{\delta F} = \int_0^\varphi \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\delta M_k}{\delta F} r d\varphi. \quad [mm] \quad (5.3)$$

Dosadíme vyjádřený krouticí moment (4.3) do vztahu (5.3) a integrál vypočteme. Nejdříve si uvedeme jeho obecný výsledek bez dosazení.

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{F \cdot r \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot J_p} \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot r d\varphi = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{F \cos^2 \alpha \cdot \left( r_{max} - \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \cdot (r_{max} - r_{min}) \right)^4}{G \cdot J \cdot (r_{max} - r_{min})} \cdot \varphi_{max} \end{aligned} \quad [mm] \quad (5.4)$$

<sup>5</sup> Elementární prvek je nekonečně malý prvek o délce  $dx$ . Přes tento prvek integrujeme funkci  $r$  a díky integračním mezím převedeme elementární prvek na makroskopickou úroveň.

### 5.3 Postup výpočtu závislosti síly na deformaci (stlačení)

Pro získání hledané závislosti síla – deformace bude použit cyklus popsáný v této kapitole. Cyklus je prováděn v matematickém softwaru MAPLE, a proto všechny matematické operace jsou přizpůsobeny jeho programovacímu jazyku. V programu Microsoft Excel jsou vypočtené výsledky tabelovány a z nich je následně závislost vykreslena.

Celý postup je založen na zkracování funkční délky činných závitů při zatěžování pružiny. Jakmile určitá část závitu dosedne na sousední závit, nemá již vliv na další průběh. Funkční délka pružiny byla tedy rozdělena na části (slabě zakřivené pruty) po  $10^\circ$  ( $\pi/18$  rad). Může být voleno i přesnější rozdělení, ale pro srovnání s experimentem uvedené rozdělení postačí. Počáteční bod je volen mezi koncem velkého závěrného závitu a začátkem 1. činného závitu. Tento bod je počátkem při nulovém zatížení a při postupném zatěžování pružiny budeme v každém kroku cyklu tento bod posouvat až do konečného bodu. Tím se bude funkční délka zkracovat.

Před samotným výpočtem je nutné si definovat několik doplňkových veličin. (viz tab. 1). Všechny úhlové veličiny jsou převedeny na jednotku radián (jednotka je bezrozměrná, ale pro jednoduchost je uváděna).

$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1} \rightarrow \Delta\varphi := \frac{\pi}{18} \quad [rad] \quad (5.5)$$

$$\varphi_i = i \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{180} \rightarrow \varphi_i := \frac{i \cdot \pi}{18} \quad [rad] \quad (5.6)$$

$$j = \frac{n \cdot 360}{\Delta\varphi} \rightarrow k := \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{\Delta\varphi} \quad (5.8)$$

$$\varphi_{max} = n \cdot 360 \rightarrow \varphi_{max} := n \cdot 2 \cdot \pi \quad [rad] \quad (5.9)$$

$$F_{1N} := 1 \text{ N} \quad (5.10)$$

| Legenda vstupních veličin pro výpočet kónické pružiny |          |                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Veličina                                              | Jednotka | Popis                                                                                                                         |
| $d$                                                   | mm       | průměr drátu pružiny (viz obr. 13)                                                                                            |
| $F_{1N}$                                              | N        | síla o velikosti 1N (slouží jako pomocná síla pro výpočet $u\varphi_i$ )                                                      |
| $i$                                                   | -        | index                                                                                                                         |
| $j$                                                   | -        | maximální (konečný) počet kroků cyklu                                                                                         |
| $n$                                                   | -        | počet činných závitů                                                                                                          |
| $s$                                                   | mm       | stoupání jednoho funkčního závitu (viz obr. 13)                                                                               |
| $u\varphi_i$                                          | mm       | průhyb modelového slabě zakřiveného prutu na délce oblouku od $\varphi_{i-1}$ po $\varphi_i$                                  |
| $\varphi_i$                                           | rad      | délka oblouku (definuje přesnou polohu na šroubovici činných závitů vůči počátku)                                             |
| $\varphi_{max}$                                       | rad      | maximální obvodový úhel činných závitů                                                                                        |
| $\Delta u_i$                                          | mm       | přírůstek deformace (posuvu čel)                                                                                              |
| $\Delta\varphi$                                       | rad      | rozdíl délek oblouku mezi jednotlivými kroky (pro všechny části rozdělení funkční délky je stejný: $\Delta\varphi = \pi/18$ ) |

Tab. 1 Vstupní veličiny výpočtu, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

1. krok si definujeme manuálně (bez cyklování). Označíme ho:

$$i := 1 \quad (5.11)$$

Dále si definujeme délku oblouku  $\varphi_i$  pro první krok. Do vztahu 5.6 dosadíme hodnotu 5.11:

$$\varphi_1 := \frac{\pi}{18} \quad [rad] \quad (5.12)$$

Na intervalu oblouku od počátku po  $\varphi_1$  vypočteme průhyb při zatížení pružiny silou  $F_{1N}$ .

$$u_{\varphi_1} := \int_0^{\varphi_1} \frac{F_{1N} r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \quad [mm] \quad (5.13)$$

Sílu  $F_{1N}$  můžeme dosadit do vztahu 5.13, avšak výsledek se nezmění. Budeme násobit silou o velikosti 1 N.

$$u_{\varphi_1} := \int_0^{\varphi_1} \frac{1 \cdot r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \quad [mm] \quad (5.14)$$

Tím jsme dostali průhyb modelového slabě zakřiveného prutu na délce oblouku  $\varphi l$ . Jestliže tento průhyb dosáhne hodnoty stoupání závitu na této délce, dojde na ní k dosednutí závitů. Z následujícího vztahů tedy určíme sílu  $F_1$  potřebnou pro dosednutí závitů na délce oblouku  $\varphi l$ .

$$u_{\varphi_1}(F_1) = F_1 \int_0^{\varphi_1} \frac{r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi = (ns - nd) \frac{\Delta\varphi}{\varphi_{max}} \quad [mm] \quad (5.15)$$

$$F_1 = \frac{n \cdot (s - d) \cdot \Delta\varphi}{\varphi_{max} \cdot \int_0^{\varphi_1} \frac{r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi} \quad [N] \quad (5.16)$$

A integrál ve jmenovateli ze vztahu 5.16 můžu přepsat na posuv  $u_{\varphi_1}$ .

$$F_1 := \frac{n \cdot (s - d) \cdot \Delta\varphi}{\varphi_{max} \cdot u_{\varphi_1}} \quad [N] \quad (5.17)$$

Pro uvedenou sílu nyní spočítáme posuv (stlačení) celé činné části pružiny. Získáme tím hodnotu stlačení pružiny při zkrácení funkční délky o  $\varphi l$

$$u_1 := \int_0^{\varphi_{max}} \frac{F_1 r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \quad [mm] \quad (5.18)$$

Výpočtem  $F_1$  a  $u_1$  jsme získali první bod nelineární závislosti  $F(u)$ .

Nyní celý postup budeme opakovat pomocí cyklů pro všechny části funkční délky (slabě zakřivené pruty), akorát ve vztazích (5.14, 5.18) budeme měnit integrální meze (z důvodu zkracování funkční délky) a ve vztahu (5.18) změníme sílu na přírůstek síly oproti předchozímu kroku. Nejdříve si však definujeme všechny hodnoty  $\varphi_i$  pomocí cyklu for. Cyklus definujeme od kroku 2 až po konečný krok k.

$$\text{for } i \text{ from } 2 \text{ by } 1 \text{ to } j \text{ do } \varphi_i := \frac{\pi}{18} \text{ end do} \quad (5.19)$$

V prvním kroku se nám už funkční délka zkrátila o první část. Další části si definujeme změnou integrálních mezí ve vztahu (5.14).

$$\text{for } i \text{ from } 2 \text{ by } 1 \text{ to } j \text{ do } u\varphi_i := \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{F_{1N} r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \text{ end do} \quad (5.20)$$

Dále vypočítáme jednotlivé síly potřebné pro dosednutí jednotlivých částí závitů o délce oblouku od  $\varphi_{i-1}$  po  $\varphi_i$ .

$$\text{for } i \text{ from } 2 \text{ by } 1 \text{ to } j \text{ do } F_i := \frac{n \cdot (s - d) \cdot \Delta\varphi}{\varphi_{max} \cdot u\varphi_i} \text{ end do} \quad (5.21)$$

Ve vztahu (5.18) změníme dolní mez integrálu na délku oblouku předchozího kroku  $\varphi_{i-1}$ , aby výpočet (5.22) již počítal se zkrácenou funkční délkou. Integrál lze spočítat pouze zatížením dané přírůstkem síly  $F_i - F_{i-1}$ , protože při dosazení pouze síly  $F_i$  bychom do výsledku nezapočítávali předchozí krok a výsledky by byly chybné. Touto změnou vypočítáme přírůstky deformace  $\Delta u_1$ .

$$\text{for } i \text{ from } 2 \text{ by } 1 \text{ to } j \text{ do } \Delta u_1 := \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{max}} \frac{(F_i - F_{i-1}) r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \text{ end do} \quad (5.22)$$

Hodnoty  $u_1$ ,  $F_1$ ,  $F_i$  a  $\Delta u_i$  zkopírujeme do tabulky v programu Microsoft Excel. Jednoduchým součtem hodnoty  $u_1$  a  $\Delta u_2$  dostaneme hodnotu  $u_2$ , a tento postup opakují pro všechny kroky (tab. 2). Pro úplnost výpočtu je vhodné vypočítat celkovou a inkrementální tuhost.

Tuhost celková je počítána jako poměr síly a deformace, zatímco inkrementální tuhost je poměr jejich přírůstků. Hodnota inkrementální<sup>6</sup> tuhosti značí směrnici (tečnu) pro jednotlivé body křivky. Pro nelineární průběh inkrementální tuhost roste díky výraznějšímu zakřivení křivky. Pokud by teoreticky nastal svislý průběh, její hodnota by byla nekonečnu velká a to je nereálné. Pro lineární průběh má inkrementální tuhost stejnou hodnotu jako celková tuhost (poměr je konstantní).

Celková tuhost:

$$k_{celk} = \frac{F_i}{u_i}. \quad [Nmm^{-1}] \quad (5.23)$$

Inkrementální tuhost:

$$k_{inkr} = \frac{\Delta F}{\Delta u} = \frac{F_i - F_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}. \quad [Nmm^{-1}] \quad (5.24)$$

Pro lineární průběh lze celkovou tuhost spočítat ze vztahu (5.25).

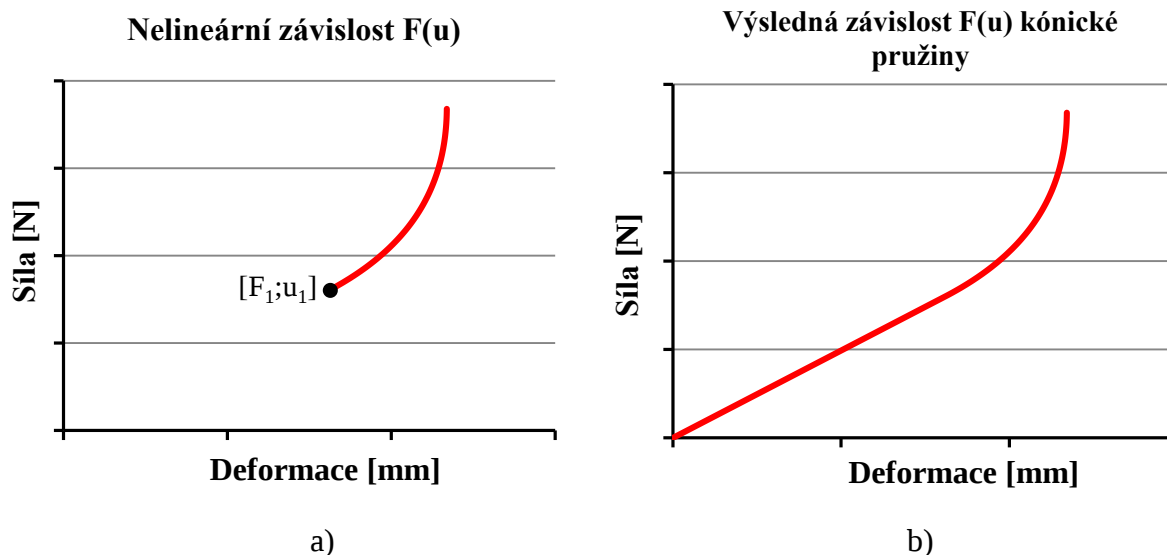
$$k_{celk} = \frac{F_1}{u_1} \quad [Nmm^{-1}] \quad (5.25)$$

<sup>6</sup> Slovo inkrementální lze přeložit jako přírůstkový.

| Přírůstky deformace<br>$\Delta u$ [mm] | Deformace<br>$u$ [mm]    | Síla<br>$F$ [mm] | Celková<br>tuhost<br>$k_{\text{celk}}$ [N/mm] | Inkrementální<br>tuhost<br>$k_{\text{inkr}}$ [N/mm] |
|----------------------------------------|--------------------------|------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| -                                      | $u_1$                    | $F_1$            | $k_{\text{celk1}} = F_1/u_1$                  | -                                                   |
| $\Delta u_2$                           | $u_2 = u_1 + \Delta u_2$ | $F_2$            | $k_2 = F_2/u_2$                               | $k_{\text{inkr2}} = (F_2 - F_1)/(u_2 - u_1)$        |
| $\Delta u_3$                           | $u_3 = u_2 + \Delta u_3$ | $F_3$            | $k_3 = F_3/u_3$                               | $k_{\text{inkr3}} = (F_3 - F_2)/(u_3 - u_2)$        |
| $\Delta u_4$                           | $u_4 = u_3 + \Delta u_4$ | $F_4$            | $k_4 = F_4/u_4$                               | $k_{\text{inkr4}} = (F_4 - F_3)/(u_4 - u_3)$        |
| .                                      | .                        | .                | .                                             | .                                                   |
| .                                      | .                        | .                | .                                             | .                                                   |

Tab. 2 Tabulka výsledných hodnot

Z výsledných hodnot vytvoříme závislost  $F(u)$  (obr. 14a). Křivka se nevykreslí celá, protože vypočtená síla  $F_1$  a deformace  $u_1$  nejsou nulové.



Obr. 14 a) Nelineární závislost b) Výsledná závislost

Z Experimentálního měření je známo, že průběh zatěžování kónické pružiny je nejdříve lineární a po dosažení určité síly začne být průběh nelineární. Spojíme tedy bod  $[F_1; u_1]$  s počátkem  $[0;0]$  v obr. 14b a dostaneme celý průběh zatěžování pružiny. Lze tedy konstatovat, že **kónická vinutá pružina se chová lineárně až do dosažení určité síly, při které se průběh deformace mění na progresivní**. Bod  $[F_1; u_1]$  je dán zde uvedeným výpočtem (teoreticky) a nemusí ve skutečnosti přesně znamenat konec lineární části, protože experimentální hodnoty mají určitou chybu.

## 6 Aplikované výpočty a experiment

Po teoretické části práce přechází k výpočtu konkrétní kónické vinuté pružiny. Podle ní si vytvoříme dvě válcové pružiny. Jedna bude mít konstantní poloměr minimální poloměr a druhá maximální poloměr pružiny kónické, abychom ve výpočtu získali přesné porovnání jejich závislostí. Ostatní rozměrové a materiálové vlastnosti zůstanou pro všechny 3 pružiny stejné.

V této kapitole jsou uvedeny výpočty každé pružiny a experiment, se kterým jsou všechny výsledky srovnávány. Výsledné hodnoty a závislosti  $F(u)$  jsou zobrazeny v kap. 7. Zde bude také ověřena správnost teoretického výpočtu kónické pružiny (kontroly jsou uváděny zde, protože potřebují výsledné hodnoty výpočtů).

### 6.1 Vlastnosti kónické pružiny

Vypracováno podle [6], [7]



a)



b)

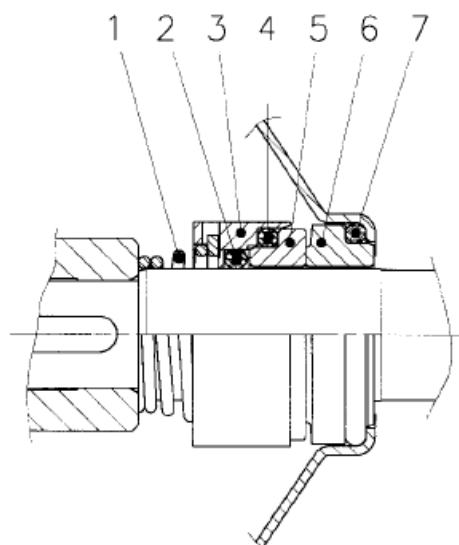
Obr. 15 a) Kónická vinutá pružina, b) Odstředivé čerpadlo LOWARA, převzato z [6]

Na obr. 15a je zobrazena kónická vinutá pružina, podle které byl výpočet vytvořen. Pružina má 2 funkční závity a 4 závěrné závity. 2 krajní závity jsou obrobena pro lepší kontakt s dosedacím a tlačným povrchem.

Pružina se používá v mechanické ucpávce horizontálního odstředivého čerpadla Lowara typu SH (obr. 15b). Čerpadlo slouží pro dopravu neabrazivních a málo-agresivních kapalin. Funkce ucpávky je utěsnit čerpadlo proti úniku vody. Oběžné kolo stlačí pružinu tak, aby rotující keramický prstenec (Rotating ring) byl přitlačován k pevnému karbonovému prstenci (Fixed ring) s těsněním. Celá mechanická ucpávka je chlazena proudící kapalinou. Jednotlivé součásti jsou popsány v tab. 3 a celá mechanická ucpávka je zobrazena v řezu na obr. 16.

| POS. | COMPONENT                   | MATERIAL                 |
|------|-----------------------------|--------------------------|
| 1    | Spring                      | AISI 316 stainless steel |
| 2    | Shaft gasket                | FPM                      |
| 3    | Armature                    | AISI 316 stainless steel |
| 4    | Rotating assembly gasket    | FPM                      |
| 5    | Rotating assembly seal ring | Ceramic                  |
| 6    | Fixed assembly ring         | Carbon                   |
| 7    | Fixed assembly gasket       | FPM                      |

Tab. 3 Součásti mechanické ucpávky, převzato z [7]



Obr. 16 Mechanická ucpávka v řezu, převzato z [7]

Materiál pružiny je austenitická nerezová ocel AISI 316 (ČSN 17349). Její modul pružnosti v tahu je 193 000 MPa a poissonovo číslo je  $\mu=0,3$ . Z těchto parametrů jsme schopni vypočítat modul pružnosti ve smyku, který využijeme pro výpočet.

$$G := \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{193\,000}{2(1 + 0,3)} = 74230,8 \text{ MPa} \quad (6.1)$$

Dále je nutné znát její rozměry. Jako měřidlo bylo použito posuvné měřítko. Toto měřidlo pracuje s určitou nepřesností řádově v jedné desetině milimetru, avšak na přesnost výsledku to mělo minimální vliv (stejně jako nepřesnost lidského faktoru). Pružina byla postavena na desku stolu a od spodní hrany desky byly měřeny výšky jednotlivých závitů. Pak jsme odečetli šířku desky, výšku předchozího závitu a půlku průměru drátu a získali jsme jednotlivá stoupání pro daný obvodový úhel jednotlivých funkčních závitů. Pro výpočet je nutné také znát její základní rozměry (viz tab. 4).

| Naměřené rozměry pružiny                                  |      |      |      |     |     |
|-----------------------------------------------------------|------|------|------|-----|-----|
| Stoupání jednotlivých závitů pro daný úhel $\varphi$ [mm] |      |      |      |     |     |
| úhel $\varphi$ závitu [°]                                 | 0    | 90   | 180  | 270 | 360 |
| Velký závěrný závit                                       | 0    | 0,88 | 0,68 | 0,9 | 2,8 |
| První (velký) činný závit                                 | 0    | 3    | 4,2  | 6,3 | 8,7 |
| Druhý (malý) činný závit                                  | 0    | 2,5  | 4    | 6,6 | 8,7 |
| Malý závěrný závit                                        | 0    | 1,26 | 1,1  | 1,4 | 2,4 |
| Základní rozměry pružiny [mm]                             |      |      |      |     |     |
| Délka pružiny v nezátíženém stavu $l_0$                   | 27,2 |      |      |     |     |
| Minimální průměr činných závitů $D_{\min}$                | 23,9 |      |      |     |     |
| Maximální průměr činných závitů $D_{\max}$                | 31,6 |      |      |     |     |
| Průměr drátu pružiny $d$                                  | 2,6  |      |      |     |     |

Tab. 4 Rozměry pružiny, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

Polární kvadratický moment průřezu lze vypočítat z průměru drátu pružiny.

$$d := 2.6 \text{ mm} \quad (6.2)$$

$$J_p := \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2,6^4}{32} = 4.486 \text{ mm}^4 \quad (6.3)$$

Z naměřených průměrů pružiny určíme maximální a minimální poloměr. Poměry jednotlivých poloměrů zakřivení k průměru drátu udávají nepřesnost výpočtu při použití teorie slabě zakřivených prutů dle obr. 7.

$$r_{min} := \frac{D_{min}}{2} = \frac{23.9}{2} = 11.95 \text{ mm} \quad (6.4)$$

$$r_{max} := \frac{D_{max}}{2} = \frac{31,6}{2} = 15.8 \text{ mm} \quad (6.5)$$

$$\frac{r_{min}}{d} = \frac{11.95}{2.6} = 4.6 \rightarrow \Delta\sigma_z(r_{min}) \approx 9.5 \% \quad (6.6)$$

$$\frac{r_{max}}{d} = \frac{15.8}{2.6} = 6.1 \rightarrow \Delta\sigma_z(r_{max}) \approx 7 \% \quad (6.7)$$

Úhel stoupání získáme ze čtvrtiny obvodu závitu a stoupání prvního činného závitu pro  $90^\circ$ , protože tam je minimální zmenšení poloměru. Výsledek převedu na jednotku radián.

$$\tan(\alpha) := \frac{2.7}{\frac{\pi \cdot D_{max}}{4}} = \frac{2.7}{\frac{\pi \cdot 31.6}{4}} \quad (6.8)$$

$$\alpha := \arctan\left(\frac{2.7 \cdot 4}{\pi \cdot 31.6}\right) \cong 6^\circ = \frac{\pi}{30} \text{ rad} \quad (6.9)$$

Do výpočtového programu je nutné definovat i ostatní veličiny.

$$n := 2 \quad (6.10)$$

$$s := 8.7 \text{ mm} \quad (6.11)$$

$$\varphi_{max} := n \cdot 2 \cdot \pi = 4 \cdot \pi \text{ rad} \quad (6.12)$$

$$j := \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{\Delta\varphi} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{18}} = 72 \quad (6.13)$$

## 6.2 Výpočet válcových pružin

Tento výpočet je pro dvě válcové pružiny. Pro výpočet deformace válcových pružin použijeme vzorec (4.17). Za poloměr budeme dosazovat maximální poloměr  $r_{max}$  a minimální poloměr  $r_{min}$  kónické pružiny. Výsledné průběhy válcových pružin jsou zobrazeny v obr. 22 pro porovnání s průběhy kónické pružiny.

Nejdříve si zvolíme počet sil, pro které chceme vypočítat deformaci. Zvolený počet je libovolný, protože se nejedná o skutečné pružiny a cílem je pouze získat závislost  $F(u)$

(teoreticky by stačilo vypočítat 1 nenulový bod v závislosti  $F(u)$  a lineárně spojit s bodem  $[0,0]$ ). Využijeme cyklus `for` jako v kap. 5.3.

### 6.2.1 Válcová pružina s minimálním poloměrem

$$\text{for } i \text{ from } 1 \text{ by } 1 \text{ to } 200 \text{ do } F_i := i \text{ end do} \quad (6.14)$$

Uvedené vlastnosti pružiny v kapitole 6.1 dosadím do vzorce (4.17) a vzorec vypočtu pro každou sílu z cyklu (6.14).

$$\text{for } i \text{ from } 1 \text{ by } 1 \text{ to } 100 \text{ do } u_{50} = \frac{64 \cdot F_i \cdot r_{\max}^3 \cdot \cos(\alpha) \cdot n}{G \cdot d^4} \text{ end do} \quad (6.15)$$

Příklad výpočtu deformace válcové pružiny s minimálním poloměrem pro sílu např. 50 N:

$$u_{10} = \frac{64 \cdot F_{50} \cdot r_{\min}^3 \cdot \cos(\alpha) \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{64 \cdot 50 \cdot 11,95^3 \cdot \cos(6) \cdot 2}{74230,8 \cdot 2,6^4} = 3,2 \text{ mm} \quad (6.16)$$

Pro srovnání válcových pružin je vhodné vypočítat tuhost pružiny (popř. poddajnost), které ukazují, jak se mění vlastnosti pružiny v závislosti na jejím poloměru.

$$k = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot r_{\min}^3 \cdot n} = \frac{74230,8 \cdot 2,6^4}{64 \cdot 11,95^3 \cdot 2} = 15,62 \text{ mm} \quad (6.17)$$

### 6.2.2 Válcová pružina s maximálním poloměrem

Postup pro válcovou pružinu s minimálním poloměrem opakuji pro výpočet válcové pružiny s maximálním poloměrem.

$$\text{for } i \text{ from } 1 \text{ by } 1 \text{ to } 100 \text{ do } F_i := i \text{ end do} \quad (6.18)$$

$$\text{for } i \text{ from } 1 \text{ by } 1 \text{ to } 100 \text{ do } u_{50} = \frac{64 \cdot F_i \cdot r_{\max}^3 \cdot \cos(\alpha) \cdot n}{G \cdot d^4} \text{ end do} \quad (6.19)$$

Příklad výpočtu deformace válcové pružiny s maximálním poloměrem pro sílu např. 50 N:

$$u_{50} = \frac{64 \cdot F_{50} \cdot r_{\max}^3 \cdot \cos(\alpha) \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{64 \cdot 50 \cdot 15,8^3 \cdot \cos(6) \cdot 2}{74230,8 \cdot 2,6^4} = 7,37 \text{ mm.} \quad (6.20)$$

$$k = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot r_{\max}^3 \cdot n} = \frac{74230,8 \cdot 2,6^4}{64 \cdot 15,8^3 \cdot 2} = 6,82 \text{ mm} \quad (6.21)$$

### 6.3 Výpočet kónické pružiny

Definované veličiny z kap. 6.1 lze dosadit do vztahu (5.1).

$$r := r_{\max} - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}(r_{\max} - r_{\min}) = 15,8 - \frac{\varphi}{4 \cdot \pi}(15,8 - 11,95) \quad (6.22)$$

Postup výpočtu z kap. 5.3 zde zopakujeme již s dosazenými hodnotami z kap. 6.1.

$$i := 1 \quad (6.23)$$

$$\varphi_1 := \frac{\pi}{18} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} u\varphi_1 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{F_{1N} r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi = \\ &= \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{F_{1N} \cdot \left( r_{\max} - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} (r_{\max} - r_{\min}) \right)^3 \cdot (\cos(\alpha))^2}{GJ_p} d\varphi \\ &== \int_0^{4\pi} \frac{1 \cdot \left( 15.8 - \frac{\varphi}{4\pi} (15.8 - 11.95) \right)^3 \cdot (\cos(6))^2}{74230.8 \cdot 2.6^4} d\varphi = \\ &= 0.002034205262 \text{ mm} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$F_1 = \frac{n \cdot (s - d) \cdot \Delta\varphi}{\varphi_{\max} \cdot u\varphi_1} = \frac{2 \cdot (8.7 - 2.6) \cdot \frac{\pi}{18}}{4\pi \cdot 0.002026775991} = 82.47829309 \text{ N} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{F_1 r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi = \\ &= \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{F_1 \cdot \left( r_{\max} - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} (r_{\max} - r_{\min}) \right)^3 \cdot (\cos(\alpha))^2}{GJ_p} d\varphi = \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{82.78062230 \cdot \left( 15.8 - \frac{\varphi}{4\pi} (15.8 - 11.95) \right)^3 \cdot (\cos(6))^2}{74230.8 \cdot 2.6^4} d\varphi = \\ &= 8.380694485 \text{ mm} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 2 \textbf{ by } 1 \textbf{ to } 72 \textbf{ do } \varphi_1 := \frac{\pi}{18} \textbf{ end do} \quad (6.28)$$

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 2 \textbf{ by } 1 \textbf{ to } 72 \textbf{ do } u_1 := \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{1 \cdot r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \textbf{ end do} \quad (6.29)$$

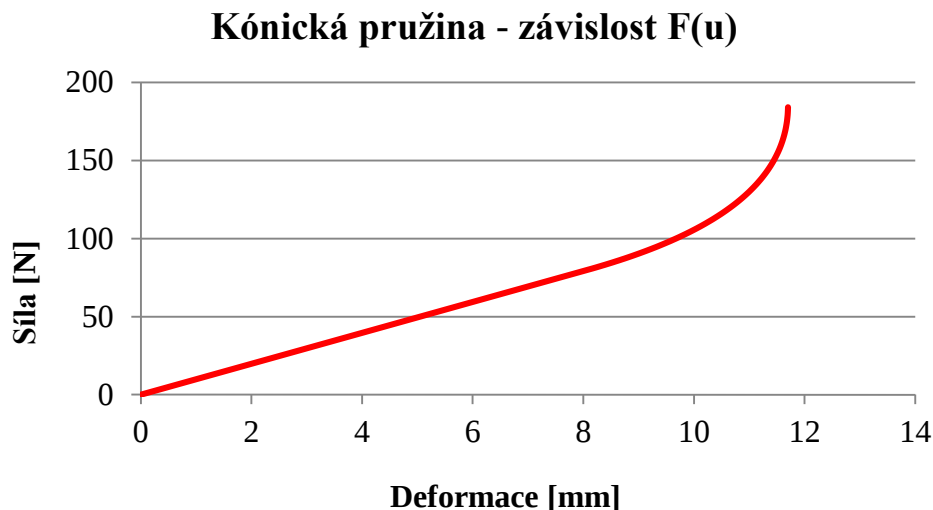
$$\textbf{for } i \textbf{ from } 2 \textbf{ by } 1 \textbf{ to } 72 \textbf{ do } F_1 := \frac{2 \cdot (8.7 - 2.6) \cdot \frac{\pi}{18}}{4 \cdot \pi \cdot u\varphi_i} \textbf{ end do} \quad (6.30)$$

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 2 \textbf{ by } 1 \textbf{ to } 72 \textbf{ do } \Delta u_1 := \int_{\varphi_{i-1}}^{4\pi} \frac{(F_i - F_{i-1}) r \cos(\alpha)}{GJ_p} r \cos(\alpha) r d\varphi \textbf{ end do} \quad (6.31)$$

Síly  $F_i$ , vypočtená deformace (posuv)  $u_i$  (6.27) a přírůstky posuvu  $\Delta u_i$  (6.31) byly vloženy do tab. 5. Z těchto hodnot lze vypočítat výsledné deformace, celkové a inkrementální tuhosti.

| <b>Kónická pružina - Analytický výpočet</b> |                       |                                       |                                          |                 |                       |                                       |                                          |
|---------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|------------------------------------------|-----------------|-----------------------|---------------------------------------|------------------------------------------|
| Síla<br>$F [N]$                             | Deformace<br>$u [mm]$ | Celková<br>tuhost<br>$k_{celk}[N/mm]$ | Inkrement.<br>tuhost<br>$k_{inkr}[N/mm]$ | Síla<br>$F [N]$ | Deformace<br>$u [mm]$ | Celková<br>tuhost<br>$k_{celk}[N/mm]$ | Inkrement.<br>tuhost<br>$k_{inkr}[N/mm]$ |
| 0.0                                         | 0.0                   | 0.0                                   | 0.0                                      | 121.9           | 11.0                  | 11.1                                  | 24.8                                     |
| 82.5                                        | 8.4                   | 9.8                                   | -                                        | 123.3           | 11.0                  | 11.2                                  | 25.6                                     |
| 83.3                                        | 8.5                   | 9.8                                   | 10.0                                     | 124.7           | 11.1                  | 11.3                                  | 26.6                                     |
| 84.2                                        | 8.5                   | 9.8                                   | 10.2                                     | 126.2           | 11.1                  | 11.3                                  | 27.5                                     |
| 85.0                                        | 8.6                   | 9.9                                   | 10.5                                     | 127.7           | 11.2                  | 11.4                                  | 28.6                                     |
| 85.9                                        | 8.7                   | 9.9                                   | 10.7                                     | 129.2           | 11.2                  | 11.5                                  | 29.7                                     |
| 86.8                                        | 8.8                   | 9.9                                   | 10.9                                     | 130.8           | 11.3                  | 11.6                                  | 30.9                                     |
| 87.7                                        | 8.9                   | 9.9                                   | 11.1                                     | 132.3           | 11.3                  | 11.7                                  | 32.2                                     |
| 88.6                                        | 9.0                   | 9.9                                   | 11.4                                     | 133.9           | 11.4                  | 11.8                                  | 33.5                                     |
| 89.6                                        | 9.0                   | 9.9                                   | 11.6                                     | 135.5           | 11.4                  | 11.9                                  | 35.0                                     |
| 90.5                                        | 9.1                   | 9.9                                   | 11.9                                     | 137.2           | 11.5                  | 12.0                                  | 36.6                                     |
| 91.5                                        | 9.2                   | 9.9                                   | 12.2                                     | 138.8           | 11.5                  | 12.1                                  | 38.3                                     |
| 92.4                                        | 9.3                   | 10.0                                  | 12.4                                     | 140.5           | 11.6                  | 12.2                                  | 40.2                                     |
| 93.4                                        | 9.3                   | 10.0                                  | 12.7                                     | 142.2           | 11.6                  | 12.3                                  | 42.2                                     |
| 94.4                                        | 9.4                   | 10.0                                  | 13.0                                     | 144.0           | 11.6                  | 12.4                                  | 44.4                                     |
| 95.4                                        | 9.5                   | 10.0                                  | 13.3                                     | 145.8           | 11.7                  | 12.5                                  | 46.8                                     |
| 96.5                                        | 9.6                   | 10.1                                  | 13.7                                     | 147.6           | 11.7                  | 12.6                                  | 49.5                                     |
| 97.5                                        | 9.7                   | 10.1                                  | 14.0                                     | 149.4           | 11.7                  | 12.7                                  | 52.4                                     |
| 98.6                                        | 9.7                   | 10.1                                  | 14.3                                     | 151.3           | 11.8                  | 12.8                                  | 55.7                                     |
| 99.6                                        | 9.8                   | 10.2                                  | 14.7                                     | 153.2           | 11.8                  | 13.0                                  | 59.4                                     |
| 100.7                                       | 9.9                   | 10.2                                  | 15.1                                     | 155.1           | 11.8                  | 13.1                                  | 63.5                                     |
| 101.8                                       | 9.9                   | 10.2                                  | 15.5                                     | 157.1           | 11.9                  | 13.2                                  | 68.2                                     |
| 102.9                                       | 10.0                  | 10.3                                  | 15.9                                     | 159.1           | 11.9                  | 13.4                                  | 73.5                                     |
| 104.1                                       | 10.1                  | 10.3                                  | 16.3                                     | 161.1           | 11.9                  | 13.5                                  | 79.7                                     |
| 105.2                                       | 10.2                  | 10.4                                  | 16.7                                     | 163.2           | 11.9                  | 13.7                                  | 87.0                                     |
| 106.4                                       | 10.2                  | 10.4                                  | 17.2                                     | 165.3           | 12.0                  | 13.8                                  | 95.5                                     |
| 107.6                                       | 10.3                  | 10.5                                  | 17.7                                     | 167.4           | 12.0                  | 14.0                                  | 105.7                                    |
| 108.8                                       | 10.4                  | 10.5                                  | 18.2                                     | 169.6           | 12.0                  | 14.1                                  | 118.3                                    |
| 110.0                                       | 10.4                  | 10.6                                  | 18.7                                     | 171.8           | 12.0                  | 14.3                                  | 133.9                                    |
| 111.2                                       | 10.5                  | 10.6                                  | 19.2                                     | 174.0           | 12.0                  | 14.5                                  | 154.1                                    |
| 112.5                                       | 10.5                  | 10.7                                  | 19.8                                     | 176.3           | 12.0                  | 14.6                                  | 181.0                                    |
| 113.8                                       | 10.6                  | 10.7                                  | 20.4                                     | 178.7           | 12.1                  | 14.8                                  | 218.7                                    |
| 115.1                                       | 10.7                  | 10.8                                  | 21.0                                     | 181.0           | 12.1                  | 15.0                                  | 275.1                                    |
| 116.4                                       | 10.7                  | 10.8                                  | 21.7                                     | 183.4           | 12.1                  | 15.2                                  | 369.3                                    |
| 117.7                                       | 10.8                  | 10.9                                  | 22.4                                     | 185.9           | 12.1                  | 15.4                                  | 557.7                                    |
| 119.1                                       | 10.8                  | 11.0                                  | 23.1                                     | 188.4           | 12.1                  | 15.6                                  | 1122.9                                   |
| 120.5                                       | 10.9                  | 11.0                                  | 23.9                                     |                 |                       |                                       |                                          |

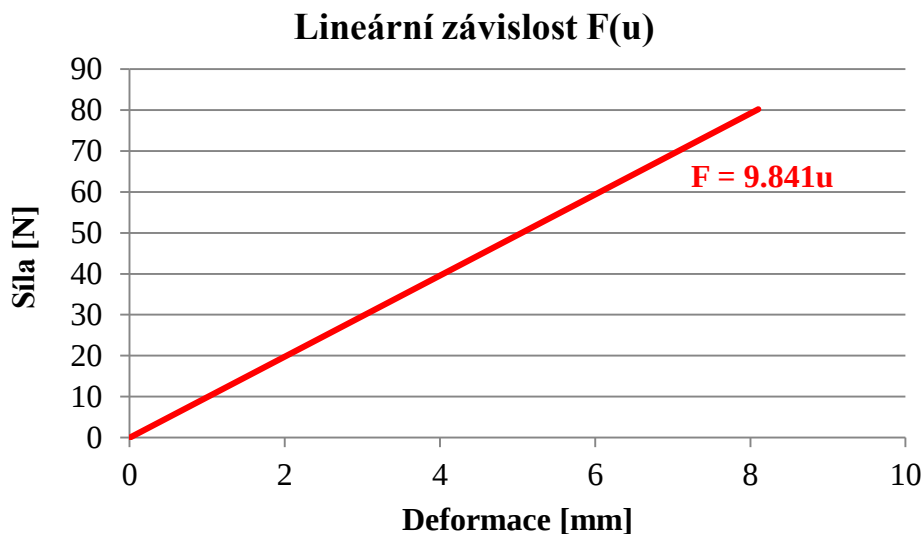
Tab. 5 Vypočtené hodnoty kónické pružiny  
Z tabelovaných hodnot již lze vykreslit hledanou závislost síla – deformace (obr. 17).



Obr. 17 Závislost F(u) aplikovaného výpočtu kónické pružiny, vytvořeno v programu Microsoft Excel

Celkovou tuhost pro lineární část průběhu zatěžování je konstantní. Vypočítáme ji z podílu síly a deformace z prvního kroku a značí směrnici přímky v obr. 18.

$$k_{celk} = \frac{F_1}{u_1} = \frac{82.478}{8.381} = 9.841 \text{ Nmm}^{-1} \quad (6.32)$$



Obr. 18 Lineární průběh zatěžování kónické pružiny, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

#### 6.4 1. kontrola výpočtu kónické pružiny

Kontrola je zakládána na rovnosti poloměrů  $r_{min} = r_{max}$  ve výpočtu v kap. 6.3. Při této rovnosti se funkce (6.22) stane konstantou ( $r = r_{max}$ ). Cílem této rovnosti je ověřit si, zda vytvořený výpočet kónické pružiny je shodný s výpočtem válcové pružiny, který je ověřený ze zdroje [2]. Pokud se závislost F(u) z této kontroly bude shodovat se závislostí F(u) válcové pružiny  $r_{max}$ , kontrola bude úspěšná.

$$r_{min} := r_{max} \quad (6.33)$$

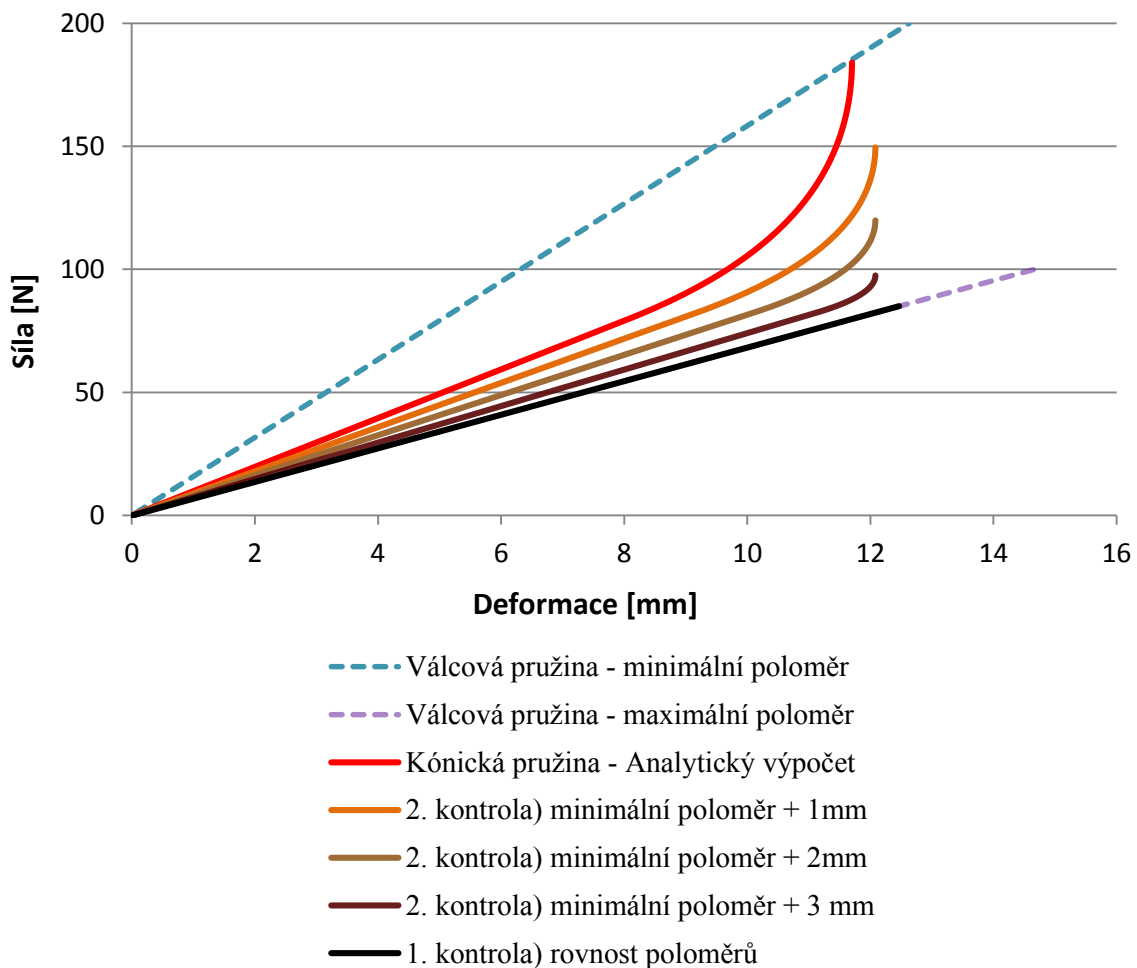
$$r := r_{max} - \frac{\varphi}{\varphi_{max}}(r_{max} - r_{min}) = r_{max} - \frac{\varphi}{\varphi_{max}}(r_{max} - r_{max}) = r_{max} \quad [mm] \quad (6.34)$$

Provedeme výpočet a zjistíme, že díky konstantnímu poloměru nám program vypočte pouze 1 bod závislosti  $F(u)$ , který propojíme s bodem  $[0;0]$ .

$$F_1 := 82.4 \text{ N} \quad (6.35)$$

$$u_1 := 12.08 \text{ mm} \quad (6.36)$$

Z obr. 19 lze usoudit, že vypočtená závislost  $F(u)$  pro kontrolu se shoduje se závislostí válcové pružiny s maximálním poloměrem, tudíž kontrola je splněna.



Obr. 19 Kontroly výpočtu kónické vinuté pružiny, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

## 6.5 2. kontrola výpočtu kónické pružiny

V 2. kontrole se bude měnit konicita pružiny tak, že k poloměru  $r_{min}$  budeme přičítat po krocích 1 mm (ve výpočtu v kap. 6.3), neboli zmenšovat rozdíl mezi maximálním a

minimálním poloměrem. Pokud se křivky z jednotlivých kroků budou přibližovat k závislosti válcové pružiny s maximálním poloměrem, kontrola je správná.

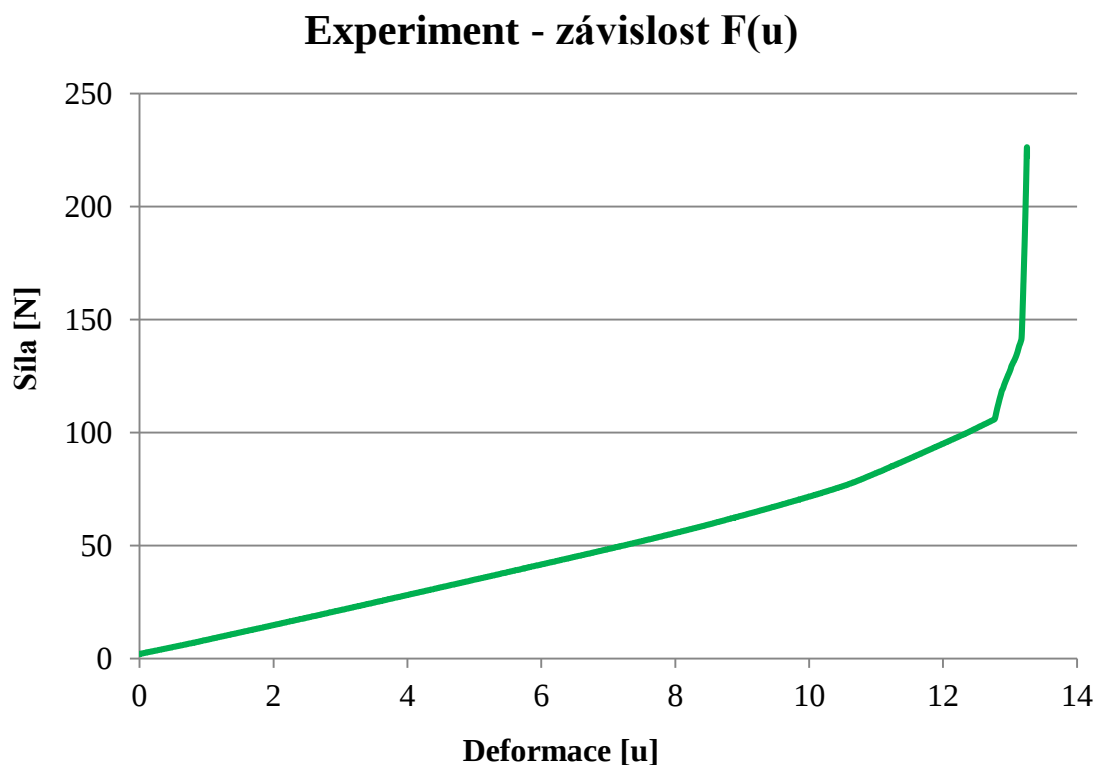
Křivky jsou zobrazeny v obr. 20, kde se jednotlivé křivky postupně přibližují k závislosti válcové pružiny s maximálním poloměrem, tudíž 2. kontrola výpočtu je splněna.

## 6.6 Experiment

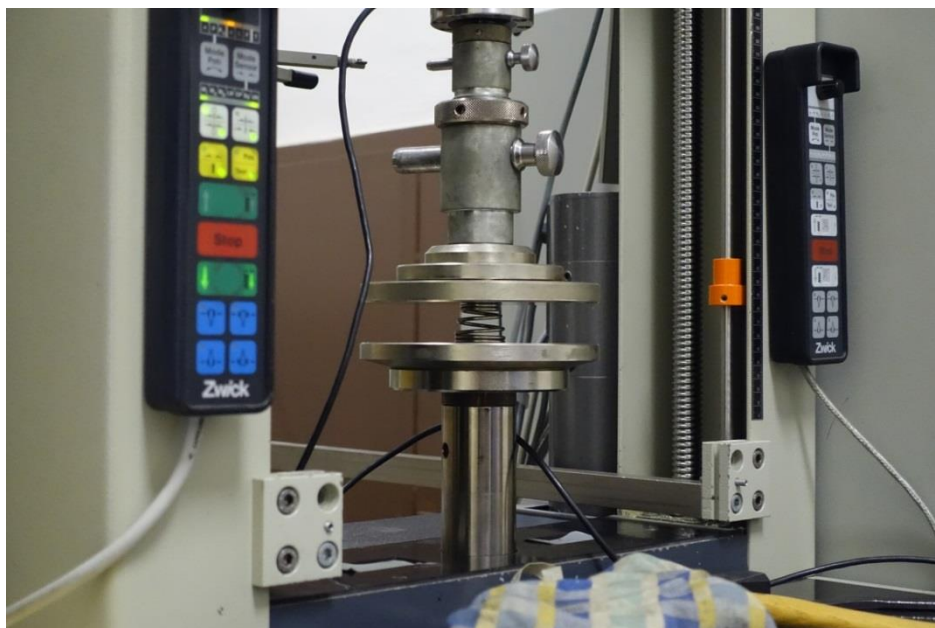
Kónické vinutá pružina byla testována na stroji ZWICK Z 020 - TND v laboratoři mechanických zkoušek materiálů ÚMTMB a ÚMVI (FSI VUT v Brně). Zkouška byla provedena pod vedením vedoucího laboratoře Ing. Tomášem Návrátě, Ph. D. dne 7. 12. 2015.

Stroj umožňuje počítačem řízené zatěžování vzorků v tahu, tlaku a krutu, včetně kombinací, v rozsahu teplot  $-60$  až  $+250^{\circ}\text{C}$ . Maximální zatížení v tahu (tlaku), které je schopen vyvinout je 20 kN.

Pružina byla stlačována od nulového zatížení až po sílu při maximální deformaci (stlačení) pružiny. Celý průběh probíhal za pokojové teploty. Počítač vygeneroval více jak 5000 bodů závislosti  $F(u)$ , a proto není vhodné všechny výsledky uvádět. Stačí si pouze uvést některé hodnoty, které popisují celý průběh křivky (viz tabulky 6 a 7).



Obr. 20 Experiment – závislost síla-deformace, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010



Obr. 21 Měření závislosti kónické pružiny na stroji ZWICK Z 020 – TND

## 7 Výsledky

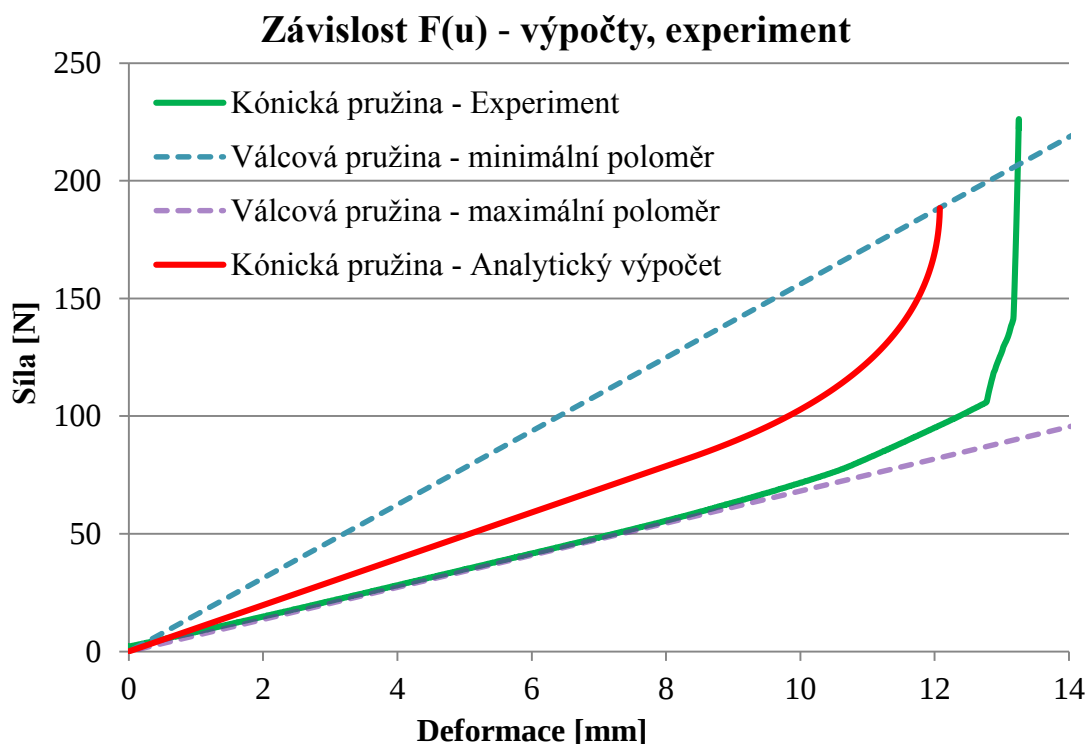
V následujících tabulkách jsou porovnány vypočtené a naměřené hodnoty. V tab. 6 jsou porovnány deformace pro konkrétní síly, a v tab. 7 jsou porovnány síly pro konkrétní deformace. Všechny závislosti jsou uvedeny v obr. 22.

|                   | <b>Válc. pružina<br/>(<math>r_{\min}</math>)</b> | <b>Kónická pružina<br/>(výpočet)</b> | <b>Kónická pružina<br/>(experiment)</b> | <b>Válc. Pružina (<math>r_{\max}</math>)</b> |
|-------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------|
| Síla<br>$F_i$ [N] | Deformace<br>$u_i$ [mm]                          | Deformace<br>$u_i$ [mm]              | Deformace<br>$u_i$ [mm]                 | Deformace<br>$u_i$ [mm]                      |
| 0                 | 0                                                | 0                                    | 0                                       | 0                                            |
| 10                | 0.6                                              | 1.0                                  | 1.3                                     | 1.5                                          |
| 20                | 1.3                                              | 2.0                                  | 2.8                                     | 2.9                                          |
| 30                | 1.9                                              | 3.0                                  | 4.3                                     | 4.4                                          |
| 40                | 2.6                                              | 4.0                                  | 5.8                                     | 5.9                                          |
| 50                | 3.2                                              | 5.1                                  | 7.2                                     | 7.3                                          |
| 60                | 3.8                                              | 6.1                                  | 8.6                                     | 8.8                                          |
| 70                | 4.5                                              | 7.1                                  | 9.8                                     | 10.3                                         |
| 75                | 4.8                                              | 7.6                                  | 10.4                                    | 11.0                                         |
| 80                | 5.1                                              | 8.1                                  | 10.8                                    | 11.7                                         |
| 85                | 5.4                                              | 8.6                                  | 11.2                                    | 12.5                                         |
| 90                | 5.8                                              | 9.0                                  | 11.6                                    | 13.2                                         |
| 95                | 6.1                                              | 9.5                                  | 12.0                                    | 13.9                                         |
| 100               | 6.4                                              | 9.9                                  | 12.4                                    | 14.7                                         |
| 105               | 6.7                                              | 10.0                                 | 12.7                                    | 15.4                                         |
| 110               | 7.0                                              | 10.2                                 | 12.8                                    | 16.1                                         |
| 115               | 7.4                                              | 10.7                                 | 12.8                                    | 16.9                                         |
| 120               | 7.7                                              | 10.9                                 | 12.9                                    | 17.6                                         |
| 125               | 8.0                                              | 11.1                                 | 13.0                                    | 18.3                                         |
| 130               | 8.3                                              | 11.3                                 | 13.0                                    | 19.1                                         |
| 135               | 8.6                                              | 11.4                                 | 13.1                                    | 19.8                                         |
| 140               | 9.0                                              | 11.6                                 | 13.2                                    | 20.5                                         |
| 145               | 9.3                                              | 11.7                                 | 13.2                                    | 21.3                                         |
| 150               | 9.6                                              | 11.7                                 | 13.2                                    | 22.0                                         |
| 155               | 9.9                                              | 11.8                                 | 13.2                                    | 22.7                                         |
| 160               | 10.2                                             | 11.9                                 | 13.2                                    | 23.5                                         |
| 165               | 10.6                                             | 12.0                                 | 13.2                                    | 24.2                                         |
| 170               | 10.9                                             | 12.1                                 | 13.2                                    | 24.9                                         |
| 175               | 11.2                                             | 12.1                                 | 13.2                                    | 25.7                                         |
| 180               | 11.5                                             | 12.1                                 | 13.2                                    | 26.4                                         |
| 184               | 11.8                                             | 12.1                                 | 13.2                                    | 27.0                                         |

Tab. 6 Srovnání vypočtených a naměřených deformací pro konkrétní síly, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

|                         | Válc. pružina<br>( $r_{\min}$ ) | Kónická pružina<br>(výpočet) | Kónická pružina<br>(experiment) | Válc. Pružina<br>( $r_{\max}$ ) |
|-------------------------|---------------------------------|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Deformace<br>$u_i$ [mm] | Síla<br>$F_i$ [N]               | Síla<br>$F_i$ [N]            | Síla<br>$F_i$ [N]               | Síla<br>$F_i$ [N]               |
| 1                       | 15.6                            | 9.9                          | 8.2                             | 6.8                             |
| 2                       | 31.2                            | 19.7                         | 14.8                            | 13.6                            |
| 3                       | 46.8                            | 29.5                         | 21.4                            | 20.5                            |
| 4                       | 62.5                            | 39.4                         | 28.1                            | 27.3                            |
| 5                       | 78.1                            | 49.2                         | 34.8                            | 34.1                            |
| 6                       | 93.7                            | 59.1                         | 41.6                            | 40.9                            |
| 7                       | 109.3                           | 69.9                         | 48.4                            | 47.7                            |
| 8                       | 124.9                           | 78.7                         | 55.5                            | 54.5                            |
| 8.5                     | 132.7                           | 83.3                         | 59.3                            | 58.0                            |
| 9                       | 140.5                           | 89.6                         | 63.2                            | 61.4                            |
| 9.5                     | 148.3                           | 95.4                         | 67.3                            | 64.8                            |
| 10                      | 156.2                           | 102.9                        | 71.6                            | 68.2                            |
| 10.5                    | 164.0                           | 111.8                        | 76.2                            | 71.6                            |
| 11                      | 171.8                           | 123.3                        | 82.0                            | 75.0                            |
| 11.5                    | 179.6                           | 137.2                        | 88.5                            | 78.4                            |
| 12                      | 187.4                           | 176.1                        | 95.1                            | 81.8                            |
| 12.1                    | 189.0                           | 188.4                        | 93.4                            | 82.5                            |
| 13                      | 203.0                           | -                            | 127.5                           | 88.6                            |

Tab. 7 Srovnání vypočtených a naměřených sil pro konkrétní deformace, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010



Obr. 22 Závislost síla – deformace všech výpočtů a experimentu, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

## 7.1 Diskuze výsledků

Vypočtený průběh zatěžování kónické pružiny je v prvním kroku lineární (až po bod [8.4;82.5], viz obr. 23). Při dalším zatěžování se průběh stává nelineární a začíná se progresivně přibližovat ke křivce válcové pružiny s minimálním poloměrem a pružině narůstá tuhost. Křivky se protnou v průsečíku [12.1;188.4]. Celková tuhost pružiny je během lineárního průběhu  $9.9 \text{ Nmm}^{-1}$ . Při maximálním stlačení celková tuhost naroste až na hodnotu  $15.7 \text{ Nmm}^{-1}$ , zatímco inkrementální tuhost naroste až na hodnotu  $1123 \text{ Nmm}^{-1}$ . Tato hodnota je  $x$ -krát větší oproti válcové pružině. Válcová pružina s minimálním poloměrem má tuhost  $15.6 \text{ Nmm}^{-1}$  a s maximálním poloměrem má tuhost  $6.8 \text{ Nmm}^{-1}$ . Pokud bychom pružinu přetěžovali nad zmíněný bod, průběh by se teoreticky stal vertikální. Naměřená funkční délka závitů je  $12.2 \text{ mm}$ , která určuje hranici teoretické funkční délky pružiny (černá linie v obr. 23). Maximální teoretické stlačení pružiny, při kterém se průběh blíží vertikále je  $12.1 \text{ mm}$ .

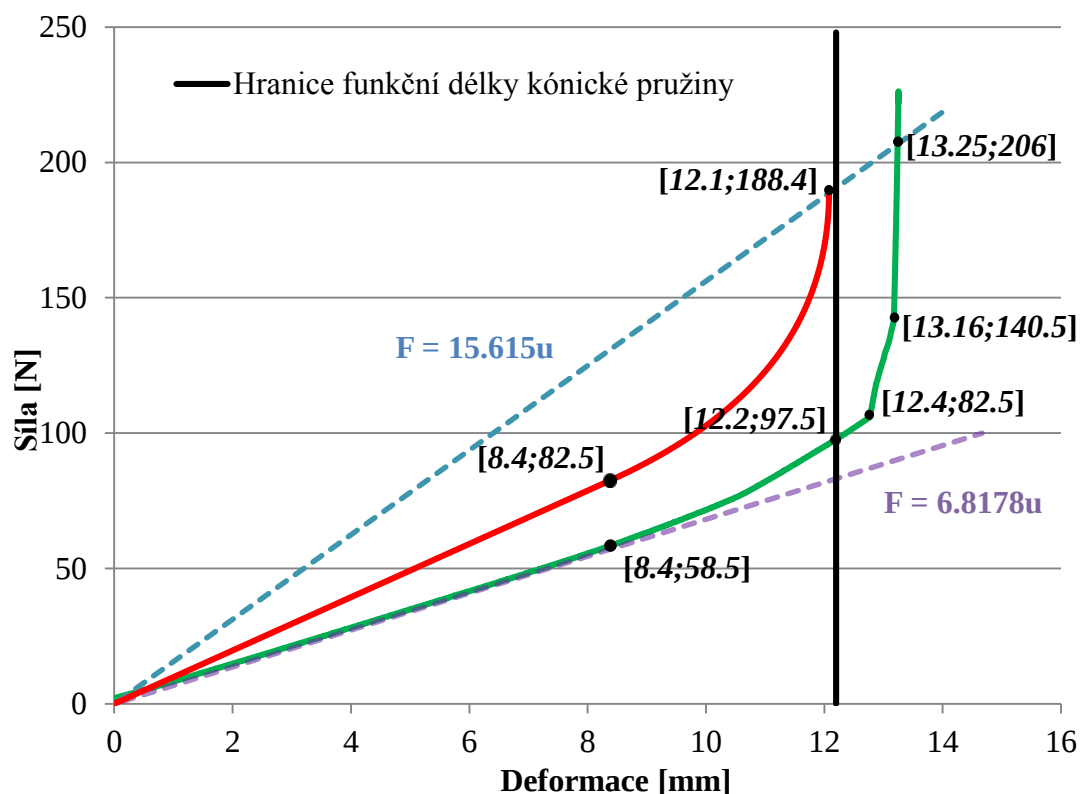
Testovaná kónická pružina má lineární průběh zatěžování přibližně totožný jako válcová pružina s maximálním poloměrem (odchylka křivek je do 1 %) do hodnoty deformace přibližně  $8,4 \text{ mm}$ . Pro větší deformace se odchylka zvětšuje (viz tab. 8).

| Experiment<br>– válc. pružina ( $r_{\max}$ ) |               |
|----------------------------------------------|---------------|
| Deformace<br>$u_i$ [mm]                      | Rozdíl<br>[%] |
| 5                                            | 1.07          |
| 6                                            | 0.83          |
| 7                                            | 0.74          |
| 8                                            | 0.89          |
| 9                                            | 1.52          |
| 10                                           | 2.48          |
| 11                                           | 4.49          |

Tab. 8 Procentuální rozdíl experimentální křivky s válcovou pružinou s maximálním poloměrem, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

Tato oblast přechodu z lineárního průběhu na nelineární probíhá při přibližně stejné deformaci jako u výpočtu (avšak pro stlačení  $8,4 \text{ mm}$  stačí vyvinout sílu o cca  $24 \text{ N}$  menší než u výpočtu) a odchylky uvedené v tab. 8 určují nepřesnost lineárního průběhu výpočtu kónické pružiny. Pro další deformace se křivka oddaluje od válcové pružiny. Křivka přibližně kopíruje zaoblení nelineárního průběhu vypočítané závislosti kónické pružiny, avšak s určitými zlomy (body o souřadnicích [12.76;105.8], [13.16;140.5]), které nastávají při úplném dosednutí jednotlivých částí závitů na sebe v závislosti na jejich nepravidelném stoupání.

Celkový rozdíl mezi křivkami experimentu a válcové pružiny s maximálním poloměrem nad hranici linearitu narůstá (procentuální rozdíl křivek pro konkrétní sílu je v tab. 9) a zkoušená pružina se postupně stává tužší, i když zcela neodstraňuje zlom při dosednutí závitů na doraz, který nastává u válcových pružin. To je způsobeno nepřesnostmi výroby.



Obr. 23 Znáornění jednotlivých bodů a hranice funkční délky kónické pružiny, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

| Procent. rozdíl jednotlivých závislostí $F(u)$ z obr. 26 pro konkrétní síly |                                         |                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
|                                                                             | experiment - výpočet<br>kónické pružiny | válcová pružina ( $r_{\max}$ )<br>– experiment kónické pružiny |
| Síla<br>$F_i$ [N]                                                           | Rozdíl<br>[%]                           | Rozdíl<br>[%]                                                  |
| 40                                                                          | 17.25                                   | 0.20                                                           |
| 60                                                                          | 16.99                                   | 0.47                                                           |
| 80                                                                          | 14.28                                   | 3.25                                                           |
| 100                                                                         | 11.54                                   | 7.78                                                           |
| 120                                                                         | 8.43                                    | 14.69                                                          |
| 140                                                                         | 7.03                                    | 21.20                                                          |
| 160                                                                         | 5.12                                    | 27.35                                                          |
| 180                                                                         | 4.57                                    | 32.63                                                          |

Tab. 9 Procentuální srovnání závislostí z obr. 26, vytvořeno v programu Microsoft Excel 2010

Z porovnání závislostí síla – deformace z experimentálních a vypočtených hodnot kónické pružiny lze usoudit, že křivky nejsou totožné a mají určitou odchylku (viz tab. 9), která procentuálně klesá s rostoucím zatížením. Z tab. 6 je patrné, že pro jednotlivé síly má výpočet menší deformaci oproti experimentu (cca 2 mm). Výpočet má tedy tužší průběh zatěžování než experiment. Tyto rozdíly jsou způsobeny zde uvedenými příčinami:

- chyba měření stoupání pružiny – měřicí zařízení posuvné měřítko pracuje s určitou chybou a při prisunutí čelisti posuvného měřítka na závit došlo k mírnému stlačení pružiny. Tyto chyby však výpočet ovlivnily minimálně, protože se jedná o rozměrové nepřesnosti řádově v desetině milimetru.
- vyosení závitů při dosednutí – výpočet předpokládá, že sousední závity jsou přesně nad sebou a při dosednutí je jejich osová vzdálenost rovna průměru drátu. Skutečnost je jiná. Experiment to svým maximálním stlačením vyvrátil.
- teorii slabě zakřivených prutů – vztahy 6.6 a 6.7 vyjadřují procentuální chybu 7 % pro maximální poloměr a 9.5 % pro minimální poloměr pružiny při použití teorie slabě zakřivených prutů oproti teorii silně zakřivených.
- zanedbání příspěvků namáhání od posouvající síly, normálové síly a ohybového momentu ve výpočtu vedlo k určitým nepřesnostem, avšak v opačném případě by značně ztížily výpočet.
- výrobní nepřesnosti – při výrobě vznikají určité rozměrové a úhlové nepřesnosti, protože každý výrobní stroj pracuje s určitou tolerancí a přesností. Především jde v daném případě o **nepravidelnost ve stoupání závitů**.
- opotřebením dané pružiny – testovaná pružina v laboratoři (viz kap. 6.4) pracovala dlouhou dobu pod stálým zatížením (nutnost utěsnit čerpadlo). Pracovní doba pružiny v čerpadle není známa. Na obr. 24 je vidět rozdíl mezi použitou a novou pružinou. Nová pružina má délku  $l_0$  při nulovém zatížení 28,3 mm. Použitá pružina je přibližně o 1 mm kratší (rozměry tab. 4). Na základě těchto naměřených hodnot lze říct, že opotřebení a neelastické efekty měly významný vliv na odchylku mezi křivkami výpočtu a experimentu.



Obr. 24 Porovnání nové (nalevo) a použité (napravo) pružiny

## 8 Závěr

Cílem práce bylo popsat zadanou problematiku zakřivených prutů a určit závislost síla – deformace pro kónickou vinutou pružinu na základě sestaveného matematického modelu. Vypočtené hodnoty pak byly srovnány s hodnotami zjištěnými pomocí experimentálního měření a s teoretickými výpočty dvou válcových pružin, kde jedna má maximální poloměr a druhá minimální poloměr zakřivení konkrétní kónické pružiny, pro kterou byl matematický výpočet sestaven.

Použitým matematickým modelem byla teorie slabě zakřivených prutů. Tato teorie umožňuje řešit zakřivený prut jako přímý prut, avšak výpočet se dopouští určité chyby. Vzniklá chyba je v řádu jednotek procent oproti teorii silně zakřivených prutů, která je mnohem komplikovanější. Na základě teorie slabě zakřivených prutů byly odvozeny rovnice pro výpočet krouticího momentu, kterým namáháme drát pružiny. Ostatní příspěvky namáhání byly díky malému úhlu stoupání a velkému poměru  $r/d$  pružiny zanedbány. Na základě těchto vlastností byl sestaven analytický výpočet kónické vinuté pružiny a pomocí programu MAPLE vypočten. Výsledné hodnoty byly tabelovány a z nich byla vykreslena výsledná křivka v programu Microsoft Office Excel 2010.

Zároveň s výpočtem bylo provedeno experimentální měření pružiny. Pružina byla stlačována na počítačem řízeném stroji ZWICK Z 020 - TND v laboratoři mechanických zkoušek materiálů. Počítač vyhodnotil přes 5000 bodů závislosti síla – deformace, ze kterých byla křivka vykreslena.

Na závěr bylo provedeno porovnání získaných výsledků. Výpočet kónické vinuté pružiny má tužší průběh zatěžování než experiment i v lineární oblasti, jejíž rozsah se s experimentem zhruba shoduje. Teoretický výpočet přesně popisuje žádané progresivní chování pružiny, a tím odstraňuje zlom při dosednutí činných závitů. Zkoušená kónická pružina má lineární průběh zatěžování přibližně totožný jako válcová pružina s maximálním poloměrem (odchylka křivek je do 1%). Při deformaci cca 8,5 mm se průběh stává nelineární. Experimentální průběh přibližně kopíruje progresivní průběh výpočtu. S rostoucím zatížením procentuální rozdíl obou křivek klesá. Tento rozdíl je především způsoben **vzájemným vyosením závitů a nepravidelným stoupáním měřené kónické pružiny.**

## Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3., přeprac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] JANÍČEK, Přemysl a Zdeněk FLORIAN. *Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I.* 5. vyd., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010, 170 s. ISBN 978-80-214-4122-4.
- [3] HORNÍKOVÁ, Jana. Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text. 1. vyd. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-720-4268-8
- [4] VRBKA, Jan. Pružnost a pevnost I: Interaktivní učební text. Brno, 2012. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/~tprofant/UMTMB-ucebni%20text-PPI-def-130201.pdf>
- [5] KRABCYCLES, Krabcyclesshop.cz [online] ©2008 [cit. 2014-04-26]. Dostupné z: <https://www.krabcycles.cz/Komponenty/Tlumice-188/Nahradni-dily-285/Pruziny/Pruzina-Cane-Creek-ocel>
- [6] LOWARA, lowara.com [online] ©2016 [cit. 2014-05-03]. Dostupné z: <http://lowara.com/single-stage-pumps/sh-centrifugal-pumps-manufactured-in-aisi-316-stainless-steel-in-compliance-with-en-733-din-24255/>
- [7] DISA Global Solutions, disa.com [online] ©2014 [cit. 2014-05-03]. Dostupné z: <http://www.disa.cz/file/888/Prospekt-SH.pdf>

## Seznam příloh

### Příloha 1 – výpis zdrojového kódu

V příloze je zdrojový kód pro výpočet kónické vinuté pružiny vytvořen v matematickém prostředí MAPLE (kód je popsán v kap. 5).

*Vstupní veličiny výpočtu*

>  $n := 2$

$n := 2$

>  $\Delta\varphi := \frac{\pi}{18}$

$\Delta\varphi := \frac{1}{18} \pi$

>  $\varphi_{\max} := n \cdot 2 \cdot \pi$

$\varphi_{\max} := 4 \pi$

>  $j := \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{\Delta\varphi}$

$j := 72$

>  $F_{1N} := 1$

$F_N := 1$

>  $\alpha := \frac{\pi}{30}$

$\alpha := \frac{1}{30} \pi$

>  $d := 2.6$

$d := 2.6$

>  $J := \text{evalf}\left(\frac{\pi \cdot d^4}{32}\right)$

$J := 4.486351390$

>  $E := 193000$

$E := 193000$

>  $\mu := 0.3$

$\mu := 0.3$

>  $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$

$G := 74230.76923$

>  $R_{\min} := 11.95$

$R_{\min} := 11.95$

>  $R_{\max} := 15.8$

$R_{\max} := 15.8$

*Funkce poloměru křivosti kónické pružiny*

$$> r := R_{\max} - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \cdot (R_{\max} - R_{\min})$$

$$r := 15.8 - \frac{0.962500000 \varphi}{\pi}$$

1. krok

$$> i := 1$$

$$i := 1$$

$$> \varphi_1 := \frac{\pi}{18}$$

$$\varphi_1 := \frac{1}{18} \pi$$

$$> u\varphi_1 := \int_0^{\varphi_1} \frac{F_{1N} \cdot r \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot J} \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot r d\varphi$$

$$u\varphi_1 := 0.002034205262$$

$$> F_1 := \frac{8.6 + 8.68 - 2 \cdot 2.6}{72 \cdot u\varphi_1}$$

$$F_1 := 82.47829309$$

$$> u_1 := \int_0^{4 \cdot \pi} \frac{F_1 \cdot r \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot J} \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot r d\varphi$$

$$u_1 := 8.380694485$$

*Cyklus ( pozn.:*

*Ve zprávě je cyklus uveden bez výsledků z důvodu velkého rozsahu výpočtů)*

$$> \text{for } i \text{ from 2 by 1 to } j \text{ do } \varphi_i := \frac{i \cdot \pi}{18} \text{ end do}$$

$$> \text{for } i \text{ from 2 by 1 to } j \text{ do } u\varphi_i := \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{F_{1N} \cdot r \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot J} \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot r d\varphi \text{ end do}$$

$$> \text{for } i \text{ from 2 by 1 to } j \text{ do } F_i := \frac{8.6 + 8.68 - 2 \cdot 2.6}{72 \cdot u\varphi_1} \text{ end do}$$

$$> \text{for } i \text{ from 2 by 1 to } j \text{ do } u_i := \int_{\varphi_{i-1}}^{4 \cdot \pi} \frac{(F_i - F_{i-1}) \cdot r \cdot \cos(\alpha)}{G \cdot J} \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot r d\varphi \text{ end do}$$

## Seznam použitých veličin

| Symbol            | Jednotka          | Význam                                    |
|-------------------|-------------------|-------------------------------------------|
| c                 | mmN <sup>-1</sup> | poddajnost pružiny                        |
| d                 | mm                | průměr drátu pružiny                      |
| e                 | mm                | excentricita                              |
| E                 | MPa               | modul pružnosti v tahu                    |
| F                 | N                 | síla                                      |
| F <sub>1N</sub>   | N                 | pomocná síla o velikosti 1N               |
| F <sub>x</sub>    | N                 | výsledná síla v ose x pro dané VVÚ        |
| F <sub>y</sub>    | N                 | výsledná síla v ose y pro dané VVÚ        |
| G                 | MPa               | modul pružnosti ve smyku                  |
| i                 | –                 | index jednotlivých kroků cyklu            |
| J <sub>p</sub>    | mm <sup>4</sup>   | kvadratický polární moment                |
| J <sub>y</sub>    | mm <sup>4</sup>   | kvadratický moment k ose y                |
| k                 | Nmm <sup>-1</sup> | tuhost válcové pružiny                    |
| k <sub>celk</sub> | Nmm <sup>-1</sup> | celková tuhost kónické pružiny            |
| k <sub>inkr</sub> | Nmm <sup>-1</sup> | inkrementální tuhost kónické pružiny      |
| l                 | mm                | délka drátu pružiny                       |
| M <sub>k</sub>    | Nmm               | krouticí moment                           |
| M <sub>o</sub>    | Nmm               | ohybový moment                            |
| M <sub>y</sub>    | Nmm               | výsledný moment v ose y pro dané VVÚ      |
| M <sub>x</sub>    | Nmm               | výsledný moment v ose x pro dané VVÚ      |
| N                 | N                 | normální síla                             |
| n                 | –                 | počet závitů pružiny                      |
| r                 | mm                | poloměr křivosti prutu                    |
| r <sub>max</sub>  | mm                | maximální poloměr kónické vinuté pružiny  |
| r <sub>min</sub>  | mm                | minimální poloměr kónické vinuté pružiny  |
| S                 | mm <sup>2</sup>   | obsah příčného průřezu                    |
| s                 | mm                | stoupání pružiny                          |
| T                 | N                 | posouvající síla                          |
| T <sub>z</sub>    | N                 | výsledná posouvající síla VVÚ             |
| u                 | mm                | deformace (stlačení, posuv čel) pružiny   |
| u <sub>φi</sub>   | mm                | průhyb modelového slabě zakřiveného prutu |
| V                 | mm <sup>3</sup>   | objem materiálu                           |
| W                 |                   | energie napjatosti                        |
| W <sub>k</sub>    | mm <sup>3</sup>   | modul průřezu v krutu                     |
| W <sub>o</sub>    | mm <sup>3</sup>   | modul průřezu v ohybu                     |
| W <sub>σ</sub>    |                   | energie napjatosti od smykových napětí    |
| W <sub>τ</sub>    |                   | energie napjatosti od normálních napětí   |

|                  |                 |                                                            |
|------------------|-----------------|------------------------------------------------------------|
| $z$              | mm              | posunutí neutrální osy ve směru osy $z$                    |
| $\alpha$         | rad             | úhel stoupání pružiny                                      |
| $\beta$          | –               | konstanta tvaru příčného průřezu                           |
| $\gamma$         | –               | označení střednice                                         |
| $\Delta u_i$     | mm              | přírůstek deformace (stlačení)                             |
| $\Delta \varphi$ | rad             | rozdíl délek oblouku mezi jednotlivými kroky cyklu         |
| $\Delta \sigma$  | %               | procentuální rozdíl napětí mezi zakřiveným a přímým prutem |
| $\sigma$         | Mpa             | napětí v normálné rovině                                   |
| $\sigma_{Mo}$    | Mpa             | napětí od ohybového momentu síly $Mo$                      |
| $\sigma_N$       | Mpa             | napětí od normálné síly $N$                                |
| $\sigma_p$       | MPa             | napětí v přímém prutu                                      |
| $\sigma_z$       | MPa             | napětí v zakřiveném prutu                                  |
| $\tau$           | Mpa             | smykové napětí                                             |
| $\tau_{Mk}$      | MPa             | smykové napětí od kroutícího momentu                       |
| $\tau_T$         | MPa             | smykové napětí od posouvající síly                         |
| $\varphi$        | rad             | proměnná úhlová souřadnice                                 |
| $\varphi_i$      | rad             | délka oblouku                                              |
| $\varphi_{max}$  | rad             | maximální obvodový úhel činných závitů pružiny             |
| $\psi$           | mm <sup>2</sup> | označení příčného průřezu                                  |