

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

STATISTICKÁ ANALÝZA ROZDĚLENÍ EXTRÉMNÍCH HODNOT PRO CENZOROVANÁ DATA

STATISTICAL ANALYSIS OF EXTREME VALUE DISTRIBUTIONS FOR CENSORED DATA

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN CHABIČOVSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAROSLAV MICHÁLEK, CSc.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Martin Chabičovský

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901T021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Statistická analýza rozdělení extrémních hodnot pro cenzorovaná data

v anglickém jazyce:

Statistical Analysis of Extreme Value Distributions for Censored Data

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Rozdělení extrémních hodnot se často používají při popisu a predikci ojedinělých jevů v teorii spolehlivosti, klimatologii při predikci srážek nebo průtoků řek, v medicínských aplikacích, při predikci kvality životního prostředí a podobně. Data, která jsou ke zpracování použita, bývají často neúplná, bývají cenzorovaná časem, případně počtem nebo náhodně cenzorovaná. Pro taková data je pak zapotřebí provést odhad parametrů studovaných rozdělení, odhad prahových hodnot nebo odhad kvantilů těchto rozdělení.

Cíle diplomové práce:

V práci popište základní typy rozdělení extrémních hodnot např. podle [2], dále vyberte vhodnou metodu pro odhad parametrů cenzorovaných rozdělení extrémního typu např. podle [3] a pro alespoň dvě rozdělení z domény atrakce vybraného rozdělení extrémního typu nebo přímo pro rozdělení extrémního typu navrhnete metodu pro výpočet odhadů parametrů pro cenzorovaná rozdělení, proved'te počítačovou implementaci této metody a popište statistické vlastnosti získaných odhadů. Při tom se můžete opřít o simulační studii. Získané výsledky můžete ilustrovat na zpracování reálných dat.

Seznam odborné literatury:

- [1] Baíllo, A.; Cuevas, A.; Justel, A.: Set estimation and Nonparametric detection, The Canadian Journal of Statistics, 28, p. 765–782, 2000
- [2] Coles S.: An Introduction to statistical modeling of extreme values. Springer. London, 2004
- [3] Kotz, S. and Nadarajah S.: Extreme value distributions. Imperial College London. 2005

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá rozdělením extrémních hodnot a cenzorovanými výběry. V teoretické části je popsána metoda maximální věrohodnosti, typy cenzorovaných výběrů a je definováno rozdělení extrémních hodnot. V práci jsou odvozeny věrohodnostní rovnice pro cenzorované výběry z exponenciálního, Weibullova, logaritmicko-normálního, Gumbelova a zobecněného extrémního rozdělení. Pro tato rozdělení jsou též odvozeny asymptotické intervalové odhady a je provedena simulační studie sledující závislost odhadu parametru na procentu cenzorování.

Summary

The thesis deals with extreme value distributions and censored samples. Theoretical part describes a maximum likelihood method, types of censored samples and introduces extreme value distributions. In the thesis are derived likelihood equations for censored samples from exponential, Weibull, lognormal, Gumbel and generalized extreme value distribution. For these distributions are also derived asymptotic interval estimates and simulation studies on the dependence of the parameter estimate on the percentage of censoring.

Klíčová slova

cenzorované výběry, rozdělení extrémních hodnot, metoda maximální věrohodnosti

Keywords

censored samples, extreme value distributions, maximum likelihood method

CHABIČOVSKÝ, M. *Statistická analýza rozdělení extrémních hodnot pro cenzorovaná data*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 53 s. Vedoucí doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Statistická analýza rozdělení extrémních hodnot pro cenzorovaná data* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jaroslava Michálka, CSc. s použitím pramenů uvedených v seznamu literatury.

Martin Chabičovský

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Jaroslavu Michálkovi, CSc. za vedení mé diplomové práce.

Martin Chabičovský

Obsah

1	Úvod	3
2	Metoda maximální věrohodnosti	4
2.1	Základní pojmy	4
2.2	Metoda maximální věrohodnosti	5
2.2.1	Pomocná tvrzení	5
2.2.2	Princip metody	6
3	Cenzorované výběry	10
3.1	Cenzorované výběry	10
3.1.1	Výběry cenzorované zprava typu I	10
3.1.2	Výběry cenzorované zprava typu II	11
3.1.3	Výběry cenzorované zleva typu I	12
3.1.4	Výběry cenzorované zleva typu II	12
3.1.5	Výběry dvojité cenzorované	12
3.1.6	Výběry progresivně cenzorované	13
3.1.7	Výběry intervalově cenzorované	13
3.1.8	Výběry náhodně cenzorované	14
3.2	Odhady metodou maximální věrohodnosti	15
3.2.1	Exponenciální rozdělení	15
3.2.2	Weibullovo rozdělení	18
3.2.3	Logaritmicko–normální rozdělení	21
4	Rozdělení extrémních hodnot	24
4.1	Maximálně věrohodné odhady	25
4.1.1	Extrémní rozdělení typu I	25
4.1.2	Zobecněné rozdělení extrémních hodnot	26
4.2	Maximálně věrohodné odhady pro cenzorované výběry	27
4.2.1	Extrémní rozdělení typu I	28
4.2.2	Zobecněné rozdělení extrémních hodnot	31
5	Simulační studie	39
5.1	Úvod	39
5.2	Simulace pomocí funkce mle	39
5.2.1	Exponenciální rozdělení	40
5.2.2	Weibullovo rozdělení	41
5.2.3	Logaritmicko–normalní rozdělení	42
5.2.4	Extrémní rozdělení typu I	44
5.3	Simulace pomocí funkce mmv	46
5.3.1	Zobecněné rozdělení extrémních hodnot	47
6	Závěr	50

Literatura	51
Seznam použitých zkratk a symbolů	52
Seznam příloh	53

1 Úvod

Teorie extrémních hodnot se zabývá rozdělením maxim respektive minim posloupností nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Tato teorie se využívá pro posuzování rizik vyplývajících z výskytu vysoce nepravděpodobných událostí, jako jsou například stoleté povodně, výskyt extrémního počasí, výskyt mimořádných pojistných událostí či v teorii spolehlivosti při výskytu poruch. V praxi se nám však ne vždy podaří zaznamenat všechna nastoupení sledovaných jevů. Získáváme tak cenzorované výběry, ze kterých je v praxi potřeba provádět odhady.

Tato práce si klade za cíl popsat jednotlivé typy cenzorování a následně odvodit vztahy pro odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti z cenzorovaných výběrů.

Po první kapitole Úvod následuje druhá kapitola věnovaná teorii maximálně věrohodných odhadů. V ní jsou uvedeny základní věty a definice z této teorie a je popsán princip této metody.

Třetí kapitola si klade za cíl popsat typy cenzorovaných výběrů a odvodit či uvést tvary věrohodnostních funkcí. Do této kapitoly je též zahrnuto odvození věrohodnostních rovnic a asymptotických intervalových odhadů parametrů v cenzorovaných výběrech pro exponenciální, Weibullovo a logaritmicko–normální rozdělení.

Čtvrtá kapitola obsahuje zavedení rozdělení extrémních hodnot. V kapitole jsou dále odvozeny tvary věrohodnostních rovnic a asymptotických intervalových odhadů parametrů pro extrémní rozdělení typu I (Gumbelovo) a pro zobecněné rozdělení extrémních hodnot.

Pátá kapitola je věnována simulacím, ve kterých je studována závislost odhadu parametru na procentu cenzorování v cenzorovaných výběrech z exponenciálního, Weibullova, logaritmicko–normálního, Gumbelova a zobecněného extrémního rozdělení. Jsou zde uvedeny výstupy z těchto simulací ve formě obrázků a z nich vyvozené závěry. V této kapitole jsou též popsány programy vytvořené v matlabu, které využívají některé odvozené vztahy z předchozích dvou kapitol. Programy pak byly využity při simulacích.

Poslední kapitola Závěr shrnuje výsledky této práce.

2 Metoda maximální věrohodnosti

Tato kapitola byla zpracována dle [1]. V celé práci budeme nadále pracovat se spojitými náhodnými veličinami.

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1 *Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a na něm je definována náhodná veličina X . Funkci $F(x) = P(X \leq x)$ definovanou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ budeme nazývat distribuční funkcí náhodné veličiny X .*

Definice 2.2 *Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a na něm je definována náhodná veličina X . Pak funkci $f(x) \geq 0$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}$ vztah $\int_{-\infty}^x f(t)dt = F(x)$ budeme nazývat hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X .*

Definice 2.3 *Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a na něm je definována náhodná veličina X . Funkci $R(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$ definovanou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ budeme nazývat funkce spolehlivosti.*

Definice 2.4 *Střední hodnota náhodné veličiny X se značí symbolem EX a je dána vztahem*

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Symbolem $E_{\theta}X$ budeme značit střední hodnotu náhodné veličiny X o hustotě $f(x, \theta)$, kde θ je vektor parametrů daného rozdělení.

Definice 2.5 *Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a na něm je definována posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots$ a náhodná veličina X . Nechť posloupnost X_n , $n = 1, 2, \dots$ má distribuční funkci F_n a nechť X má distribuční funkci F . Jestliže $F_n(x) \rightarrow F(x)$ v každém takovém bodě x , ve kterém je funkce F spojitá, pak říkáme, že posloupnost F_n konverguje slabě k F . V tomto případě pak říkáme, že veličiny X_n konvergují k náhodné veličině X v distribuci a rozdělení náhodných veličin X_n nazýváme asymptotické rozdělení. Konvergenci v distribuci budeme značit $X_n \xrightarrow{d} X$. V případě, že rozdělení náhodné veličiny X má konkrétní označení, třeba $N(\mu, \sigma^2)$, pak budeme místo $X_n \xrightarrow{d} X$ psát $X_n \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$.*

Definice 2.6 *Nechť $X_1, \dots, X_n$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením o distribuční funkci $F(x)$. Pak říkáme, že $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení o distribuční funkci $F(x)$. Číslo n se nazývá rozsah výběru.*

Definice 2.7 *Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení, které má distribuční funkci $F(x)$. Tyto veličiny uspořádáme vzestupně podle velikosti. Nejmenší z nich označíme $X_{(1)}$, druhou nejmenší $X_{(2)}$, až největší $X_{(n)}$. Platí tedy $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Veličinám $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ se říká uspořádaný náhodný výběr. Jestliže náhodná veličina X_i je v uspořádaném náhodném výběru j -tá, tj. když $X_i = X_{(j)}$, pak pořadí R_i této veličiny je rovno číslu j .*

2.2 Metoda maximální věrohodnosti

2.2.1 Pomocná tvrzení

Dříve než bude popsán samotný princip metody maximální věrohodnosti, bude uvedeno pár důležitých pojmů a vět z teorie odhadu. Předpokládejme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ má hustotu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, přičemž $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$ je neznámý parametr. Na základě vektoru $\mathbf{X}$ je třeba získat co nejlepší odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$, který patří do parametrického prostoru $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Bodovým odhadem parametru $\boldsymbol{\theta}$ rozumíme nalezení nějaké vektorové měřitelné funkce g takové, aby náhodný vektor $\mathbf{T} = g(\mathbf{X})$ v nějakém smyslu co nejlépe aproximoval hodnotu parametru $\boldsymbol{\theta}$.

Definice 2.8 Řekneme, že systém hustot $\{f(\mathbf{x}, \theta), \theta \in \Omega\}$ je regulární, jsou-li splněny tyto podmínky:

1. Množina Ω je neprázdná otevřená.
2. Množina $M = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$ nezávisí na θ .
3. Pro skoro všechna $\mathbf{x} \in M$ existuje konečná parciální derivace $f'(\mathbf{x}, \theta) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}$.
4. Pro všechna $\theta \in \Omega$ platí $\int_M f'(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} = 0$.
5. Integrál

$$J_n(\theta) = \int_M \left[\frac{f'(\mathbf{x}, \theta)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right]^2 f(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}$$

je konečný a kladný.

Integrál $J_n(\theta)$ se nazývá Fisherova míra informace o parametru θ obsažená v náhodném vektoru $\mathbf{X}$. Tento integrál se dá též zapasat zapomocí střední hodnoty a to

$$J_n(\theta) = E \left[\frac{f'(\mathbf{X}, \theta)}{f(\mathbf{X}, \theta)} \right]^2 = E \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} \right]^2.$$

Fisherova míra informace má v teorii odhadu velký význam a proto zde budou uvedeny některé její důležité vlastnosti.

Věta 2.1 Nechť systém hustot $\{f(\mathbf{x}, \theta), \theta \in \Omega\}$ je regulární. Jestliže pro skoro všechna $\mathbf{x} \in M$ existuje

$$f''(\mathbf{x}, \theta) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2}$$

a jestliže pro všechna $\theta \in \Omega$ platí

$$\int_M f''(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} = 0,$$

pak

$$J_n(\theta) = - \int_M \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2} f(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}.$$

Důkaz. Viz [1].

Zobecnění Fisherovy míry informace na případ vícerozměrného parametru vede k Fisherově informační matici. Ta bude definována v následující definici.

Definice 2.9 *Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má spojitou hustotu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Předpokládejme, že platí:*

1. $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$ je neprázdná otevřená množina v $\mathbb{R}^m$.
2. Množina $M = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) > 0\}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.
3. Pro skoro všechna $\mathbf{x} \in M$ a pro všechna $i = 1, \dots, m$ existují parciální derivace $f'_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$.
4. Pro každé $i = 1, \dots, m$ a pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$ platí $\int_M f'_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = 0$.
5. Pro každou dvojici (i, j) , $i, j = 1, \dots, m$, existuje konečný integrál

$$J_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \int_M \frac{f'_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) f'_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{f^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x}.$$

6. Matice $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta}) = (J_{ij}(\boldsymbol{\theta}))_{i,j=1}^m$ je pozitivně definitní pro každé $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$.

Pak se systém hustot $\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$ nazývá regulární a $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta})$ se nazývá Fisherova informační matice.

Věta 2.2 *Nechť systém hustot $\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$ je regulární. Předpokládejme, že pro skoro všechna $\mathbf{x} \in M$ existují derivace*

$$f''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

a, že pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$ platí

$$\int_M f''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Pak platí

$$J_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = - \int_M \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Důkaz. Viz [1].

2.2.2 Princip metody

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má hustotu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$. Při pevné hodnotě $\mathbf{x}$ je funkce $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ jakožto funkce $\boldsymbol{\theta}$ nazývána věrohodnostní funkce. Dále v textu se bude věrohodnostní funkce značit $L(\boldsymbol{\theta}) = L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Statistika $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})$ parametru $\boldsymbol{\theta}$, která maximalizuje věrohodnostní funkci $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ pro dané $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, se nazývá maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$.

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X}$ má hustotu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, přičemž $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$. Nechť $u : \Omega \rightarrow \Omega^*$

2.2 METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

je funkce, která zobrazuje Ω na $\Omega^* \subset \mathbb{R}^k$. Ke každému $\theta \in \Omega$ je tedy přiřazeno $\theta^* \in \Omega^*$ předpisem $\theta^* = u(\theta)$. Nechť $G(\theta^*) = \{\theta : \theta \in \Omega, u(\theta) = \theta^*\}$. Označme

$$Q(\mathbf{x}, \theta^*) = \sup_{\theta \in G(\theta^*)} f(\mathbf{x}, \theta).$$

Pak se Q jakožto funkce θ^* nazývá věrohodnostní funkce indukovaná parametrickou funkcí u . Hodnota $\hat{\theta}^*$, která maximalizuje $Q(\mathbf{X}, \theta^*)$, se nazývá maximálně věrohodný odhad parametrické funkce u .

Věta 2.3 *Je-li $\hat{\theta}$ maximálně věrohodný odhad parametru θ , pak $u(\hat{\theta})$ je maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $u(\theta)$.*

Důkaz. Viz [1].

Jednorozměrný případ

Nechť θ je jednorozměrný parametr. Funkce $l(\mathbf{x}, \theta) = \ln L(\mathbf{x}, \theta)$ se jakožto funkce proměnné θ při pevném $\mathbf{x}$ nazývá logaritmická věrohodnostní funkce.

Věta 2.4 *Nechť jsou splněny předpoklady*

P_1 : *Nechť Ω je parametrický prostor, který obsahuje takový neprázdný otevřený interval ω , že skutečná hodnota parametru θ_0 patří do ω .*

P_2 : *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, kde X_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s hustotou $f(x, \theta)$.*

P_3 : *Nechť $M = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ nezávisí na θ .*

P_4 : *Nechť $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$. Pak $f(x, \theta_1) = f(x, \theta_2)$ skoro všude platí právě tehdy, je-li $\theta_1 = \theta_2$.*

A nechť na intervalu ω existuje $f'(x, \theta) = \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$ pro skoro všechna x . Pak pro každé $\varepsilon > 0$ při $n \rightarrow \infty$ platí, že s pravděpodobností konvergující k jedné má věrohodnostní rovnice

$$\frac{\partial l(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

takový kořen $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(\mathbf{x})$, že $|\hat{\theta}_n - \theta_0| < \varepsilon$.

Důkaz. Viz [1].

Věta 2.5 *Nechť $\{f(x, \theta), \theta \in \Omega\}$ je regulární systém hustot s Fisherovou mírou informace $J(\theta)$ a nechť platí předpoklady P_1 až P_4 z předchozí věty. Nechť $\theta_0 \in \omega$ je skutečná hodnota parametru a nechť jsou splněny následující předpoklady.*

1. *Pro všechna $\theta \in \omega$ a skoro všechna $x \in M$ existuje derivace $f'''(x, \theta) = \frac{\partial^3 f(x, \theta)}{\partial \theta^3}$.*

2. *Pro všechna $\theta \in \omega$ platí*

$$\int_M f''(x, \theta) d\mu(x) = 0.$$

2.2 METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

3. Existuje taková nezáporná měřitelná funkce $H(x)$, že $E_{\theta_0}H(X) < \infty$ a přitom pro skoro všechna $x \in M$ a pro všechna θ taková, že $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$ pro nějaké dostatečně malé $\varepsilon > 0$, platí

$$\left| \frac{\partial^3 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq H(x).$$

Pak platí následující tvrzení.

- i. Jestliže $n \rightarrow \infty$, pak

$$\frac{1}{\sqrt{n}} l'(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0, J(\theta_0)).$$

- ii. Existuje-li pro každé dostatečně velké n a pro každou hodnotu $\mathbf{X}$ takový kořen $\hat{\theta}_n$ věrohodnostní rovnice, že $\hat{\theta}_n$ je konsistentním odhadem parametru θ_0 , pak

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{J(\theta_0)}).$$

Důkaz. Viz [1].

Vektorový parametr

Pro odhad vektorového parametru platí podobná tvrzení jako pro odhad jednorozměrného parametru. Dále uvedené věty jsou jen zobecněním vět platících pro jednorozměrný případ. Sdružená hustota je $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je m -rozměrný vektor parametrů. Funkce $l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ se nazývá logaritmická věrohodnostní funkce. Systém věrohodnostních rovnic je tvaru:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Věta 2.6 *Nechť systém hustot $\{f(x, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$ je regulární a má Fisherovu informační matici $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$. Nechť platí následující předpoklady:*

1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je parametrický prostor, který obsahuje takový neprázdný otevřený interval ω , že skutečná hodnota parametru $\boldsymbol{\theta}_0$ patří do ω .*
2. *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, kde X_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$.*
3. *Nechť $M = \{x : f(x, \boldsymbol{\theta}) > 0\}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.*
4. *Nechť $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \Omega$. Pak $f(x, \boldsymbol{\theta}_1) = f(x, \boldsymbol{\theta}_2)$ platí právě tehdy, je-li $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$.*
5. *Derivace $\frac{\partial^3 f(x, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$ existuje pro skoro všechna x , pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ a pro všechna $i, j, k = 1, \dots, m$.*
6. *Pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ platí*

$$\int_M f''_{ij}(x, \boldsymbol{\theta}) d\mu(x) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

2.2 METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

7. Pro všechna $i, j, k = 1, \dots, m$ existují funkce $M_{ijk}(x) \geq 0$ tak, že $E_{\theta_0} M_{ijk}(X) < \infty$, kde X je náhodná veličina s hustotou $f(x, \theta)$ a

$$\left| \frac{\partial^3 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \right| \leq M_{ijk}(x) \quad \text{pro všechna } \theta \in \omega \text{ a skoro všechna } x \in M.$$

Pak platí následující tvrzení.

- (i) Jestliže $n \rightarrow \infty$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje s pravděpodobností blížíící se jedné takové řešení $\hat{\theta}_n$ systému věrohodnostních rovnic, že $\|\hat{\theta}_n - \theta_0\| < \varepsilon$.
- (ii) Položme

$$\mathbf{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_m} \end{pmatrix}.$$

Pak pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{U}(\theta_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{J}(\theta_0)).$$

- (iii) Existuje-li pro každé dostatečně velké n a pro každou hodnotu $\mathbf{X}$ takový kořen $\hat{\theta}_n$ systému věrohodnostních rovnic, že $\hat{\theta}_n$ je konsistentním odhadem parametru θ_0 , pak

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{J}(\theta_0)^{-1}).$$

Důkaz. Viz [1].

S využitím předcházející teorie lze snadno zkonstruovat intervalové odhady parametrů θ_i , kde $i = 1, \dots, m$. Asymptotické oboustranné intervaly spolehlivosti pro parametry θ_i , $i = 1, \dots, m$ s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha/2$ jsou

$$(\hat{\theta}_i - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{i,i}}, \hat{\theta}_i + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{i,i}}) \quad i = 1, \dots, m,$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $1 - \alpha/2$ kvantil standartizovaného normálního rozdělení a $\psi_{i,i}$ je hodnota matice $\psi(\theta)$ v i -tém řádku a i -tém sloupci. Matice $\psi(\theta)$ je inverzní matice k asymptotické Fisherově informační matici a je určena vztahem

$$\psi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \ln L|_{\theta=\hat{\theta}} & \dots & -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_m} \ln L|_{\theta=\hat{\theta}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2}{\partial \theta_m \partial \theta_1} \ln L|_{\theta=\hat{\theta}} & \dots & -\frac{\partial^2}{\partial \theta_m^2} \ln L|_{\theta=\hat{\theta}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

3 Cenzorované výběry

V této kapitole budou popsány jednotlivé typy cenzorovaných výběrů, uvedeny tvary věrohodnostních funkcí a dále pak budou pro exponenciální, Weibullovo a logaritmicko–normální rozdělení odvozeny konkrétní tvary věrohodnostních rovnic a stanoveny intervalové odhady parametrů těchto rozdělení. Odvození věrohodnostních rovnic a následných intervalových odhadů bylo provedeno autorem této práce. Některé získané vztahy byly překontrolovány podle [2]. Pro zkrácení zápisu však nebyly uvedeny všechny kroky výpočtů.

3.1 Cenzorované výběry

Nechť $X_1, \dots, X_N$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením o distribuční funkci $F(x, \theta)$ a hustotě $f(x, \theta)$. Nechť X_i značí dobu čekání u i -té statistické jednotky na rizikový jev. V teorii spolehlivosti se jedná třeba o sledování doby do poruchy součástky. V lékařství může značit dobu do úmrtí sledovaného pacienta při závažné chorobě. V praxi se nám však ne vždy podaří získat úplný náhodný výběr $X_1, \dots, X_N$. Jeden z důvodů, proč nečekáme, až rizikový jev nastane u všech sledovaných statistických jednotek, je třeba finanční náročnost sledování všech statistických jednotek. Při zkouškách životnosti nelze z finančních či časových důvodů čekat, než se nám pokazí všechny testované stroje. Další důvod vzniku cenzorovaných výběrů se vyskytuje v medicíně, kdy sledovaný pacient trpící smrtelnou nemocí přestane docházet na pravidelné kontroly ať už z důvodu změny bydliště či úmrtí z jiných důvodů, než je sledovaná nemoc.

K cenzorování dochází, jestliže sledujeme N statistických jednotek a výsledek experimentu jsou dvě skupiny statistických jednotek. V první jsou ty, u nichž došlo v průběhu sledování k poruše. Ve druhé jsou ty, u kterých nedošlo při sledování k poruše.

Dle typu uspořádání experimentu lze cenzorované výběry rozdělit na cenzorované časem, poruchou či náhodně. Cenzorování časem se též označuje jako cenzorování typu I a cenzorování poruchou jako cenzorování typu II.

Další typ dělení je: cenzorování zleva, zprava, dvojité, progresivní a intervalové.

V Následujícím výčtu typů cenzorování jsou vztahy pro věrohodnostní funkce převzaty z [2] a [6] a odvození náhodného cenzorování je provedeno dle [10].

3.1.1 Výběry cenzorované zprava typu I

S cenzorováním typu I u zprava cenzorovaných výběrů se v experimentu setkáme, jestliže všech N statistických jednotek sledujeme od počátku experimentu, tedy od času $t = 0$. Jejich sledování ukončíme v nějakém předem určeném pevném čase $t = T_P$ bez ohledu na to, u kolika jednotek došlo k poruše.

Následující odvození je provedeno dle [6]. Výsledkem experimentu je n -tice prvních pořadových statistik $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ a informace, že u $c = N - n$ statistických jednotek došlo k poruše po čase T_P , tedy $X_{(n+1)} > T_P, \dots, X_{(N)} > T_P$. Nechť $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = \mathbf{X}$ jsou pozorované uspořádané doby do poruchy a nechť $0 < x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$. Označme $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Nechť $\Delta > 0$ je takové, že $x_{(i)} + \Delta < x_{(i+1)}$, $i = 0, \dots, n - 1$, kde $x_{(0)} = 0$ a $x_{(n)} + \Delta < T_P$. Nechť Δ označuje n -rozměrný vektor, který má všechny složky rovny Δ . Pravděpodobnost nastoupení jevu, že žádné pozorování není menší než $x_{(1)}$,

právě jedno pozorování padne do intervalu $\langle x_{(1)}, x_{(1)} + \Delta \rangle$, žádné pozorování nepadne do intervalu $\langle x_{(1)} + \Delta, x_{(2)} \rangle$, právě jedno padne do intervalu $\langle x_{(2)}, x_{(2)} + \Delta \rangle$, $\dots$, právě jedno pozorování padne do intervalu $\langle x_{(n)}, x_{(n)} + \Delta \rangle$ a c pozorování je větších než T_P , je

$$P(\mathbf{x} \leq \mathbf{X} < \mathbf{x} + \Delta, X_{(n+1)} > T_P, \dots, X_{(N)} > T_P) = \frac{N!}{0!1! \dots 1!(N-n)!} \prod_{i=1}^n (F(x_{(i)} + \Delta) - F(x_{(i)})) R^c(T_P),$$

kde $R(x)$ značí funkci spolehlivosti. Sdružené rozdělení výsledku experimentu má hustotu (vzhledem k součinu n –rozměrné Lebesgueovy a čítecí míry)

$$f(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, n) = \frac{N!}{(N-n)!} \prod_{i=1}^n f(x_{(i)}) R^c(T_P),$$

kde $0 < x_{(1)} < \dots, x_{(n)} < T_P$ a $n = 0, 1, \dots, N$. Věrohodnostní funkce je

$$L(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, n, \boldsymbol{\theta}) = \frac{N!}{(N-n)!} \prod_{i=1}^n f(x_{(i)}, \boldsymbol{\theta}) R^c(T_P, \boldsymbol{\theta}),$$

kde $0 < x_{(1)} < \dots, x_{(n)} < T_P$, $n = 0, 1, \dots, N$ a $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$.

3.1.2 Výběry cenzorované zprava typu II

V čase $t = 0$ začneme sledovat N statistických jednotek. Sledování ukončíme přesně v okamžiku, kdy zaznameneáme poruchu u n jednotek, kde n je předem dané pevné číslo $n \in \{1, \dots, N\}$. Výsledkem experimentu je n uspořádaných náhodných veličin $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ udávajících prvních n dob do poruchy. Doba sledování jednotek je dána okamžikem nastoupení n -té poruchy, tedy $T_P = X_{(n)}$. Porucha nebyla v průběhu pozorování zaznamenána u zbývajících c jednotek, kde $c = N - n$. O těchto c jednotkách lze říci pouze to, že doba do poruchy je u nich větší než okamžik nastoupení n -té poruchy $X_{(n)}$.

Následující odvození je provedeno dle [6]. Nechť $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = \mathbf{X}$ jsou pozorované uspořádané doby do poruchy a nechť $0 < x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$. Označme $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Nechť $\Delta > 0$ je takové, že $x_{(i)} + \Delta < x_{(i+1)}$, $i = 0, \dots, n-1$, kde $x_{(0)} = 0$. Nechť Δ označuje n –rozměrný vektor, který má všechny složky rovny Δ , a nechť

$$Z = \{\mathbf{x} \leq \mathbf{X} < \mathbf{x} + \Delta\}.$$

Náhodný jev Z nastane, právě když žádné pozorování není menší než $x_{(1)}$, právě jedno pozorování padne do intervalu $\langle x_{(1)}, x_{(1)} + \Delta \rangle$, žádné pozorování nepadne do intervalu $\langle x_{(1)} + \Delta, x_{(2)} \rangle$, právě jedno padne do intervalu $\langle x_{(2)}, x_{(2)} + \Delta \rangle$, $\dots$, právě jedno pozorování padne do intervalu $\langle x_{(n)}, x_{(n)} + \Delta \rangle$ a c pozorování je větších nebo rovných $x_{(n)} + \Delta$. Proto je

$$P(Z) = \frac{N!}{0!1! \dots 1!(N-n)!} \prod_{i=1}^n (F(x_{(i)} + \Delta) - F(x_{(i)})) R^c(x_{(n)} + \Delta).$$

Sdružená hustota $\mathbf{X}$ potom je

$$f(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-n} P(Z) =$$

$$= \frac{N!}{(N-n)!} \prod_{i=1}^n f(x_{(i)}) R^c(x_{(n)}), \quad 0 < x_{(1)} < \dots, x_{(n)} < \infty.$$

Věrohodnostní funkce je

$$L(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{N!}{(N-n)!} \prod_{i=1}^n f(x_{(i)}, \boldsymbol{\theta}) R^c(x_{(n)}, \boldsymbol{\theta}),$$

kde $0 < x_{(1)} < \dots, x_{(n)} < \infty$ a $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$.

Odvození u ostatních typů cenzorování nebudou dále uváděny. Jejich provedení je podobné jako dvě zde uvedená odvození.

3.1.3 Výběry cenzorované zleva typu I

Experiment započneme v čase $t = 0$. Sledování a zaznamenávání poruch však nezačneme v okamžiku začátku experimentu, ale až v nějakém předem daném pevném čase $t = T_L$. Od tohoto času zaznamenáváme všechny poruchy až do okamžiku zakončení experimentu, přičemž experiment je ukončen v okamžiku, kdy došlo k poruše u všech $N = c+n$ jednotek. Výsledkem experimentu je tedy n zaznamenaných dob do poruchy $X_{(c+1)}, X_{(c+2)}, \dots, X_{(N)}$ a informace o tom, že u c jednotek došlo k poruše před okamžikem započetí sledování $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(c)} < T_L$. Věrohodnostní funkce je tvaru

$$L(x_{(c+1)}, \dots, x_{(N)}, n, \boldsymbol{\theta}) = K \cdot F(T_L, \boldsymbol{\theta})^c \prod_{i=1}^n f(x_{(i+c)}, \boldsymbol{\theta}),$$

kde K je blíže nespecifikovaná konstanta a $x_{(c+1)}, \dots, x_{(N)}$ jsou zaznamenané doby nastoupení poruch.

3.1.4 Výběry cenzorované zleva typu II

Experiment je započat v čase $t = 0$ a účastní se ho N zařízení. První doba poruchy, která je zaznamenána je až $c + 1$ porucha. O předchozích poruchách u c zařízení víme jen to, že proběhly před časem první zaznamenané poruchy. Pozorování ukončíme, když je všech N zařízení poroucháno. Výsledkem experimentu jsou doby nastoupení n poruch: $X_{(c+1)}, X_{(c+2)}, \dots, X_{(N)}$. Pro doby poruch před okamžikem cenzorování $T_L = X_{(c+1)}$ platí $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(c)} < T_L = X_{(c+1)}$. Věrohodnostní funkce pro tento případ je

$$L(x_{(c+1)}, \dots, x_{(N)}, \boldsymbol{\theta}) = K \cdot F(x_{(c+1)}, \boldsymbol{\theta})^c \prod_{i=1}^n f(x_{(i+c)}, \boldsymbol{\theta}),$$

kde K je blíže nespecifikovaná konstanta a $x_{(c+1)}, \dots, x_{(N)}$ jsou zaznamenané doby nastoupení poruch.

3.1.5 Výběry dvojité cenzorované

Dvojitě cenzorování je kombinací cenzorování zleva a zprava. Může být jak typu I tak typu II. Experiment započneme na N zařízeních v čase $t = 0$. Pro typ I započneme sledovat zařízení v čase $t = T_L$. Do tohoto času porucha proběhla u c_1 zařízení. Doby poruch těchto c_1 zařízení však neznáme. Jediné co o nich víme je, že $X_1, \dots, X_{c_1} < T_L$.

Zbývajících $N - c_1$ zařízení sledujeme po pevný předem určený čas, tedy do času T_P . V tomto čase přestaneme sledovat zařízení. Do tohoto okamžiku jsme zaznamenali n poruch, které proběhly mezi časy T_L a T_P . O zbylých $c_2 = N - c_1 - n$ zařízeních víme jen to, že doba do poruchy je u nich větší než T_P .

U typu II první zaznamenaná porucha je až $c_1 + 1$ porucha, která proběhla v čase $X_{(c_1+1)}$. Po zaznamenání n poruch je sledování ukončeno. Pro zbývajících $c_2 = N - c_1 - n$ zařízení platí, že jejich doba do poruchy je větší než doba do poruchy $X_{(c_1+n)}$ porouchaného zařízení. Věrohodnostní funkce je tvaru

$$L(x_{(c_1+1)}, \dots, x_{(c_1+n)}, \theta) = K[F(T_1, \theta)]^{c_1}[1 - F(T_2, \theta)]^{c_2} \prod_{i=1}^n f(x_{(i+c_1)}, \theta),$$

kde pro cenzorování typu I je $T_1 = T_L, T_2 = T_P$ a pro cenzorování typu II $T_1 = x_{(c_1+1)}, T_2 = x_{(c_1+n)}$ a $x_{(c_1+1)}, \dots, x_{(N)}$ jsou zaznamenané doby nastoupení porucha a K je blíže nespecifikovaná konstanta.

3.1.6 Výběry progresivně cenzorované

Experimentu se účastní N zařízení. V časech $T_1 < T_2 < \dots < T_j \dots < T_k$ dochází k cenzorování z prava. V čase $X = T_j$ je c_j zařízení vyloučeno ze sledování. O těchto c_j zařízení je pouze známo, že doba do poruchy je u nich větší než doba, ve které byly cenzorované tj. $X > T_j$. Celkem je během experimentu cenzorováno $c = \sum_{j=1}^k c_j$ pozorování. Celkový počet zaznamenaných poruch je $n = N - c$. Pro typ I jsou časy cenzorování pevně dané konstanty. Pro typ II jsou určeny předem danými počty poruch, které musejí nastat.

Věrohodnostní funkce pro progresivně cenzorované výběry typu I v bodech cenzorování $T_j, j = 1, \dots, k$ je tvaru

$$L(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, n, \theta) = K \prod_{j=1}^k [1 - F(T_j, \theta)]^{c_j} \prod_{i=1}^n f(x_{(i)}, \theta),$$

kde K je blíže nespecifikovaná konstanta a $x_{(i)}, i = 1, \dots, n$ jsou zaznamenané doby nastoupení poruch.

3.1.7 Výběry intervalově cenzorované

K intervalovému cenzorování dochází, jestliže sledujeme N prvků. V jistém okamžiku T_L přerušíme sledování. Opět se však v čase T_R vrátíme ke sledování. Během této doby, co jsme je nesledovali, však došlo k poruchám u c prvků. O těchto c prvcích víme jen to, že jejich doba do poruchy leží uvnitř intervalu (T_L, T_R) . Těchto intervalů však během sledování může být více. Dostáváme intervaly $(T_{L_j}, T_{R_j}), j = 1, \dots, k$ ve kterých došlo k cenzorování. Dále víme, že v intervalu (T_{L_j}, T_{R_j}) došlo k c_j poruchám. Celkový počet cenzorovaných pozorování je $c = \sum_{j=1}^k c_j$. Zbývá $n = N - c$ jednotek, u nichž jsme přesně zjistili dobu do poruchy. Věrohodnostní funkce pro cenzorování typu I je tvaru

$$L(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, n, \theta) = K \prod_{j=1}^k [F(T_{R_j}, \theta) - F(T_{L_j}, \theta)]^{c_j} \prod_{i=1}^n f(x_{(i)}, \theta),$$

kde doby T_{L_j}, T_{R_j} jsou pro cenzorování typu I dány předem a u cenzorování typu II závisí na předem určených počtech zaznamenaných poruch a K je blíže nespecifikovaná konstanta.

3.1.8 Výběry náhodně cenzorované

Při náhodném cenzorování se předpokládá, že doba do poruchy X a doba T , po kterou sledujeme danou statistickou jednotku, jsou nezávislé náhodné veličiny. Rozdělení náhodné veličiny X je popsáno hustotou $f(x)$ či distribuční funkcí $F(x)$. Rozdělení náhodné veličiny T je popsáno hustotou $g(t)$ a distribuční funkcí $G(t)$. Obě rozdělení mohou záviset na neznámých parametrech. Tedy $F(x) = F(x, \theta_1)$ a $G(t) = G(t, \theta_2)$. Vektorem $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ rozumíme vektor všech neznámých parametrů. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že vektory θ_1 a θ_2 neobsahují stejné neznámé parametry.

Výsledkem experimentu je n nezávislých dvojic (W_j, I_j) , kde $j = 1, 2, \dots, n$. Náhodná veličina W_j nabývá buď hodnoty X_j či T_j . $W_j = X_j$, když u j -té sledované jednotky došlo k poruše v čase X_j . $W_j = T_j$, pokud statistická jednotka přestala být sledována v čase T_j a to dříve, než u ní došlo k poruše. Z toho vyplývá, že $W_j = \min(X_j, T_j)$. Veličina $I_j \in \{0, 1\}$ vyjadřuje, zda došlo ($I_j = 0$), či nedošlo ($I_j = 1$) k cenzorování u j -té jednotky. Symbolem $f_{XT}(x, t)$ budeme značit sdruženou hustotu náhodných veličin X a T . V případě nezávislosti X a T platí $f_{XT}(x, t) = f(x)g(t)$.

Dále následuje odvození věrohodnostní funkce pro náhodné cenzorování. Zde pro zjednodušení zápisu zavedeme funkci $H(w, i)$.

$$H(w, i) = P(W \leq w, I = i),$$

kde $w > 0$ a $i \in \{0, 1\}$. Pro funkci $H(w, i)$ platí:

$$\begin{aligned} H(w, 0) &= P(W < w, I = 0) = P(\min(T, X) \leq w, T < X) = P(T \leq w, X > T) = \\ &= \int_0^w \int_0^x f_{XT}(x, t) dx dt = \int_0^w \int_0^x f(x)g(t) dx dt = \int_0^w g(t) \left(\int_t^\infty f(x) dx \right) dt = \\ &= \int_0^w g(t)(1 - F(t)) dt = G(w) - \int_0^w g(t)F(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(w, 1) &= P(W < w, I = 1) = P(\min(T, X) < w, T > X) = P(X \leq w, T > X) = \\ &= \int_0^w \int_x^\infty f_{XT}(x, t) dx dt = \int_0^w \int_x^\infty f(x)g(t) dx dt = \\ &= \int_0^w f(x) \left(\int_x^\infty g(t) dt \right) dx = F(w) - \int_0^w f(x)G(x) dx \end{aligned}$$

Sdružená hustota náhodných veličin W a I je $h(w, i)$ vzhledem k součinové Lebesgueově a číací míře.

$$h(w, 0) = \frac{dH(w, 0)}{dw} = g(w) - g(w)F(w) = g(w)(1 - F(w))$$

$$h(w, 1) = \frac{dH(w, 1)}{dw} = f(w) - f(w)G(w) = f(w)(1 - G(w))$$

Věrohodnostní funkce je:

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^n h(w_j, i_j),$$

3.2 ODHADY METODOU MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

kde w_j je realizací náhodné veličiny W_j a i_j je realizací náhodné veličiny I_j . Odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ se získá maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n \ln h(w_j, i_j) = \sum_{j \in J_0} \ln h(w_j, 0) + \sum_{j \in J_1} \ln h(w_j, 1),$$

kde J_0 je množina statistických jednotek j , pro které je $I_j = 0$ tedy $J_0 = \{j : I_j = 0\}$ a $J_1 = \{j : I_j = 1\}$. Další úpravou (dosazením za $h(w, 1)$ a $h(w, 0)$) se dostane

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j \in J_0} \ln[g(w_j)(1 - F(w_j))] + \sum_{j \in J_1} \ln[f(w_j)(1 - G(w_j))] = \\ &= \sum_{j \in J_0} \ln g(t_j) + \sum_{j \in J_0} \ln(1 - F(t_j)) + \sum_{j \in J_1} \ln f(x_j) + \sum_{j \in J_1} \ln(1 - G(x_j)). \end{aligned}$$

Užitím předpokladu, že f a F závisí pouze na $\boldsymbol{\theta}_1 = (\theta_{11}, \dots, \theta_{1r_1})$ a g a G závisí na $\boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_{21}, \dots, \theta_{2r_2})$ se dostane logaritmická věrohodnostní funkce ve tvaru

$$l(\boldsymbol{\theta}) = l_1(\boldsymbol{\theta}_1) + l_2(\boldsymbol{\theta}_2),$$

kde

$$\begin{aligned} l_1(\boldsymbol{\theta}_1) &= \sum_{j \in J_0} \ln(1 - F(t_j)) + \sum_{j \in J_1} \ln f(x_j), \\ l_2(\boldsymbol{\theta}_2) &= \sum_{j \in J_0} \ln g(t_j) + \sum_{j \in J_1} \ln(1 - G(x_j)). \end{aligned}$$

Věrohodnostní rovnice pro odhad parametrů jsou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1}{\partial \theta_{1i}} &= 0, & i &= 1, \dots, r_1. \\ \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{2i}} &= 0, & i &= 1, \dots, r_2. \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic se dostanou maximálně věrohodné odhady parametrů $\boldsymbol{\theta}_1$ a $\boldsymbol{\theta}_2$.

3.2 Odhady metodou maximální věrohodnosti

V této sekci jsou odvozeny věrohodnostní rovnice pro maximálně věrohodné odhady parametrů a asymptotické intervalové odhady pro rozdělení exponenciální, Weibullovo a logaritmicko–normální. V textu nejsou pro zjednodušení uvedeny veškeré kroky, které jsem při vlastním výpočtu provedl. Při odvozování se vychází z teorie, která byla uvedena v kapitole 2 Metoda maximální věrohodnosti.

3.2.1 Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení má hustotu

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad x > 0$$

a distribuční funkci

$$F(x, \lambda) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Pro jednotlivé typy cenzorování bude věrohodnostní funkce a odhad parametru λ následující.

• **Cenzorování zprava typu I a II**

Pro typ I je věrohodnostní funkce:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = (1 - F(T_P))^c \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = (\exp(-\frac{T_P}{\lambda}))^c \frac{1}{\lambda^n} \exp(-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i).$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\ln L(\mathbf{x}, \lambda) = -c \frac{T_P}{\lambda} - n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = c \frac{T_P}{\lambda^2} - \frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Její úpravou se dostane maximálně věrohodný odhad $\hat{\lambda}$ parametru λ .

$$\begin{aligned} (N - n)T_P - n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \hat{\lambda} &= \frac{cT_P}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \left(cT_P + \sum_{i=1}^n x_i \right), \\ \hat{\lambda} &= \frac{1}{n} \left(cT_P + \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{aligned}$$

Pro typ II bod cenzorování není T_P , ale čas nastoupení n -tého rizikového jevu. Odhad se dostane nahrazením T_P za $x_{(n)}$.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \left(cx_{(n)} + \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

• **Cenzorování zleva typu I a II**

Věrohodnostní funkce pro typ I:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(T_L)^c \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = (1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda}))^c \frac{1}{\lambda^n} \exp(-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i).$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\ln L(\mathbf{x}, \lambda) = c \ln(1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda})) - n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{cT_L \exp(-\frac{T_L}{\lambda})}{\lambda^2(1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda}))} - \frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Pokud ji dále upravíme dostaneme

$$cT_L \exp(-\frac{T_L}{\lambda}) + n\lambda(1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda})) - (1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda})) \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Tato rovnice se nedá analyticky řešit. Pro získání odhadu $\hat{\lambda}$ je třeba tuto rovnici řešit za použití numerických metod. Pro cenzorování typu II se nahradí T_L za $x_{(c+1)}$.

• **Progresivní cenzorování**

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\ln L(\mathbf{x}, \lambda) = - \sum_{j=1}^k c_j \frac{T_j}{\lambda} - n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^k c_j T_j \right) = 0.$$

Po zjednodušení přejde na tvar:

$$\sum_{j=1}^k c_j T_j - n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Odhad parametru λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k c_j T_j + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

• **Interval spolehlivosti pro odhad λ**

Pro určení intervalu spolehlivosti nejprve vypočteme:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = K + \frac{n}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kde K je pro

$$\text{cenzorování zprava} \quad K = -2c \frac{T_P}{\lambda^3},$$

$$\text{cenzorování zleva} \quad K = -\frac{cT_L^2 \exp(-\frac{T_L}{\lambda})}{\lambda^4(1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda}))} + \frac{2cT_L \exp(-\frac{T_L}{\lambda})}{\lambda^3(1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda}))} - \frac{cT_L^2 \exp(-2\frac{T_L}{\lambda})}{\lambda^4(1 - \exp(-\frac{T_L}{\lambda}))^2},$$

$$\text{progresiví cenzorování} \quad K = -\frac{2}{\lambda^3} \sum_{j=1}^k c_j T_j.$$

Asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro λ s koeficientem spolehlivosti $1 - \frac{\alpha}{2}$ je

$$(\hat{\lambda} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi}, \hat{\lambda} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi}),$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $1 - \alpha/2$ kvantil normovaného normálního rozdělení a ψ je

$$\psi = \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} \right)^{-1}.$$

3.2.2 Weibullovo rozdělení

Hustota dvoupametrického Weibullova rozdělení $W(x, \lambda, b)$, $b > 0$, $\lambda > 0$ a $0 \leq x < \infty$ je

$$f(x, \lambda, b) = \frac{b}{\lambda^b} x^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^b\right).$$

Distribuční funkce je

$$F(x, \lambda, b) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^b\right).$$

- **Cenzorování zprava typu I a II**

Věrohodnostní funkce pro cenzorování typu I:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, b) = (1 - F(T_P))^c \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda, b) = \left(\exp\left(-\left(\frac{T_P}{\lambda}\right)^b\right)\right)^c \prod_{i=1}^n \frac{b}{\lambda^b} x_i^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b\right).$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\ln L(\mathbf{x}, \lambda, b) = n \ln b - c \left(\frac{T_P}{\lambda}\right)^b - nb \ln \lambda + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b.$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \lambda, b)}{\partial b} &= \frac{n}{b} - c \left(\frac{T_P}{\lambda}\right)^b \ln T_P + c \left(\frac{T_P}{\lambda}\right)^b \ln \lambda - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{\ln \lambda}{\lambda^b} \sum_{i=1}^n x_i^b \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^b} \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \lambda, b)}{\partial \lambda} = bc \frac{T_P^b}{\lambda^{b+1}} - \frac{nb}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^{b+1}} \sum_{i=1}^n x_i^b = 0. \quad (2)$$

Dále z rovnice (2) vyjádříme λ

$$\begin{aligned} \lambda^b &= \frac{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}, \\ \lambda &= \left(\frac{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}\right)^{\frac{1}{b}}. \end{aligned}$$

Dosadíme vyjádření pro λ^b do rovnice (1) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n}{b} - cT_P^b \frac{n}{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b} \ln T_P + cT_P^b \frac{n}{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b} \ln \left(\frac{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}\right) - n \ln \left(\frac{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}\right) \\ + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{n}{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b} \ln \left(\frac{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}\right) \sum_{i=1}^n x_i^b - \frac{n}{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b} \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i = 0. \end{aligned}$$

Tuto rovnici dále upravíme vynásobením členem $\frac{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}$ a následnými úpravami až na tvar

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{cT_P^b \ln T_P - \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i}{cT_P^b + \sum_{i=1}^n x_i^b} - \frac{1}{b}.$$

Získaná rovnice se nedá analyticky řešit. K jejímu vyřešení je potřeba použít numerických metod. Pro cenzorování typu II se v této rovnici zamění T_P za $x_{(n)}$.

• **Cenzorování zleva typu I a II**

Věrohodnostní funkce pro cenzorování typu I:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, b) = (F(T_L))^c \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda, b) = \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b\right)\right)^c \prod_{i=1}^n \frac{b}{\lambda^b} x_i^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b\right).$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\ln L(\mathbf{x}, \lambda, b) = n \ln b + c \ln \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b\right)\right) - nb \ln \lambda + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b.$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \lambda, b)}{\partial b} &= \frac{n}{b} + \frac{c \exp\left(-\left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b\right) \left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b (\ln T_L - \ln \lambda)}{1 - \exp\left(-\left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b\right)} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b (\ln x_i - \ln \lambda) = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \lambda, b)}{\partial \lambda} &= -bc \frac{T_L^b \exp\left(-\left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b\right)}{\lambda^{b+1} (1 - \exp\left(-\left(\frac{T_L}{\lambda}\right)^b\right))} - \frac{nb}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^{b+1}} \sum_{i=1}^n x_i^b = 0. \end{aligned}$$

Po upravení dostaneme soustavu rovnic, kterou lze řešit jen numericky.

$$\begin{aligned} \lambda^b \frac{n}{b} (1 - e^{-(\frac{T_L}{\lambda})^b}) + c e^{-(\frac{T_L}{\lambda})^b} T_L^b (\ln T_L - \ln \lambda) - n \lambda^b \ln \lambda + \lambda^b \sum_{i=1}^n \ln x_i + \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i^b \\ - \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i = 0, \\ -bc \frac{T_L^b e^{-(\frac{T_L}{\lambda})^b}}{1 - e^{-(\frac{T_L}{\lambda})^b}} - nb \lambda^b + b \sum_{i=1}^n x_i^b = 0. \end{aligned}$$

Pro cenzorování typu II se v této soustavě rovnic zamění T_L za $x_{(c+1)}$.

• **Progresivní cenzorování**

Věrohodnostní funkce pro cenzorování typu I:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, b) = \sum_{j=1}^k (1 - F(T_j))^{c_j} \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda, b) = \left(\exp\left(-\left(\frac{T_j}{\lambda}\right)^b\right)\right)^{c_j} \prod_{i=1}^n \frac{b}{\lambda^b} x_i^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b\right].$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\ln L(\mathbf{x}, \lambda, b) = n \ln b - \sum_{j=1}^k c_j \left(\frac{T_j}{\lambda}\right)^b - nb \ln \lambda + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^b.$$

Věrohodnostní rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \lambda, b)}{\partial b} &= \frac{n}{b} - \frac{1}{\lambda^b} \sum_{j=1}^k c_j T_j^b \ln T_j + \frac{\ln \lambda}{\lambda^b} \sum_{j=1}^k c_j T_j^b - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{\ln \lambda}{\lambda^b} \sum_{i=1}^n x_i^b \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^b} \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \lambda, b)}{\partial \lambda} = \frac{b}{\lambda^{b+1}} \sum_{j=1}^k c_j T_j^b - \frac{nb}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^{b+1}} \sum_{i=1}^n x_i^b = 0. \tag{2}$$

3.2 ODHADY METODOU MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

Z rovnice (2) vyjádříme λ

$$\begin{aligned}\lambda^b &= \frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n}, \\ \lambda &= \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n} \right)^{\frac{1}{b}}.\end{aligned}$$

Rovnici (1) vynásobíme λ^b a pak dosadíme vyjádření pro λ^b a dostaneme

$$\begin{aligned}& \frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{b} - \sum_{j=1}^k c_j T_j^b \ln T_j + \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n} \right) \sum_{j=1}^k c_j T_j^b \\ & - \left(\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b \right) \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n} \right) + \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n} \right) \sum_{i=1}^n \ln x_i + \\ & + \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b}{n} \right) \sum_{i=1}^n x_i^b - \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i = 0.\end{aligned}$$

Tuto rovnici dále upravíme na tvar

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b \ln T_j - \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i}{\sum_{j=1}^k c_j T_j^b + \sum_{i=1}^n x_i^b} - \frac{1}{b}.$$

Rovnice se dále řeší numericky.

• Intervaly spolehlivosti pro odhady parametrů

Nejprve se napočítají potřebné derivace pro sestavení asymptotické Fisherovy informační matice.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} = K_1 + \left[-\frac{n}{b^2} - \frac{1}{\lambda^b} \sum_{i=1}^n x_i^b (\ln x_i - \ln \lambda)^2 \right],$$

kde K_1 je pro

$$\begin{aligned}\text{cenzorování zprava} \quad K_1 &= -c \left(\frac{T_P}{\lambda} \right)^b \left(\ln T_P - \ln \lambda \right)^2, \\ \text{cenzorování zleva} \quad K_1 &= \frac{c \exp \left(- \left(\frac{T_L}{\lambda} \right)^b \right) \left(\frac{T_L}{\lambda} \right)^b (\ln T_L - \ln \lambda)^2}{\left(1 - \exp \left(- \left(\frac{T_L}{\lambda} \right)^b \right) \right)^2} \\ &\quad \cdot \left(1 - \left(\frac{T_L}{\lambda} \right)^b - \exp \left(- \left(\frac{T_L}{\lambda} \right)^b \right) \right), \\ \text{progresiví cenzorování} \quad K_1 &= - \sum_{j=1}^k c_j \left(\frac{T_j}{\lambda} \right)^b \left(\ln T_j - \ln \lambda \right)^2.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b \partial \lambda} = K_2 - \frac{n}{\lambda} + \frac{1 - b \ln \lambda}{\lambda^{b+1}} \sum_{i=1}^n x_i^b + \frac{b}{\lambda^{b+1}} \sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i,$$

kde K_2 je pro

$$\begin{aligned}
 \text{cenzorování zprava} \quad K_2 &= \frac{cT_P^b(b \ln T_P + 1 - b \ln \lambda)}{\lambda^{b+1}}, \\
 \text{cenzorování zleva} \quad K_2 &= \frac{c \exp(-(\frac{T_L}{\lambda})^b) \frac{T_L^b}{\lambda^{b+1}} (b(\ln T_L - \ln \lambda)((\frac{T_L}{\lambda})^b - 1) - 1)}{1 - \exp(-(\frac{T_L}{\lambda})^b)} \\
 &\quad + \frac{c \exp(-2(\frac{T_L}{\lambda})^b) \frac{T_L^{2b}}{\lambda^{2b+1}} b(\ln T_L - \ln \lambda)}{(1 - \exp(-(\frac{T_L}{\lambda})^b))^2}, \\
 \text{progresiví cenzorování} \quad K_2 &= \frac{b}{\lambda^{b+1}} \sum_{j=1}^k c_j T_j^b \ln T_j + \frac{1 - b \ln \lambda}{\lambda^{b+1}} \sum_{j=1}^k c_j T_j^b. \\
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} &= K_3 + \frac{nb}{\lambda^2} - \frac{b(b+1)}{\lambda^{b+2}} \sum_{i=1}^n x_i^b,
 \end{aligned}$$

kde K_3 je pro

$$\begin{aligned}
 \text{cenzorování zprava} \quad K_3 &= -\frac{cb(b+1)T_P^b}{\lambda^{b+2}}, \\
 \text{cenzorování zleva} \quad K_3 &= -bcT_L^b \left(\frac{\exp(-(\frac{T_L}{\lambda})^b)(T_L^b b \lambda^{-2(b+1)} - (b+1)\lambda^{-b-2})}{1 - \exp(-(\frac{T_L}{\lambda})^b)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\exp(-2(\frac{T_L}{\lambda})^b) T_L^b b \lambda^{-2(b+1)}}{(1 - \exp(-(\frac{T_L}{\lambda})^b))^2} \right), \\
 \text{progresiví cenzorování} \quad K_3 &= -\frac{b(b+1)}{\lambda^{b+2}} \sum_{j=1}^k c_j T_j^b.
 \end{aligned}$$

Asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro parametr λ s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha/2$ je

$$(\hat{\lambda} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}}, \hat{\lambda} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}})$$

a pro parametr b je

$$(\hat{b} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}, \hat{b} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}),$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $1 - \alpha/2$ kvantil normovaného normálního rozdělení a $\psi_{1,1}$ je hodnota matice $\psi(\lambda, b)$ v prvním řádku a prvním sloupci a $\psi_{2,2}$ je v druhém řádku a druhém sloupci. Matice $\psi(\lambda, b)$ je určena vztahem

$$\psi(\lambda, b) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L|_{\lambda=\hat{\lambda}, b=\hat{b}} & -\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial b} \ln L|_{\lambda=\hat{\lambda}, b=\hat{b}} \\ -\frac{\partial^2}{\partial b \partial \lambda} \ln L|_{\lambda=\hat{\lambda}, b=\hat{b}} & -\frac{\partial^2}{\partial b^2} \ln L|_{\lambda=\hat{\lambda}, b=\hat{b}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

3.2.3 Logaritmicko–normální rozdělení

Hustota a distribuční funkce logaritmicko–normálního rozdělení o parametrech $\mu, \gamma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ jsou

$$f(x, \mu, \sigma, \gamma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}(x - \gamma)} \exp\left(-\frac{(\ln(x - \gamma) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > \gamma.$$

3.2 ODHADY METODOU MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

$$F(x, \mu, \sigma, \gamma) = \Phi\left(\frac{\ln(x - \gamma) - \mu}{\sigma}\right),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Z důvodu zjednodušení uvedu jen odvození pro progresivní cenzorování.

- **Progresivní cenzorování**

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{x}, \mu, \sigma, \gamma) &= -n \ln \sigma - \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \gamma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [\ln(x_i - \gamma) - \mu]^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^k c_j \ln(1 - F(T_j)), \end{aligned}$$

kde $F(T_j) = \Phi(\xi_j) = \Phi\left(\frac{\ln(T_j - \gamma) - \mu}{\sigma}\right)$ a $\xi_j = \frac{\ln(T_j - \gamma) - \mu}{\sigma}$.

Věrohodnostní rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [\ln(x_i - \gamma) - \mu] + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^k c_j Q_j = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n [\ln(x_i - \gamma) - \mu]^2 + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^k c_j \xi_j Q_j = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \gamma)^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - \gamma) - \mu}{x_i - \gamma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^k \frac{c_j Q_j}{T_j - \gamma} = 0, \end{aligned}$$

kde

$$Q_j = \frac{\phi(\xi_j)}{1 - \Phi(\xi_j)}$$

a ϕ je hustota normovaného normálního rozdělení.

Vyřešením této soustavy tří rovnic se dostanou maximálně věrohodné odhady parametrů μ, σ, γ .

- **Intervaly spolehlivosti pro odhady parametrů**

Při výpočtu parciálních derivací logaritmické věrohodnostní funkce byly využity následující derivace:

$$\frac{dQ_j}{d\xi_j} = Q_j(Q_j - \xi_j), \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial \sigma} = -\frac{\xi_j}{\sigma}, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\sigma(T_j - \gamma)}.$$

3.2 ODHADY METODOU MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k c_j Q_j (\xi_j - Q_j), \\
\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu \partial \sigma} &= -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i - \gamma) - \mu) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k c_j Q_j (\xi_j Q_j - \xi_j^2 + 1), \\
\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i - \gamma) - \mu)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k c_j Q_j \xi_j (\xi_j Q_j - \xi_j^2 + 2), \\
\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \gamma} &= -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \gamma} (\ln(x_i - \gamma) - \mu) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k \frac{c_j Q_j (\xi_j Q_j - \xi_j^2 + 1)}{T_j - \gamma}, \\
\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma^2} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \gamma)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - \gamma) - \mu - 1}{(x_i - \gamma)^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k \frac{c_j Q_j (\xi_j + \sigma - Q_j)}{(T_j - \gamma)^2}, \\
\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma \partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \gamma} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k \frac{c_j Q_j (Q_j - \xi_j)}{T_j - \gamma}.
\end{aligned}$$

Asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha/2$ je

$$(\hat{\mu} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}}, \hat{\mu} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}}).$$

Pro parametr σ je

$$(\hat{\sigma} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}, \hat{\sigma} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}).$$

Pro parametr γ je

$$(\hat{\gamma} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{3,3}}, \hat{\gamma} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{3,3}}).$$

Opět $u_{1-\alpha/2}$ značí $1 - \alpha/2$ kvantil normovaného normálního rozdělení a $\psi_{1,1}$ je hodnota matice $\psi(\mu, \sigma, \gamma)$ v prvním řádku a prvním sloupci, $\psi_{2,2}$ je hodnota v druhém řádku a druhém sloupci a $\psi_{3,3}$ je ve třetím řádku a třetím sloupci.

$$\psi(\mu, \sigma, \gamma) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} & -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} & -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \gamma} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} & -\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} & -\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \gamma} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \mu} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} & -\frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \sigma} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} & -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \gamma=\hat{\gamma}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

4 Rozdělení extrémních hodnot

Teorie extrémních hodnot se zabývá rozdělením maxim respektive minim posloupností nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ s distribuční funkcí F a hustotou f . Nechť $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Distribuční funkce náhodné veličiny M_n se dá odvodit následovně:

$$P(M_n \leq z) = P(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z) = P(X_1 \leq z) \cdots P(X_n \leq z) = \left(F(z)\right)^n.$$

V praxi však často není rozdělení náhodných veličin známo. Volí se proto přístup na podobném principu, jako když se pomocí centrální limitní věty aproximuje rozdělení výběrového průměru normálním rozdělením. V případě, že uvažujeme $F_{M_n} = F^n$, kde $n \rightarrow \infty$ vyskytne se problém, že distribuční funkce F_{M_n} náhodné veličiny M_n konverguje k distribuční funkci degenerovaného rozdělení nebo k nulové funkci.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } z < z_+, \\ 1 & \text{pro } z \geq z_+. \end{cases} \quad z_+ = \inf\{z : F(z) = 1\}$$

To lze obejít použitím vhodné transformace náhodné veličiny M_n .

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n},$$

kde $a_n > 0$ a $b_n \in \mathbb{R}$ jsou vhodné posloupnosti konstant.

Věta 4.1 *Jestliže existuje posloupnost konstant $a_n > 0$ a b_n , pro kterou*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G(z) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

kde G je nedegenerovaná distribuční funkce, potom G náleží do jedné z následujících tříd

$$\begin{aligned} I : G(z) &= \exp\left(-\exp\left(-\frac{z-b}{a}\right)\right), & -\infty < z < \infty \\ II : G(z) &= \begin{cases} 0, & z \leq \mu \\ \exp\left(-\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\alpha}\right), & z > \mu \end{cases} \\ III : G(z) &= \begin{cases} \exp\left(-\left(-\frac{z-b}{a}\right)^{\alpha}\right), & z < \mu \\ 1 & z \geq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

pro parametry $a > 0, b \in \mathbb{R}$ a v případě II a III $\alpha > 0$.

Důkaz. Viz [4] (str. 7).

Rozdělení s distribuční funkcí typu I, II a III nazýváme rozdělení Gumbelova, Fréchetova a Weibullova typu.

Věta 4.2 *Jestliže existuje posloupnost konstant $a_n > 0$ a b_n , pro kterou*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G(z), \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

kde G je nedegenorovaná distribuční funkce, potom G náleží do třídy zobecněného extrémního rozdělení (Dále v textu bude používána zkratka GEV z anglického názvu Generalized Extreme Value (GEV) distribution.).

$$G(z) = \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right),$$

definovaného pro $\{z : 1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma} > 0\}$, kde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \xi < \infty$.

Důkaz: Důkaz této věty plyne z důkazu věty 3.1, jelikož se dá ukázat, že pro $\xi = 0$ se dostane typ I, pro $\xi > 0$ typ II a pro $\xi < 0$ typ III.

pro $\xi = 0$

$$G(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \exp\left(-\left(1 + \frac{-\frac{z - \mu}{\sigma}}{-\frac{1}{\xi}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right),$$

pro $\xi > 0$

$$G(z) = \exp\left(-\left(\frac{z - \mu + \frac{\sigma}{\xi}}{\frac{\sigma}{\xi}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) = \exp\left(-\left(\frac{z - b}{a}\right)^{-\alpha}\right),$$

pro $\xi < 0$

$$G(z) = \exp\left(-\left(-\frac{z - \mu + \frac{\sigma}{-\xi}}{\frac{\sigma}{-\xi}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) = \exp\left(-\left(-\frac{z - b}{a}\right)^{\alpha}\right).$$

□

4.1 Maximálně věrohodné odhady

Jelikož problém odhadu parametrů extrémního rozdělení typu II a III se dá převést na odhad parametrů GEV rozdělení, proto budou uvedeny mnou odvozené věrohodnostní rovnice jen pro extrémní rozdělení typu I a dále pro GEV rozdělení.

4.1.1 Extrémní rozdělení typu I

Mějme náhodný výběr $Z_1, \dots, Z_n$ z extrémního rozdělení typu I o hustotě

$$\begin{aligned} g(z, a, b) &= \frac{dG(z)}{dz} = \exp\left(-\exp\left(-\frac{z - b}{a}\right)\right) \exp\left(-\frac{z - b}{a}\right) \frac{1}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{z - b}{a} - \exp\left(-\frac{z - b}{a}\right)\right). \end{aligned}$$

Logaritmická Věrohodnostní funkce pro typ I je tvaru

$$\begin{aligned} \ln L(z_1, \dots, z_n, a, b) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{z_i - b}{a} - \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right)\right) = \\ &= -n \ln a - \sum_{i=1}^n \frac{z_i - b}{a} - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right). \end{aligned}$$

Odhady parametrů a, b se získají buď maximalizací logaritmické věrohodností funkce a nebo je získáme vyřešením soustavy rovnic $\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0$ pro neznámé a, b .

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = -\frac{n}{a} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = \frac{n}{a} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right) = 0. \quad (4.2)$$

Z rovnice 4.1 se jednoduchou úpravou získá rovnice

$$\sum_{i=1}^n (z_i - b) \left(1 - \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right)\right) = na. \quad (4.3)$$

Úpravou rovnice 4.2 dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right) = n. \quad (4.4)$$

Zlogaritmováním rovnice 4.4 se obdrží

$$b = -a \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i}{a}\right)\right). \quad (4.5)$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice 4.3 se získá

$$\begin{aligned} na &= \sum_{i=1}^n \left(z_i + a \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i}{a}\right)\right) \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{z_i + a \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i}{a}\right)\right)}{a}\right)\right), \\ a &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i - \frac{\sum_{i=1}^n z_i \exp\left(-\frac{z_i}{a}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i}{a}\right)}. \end{aligned}$$

Odhad parametru a se tedy získá vyřešením rovnice

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i - \frac{\sum_{i=1}^n z_i \exp\left(-\frac{z_i}{\hat{a}}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i}{\hat{a}}\right)}.$$

Odhad parametru b se pak získá dosazením hodnoty $\hat{a}$ do vztahu 4.5

$$\hat{b} = -\hat{a} \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i}{\hat{a}}\right)\right).$$

4.1.2 Zobecněné rozdělení extrémních hodnot

Dále odvozené vztahy budou platné jen pro $\xi \neq 0$. Odhad pro $\xi = 0$ se dá provést pomocí odhadu parametrů extrémního rozdělení typu I. Hustota zobecněného rozdělení extrémních hodnot je

$$g(z) = \exp\left\{-\left[1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1}.$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

Předpokládejme nezávislé náhodné veličiny $Z_1, \dots, Z_n$ ze zobecněného rozdělení extrémních hodnot, kde $\xi \neq 0$. Logaritmická věrohodnostní funkce je

$$\ln L(\mathbf{z}, \mu, \sigma, \xi) = -n \ln \sigma - (1 + \frac{1}{\xi}) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

kde $1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} > 0$, pro $i = 1, \dots, n$. Odhady parametrů μ, σ, ξ se získají buď maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce za použití optimalizačních technik a nebo vyřešením soustavy rovnic $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \xi} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} (\xi + 1) \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\sigma} (1 + \frac{1}{\xi}) \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} + \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left(\ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \frac{\xi}{\sigma} (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Tato soustava jde upravit na tvar

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \left((1 + \xi) - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right), \\ 0 &= \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \left((1 + \xi) - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - n\sigma, \\ 0 &= \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \left(1 - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - \frac{\xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left((1 + \xi) - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right). \end{aligned}$$

4.2 Maximálně věrohodné odhady pro cenzorované výběry

Ta část bude využívat značení a postupů uvedených v kapitolách 2 a 3.

4.2.1 Extrémní rozdělení typu I

Zprava cenzorované

Uvažujme cenzorování typu I, kde hodnoty $z_1, \dots, z_n$ jsou změřeny. K cenzorování dojde v čase T_p a cenzorováno je c hodnot. Logaritmická věrohodnostní funkce je

$$\ln L(\mathbf{z}, a, b) = \ln \left(1 - G(T_p) \right)^c + \sum_{i=1}^n \ln g(z_i) = c \ln \left(1 - e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{z_i - b}{a} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i-b}{a}} - n \ln a.$$

Odhady parametrů a, b se získají buď přímo maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce nebo vyřešením soustavy rovnic $\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0$ pro neznámé a, b .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= c \frac{T_p - b}{a^2} \frac{e^{-\frac{T_p-b}{a}} e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}}}{1 - e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}}} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) e^{-\frac{z_i-b}{a}} - \frac{n}{a} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= c \frac{1}{a} \frac{e^{-\frac{T_p-b}{a}} e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}}}{1 - e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}}} + \frac{n}{a} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i-b}{a}} = 0 \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme následující soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} \frac{c(T_p - b)e^{-\frac{T_p-b}{a}}}{e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}} - 1} + \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \sum_{i=1}^n (z_i - b)e^{-\frac{z_i-b}{a}} - na &= 0. \\ \frac{ce^{-\frac{T_p-b}{a}}}{e^{-e^{-\frac{T_p-b}{a}}} - 1} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i-b}{a}} + n &= 0. \end{aligned}$$

Pro cenzorování typu II se dostanou rovnice pro a, b nahrazením T_p za $z_{(n)}$ v uvedené soustavě rovnic.

Zleva cenzorované

Opět odvodíme rovnice pro cenzorování typu I a pak jen jejich úpravou se získají rovnice pro cenzorování typu II.

$$\ln L(\mathbf{z}, a, b) = \ln \left(G(T_l) \right)^c + \sum_{i=1}^n \ln g(z_i) = -ce^{-\frac{T_l-b}{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{z_i - b}{a} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i-b}{a}} - n \ln a.$$

Rovnice pro odhad neznámých parametrů a, b jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= -\frac{c}{a^2} (T_l - b) e^{-\frac{T_l-b}{a}} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) e^{-\frac{z_i-b}{a}} - \frac{n}{a} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= -\frac{c}{a} e^{-\frac{T_l-b}{a}} + \frac{n}{a} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i-b}{a}} = 0. \end{aligned}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

Úpravou první rovnice a vyjádřením b z druhé rovnice se dostane soustava

$$\begin{aligned} 0 &= -c(T_L - b)e^{-\frac{T_L - b}{a}} + \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \sum_{i=1}^n (z_i - b)e^{-\frac{z_i - b}{a}} - na, \\ b &= -a \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{a}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{a}} \right). \end{aligned}$$

Dosazením rovnice pro b do první rovnice získáme rovnici pro odhad neznámého parametru $\hat{a}$. Získanou hodnotu $\hat{a}$ pak dosadíme do vztahu pro b a získáme tak odhad $\hat{b}$.

$$\begin{aligned} 0 &= -c \left(T_L + \hat{a} \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{\hat{a}}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{\hat{a}}} \right) \right) e^{-\frac{T_L + \hat{a} \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{\hat{a}}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{\hat{a}}} \right)}{\hat{a}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(z_i + \hat{a} \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{\hat{a}}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{\hat{a}}} \right) \right) e^{-\frac{z_i + \hat{a} \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{\hat{a}}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{\hat{a}}} \right)}{\hat{a}} - n\hat{a} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(z_i + \hat{a} \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{\hat{a}}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{\hat{a}}} \right) \right). \\ \hat{b} &= -\hat{a} \ln \left(\frac{c}{n} e^{-\frac{T_L}{\hat{a}}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i}{\hat{a}}} \right). \end{aligned}$$

Pro cenzorování typu II se dostanou rovnice pro a, b uvažováním uspořádaného výběru $z_{(c+1)}, \dots, z_{(N)}$ naměřených hodnot a nahrazením T_L za $z_{(c+1)}$.

Progresivně cenzorované

Logaritmická věrohodnostní funkce pro typ cenzorování I je

$$\ln L(\mathbf{z}, a, b) = \sum_{j=1}^k c_j \ln \left(1 - G(T_j) \right) + \sum_{i=1}^n \ln g(z_i) = c \ln \left(1 - e^{-e^{-\frac{T_p - b}{a}}} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{z_i - b}{a} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i - b}{a}} - n \ln a.$$

Soustava rovnic pro odhad parametrů $\hat{a}$ a $\hat{b}$ je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{T_j - b}{a^2} \frac{e^{-\frac{T_j - b}{a}} e^{-e^{-\frac{T_j - b}{a}}}}{1 - e^{-e^{-\frac{T_j - b}{a}}}} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (z_i - b) e^{-\frac{z_i - b}{a}} - \frac{n}{a} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{1}{a} \frac{e^{-\frac{T_j - b}{a}} e^{-e^{-\frac{T_j - b}{a}}}}{1 - e^{-e^{-\frac{T_j - b}{a}}}} + \frac{n}{a} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i - b}{a}} = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě se dostane

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{(T_j - b) e^{-\frac{T_j - b}{a}}}{e^{e^{-\frac{T_j - b}{a}}} - 1} + \sum_{i=1}^n (z_i - b) - \sum_{i=1}^n (z_i - b) e^{-\frac{z_i - b}{a}} - na, \\ 0 &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{e^{-\frac{T_j - b}{a}}}{e^{e^{-\frac{T_j - b}{a}}} - 1} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{z_i - b}{a}} + n. \end{aligned}$$

Intervaly spolehlivosti pro odhady parametrů

Nejprve se napočítají potřebné derivace pro sestavení asymptotické Fisherovy informační matice.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = K_1 - \frac{2}{a^3} \sum_{i=1}^n (z_i - b) + \frac{2}{a^3} \sum_{i=1}^n (z_i - b) \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right) - \frac{1}{a^4} \sum_{i=1}^n (z_i - b)^2 \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right) + \frac{n}{a^2},$$

kde K_1 je pro

cenzorování zprava:

$$K_1 = \frac{2c(T_p - b)e^{-(T_p - b)/a}}{a^3(1 - e^{-(T_p - b)/a})} - \frac{c(T_p - b)^2 e^{-(T_p - b)/a}}{a^4(1 - e^{-(T_p - b)/a})} + \frac{c(T_p - b)^2 e^{-2(T_p - b)/a}}{a^4(1 - e^{-(T_p - b)/a})} - \frac{c(T_p - b)^2 e^{-2(T_p - b)/a}}{a^4 e^{2e^{-(T_p - b)/a}} (e^{-e^{-(T_p - b)/a}} - 1)^2},$$

cenzorování zleva:

$$K_1 = \frac{2c(T_L - b)e^{-(T_L - b)/a}}{a^3} - \frac{c(T_L - b)^2 e^{-(T_L - b)/a}}{a^4},$$

progresiví cenzorování:

$$K_1 = \sum_{j=1}^k \left(\frac{2c_j(T_j - b)e^{-(T_j - b)/a}}{a^3(1 - e^{-(T_j - b)/a})} - \frac{c_j(T_j - b)^2 e^{-(T_j - b)/a}}{a^4(1 - e^{-(T_j - b)/a})} + \frac{c_j(T_j - b)^2 e^{-2(T_j - b)/a}}{a^4(1 - e^{-(T_j - b)/a})} - \frac{c_j(T_j - b)^2 e^{-2(T_j - b)/a}}{a^4 e^{2e^{-(T_j - b)/a}} (e^{-e^{-(T_j - b)/a}} - 1)^2} \right).$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b} = K_2 - \frac{n}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right) - \frac{1}{a^3} \sum_{i=1}^n (z_i - b) \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right),$$

kde K_2 je pro

cenzorování zprava:

$$K_2 = \frac{ce^{-(T_p - b)/a}}{a^2(1 - e^{-(T_p - b)/a})} - \frac{c(T_p - b)e^{-(T_p - b)/a}}{a^3(1 - e^{-(T_p - b)/a})} + \frac{c(T_p - b)e^{-2(T_p - b)/a}}{a^3(1 - e^{-(T_p - b)/a})} - \frac{c(T_p - b)e^{-2(T_p - b)/a}}{a^3 e^{2e^{-(T_p - b)/a}} (e^{-e^{-(T_p - b)/a}} - 1)^2},$$

cenzorování zleva:

$$K_2 = \frac{ce^{-(T_L - b)/a}}{a^2} - \frac{c(T_L - b)e^{-(T_L - b)/a}}{a^3},$$

progresiví cenzorování:

$$K_2 = \sum_{j=1}^k \left(\frac{c_j e^{-(T_j - b)/a}}{a^2(1 - e^{-(T_j - b)/a})} - \frac{c_j(T_j - b)e^{-(T_j - b)/a}}{a^3(1 - e^{-(T_j - b)/a})} + \frac{c_j(T_j - b)e^{-2(T_j - b)/a}}{a^3(1 - e^{-(T_j - b)/a})} - \frac{c_j(T_j - b)e^{-2(T_j - b)/a}}{a^3 e^{2e^{-(T_j - b)/a}} (e^{-e^{-(T_j - b)/a}} - 1)^2} \right).$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} = K_3 - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i - b}{a}\right),$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

kde K_3 je pro

$$\begin{aligned}
 & \text{cenzorování zprava} \\
 K_3 &= \frac{ce^{-2(T_p-b)/a}}{a^2(1 - e^{-(T_p-b)/a})} - \frac{ce^{-(T_p-b)/a}}{a^2(1 - e^{-(T_p-b)/a})} - \frac{ce^{-2(T_p-b)/a}}{a^2e^{2e^{-(T_p-b)/a}}(e^{-e^{-(T_p-b)/a}} - 1)^2}, \\
 & \text{cenzorování zleva} \\
 K_3 &= -\frac{c}{a^2} \exp\left(-\frac{T_L-b}{a}\right), \\
 & \text{progresivní cenzorování} \\
 K_3 &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{c_j e^{-2(T_j-b)/a}}{a^2(1 - e^{-(T_j-b)/a})} - \frac{c_j e^{-(T_j-b)/a}}{a^2(1 - e^{-(T_j-b)/a})} - \frac{c_j e^{-2(T_j-b)/a}}{a^2e^{2e^{-(T_j-b)/a}}(e^{-e^{-(T_j-b)/a}} - 1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro parametr a s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha/2$ je

$$(\hat{a} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}}, \hat{a} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}})$$

a pro parametr b je

$$(\hat{b} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}, \hat{b} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}),$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $1 - \alpha/2$ kvantil normovaného normálního rozdělení a $\psi_{1,1}$ je hodnota matice $\psi(a, b)$ v prvním řádku a prvním sloupci a $\psi_{2,2}$ je v druhém řádku a druhém sloupci. Matice $\psi(a, b)$ je určena vztahem

$$\psi(a, b) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln L|_{a=\hat{a}, b=\hat{b}} & -\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \ln L|_{a=\hat{a}, b=\hat{b}} \\ -\frac{\partial^2}{\partial b \partial a} \ln L|_{a=\hat{a}, b=\hat{b}} & -\frac{\partial^2}{\partial b^2} \ln L|_{a=\hat{a}, b=\hat{b}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

4.2.2 Zobecněné rozdělení extrémních hodnot

Věrohodnostní funkce pro cenzorování typu I je

$$L(\mathbf{z}, \mu, \sigma, \xi) = A \prod_{i=1}^n g(z_i),$$

kde

$$A = \begin{cases} \left(1 - G(T_p)\right)^c & \text{pro cenzorování zprava,} \\ \left(G(T_L)\right)^c & \text{pro cenzorování zleva,} \\ \prod_{j=1}^k \left(1 - G(T_j)\right)^{c_j} & \text{pro progresivní cenzorování.} \end{cases}$$

Logaritmická věrohodnostní funkce pro cenzorování typu I je

$$\ln L = A - n \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

kde $1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma} > 0$, pro $i = 1, \dots, n$ a

$$A = \begin{cases} c \ln \left(1 - e^{-(1+\xi \frac{T_p - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}\right) & \text{pro cenzorování zprava,} \\ -c \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{pro cenzorování zleva,} \\ \sum_{j=1}^k c_j \ln \left(1 - e^{-(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}\right) & \text{pro progresivní cenzorování.} \end{cases}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

Odhady parametrů μ, σ, ξ se dostanou maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce nebo vyřešením soustavy rovnic $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \xi} = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= C_1 + \frac{1}{\sigma}(1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= C_2 - \frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}(\xi + 1) \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \xi} &= C_3 + \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} - \\ &\quad - \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \left(\ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\xi}{\sigma} (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right) = 0.\end{aligned}$$

Po menších úpravách se dostane soustava rovnic

$$\begin{aligned}0 &= C_1 + \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \left((1 + \xi) - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \right), \\ 0 &= C_2 + \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \left((1 + \xi) - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - n\sigma, \\ 0 &= C_3 + \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) \left(1 - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) - \\ &\quad - \frac{\xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \left((1 + \xi) - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \right),\end{aligned}$$

kde C_1, C_2, C_3 jsou pro jednotlivé typy cenzorování následující:

$$\begin{aligned}&\text{cenzorování zprava} \\ C_1 &= \frac{\frac{c}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}}{e^{(1+\xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1}, \\ C_2 &= \frac{\frac{c}{\sigma^2} (T_P - \mu) \left(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}}{e^{(1+\xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1}, \\ C_3 &= \frac{\frac{c}{\xi^2} \left(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \left(\ln \left(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\xi}{\sigma} (T_P - \mu) \left(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right)}{e^{(1+\xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1},\end{aligned}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

cenzorování zleva

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{c}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, \\ C_2 &= -\frac{c}{\sigma^2} (T_L - \mu) \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, \\ C_3 &= -\frac{c}{\xi^2} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \ln \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right) + \frac{c(T_L - \mu)}{\sigma \xi} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, \end{aligned}$$

progresivní cenzorování

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{\left(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}}{e^{(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1}, \\ C_2 &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{(T_j - \mu) \left(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}}{e^{(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1}, \\ C_3 &= \sum_{j=1}^k c_j \frac{\left(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}{e^{(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \left(\ln \left(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\xi}{\sigma} (T_j - \mu) \left(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Intervaly spolehlivosti pro odhady parametrů

Opět napočítáme potřebné derivace.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = K_1 + \frac{1 + \xi}{\sigma^2} \left(\xi \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-2} + \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-2} \right),$$

kde K_1 je pro

$$\begin{aligned} \text{cenzorování zprava} \quad K_1 &= \frac{c}{\sigma^2} \left(\frac{(1 + \xi) \left(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-2}}{e^{(1+\xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} - \frac{e^{(1+\xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} (1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-2(\frac{1}{\xi}+1)}}{(e^{(1+\xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1)^2} \right), \\ \text{cenzorování zleva} \quad K_1 &= -\frac{c(1 + \xi)}{\sigma^2} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-2}, \\ \text{progresiví cenzorování} \quad K_1 &= \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{\sigma^2} \left(\frac{(1 + \xi) \left(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-2}}{e^{(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} - \frac{e^{(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} (1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-2(\frac{1}{\xi}+1)}}{(e^{(1+\xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1)^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu \partial \sigma} &= K_2 + \frac{1 + \xi}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(\xi \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-2} - \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-2} \right) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \\ &\quad - \frac{1 + \xi}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

kde K_2 je pro

$$\begin{aligned}
 \text{cenzorování zprava} \quad K_2 &= \frac{c}{\sigma^2} \left(\frac{-(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1} + \frac{1}{\sigma} (T_P - \mu)(1 + \xi)(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2}}{e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{\sigma} e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} (1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-2(\frac{1}{\xi} + 1)} (T_P - \mu)}{(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1)^2} \right), \\
 \text{cenzorování zleva} \quad K_2 &= \frac{c}{\sigma^2} (1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1} - \frac{c}{\sigma^3} (1 + \xi)(T_L - \mu)(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2}, \\
 \text{progresiví cenzorování} \quad K_2 &= \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{\sigma^2} \left(\frac{-(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1} + \frac{1}{\sigma} (T_j - \mu)(1 + \xi)(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2}}{e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{\sigma} e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} (1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-2(\frac{1}{\xi} + 1)} (T_j - \mu)}{(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} &= K_3 + \frac{n}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^3} (1 + \xi) \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-1} - \frac{\xi(\xi + 1)}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-2} \\
 &\quad + \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1} - \frac{(\xi + 1)}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2},
 \end{aligned}$$

kde K_3 je pro

$$\begin{aligned}
 \text{cenzorování zprava} \quad K_3 &= \frac{c}{\sigma^3} \left(\frac{-2(T_P - \mu)(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1}}{e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \right. \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{\sigma} (T_P - \mu)^2 (1 + \xi)(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2}}{e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-2(\frac{1}{\xi} + 1)} (T_P - \mu)^2 e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}}{(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1)^2} \right), \\
 \text{cenzorování zleva} \quad K_3 &= \frac{2c}{\sigma^3} (T_L - \mu)(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1} - \frac{c}{\sigma^4} (1 + \xi)(T_L - \mu)^2 \\
 &\quad \cdot (1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2}, \\
 \text{progresiví cenzorování} \quad K_3 &= \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{\sigma^3} \left(\frac{-2(T_j - \mu)(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1}}{e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \right. \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{\sigma} (T_j - \mu)^2 (1 + \xi)(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2}}{e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1} \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-2(\frac{1}{\xi} + 1)} (T_j - \mu)^2 e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}}{(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \xi} = K_4 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-1} - \frac{\xi + 1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-2}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

$$-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \left[\frac{1}{\xi^2} \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{(\frac{1}{\xi} + 1)(z_i - \mu)}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right],$$

kde K_4 je pro

cenzorování zprava

$$K_4 = \frac{c \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} - \frac{(\frac{1}{\xi} + 1)(T_P - \mu)}{\sigma \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 2}} \right) (T_P - \mu)}{\sigma^2 \left(e^{\left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} - \frac{c e^{\left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}}} (T_P - \mu) \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}}} - \frac{T_P - \mu}{\sigma \xi \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} \right)}{\sigma^2 \left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1} \left(e^{\left(\frac{\xi(T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)^2},$$

cenzorování zleva

$$K_4 = -\frac{c}{\sigma^2} (T_L - \mu) \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \left(\frac{1}{\xi^2} \ln \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} (T_L - \mu) \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right),$$

progresiví cenzorování

$$K_4 = \sum_{j=1}^k \frac{c_j \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} - \frac{(\frac{1}{\xi} + 1)(T_j - \mu)}{\sigma \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 2}} \right) (T_j - \mu)}{\sigma^2 \left(e^{\left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} - \sum_{j=1}^k \frac{c_j e^{\left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}}} (T_j - \mu) \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}}} - \frac{T_j - \mu}{\sigma \xi \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} \right)}{\sigma^2 \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1} \left(e^{\left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \xi^2} &= K_5 - \frac{2}{\xi^3} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) + \frac{2}{\sigma \xi^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} + \frac{1 + \frac{1}{\xi}}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-2} \\ &\quad + \frac{2}{\xi^3} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[\ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\xi(z_i - \mu)}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

$$-\frac{1}{\xi^4} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[\ln \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\xi(z_i - \mu)}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \right]^2$$

$$-\frac{1}{\sigma^2 \xi} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 \left(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-2},$$

kde K_5 je pro

cenzorování zprava

$$K_5 = \frac{c \left(\ln \left(1 + \xi \frac{(T_P - \mu)}{\sigma} \right) - \frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma \left(1 + \xi \frac{(T_P - \mu)}{\sigma} \right)} \right) \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}}} - \frac{T_P - \mu}{\sigma \xi \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} \right)}{\xi^2 \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)}$$

$$- \frac{2c \left(\ln \left(1 + \xi \frac{(T_P - \mu)}{\sigma} \right) - \frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{(T_P - \mu)}{\sigma} \right)^{-1} \right)}{\xi^3 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)}$$

$$+ \frac{c (T_P - \mu)^2}{\sigma^2 \xi \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)}$$

$$- \frac{c e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} \left(\ln \left(1 + \xi \frac{(T_P - \mu)}{\sigma} \right) - \frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma \left(1 + \xi \frac{(T_P - \mu)}{\sigma} \right)} \right) \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}}} - \frac{T_P - \mu}{\sigma \xi \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)^2},$$

cenzorování zleva

$$K_5 = \frac{2c}{\xi^3} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \ln \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right)$$

$$- \frac{c}{\xi^2} \left[\left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left(\frac{1}{\xi^2} \ln \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right) - \frac{1}{\xi} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

$$\ln \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right) - \frac{2c}{\xi^2} \left(1 + \xi \frac{T_L - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \frac{T_L - \mu}{\sigma},$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

progresiví cenzorování

$$\begin{aligned}
 K_5 = & \sum_{j=1}^k \frac{c_j \left(\ln(1 + \xi \frac{(T_j - \mu)}{\sigma}) - \frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma \left(1 + \xi \frac{(T_j - \mu)}{\sigma} \right)} \right) \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}}} - \frac{T_j - \mu}{\sigma \xi \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} \right)}{\xi^2 \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\
 & - \sum_{j=1}^k \frac{2 c_j \left(\ln(1 + \xi \frac{(T_j - \mu)}{\sigma}) - \frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{(T_j - \mu)}{\sigma} \right)^{-1} \right)}{\xi^3 \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\
 & + \sum_{j=1}^k \frac{c_j (T_j - \mu)^2}{\sigma^2 \xi \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\
 & - \sum_{j=1}^k \frac{c_j e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} \left(\ln(1 + \xi \frac{(T_j - \mu)}{\sigma}) - \frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma \left(1 + \xi \frac{(T_j - \mu)}{\sigma} \right)} \right) \left(\frac{\ln \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}}} - \frac{T_j - \mu}{\sigma \xi \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1}} \right)}{\xi^2 \left(\frac{\xi (T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \xi \partial \mu} = & K_6 - \frac{1}{\sigma \xi} \sum_{i=1}^n (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-1} + \frac{1 + \frac{1}{\xi}}{\sigma} \sum_{i=1}^n (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-1} \\
 & - \frac{1}{\xi^2 \sigma} \sum_{i=1}^n (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 1} \left[\ln(1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma}) - \frac{\xi (z_i - \mu)}{\sigma} (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-1} + \xi \right] \\
 & + \sum_{i=1}^n \frac{z_i - \mu}{\sigma^2} (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi} - 2} - \frac{1 + \xi}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) (1 + \xi \frac{z_i - \mu}{\sigma})^{-2},
 \end{aligned}$$

kde K_6 je pro

$$\begin{aligned}
 K_6 = & \text{cenzorování zprava} \\
 & \frac{c \left(\ln \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right) - \frac{\xi (T_P - \mu) (1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})}{\sigma} \right) \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1}}{\sigma \xi^2 \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\
 & - \frac{c (T_P - \mu)}{\sigma^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\
 & - \frac{c e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} \left(\ln \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right) - \frac{\xi (T_P - \mu) (1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})}{\sigma} \right)}{\sigma \xi^2 \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi} + 1} \left(\frac{\xi (T_P - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_P - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)^2},
 \end{aligned}$$

4.2 MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY PRO CENZOROVANÉ VÝBĚRY

cenzorování zleva

$$K_6 = -\frac{c}{\xi^2 \sigma} (1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1} \ln(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma}) + \frac{c(1 + \frac{1}{\xi})(T_L - \mu)}{\sigma^2} (1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-2},$$

progresiví cenzorování

$$\begin{aligned} K_6 = & \sum_{j=1}^k \frac{c_j \left(\ln \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right) - \frac{\xi(T_j - \mu)(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})}{\sigma} \right) \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{-\frac{1}{\xi}-1}}{\sigma \xi^2 \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\ & - \sum_{j=1}^k \frac{c_j (T_j - \mu)}{\sigma^2 \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)} \\ & - \sum_{j=1}^k \frac{c_j e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} \left(\ln \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right) - \frac{\xi(T_j - \mu)(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})}{\sigma} \right)}{\sigma \xi^2 \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}+1} \left(\frac{\xi(T_j - \mu)}{\sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(e^{(1 + \xi \frac{T_j - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} - 1 \right)^2}. \end{aligned}$$

Asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha/2$ je

$$(\hat{\mu} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}}, \hat{\mu} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{1,1}}).$$

Pro parametr σ je

$$(\hat{\sigma} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}, \hat{\sigma} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{2,2}}).$$

Pro parametr ξ je

$$(\hat{\xi} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{3,3}}, \hat{\xi} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\psi_{3,3}}).$$

Opět $u_{1-\alpha/2}$ značí $1 - \alpha/2$ kvantil normovaného normálního rozdělení a $\psi_{1,1}$ je hodnota matice $\psi(\mu, \sigma, \xi)$ v prvním řádku a prvním sloupci, $\psi_{2,2}$ je hodnota v druhém řádku a druhém sloupci a $\psi_{3,3}$ je ve třetím řádku a třetím sloupci.

$$\psi(\mu, \sigma, \xi) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} & -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} & -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \xi} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} & -\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} & -\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \xi} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \mu} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} & -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} & -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ln L|_{\mu=\hat{\mu}, \sigma=\hat{\sigma}, \xi=\hat{\xi}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

5 Simulační studie

5.1 Úvod

Následující kapitola popisuje konstrukci simulací, jejichž výstupy jsou ve formě obrázků, které znázorňují závislost odhadu parametru na počtu cenzorovaných hodnot. Z těchto obrázků jsou vyvozeny patřičné závěry o chování odhadů. V simulační studii budou studovány odhady parametrů exponenciálního, Weibullova, logaritmicko-normálního rozdělení a rozdělení extrémních hodnot.

Odhady jsou provedeny pomocí metody maximální věrohodnosti a to za použití programu MATLAB 7.11.0. V matlabu je využito funkce `mle.m`, která slouží k výpočtům odhadů pomocí metody maximální věrohodnosti. Jelikož tato funkce neumožňuje výpočet odhadů pro jiné typy cenzorování než zprava a též neumí počítat odhady pro cenzorované zobecněné extrémní rozdělení, je pro účel této práce setrojena funkce `mmv.m`, která tyto odhady počítá. Tato funkce využívá optimalizačních funkcí v matlabu.

5.2 Simulace pomocí funkce `mle`

Při simulacích za pomoci matlabovské funkce `mle.m` bude sledována závislost odhadu parametrů rozdělení na cenzorování zprava pro rozdělení exponenciální, Weibullovo, logaritmicko-normální a extrémní typu I. K vytvoření simulací byla vytvořena funkce `simcenzodhadu.m`:

```
simcenzodhadu(typrozdeleni,parametr,M,N,alpha).
```

Vstupy této funkce jsou:

- `typrozdeleni`: Volba rozdělení pravděpodobnosti. Možnosti jsou: `'exponencialni'`, `'weibullovo'`, `'normalni'`, `'lognormalni'`, `'gamma'`, `'ev'`.
- `parametri`: Vektor parametrů zvoleného rozdělení.
- `M`: Počet opakování simulace. Projeví se tím, že vykreslený bodový odhad je průměrem M odhadů získaných z cenzorovaného výběru o původním rozsahu N .
- `N`: Rozsah necenzorovaného výběru.
- `alpha`: $\alpha \in (0, 1)$. Hodnota $1 - \alpha$ je koeficient spolehlivosti.

Vzorové volání této funkce může vypadat následovně:

```
simcenzodhadu('weibullovo',[1 10],1000,100,0.05).
```

Pro následující obrázky a jejich popis bude platit následující: V případě $M = 1$ jsou modrými křížky vykresleny bodové odhady parametrů z rozdělení o původním rozsahu N při daném procentu cenzorování. Zeleně je vyznačena skutečná hodnota parametru daného rozdělení. Červeně jsou vyznačeny intervalové odhady daného parametru, přičemž

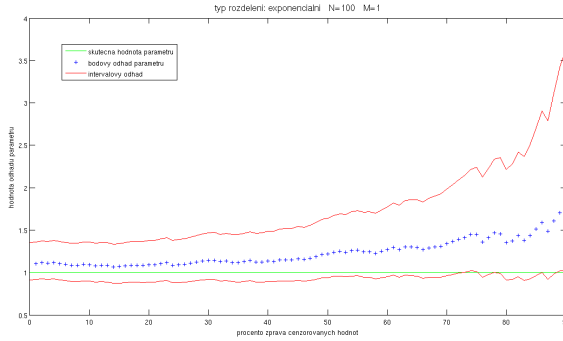
jednotlivé hodnoty jsou popořadě pospojovány přímkou. V případě $M \neq 1$ jsou modrými křížky vykresleny průměry M bodových odhadů parametrů z rozdělení o původním rozsahu N při daném procentu cenzorování. Zeleně je opět vyznačena skutečná hodnota parametru daného rozdělení. Červeně jsou vyznačeny asymptotické intervalové odhady dané vztahem:

$$(\bar{X} - t_{0,975}(M-1)\frac{S}{\sqrt{M}}, \bar{X} + t_{0,975}(M-1)\frac{S}{\sqrt{M}}),$$

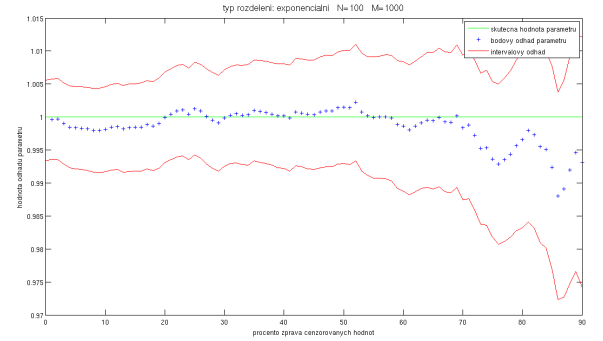
kde $\bar{X} = \sum_{i=1}^M \hat{\theta}_i$, $S = \left(\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\theta}_i - \bar{X})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ a $t_{0,975}(M-1)$ je kvantil studentova rozdělení o $M-1$ stupních volnosti. Vodorovná osa na obrázcích udává procento cenzorování a svislá hodnotu parametru.

5.2.1 Exponenciální rozdělení

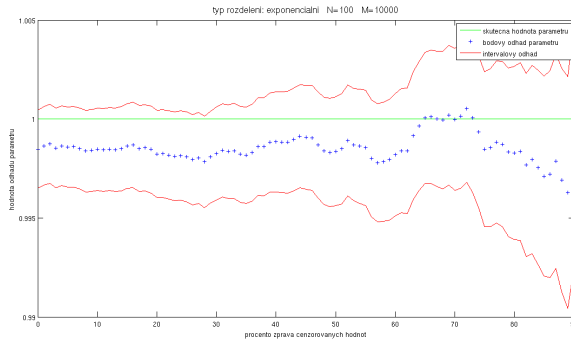
Necenzorovaný výběr je o rozsahu $N = 100$ z exponenciálního rozdělení o parametru $\lambda = 1$. Na obrázku 5.1 je $M = 1$. Z obrázku je patrné, že s rostoucím počtem cenzorovaných hodnot se zvětšuje interval spolehlivosti pro odhad parametru. Obrázky 5.2 a 5.3 jsou vykresleny pro $M = 1000$ a $M = 10000$. Z těchto obrázků je vidět, že odhad se při zvětšujícím procentu cenzorování začíná vychylovat k nižším hodnotám. Skutečná hodnota parametru je vždy zahrnuta v patřičném intervalu spolehlivosti.



Obrázek 5.1: Ex(1), M=1



Obrázek 5.2: Ex(1), M=1000

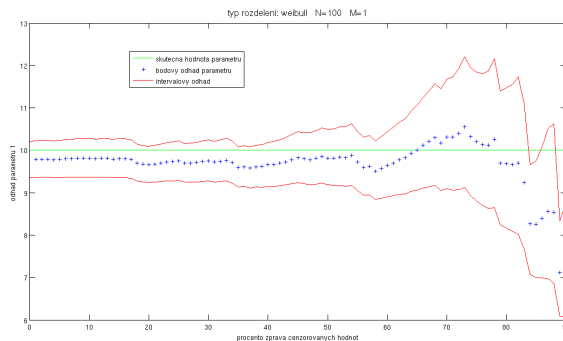
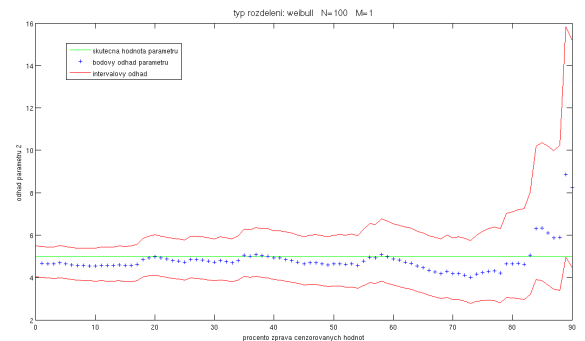
Obrázek 5.3: $\text{Ex}(1)$, $M=10000$

5.2.2 Weibullovo rozdělení

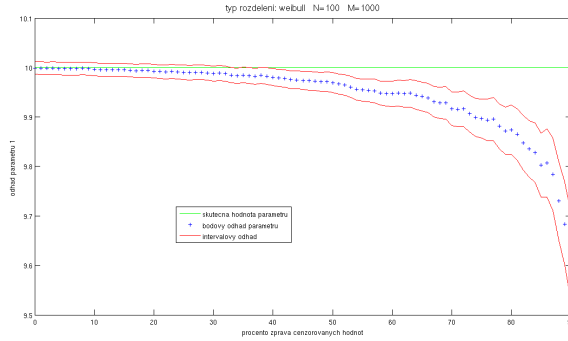
Necenzorovaný výběr je o rozsahu $N = 100$ z Weibullova rozdělení o parametrech $\lambda = 10$ a $b = 5$.

Na obrázcích 5.4, 5.6, 5.8 je vykreslen odhad parametru λ při $M = 1, 1000, 10000$. Je zde opět patrné, že interval spolehlivosti se s rostoucím procentem cenzorování zvětšuje. Odhad se s rostoucím procentem cenzorování vychyluje k menším hodnotám. Z obrázku 5.6 se dá usuzovat, že skutečná hodnota parametru přestává být zahrnuta v intervalu spolehlivosti pro odhad od čtyřiceti procent cenzorovaných hodnot.

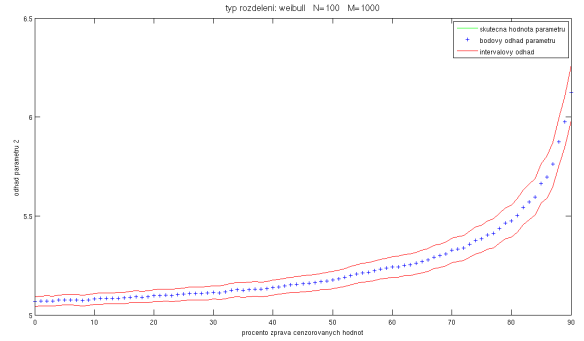
Na obrázcích 5.5, 5.7, 5.9 je vykreslen odhad parametru b při $M = 1, 1000, 10000$. Je zde opět patrné, že interval spolehlivosti se s rostoucím procentem cenzorování zvětšuje. Odhad se s rostoucím procentem cenzorování vychyluje k větším hodnotám. Z obrázků je patrné, že skutečná hodnota až na obrázek 5.5 není zahrnuta v intervalu spolehlivosti. To však může být způsobeno příliš úzkým intervalem spolehlivosti z důvodu velkého počtu hodnot.

Obrázek 5.4: $W(10,5)$, $M=1$ Obrázek 5.5: $W(10,5)$, $M=1$

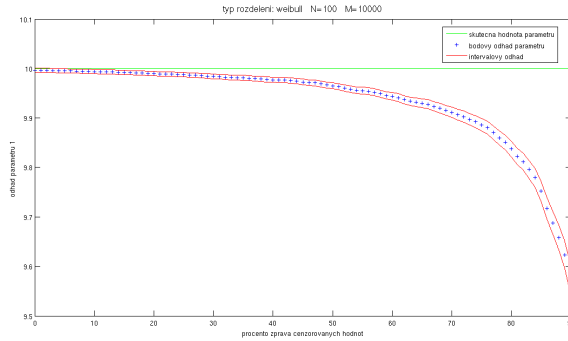
5.2 SIMULACE POMOCÍ FUNKCE MLE



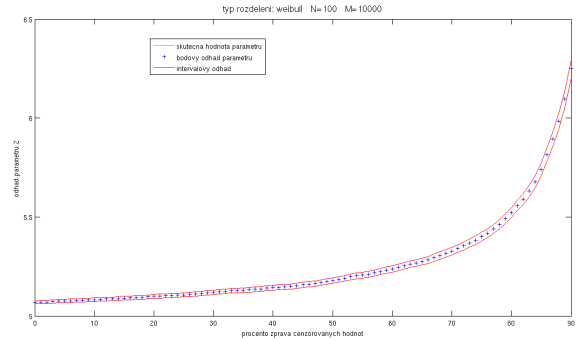
Obrázek 5.6: $W(10,5)$, $M=1000$



Obrázek 5.7: $W(10,5)$, $M=1000$



Obrázek 5.8: $W(10,5)$, $M=10000$



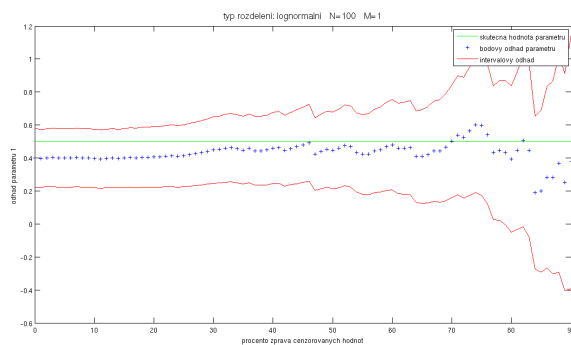
Obrázek 5.9: $W(10,5)$, $M=10000$

5.2.3 Logaritmicko–normalní rozdělení

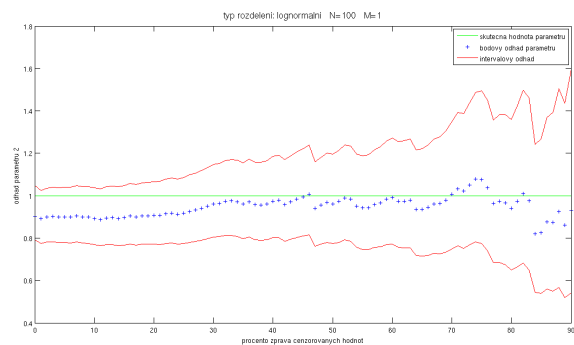
Necenzorovaný výběr je o rozsahu $N = 100$ z logaritmicko–normálního rozdělení o parametrech $\mu = 0,5$ a $\sigma = 1$.

Na obrázcích 5.10, 5.12, 5.14 je vykreslen odhad parametru μ a na obrázcích 5.11, 5.13, 5.15 odhad parametru σ , při $M = 1, 1000, 10000$. Intervaly spolehlivosti se opět s rostoucím procentem cenzorování zvětšují. Oba odhady se s rostoucím procentem cenzorování vychylují k menším hodnotám. Z obrázků 5.12 a 5.14 se dá říct, že skutečná hodnota parametru μ přestává být zahrnuta v intervalu spolehlivosti od třiceti až čtyřiceti procent cenzorovaných hodnot. Skutečná hodnota parametru σ na obrázcích 5.13 a 5.15 je již při malém procentu cenzorování nezahrnuta v intervalu spolehlivosti.

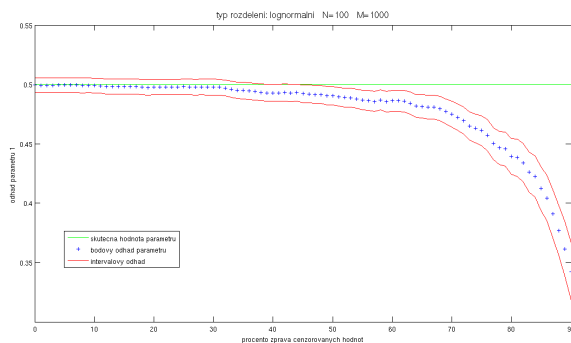
5.2 SIMULACE POMOCÍ FUNKCE MLE



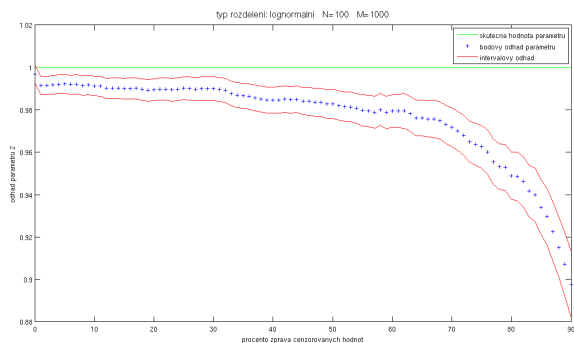
Obrázek 5.10: LN(0,5;1), M=1



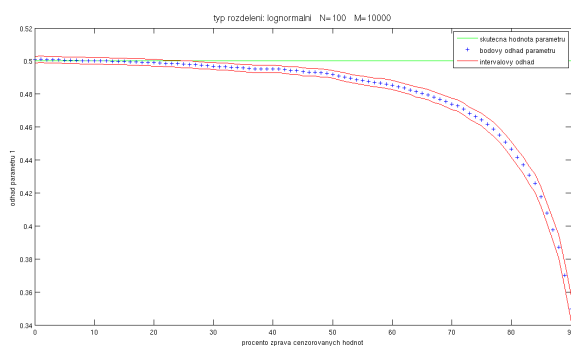
Obrázek 5.11: LN(0,5;1), M=1



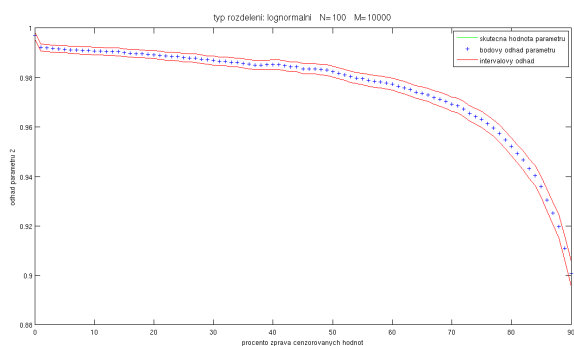
Obrázek 5.12: LN(0,5;1), M=1000



Obrázek 5.13: LN(0,5;1), M=1000



Obrázek 5.14: LN(0,5;1), M=10000

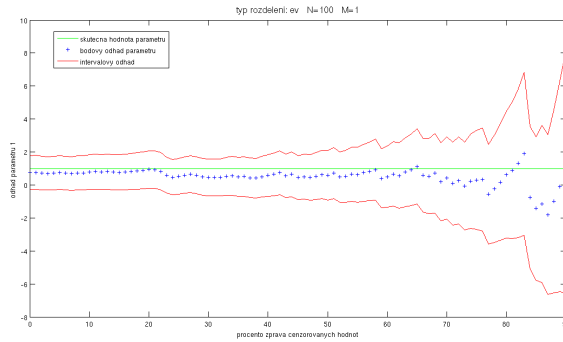
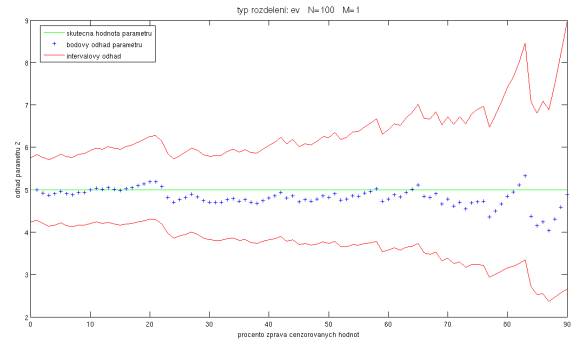
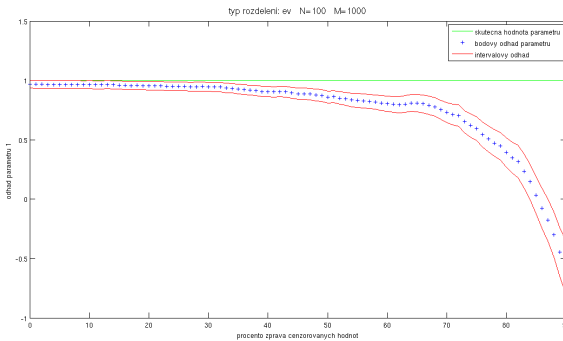
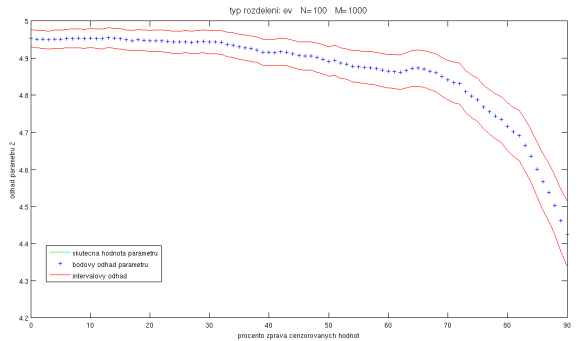


Obrázek 5.15: LN(0,5;1), M=10000

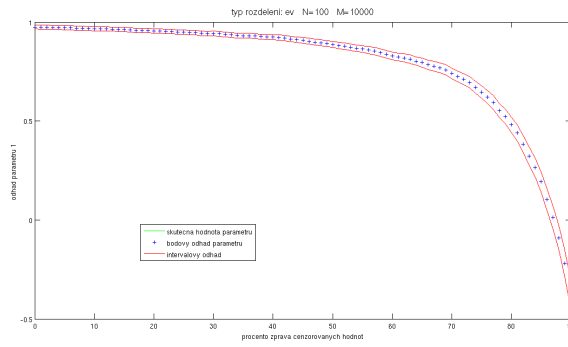
5.2.4 Extrémní rozdělení typu I

Necenzorovaný výběr je o rozsahu $N = 100$ a je z extrémního rozdělení typu I (Gumbelova rozdělení) o parametrech $a = 1$ a $b = 5$.

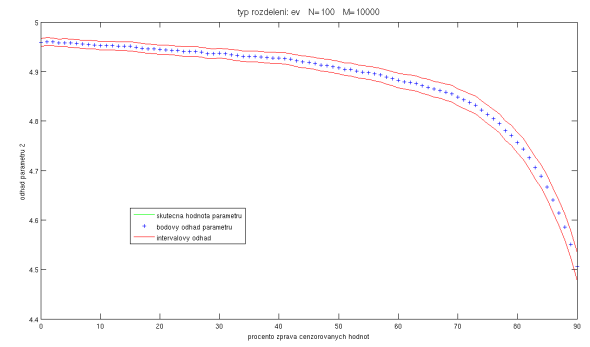
Na obrázcích 5.16, 5.18, 5.20 je vykreslen odhad parametru a a na obrázcích 5.17, 5.19, 5.21 odhad parametru b , při $M = 1, 1000, 10000$. Z obrázků vyplývají podobné závěry jako pro logarimicko–normální rozdělení. Intervaly spolehlivosti se s rostoucím procentem cenzorování zvětšují. Oba odhady se s rostoucím procentem cenzorování vychylují k menším hodnotám. Na obrázku 5.18 skutečná hodnota parametru a přestává být zahrnuta v intervalu spolehlivosti od třiceti procent cenzorovaných hodnot. Skutečná hodnota parametru b již při malém procentu cenzorování není zahrnuta v intervalu spolehlivosti.

Obrázek 5.16: $Ev(1,5)$, $M=1$ Obrázek 5.17: $Ev(1,5)$, $M=1$ Obrázek 5.18: $Ev(1,5)$, $M=1000$ Obrázek 5.19: $Ev(1,5)$, $M=1000$

5.2 SIMULACE POMOCÍ FUNKCE MLE



Obrázek 5.20: $Ev(1,5)$, $M=10000$



Obrázek 5.21: $Ev(1,5)$, $M=10000$

5.3 Simulace pomocí funkce mmv

K vytvoření následujících obrázků je použita mnou vytvořená funkce `cenzorovani.m`, která provádí podobné kroky, jako v předchozím případě funkce `simcenzodhadu.m`. Rozdíl je v tom, že funkce `cenzorovani.m` vytváří výběry cenzorované zprava typu I, II a zleva typu I, II. K výpočtu odhadů tato funkce volá funkci `mmv.m`, kterou jsem opět zprogramoval. Funkce `mmv.m` využívá k výpočtu bodových a intervalových odhadů některé mnou v této práci odvozené vztahy a matlabovské optimalizační funkce. Jelikož funkce `mmv.m` využívá při výpočtu bodových odhadů optimalizační funkce, které nemusejí vždy dostatečně rychle konvergovat k řešení, je používání této funkce mnohdy časově náročné a získané odhady nemusejí být dostatečně přesné. Při výpočtu intervalových odhadů se počítá inverzní matice. K výpočtu inverzní matice je však třeba, aby matice byla regulární a to nemusí být vždy splněno.

Funkce

```
cenzorovani(typrozdeleni,parametr,typcenzorovani,N,M,alpha)
```

má jako vstupní parametry:

- `typrozdeleni`: Volba rozdělení pravděpodobnosti. Možnosti jsou: `'exponencialni'`, `'weibullovo'`, `'lognormalni'`, `'ev1'`, `'gev'`.
- `typcenzorovani`: Volba typu cenzorování. Možnosti jsou: `'zpravaI'`, `'zpravaII'`, `'zlevaI'`, `'zlevaII'`.
- `N,M,alpha`: Tyto parametry mají stejný význam jako u funkce `simcenzodhadu.m`.

Funkce `mmv`

```
[odhadparametru,dolintspol,horintspol] = mmv(vektorhodnot,rozdeleni,typcenzorovani,  
T,C,alpha)
```

má vstupní parametry :

- `vektorhodnot`: Vektor naměřených hodnot.
- `rozdeleni`: Rozdělení pravděpodobnosti, ze kterého pochází cenzorovaný výběr. Možnosti jsou: `'exponencialni'`, `'weibullovo'`, `'lognormalni'`, `'ev1'`, `'gev'`.
- `typcenzorování`: Typ cenzorování. Možnosti jsou: `'zpravaI'`, `'zpravaII'`, `'zlevaI'`, `'zlevaII'`.
- `T` značí hodnotu ve které došlo k cenzorování.
- `C` je počet cenzorovaných hodnot v hodnotě `T`.
- `alpha`: $\alpha \in (0, 1)$ a hodnota $1 - \alpha$ je koeficient spolehlivosti.

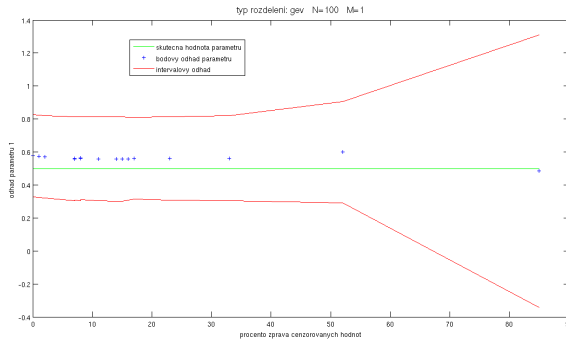
Výstupní parametry jsou:

- `odhadparametru`: vektor bodových odhadů parametrů daného rozdělení.
- `dolintspol`: vektor dolních mezí intervalových odhadů daných parametrů.
- `horintspol`: vektor horních mezí intervalových odhadů daných parametrů.

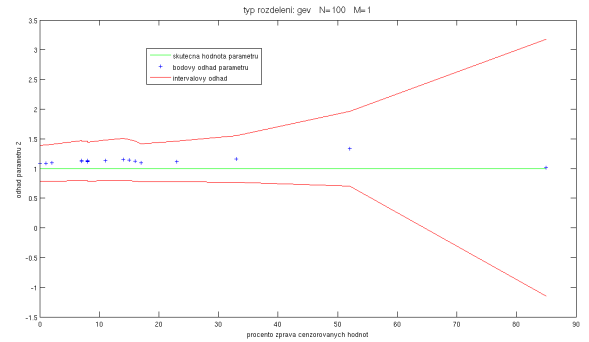
Popis následujících obrázků je identický jako v 5.2.

5.3.1 Zobecněné rozdělení extrémních hodnot

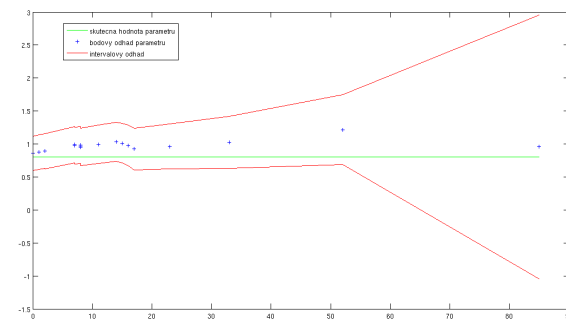
Na obrázcích 5.22 až 5.33 jsou znázorněny závislosti odhadů parametrů zobecněného extrémního rozdělení na procentu cenzorování. Parametry rozdělení jsou $\mu = 0,5$, $\sigma = 1$ a $\xi = 0,8$. Tyto parametry jsou zvoleny libovolně s přihlédnutím, že je nutno dodržet $-0,5 < \xi$ a $\xi \neq 0$ (Viz [3] str. 55). Z důvodu vysoké časové náročnosti výpočtů simulací je voleno pouze $M = 1$. Z obrázků je patrné, že funkce `mmv.m` počítá odhady celkem přesně. Dále je ukázáno, že s rostoucím procentem cenzorovaných hodnot se zvětšují intervalové odhady. Na obrázcích 5.28 až 5.30 nejsou při vyšším procentu cenzorování vykresleny správně intervalové odhady. To může být způsobeno nepřesností při výpočtu či tím, že matice, za pomoci které se počítají intervalové odhady, nemusí být regulární.



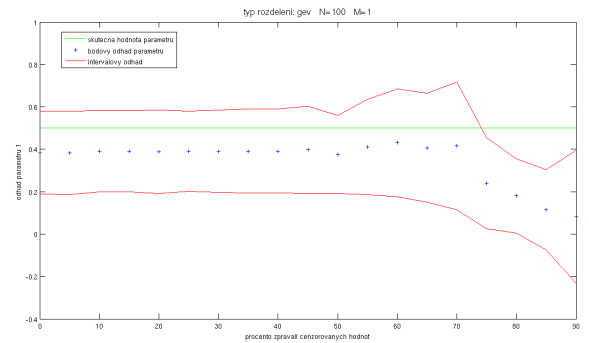
Obrázek 5.22: Odhad μ při cenzorování zprava typu I.



Obrázek 5.23: Odhad σ při cenzorování zprava typu I

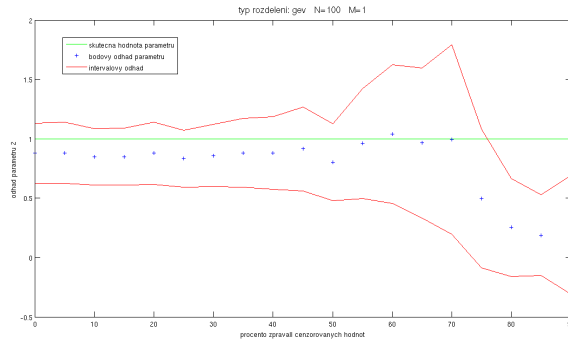


Obrázek 5.24: Odhad ξ při cenzorování zprava typu I.

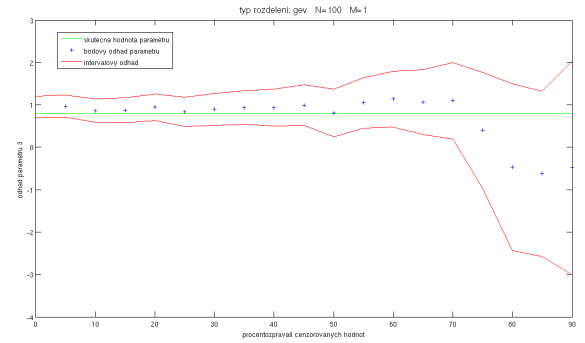


Obrázek 5.25: Odhad μ při cenzorování zprava typu II.

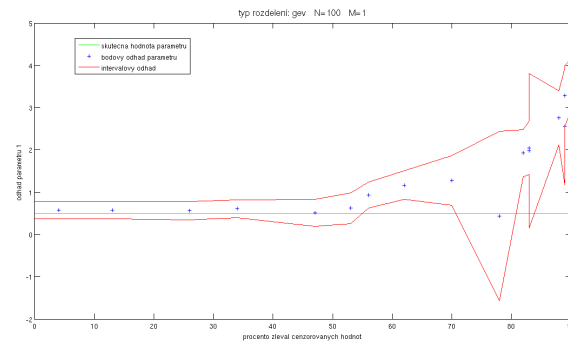
5.3 SIMULACE POMOCÍ FUNKCE MMV



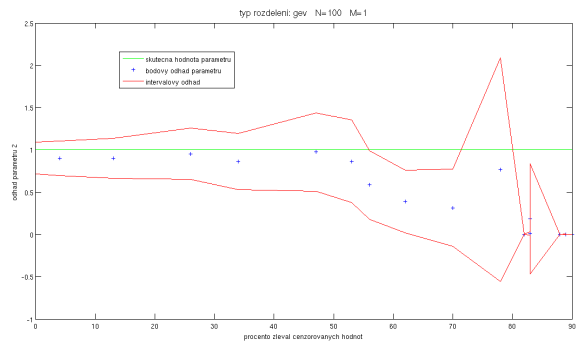
Obrázek 5.26: Odhad σ při cenzorování zprava typu II.



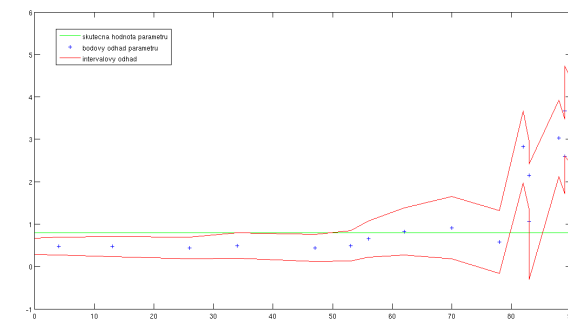
Obrázek 5.27: Odhad ξ při cenzorování zprava typu II.



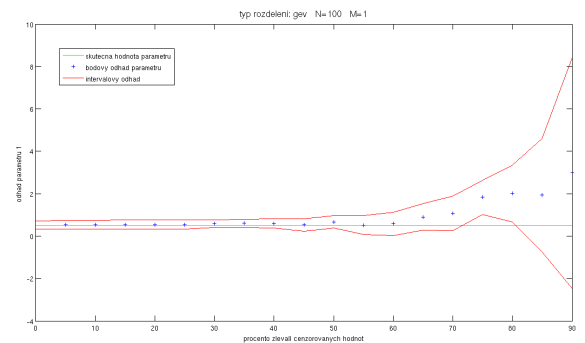
Obrázek 5.28: Odhad μ při cenzorování zleva typu I.



Obrázek 5.29: Odhad σ při cenzorování zleva typu I.

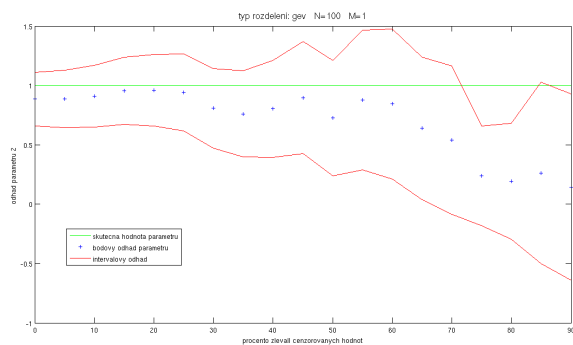


Obrázek 5.30: Odhad ξ při cenzorování zleva typu I.

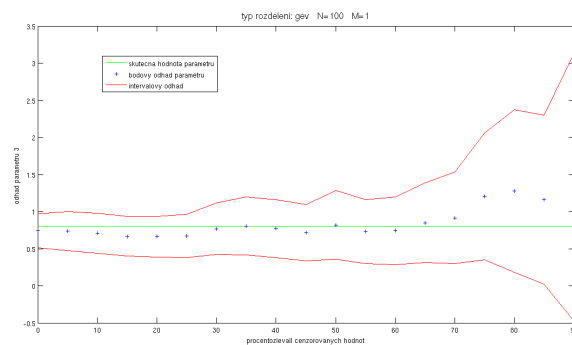


Obrázek 5.31: Odhad μ při cenzorování zleva typu II.

5.3 SIMULACE POMOCÍ FUNKCE MMV



Obrázek 5.32: Odhad σ při cenzorování zleva typu II.



Obrázek 5.33: Odhad ξ při cenzorování zleva typu II.

6 Závěr

Tato práce se zabývala odhady parametrů z cenzorovaných výběrů. V teoretické části je popsána metoda maximální věrohodnosti, uvedeny jednotlivé typy cenzorovaných výběrů a odvozeny či uvedeny tvary věrohodnostních funkcí. V práci jsou též popsány základní typy extrémálních rozdělání.

Přínosem této práce je odvození věrohodnostních rovnic a asymptotických intervalových odhadů parametrů pro cenzorované výběry z exponenciálního, logaritmicko–normálního, Weibullova, Gumbelova a zobecněného extrémního rozdělání. Odvození těchto vztahů, které se běžně v literatuře nevyskytují, je věnovaná značná část této práce.

Další přínos je v podobě simulací, kde je studována závislost odhadů parametrů na procentu cenzorování pro exponenciální, logaritmicko–normální, Weibullovo, Gumbelovo a zobecněné rozdělání extrémních hodnot. V práci jsou pak v podobě obrázků uvedeny výstupy těchto simulací a z nich plynoucí závěry. Tyto simulace byly prováděny pomocí programu matlab. Matlabovská funkce mle.m, která slouží pro odhady parametrů rozdělání pomocí metody maximální věrohodnosti, počítá odhady pouze pro cenzorování zprava a nedovede určit odhady parametrů pro cenzorované výběry ze zobecněného rozdělání extrémních hodnot. Z tohoto důvodu byla v programu matlab zprogramována funkce nazvaná mmv.m, která za pomoci matlabovských optimalizačních funkcí a některých vztahů odvozených v této práci, počítá odhady pro cenzorování zprava a zleva typu I či II a to pro rozdělání exponenciální, Weibullovo, logaritmicko–normální, Gumbelovo a zobecněné rozdělání extrémních hodnot. Tato funkce pak byla využita pro simulaci závislosti odhadu parametrů zobecněného rozdělání extrémních hodnot na procentu cenzorování. Použitelnost funkce mmv.m pro některé typy rozdělání je z důvodu vysoké časové náročnosti horší.

Literatura

- [1] ANDĚL, J.: *Základy matematické statistiky*. Praha: MATFYZPRESS, 2005. 358 s. ISBN 80 – 86732 – 40 – 1.
- [2] COHEN, A. Clifford: *Truncated and censored samples: theory and applications*. New York: Marcel Dekker, inc., 1991. 312 s. ISBN 0 – 8247 – 8447 – 2.
- [3] COLES, S.: *An Introduction to statistical modeling of extreme values*. London: Springer, 2004. 205 s. ISBN: 1 – 85233 – 459 – 2.
- [4] DE HAAN, L.; FERREIRA, A.: *Extreme Value Theory An Introduction*. New York: Springer, 2006. 417 s. ISBN: 0 – 387 – 23946 – 4.
- [5] FUSEK, M.: *Statistika extrémních hodnot*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 78 s. Diplomová práce. Vedoucí práce Jaroslav Michálek.
- [6] HURT, J.: *Teorie spolehlivosti*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. 202 s. ISBN: 17 – 162 – 84.
- [7] KLEIN, J. P.; MOESECHBERGER, M. L.: *Survival analysis : techniques for censored and truncated data*. 2nd ed. New York: Springer, 2003. 536 s. ISBN: 0 – 387 – 95399 – X.
- [8] KOTZ, S.; NADARAJAH, S.: *Extreme Value Distribution. Theory and applications*. London: Imperial College Press, 2000. 185 s. ISBN: 1860942245.
- [9] LIKES, J.; MACHEK, J.: *Matematická statistika*. Praha: SNTL, 1983. 180 s. ISBN: 978 – 80 – 7231 – 251 – 1.
- [10] MICHÁLEK, J.; ŠMEREK, M.; ŠOTOVÁ, J.: *Matematické modelování rizik*. 1. vyd. Brno: Univerzita obrany, 2007. 146 s. ISBN: 978 – 80 – 7231 – 251 – 1.

Seznam použitých zkratk a symbolů

P	pravděpodobnost
X	náhodná veličina
$\mathbf{X}$	náhodný vektor
Ω	parametrický prostor
$\boldsymbol{\theta}$	vektor parametrů
$a, b, \mu, \sigma, \xi, \lambda, \gamma$	parametry rozdělení
F, G	distribuční funkce
f, g	hustota rozdělení pravděpodobností
E	střední hodnota
L	věrohodnostní funkce
l	logaritmická věrohodnostní funkce
J	Fisherova míra informace
$\mathbf{J}$	Fisherova informační matice

Seznam příloh

Přiložená CD:

- CD 1:

Toto CD obsahuje:

- tuto diplomovou práci ve formátu pdf,
- složku s obrázky, které byly v práci použity,
- matlabovské programy: mmv.m, simcenzodhadu.m, cenzorovani.m.

- CD 2:

Toto CD obsahuje:

- matlabovské programy: mmv.m, simcenzodhadu.m, cenzorovani.m.