



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

MPEMBŮV JEV A JEHO VYUŽITÍ V PRAXI

THE MPEMBA EFFECT AND ITS USE IN APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

David Wittek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **David Wittek**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Mpembův jev a jeho využití v praxi

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Mpembův jev/Mpemba effect označuje zdánlivě nesmyslnou a paradoxní skutečnost, že teplá voda může zmraznout (tj. změni se skupenství z kapalného na tuhé, změni se v led) dříve než voda studená. Objev tohoto účinku byl zjištěn na střední škole v Tanzánii, studentem Erasto Mpembou, v Africe v roce 1969. Na zdokumentování tohoto jevu bylo provedeno mnoho experimentů s rozdílnými výsledky. Příčiny Mpembova jevu dosud nebyly uspokojivě objasněny. Tato práce se věnuje popisu tohoto jevu, kdy k němu může docházet, jaké jsou pokusy o jeho vysvětlení a posoudit, kde by se dal využít v praxi.

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce je popsat Mpembův jev a vytvořit rešerši provedených experimentů. Autor práce by se měl pokusit provést základní sadu experimentů, které se co nejvíce přiblíží podmínkám původních experimentů a provést jejich porovnání. V závěru práce by měla být rozvaha o možnosti komerčního využití jevu v praxi.

Seznam doporučené literatury:

ÇENGEL, Yunus A. a Michael A. BOLES. Thermodynamics: an engineering approach. 8rd ed. Boston: WCB/McGraw-Hill, 2014. McGraw-Hill series in mechanical engineering. ISBN 978-0073398174.

WAGNER, Craig F. The Mpemba Effect: A Thermodynamic Paradox, Or, why Hell May Freeze Over Sooner Than You Think. Reed College, 2007.

TYROVOLAS, Ilias J. Explanation for the Mpemba Effect. Journal of Modern Physics. 2017, (8), 2013-2020. Dostupné z: doi:10.4236/jmp.2017.812121.

JENG, Monwhea. The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? American Journal of Physics. 2006, (74), 514-522. Dostupné z: doi:10.1119/1.2186331.

PŘÍPLATOVÁ, Miroslava. Mpembův jev [online]. Brno, 2008 [cit. 2020-10-22]. Dostupné z: .
Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Vladislav Navrátil.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Teplejší voda může zmrznout dříve než voda studená. O tomto zdánlivě nesmyslném jevu se ve svých spisech zmiňuje již Aristoteles, přesto se dodnes nikomu tento fenomén nepodařilo zcela objasnit. Práce se věnuje faktorům, které mohou proces mrznutí kapaliny ovlivnit. Kompozice experimentální aparatury bude navržena pro maximální přiblížení podmínkám experimentu průkopníka vědeckého výzkumu této problematiky, E. Mpemby, který získal doposud nejprůkaznější výsledky měření potvrzující existenci jevu. Na základě získaných výsledků budou zhodnoceny možnosti praktického uplatnění pro získání časové úspory při procesu mražení.

Klíčová slova

Mpembův jev, změna skupenství vody, přenos tepla, konvekce

ABSTRACT

Hot water appears to freeze faster than cold water. Already Aristoteles mentions this seemingly meaningless fact in his writings. However, to this day no one has been able to fully clarify this phenomenon. Work is focused on factors, which may affect the freezing process of liquids. The composition of the experimental set up will be designed to approach the conditions of the pioneer of scientific research on this issue, E. Mpemba. He has obtained the most convincing results confirming existence of the phenomenon. Based on results, it will be discussed possibilities of practical application, for example for saving time during freezing.

Key words

Mpemba effect, water phase transition, heat transfer, convection

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

WITTEK, David. *Mpembův jev a jeho využití v praxi*. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/137319>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Tomáš Mauder.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Mpembův jev a jeho využití v praxi vypracoval(a) samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

.....
Datum

.....
Jméno a příjmení

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji tímto Ing. Tomáši Mauderovi Ph.D. za odborné konzultace při řešení. Mé poděkování také patří Ondřeji Vajdovi a PhDr. Evě Vlčkové za jazykové korektury.

OBSAH

Úvod.....	9
1 Zdánlivý paradox	10
2 Hypotézy pokoušející se objasnit jev	11
2.1 Vlastnosti kontaktní plochy nádoby s mrazicím zařízením.....	11
2.2 Ovlivnění regulačních senzorů mrazicího zařízení	11
2.3 Vliv rozpuštěných látek.....	11
3 Termokinetika	14
3.1 Tepelný tok dnem nádoby	14
3.2 Tepelný tok hladinou.....	15
3.3 Tepelný tok stěnou nádoby.....	18
3.4 Celkový tepelný tok.....	21
4 Dosavadní poznatky	23
4.1 Mpembův experiment.....	23
4.2 Moderní výzkum	23
5 Experimentální část	25
5.1 Podmínky experimentu.....	25
5.2 Měřicí aparatura AHLBORN.....	27
5.3 Vyhodnocení experimentu.....	28
5.4 Výsledky měření	33
5.4.1 Závislost doby do zmrznutí na původní teplotě kapaliny	33
6 Praktická využitelnost	36
6.1 „Původní Mpembův jev“	36
6.2 „Studenovodní Mpembův jev“	37
7 Závěr.....	40
Seznam použitých zdrojů	41
Seznam použitých veličin a zkratk.....	43
Seznam grafů a obrázků	44
Seznam tabulek.....	46
Seznam příloh.....	47

Úvod

Výroba ledu, tj. mražení vody, je úkon z oblasti běžné lidské činnosti i průmyslové výroby. Led má všestranné využití, využijeme jej při výrobě míchaných nápojů, údržbě ledových ploch, chlazení potravin obecně. Používán je taky v lékařství při transplantacích, či ve stavitelství při výrobě betonu v oblastech s vysokou teplotou vzduchu. Během druhé světové války se experimentovalo s výrobou letadlových lodí z pykretu¹ [1].

Výrobu ledu lze charakterizovat jako energeticky i časově poměrně náročnou. Běžné lednice dosahují mrazicího výkonu okolo 14 kg/den. Optimalizace výrobních postupů by mohla přinést významné časové a energetické úspory v tomto nepomíjitelném segmentu průmyslu. Jen ve Spojených státech amerických činí roční obrat společností produkujících led přes 595 milionů amerických dolarů (2002) [2].

Minimálně časové úspory může přinést všeobecně známý, ale obtížně pozorovatelný Mpembův jev, kdy teplá voda zamrzá dříve než voda studená [3]. Už ze starověku jsou zdokumentována pozorování tohoto neintuitivního chování vody. Základy moderního výzkumu této problematiky položil Ernesto Mpemba, po němž je jev pojmenován a který dosáhnul doposud nejpřesvědčivějších experimentálních výsledků verifikujících jev. Navazující výzkum ukázal, že výskyt jevu je zřejmě spjat se specifickými podmínkami a reprodukce Mpembových výsledků je obtížná [4].

Předmětem práce je experimentálně zdokumentovat závislost doby mrznutí vody na její počáteční teplotě s cílem nalezení specifických podmínek, za kterých Mpembův jev existuje. Experimentální aparatura je koncipována ve snaze maximálního přiblížení podmínkám původního Mpembova experimentu, zjevně pro studovaný jev příznivým.

S ohledem na vysokou citlivost existence Mpembova jevu na počátečních podmínkách lze obecně při mražení očekávat netriviální závislosti času tuhnutí na panujících podmínkách. Zvolení pro Mpembův jev příznivé výrobní konfigurace může snížit časovou, popřípadě i finanční náročnost mražení.

¹ kompozitní materiál na bázi dřevěných pilin a ledu [1]

1 Zdánlivý paradox

Mpembův jev popisuje ochlazování a následnou fázovou přeměnu vody o různé teplotě, kdy teplejší voda zmrzne dříve [3].

Pokud je problematika sdílení tepla s mrazicím boxem aproximována na stacionární tepelnou výměnu realizovanou prostřednictvím radiace, konvekce a kondukce s konstantními součiniteli determinující přestup tepla, zjevně by existence Mpembova jevu implikovala neplatnost 1. zákona termodynamiky.

Tento model není pro popis Mpembova jevu dostatečný, je potřeba popsat problematiku komplexněji. Zmiňované součinitele kvantifikují odehrávající se fyzikální procesy. Cirkulace vody buzená počáteční teplotní stratifikací se vlivem setrvačných sil bude určitou mírou zachovávat, útlum bude záviset především na vnitřním třením kapaliny. Je zjevné, že původně teplejší kapalina bude mít při stejných hodnotách stavových veličin značně vyšší hodnoty přirozené konvekce než voda původně studenější (při běžných hodnotách viskozity).

Důležitost tohoto hysterezního chování je umocněna existencí anomálie vody, kdy pod teplotou 4 °C dochází k obrácení smyslu budících vztlakových sil. V případě kapaliny o počáteční teplotě 4 °C, která je hladinou vystavena výrazně chladnějšímu okolí, se ochlazená kapalina udržuje v horních vrstvách a na vyrovnání teplot se podílí významnou měrou pouze radiace a kondukce. Konvektivní proudy vůbec nevznikají. Původně teplejší kapalina má již vlivem vztlakových sil rozvinuté konduktivní proudění, a i přes jeho momentální tlumení třecími a hydrostatickými silami přispívá k zintenzivnění tepelné výměny mezi kapalinou a okolím.

V případě ochlazování teplé vody dochází rovněž k přirozenému výparu kapaliny, který je úměrný teplotě. Při tomto výparu je kapalině odebíráno latentní teplo a dále je snížena hmotnost dále ochlazovaného média. To lze však jen stěží považovat za benefit.

Dalším významným faktorem, kterým je potřeba se v této problematice zabývat, je krystalizace. Vazbové síly v hexagonální krystalové struktuře ledu jsou významně vyšší než vazby mezi molekulami kapalně vody. Pro samotný vznik krystalu ledu je potřeba existence krystalizačních jader. Z předešlých výzkumů [5] vyplývá, že u teplé kapaliny významnější termický pohyb statisticky významně ovlivňuje komplexní molekulární pochody při samotné krystalizaci a zvyšuje pravděpodobnost vzniku krystalizačních jader. K tuhnutí kapaliny tak může docházet dříve při nižší teplotě přechlazení pod teplotou tuhnutí látky.

2 Hypotézy pokoušející se objasnit jev

Mimo výše uvedené procesy, jež by mohly vést k objasnění jevu, existuje v současné době několik dalších hypotéz, které se pozorováním Mpembova jevu pokoušejí vysvětlit spíše specifickými podmínkami daného experimentu. Jev by se v tomto případě dal spíše považovat za důsledek hrubé chyby metodiky experimentu bez významných praktických přínosů. V podmínkách základního experimentu je snaha tyto vlivy maximální možnou měrou eliminovat. Teorie, které existenci jevu vysvětlují ryze fyzikálními principy, potažmo chemickými procesy bez vlivu použité technologie, se doposud nepodařilo uspokojivě potvrdit.

2.1 Vlastnosti kontaktní plochy nádoby s mrazicím zařízením

Jedním z potenciálních vysvětlení jevu je fakt, že nádoba s horkou vodou může významně ovlivnit kvalitu styčné plochy nádoby s dnem mrazicího zařízení [5].

Především starší mrazicí zařízení využívají ke svému chlazení vzduch, který není zcela zbaven vzdušné vlhkosti. Vodní pára postupně kondenzuje a krystalizuje na povrchu uvnitř mrazicího boxu. Dochází ke vzniku souvislé vrstvy sněhu a ledu, tzv. námrazy, která vykazuje značné izolační vlastnosti. Tepelná vodivost ledu $\lambda_{led} = 2,2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ [6] je přibližně setinou tepelné vodivosti hliníku $\lambda_{Al} = 237 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ [6], běžného konstrukčního materiálu vnitřní klece mrazicího boxu.

Nádoba se studenou vodou izolační vrstvu příliš nenaruší a kondukce tepla vrstvou izolantu je poté značně omezena. Nádoba, která je ohřátá od teplé vody, má dostatečnou energii pro roztavení vrstvy námrazy a dochází ke vzniku přímého styku se samotným chladicím zařízením s diametrálně odlišnými tepelně vodivostními vlastnostmi [6].

Rovněž je pravděpodobné zvýšení hodnoty koeficientu prostupu tepla mezi nádobou a povrchem, kdy v přirozeně se vyskytujících nerovnostech povrchů dojde ke vzniku ledových svarů namísto vzduchových dutin.

Současná chladicí zařízení jsou již standardně vybavená technologií NO FROST [7], která ke chlazení využívá vzduch o minimální vlhkosti, takže vznik námrazy je značně potlačen. Hodnoty relativní vlhkosti v mrazicím boxu a s tím spjatou kvalitu povrchu však může značně ovlivnit samotný experiment, kdy obzvláště při volné hladině kapaliny dochází ke značným výparům.

2.2 Ovlivnění regulačních senzorů mrazicího zařízení

Teplota uvnitř moderních mrazicích boxů je zpravidla regulovaná pomocí termostatu. Během experimentu (zvláště s teplou vodou) nelze očekávat zcela izotermické prostředí. Senzor ohřátý teplou vodou neúměrně zvýší chladicí výkon. Tepelný tok, který je jedním z klíčových relevantních parametrů experimentu, bude v tomto případě úměrný teplotě vody a experiment bude nerelevantní. Vliv regulace výkonu mrazicího zařízení považujeme za hrubou chybu měření a pro náš experiment nežádoucí. Odporoval by jakékoliv možnosti praktického využití jevu, což je mj. předmětem této práce.

2.3 Vliv rozpuštěných látek

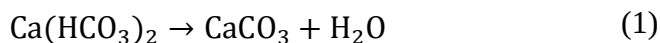
Běžně dostupná nezpracovaná voda není chemicky čistou látkou, ale jedná se o roztok s rozpuštěnými pevnými látkami, nejčastěji $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$, CaO , MgO , a plyny jako je CO_2 , či O_2 .

Při ochlazování vícesložkového roztoku dochází ke snížení teploty tání oproti čisté látce².

² Vyplývá z Raoultova zákona pro tlak syté páry nad roztokem [8].

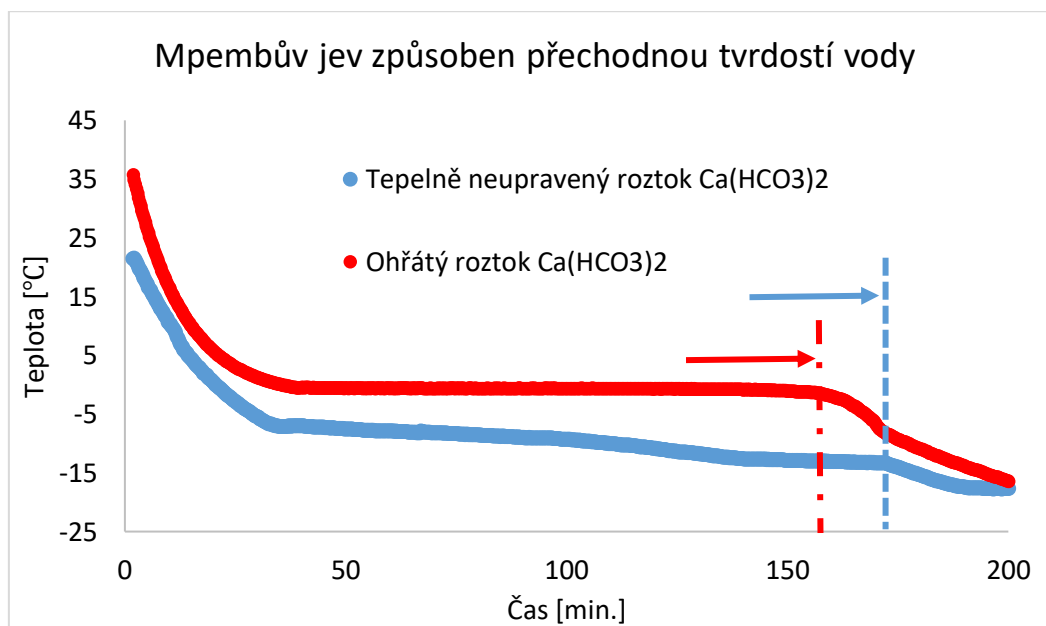
Zároveň není proces samotné krystalizace izotermický, ale dochází při něm k poklesu teploty přibližně lineárním trendem. Krystalizace směsi může tedy být časově náročnější než krystalizace čistého roztoku.

Koncentraci některých rozpuštěných látek lze trvale redukovat ohřevem. Obecně dochází k uvolňování plynných složek do okolí, jejich ovlivnění teploty tání je však poměrně nízké. Vlivem teplotně závislé hodnoty maximální možné rozpustnosti a dalšími chemickými procesy dochází rovněž k vysrážení některých pevných látek. Typicky se jedná o $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$, kdy je popisovaný jev všeobecně znám jako přechodná tvrdost vody. Vznikající vápenec (CaCO_3) již není ve vodě dále rozpustný.



Prostým ohřevem kapaliny lze tedy připravit z chemického hlediska odlišný roztok, který má odlišné fyzikální vlastnosti a krystalizace probíhá rozdílným způsobem.

Teplotní gradient s okolím v mrazicím zařízení je na počátku experimentu s relativně vysokými teplotami vody výrazně vyšší než v době krystalizace. K ochlazení na krystalizační teplotu dochází za relativně krátký časový úsek, samotná krystalizace je za běžných podmínek časově výrazně náročnější. Její další prodloužení změnou chemické struktury látky může způsobit zdánlivý paradox, kdy původně chladnější roztok mrzne déle než chemicky čistá látka o vyšší počáteční teplotě. Nesprávně zanedbané rozdíly v koncentracích rozpuštěných látek mohou mít větší vliv než intuitivně mnohem významnější rozdíl počátečních teplot. Tento proces může být vyhodnocen jako Mpembův jev.



Graf č. 1 Ochlazovací křivky horkého a chladného roztoku $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$. Vlivem přechodné tvrdosti vody zamrzá dříve ohřátý roztok, což naplňuje podstatu Mpembova jevu

Toto chování, a tedy i „poněkud svérázný“ Mpembův jev je patrný v grafu č. 1 zobrazující demonstrační experiment s koncentrovaným roztokem $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$, který vykazuje přechodnou tvrdost. Roztok byl připraven rozpouštěním CaO ve vodě syčené CO_2 . Připravený roztok o koncentraci 178 mmol/l překročil limitní hodnotu velmi tvrdé vody 3,76 mmol/l téměř padesátinásobně.

Při ohřevu prvního vzorku na teplotu 90 °C došlo k vysrážení CaCO_3 a zbývající voda vykazovala výrazně nižší množství aditiv. Při ochlazování z počáteční teploty 38 °C, což je

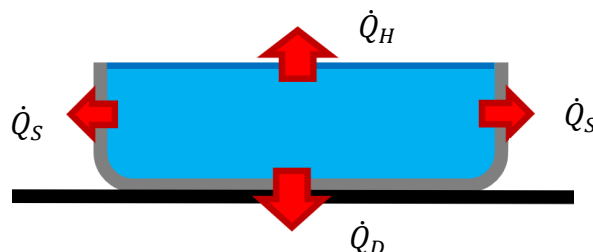
v grafu prezentováno červenou křivkou, byla teplota tuhnutí přibližně rovna teplotě tuhnutí vody 0 °C. Vzorek vykazoval izotermické chování až do času 148 min., kdy dochází k lomu křivky a krystalizace byla ukončena. Nelze vyloučit, že další lom v čase 168 min. má souvislost s přetrvávající stopovou koncentrací příměsí, rovněž se může jednat o chybu měření.

Původní roztok, který nebyl vystaven vyšším teplotám a ochlazuje se z 23 °C (prezentováno modrou křivkou) má bod tuhnutí posunut na teplotu – 7,6 °C. Následně je patrný lineární pokles teploty do dosažení úplné krystalizace v čase 174 min. Krystalizace původně chladnějšího roztoku tedy trvala o 26 min. déle, přestože měla původně výrazně nižší teplotu.

Obdobnými procesy dochází ke vzniku roztoku $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$ v krasových oblastech. Silně mineralizovaná voda může vykazovat obdobné chování. Mezi oblastí s vysokou koncentrací příměsí v povrchové vodě se řadí bezodtoká oblast ve Velké příkopové propadlině, jež je významnou částí Tanzanské pevniny. Voda zde vykazuje silnou alkalitu s vysokým obsahem minerálního hořčíku [9], který je ve formě MgO druhým nejvýznamnějším viníkem přechodné tvrdosti vody.

3 Termokinetika

S ohledem na nestacionární charakter proudění s tekutým médiem, kde nepochybně velmi významnou roli hraje její konvekce, je analytický popis problematiky obtížný. Řešení pro stacionární proudění demonstruje charakteristiku jevu na počátku experimentu a spolu s vhodnou interpretací dat z průběhu experimentu může pomoci objasnit fyzikální podstatu problému.



Obr. č. 1 Přenos tepla z vody do okolí je realizován paralelními tepelnými toky hladinou, stěnou a dnem nádoby.

Tepelná výměna mezi horkou vodou a studeným okolím probíhá prostřednictvím kontaktní plochy dna nádoby s mrazicím boxem, stěnou nádoby omítanou okolním prostředím (vzduchem) a prostřednictvím volné hladiny. Celkový tepelný tok těmito paralelními plochami můžeme vyjádřit jako součet jednotlivých tepelných toků.

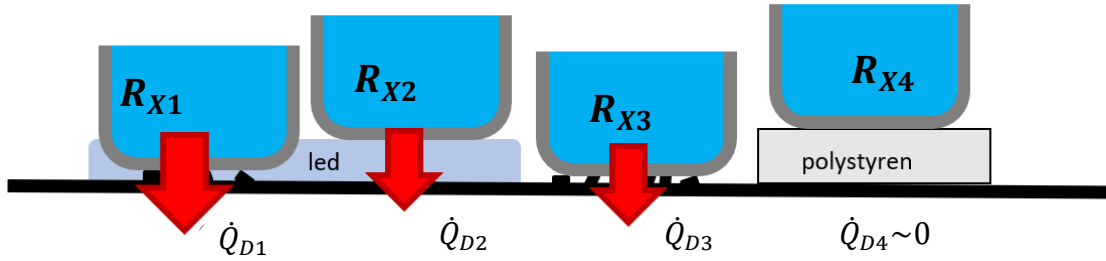
$$\dot{Q} = \dot{Q}_H + \dot{Q}_S + \dot{Q}_D \quad (2)$$

$\dot{Q}_H$	tepelný tok prostřednictvím hladiny
$\dot{Q}_S$	tepelný tok stěnou nádoby
$\dot{Q}_D$	tepelný tok dnem nádoby

3.1 Tepelný tok dnem nádoby

Tepelný tok dnem nádoby $\dot{Q}_D$ je realizován kondukcí tepla porcelánovou vrstvou δ_1 o tepelné vodivosti $\lambda_{porc.}$ [6] a přestupem na stěnu mrazicího zařízení, to můžeme popsat zavedením tepelného odporu R_X (3). Velikost tepelného odporu R_X je součtem odporu vedením porcelánovou stěnou $\delta_1/\lambda_{porc.}$ a odporem přechodové oblasti nádoba-stěna lednice, ten závisí na charakteru mezní vrstvy. Je obtížně předpověditelný, závisí na mnoha faktorech. V průběhu experimentu se může měnit např. vlivem zvyšující se vzdušné vlhkosti a vznikající námrazy.

$$\dot{Q}_D = k \cdot S_0 \cdot \Delta T = \frac{S_0 \cdot \Delta T}{R_X} \quad (3)$$



Obr. č. 2 Přenos tepla dnem nádoby může být značně variabilní.

$$R_{X1} < R_{X2} \neq R_{X3} \ll R_{X4} \sim 0 \quad (4)$$

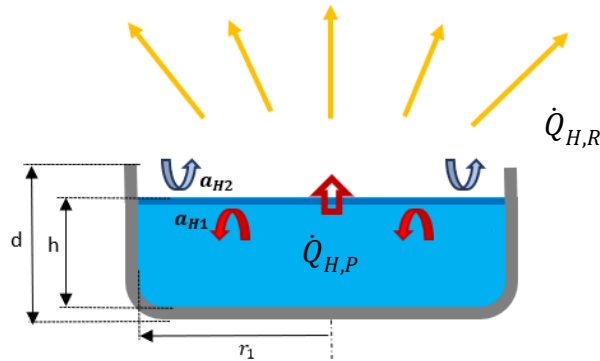
$$\dot{Q}_{D1} > \dot{Q}_{D2} \neq \dot{Q}_{D3} \gg \dot{Q}_{D4} \sim 0 \quad (5)$$

Konstrukcí mezivrstvy o dostatečné mocnosti z tepelně izolačního materiálu, např. polystyrenu ($\lambda_p = 0,037 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ [6]), se přiblížíme nulovému tepelnému toku (viz obr. č. 2). Tepelný tok $\dot{Q}_D$ se stane vůči hodnotám $\dot{Q}_S$ a $\dot{Q}_H$ zanedbatelný a dále ho nebudeme uvažovat. Tepelný tok $\dot{Q}$ se redukuje na součet $\dot{Q}_S$ a $\dot{Q}_H$ (6).

$$\dot{Q}_D \approx 0 \rightarrow \dot{Q} = \dot{Q}_H + \dot{Q}_S \quad (6)$$

3.2 Tepelný tok hladinou

Na ploše volné hladiny, tj. přechodu mezi kapalnou vodou a okolním vzduchem, dochází k tepelnému toku $\dot{Q}_H$ prostřednictvím tepelného záření $\dot{Q}_{H,R}$ a prostupem tepla $\dot{Q}_{H,P}$, kdy uvažujeme přirozenou cirkulaci vody i vzduchu (7).



Obr. č. 3 Přenos tepla hladinou je realizován prostupem tepla a zářením.

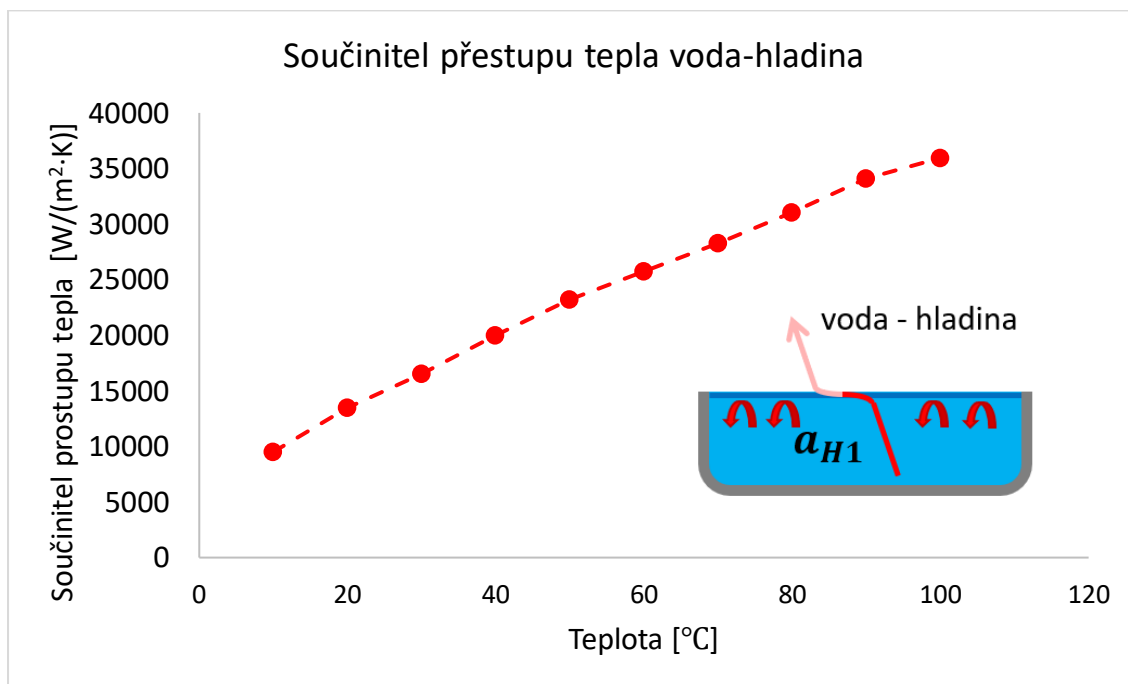
$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_{H,R} + \dot{Q}_{H,P} \quad (7)$$

Prostup tepla $\dot{Q}_{H,P}$ můžeme vyjádřit rovnicí (8), kdy S_H je plochou hladiny, teplota T je střední teplotou vody a teplota T_∞ teplota v mrazicím zařízení. Součinitel prostupu tepla α_{H1} popisuje chování na rozhraní voda-hladina a α_{H2} na rozmezí hladina-vzduch.

$$\dot{Q}_{H,P} = \frac{S_H \cdot (T - T_\infty)}{\frac{1}{\alpha_{H1}} + \frac{1}{\alpha_{H2}}} \quad (8)$$

Hodnota součinitele $\alpha_{H1} = 110,5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ byla určena na základě vztahů teorie podobnosti [10] pro přirozenou konvekci při použití fyzikálních parametrů pro vzduch o teplotě -20°C [10] a příslušné geometrii. Užívané empirické vztahy, obsažené exponenty A , B a konstanta C byly převzaty z literatury [8]. Součinitel $\alpha_{H2}(T)$ byl rovněž určen ze vztahů vyplývajících z teorie podobnosti (9) [10]. S ohledem na fakt, že figurující fyzikální vlastnosti vody, tj. teplotní roztažnost $\gamma(T)$, kinematická viskozita $\nu(T)$ a tepelná vodivost $\lambda(T)$, jsou funkcí teploty, je rovněž hodnota $\alpha_{H2}(T)$ závislá na teplotě. Uvedené fyzikální vlastnosti vody pro příslušnou škálu teplot jsou převzaty od autorů [12]. Používáme výhradně přímo změřené, diskrétní hodnoty příslušných veličin.

$$\alpha_{H2}(T) = C \cdot \left(\frac{g \cdot \gamma(T) \cdot \Delta T_1 \cdot L^3}{\nu(T)^2} \right)^A \cdot \text{Pr}(T)^B \cdot \frac{\lambda(T)}{L} \quad (9)$$



Graf č. 2 Součinitel přestupu tepla na rozhraní vody a hladiny.

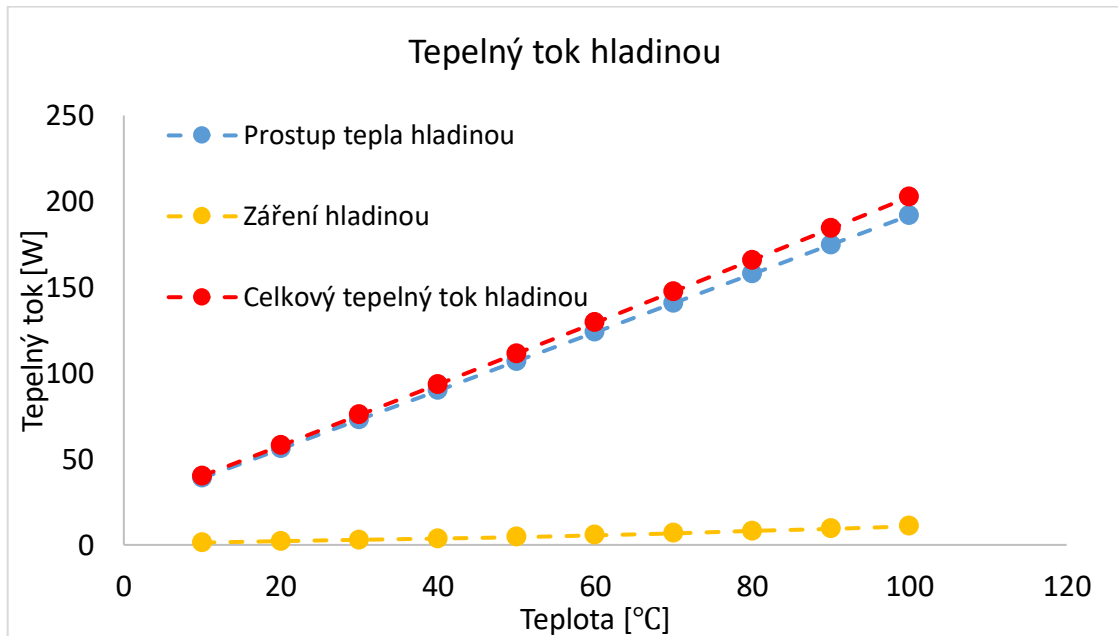
$$\dot{Q}_{H,R} = \frac{S_H}{R_{RH}} \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_\infty^4) \quad (10)$$

$$R_{RH} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{S_H}{S_M} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_M} - 1 \right) \quad (11)$$

Druhým členem rovnice pro $\dot{Q}_H$ je tepelný tok sáláním hladinou $\dot{Q}_{H,R}$ (10). Tok proudí celou plochou hladiny S_H . Teplota hladiny je zvažována s ohledem na masivní přirozenou konvekci za rovnou střední teplotě vody, která je snímána teplotní sondou. Na vodu pohlížíme jako na šedé těleso, celkový odpor R_{RH} záření mezi hladinou a vnitřní stěnou mrazáku o ploše S_M a emisivitě $\varepsilon_M = 0,05$ [13] je dáno rovnicí (11) [11]. S ohledem na velikost poměru $S_H/S_M = 0,21 \gg 0$ není výraz dále zjednodušitelný. Užívaný model pohlíží na vodu jako na šedé těleso s emisivitou $\varepsilon = 0,84$ [13].

Součtem $\dot{Q}_{H,R}$ (10) a $\dot{Q}_{H,P}$ (8) dostáváme rovnici (12) popisující celkový tepelný tok hladinou $\dot{Q}_H$.

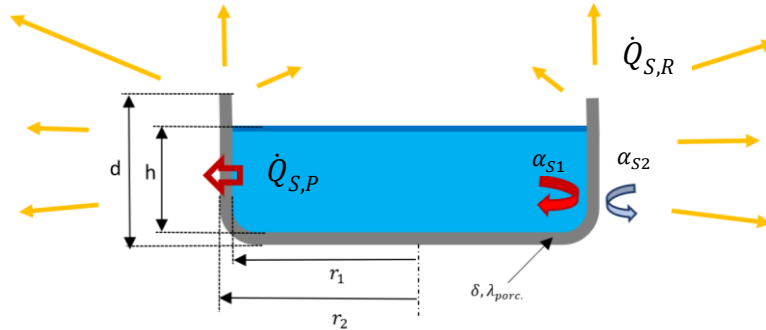
$$\dot{Q}_H = \frac{S_H \cdot (T - T_\infty)}{\frac{1}{\alpha_{H1}} + \frac{1}{\alpha_{H2}}} + \frac{S_H}{R_{RH}} \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_\infty^4) \quad (12)$$



Graf č. 3 Závislost velikosti tepelných toků prostupem tepla a zářením prostřednictvím volné hladiny na teplotě.

3.3 Tepelný tok stěnou nádoby

Tepelný tok $\dot{Q}_S$ je realizován prostupem tepla stěnou nádoby na její vnější povrch. Z povrchu je teplo odváděno do okolí prostupem s uplatněním přirozené cirkulace vzduchu a rovněž sáláním povrchem nádoby (13).



Obr. č. 4 Tepelný tok stěnou nádoby je realizován prostupem tepla a zářením.

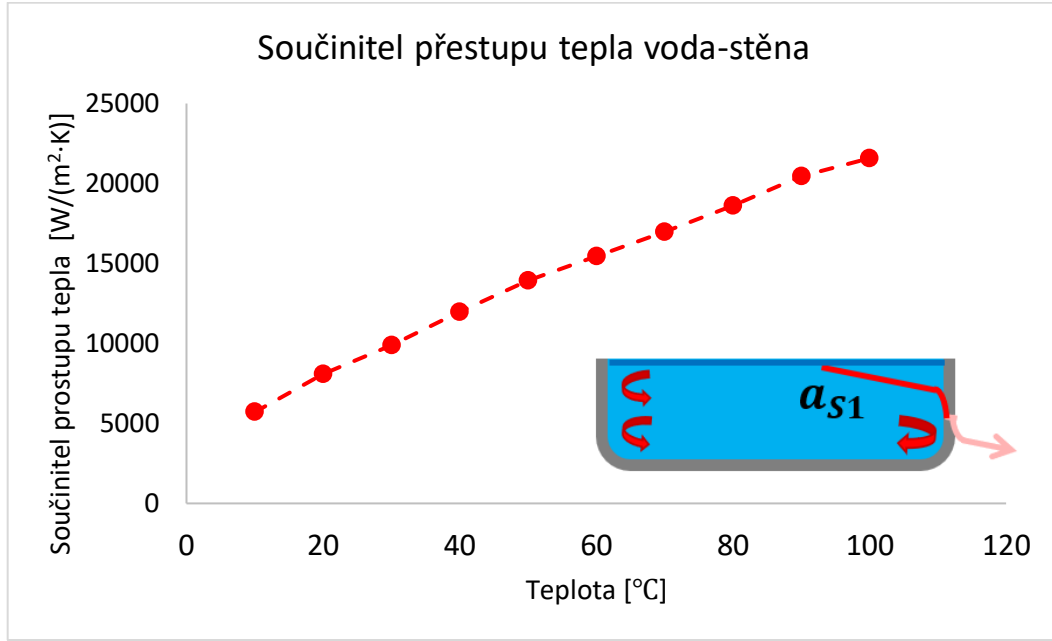
$$\dot{Q}_S = \dot{Q}_{S,R} + \dot{Q}_{S,P} \quad (13)$$

Prostup tepla nádobou $\dot{Q}_{S,P}$ popisuje rovnice (14) pro válcovou stěnu o vnitřním poloměru r_1 a vnějším r_2 [11]. Zjednodušený model počítá s tepelným tokem pouze smáčeným povrchem pláště nádoby o lineárním rozměru výšky hladiny H .

$$\dot{Q}_{S,P} = \frac{H \cdot (T - T_{\infty})}{\frac{1}{\alpha_{S1} \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_{porc}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_{S2} \cdot r_2}} \quad (14)$$

Hodnota součinitel $\alpha_{S1} = 40,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ byla určena na základě vztahů teorie podobnosti pro vzduch o teplotě $-20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ [10] a příslušné geometrie. Užívané empirické vztahy, obsažené exponenty A , B a konstanta C byly převzaty z literatury [8]. Vztah pro součinitel $\alpha_{H2}(T)$ byl také určen ze vztahů vyplývajících z teorie podobnosti (15) [10]. Fyzikální vlastnosti vody $\gamma(T)$, $\nu(T)$ a $\lambda(T)$ jsou funkcí teploty stejně jako samotná hodnota $\alpha_{H2}(T)$, závislost její hodnoty na teplotě je graficky vyjádřena v grafu č. 4. Fyzikální vlastnosti vody jsou převzaty od autorů [12].

$$\alpha_{S1} = C \cdot \left(\frac{g \cdot \gamma(T) \cdot \Delta T_1 \cdot L^3}{\nu(T)^2} \right)^A \cdot \text{Pr}(T)^B \cdot \frac{\lambda(T)}{L} \quad (15)$$



Graf č. 4 Závislost součinitele přestupu tepla z vody na vnitřní stěnu nádoby na teplotě.

Tepelný tok $\dot{Q}_{S,R}$ je vyzařován porcelánovou miskou o emisivitě $\varepsilon_{porc.} = 0,87$ [14]. S ohledem na dobrou tepelnou vodivost nádoby ($\lambda_{porc} = 1,4 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) [6] je tepelná výměna zářením uvažována celým nesmáčeným povrchem nádoby S_{NS} včetně vnitřní vodou nezaplněné plochy. Celkový součinitel vzájemné emisivity mezi stěnou a vnitřní plochou mrazáku R_{RS} je obdobný vztahu (11) se shodnými parametry stěny mrazicího zařízení [13].

Teplota zářivé plochy T_{SS} , vnějšího povrchu nádoby, se může vyjádřit prostřednictvím tepelného toku stěnou $\dot{Q}_{S,P}$ a tepelnými odpory mezi vodou a příslušnou stěnou (16). Tepelný tok zářením stěnou je pak popsán rovnicí (17).

$$T_{SS} = \frac{\dot{Q}_S}{\frac{1}{\alpha_{s1} \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_{porc}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (16)$$

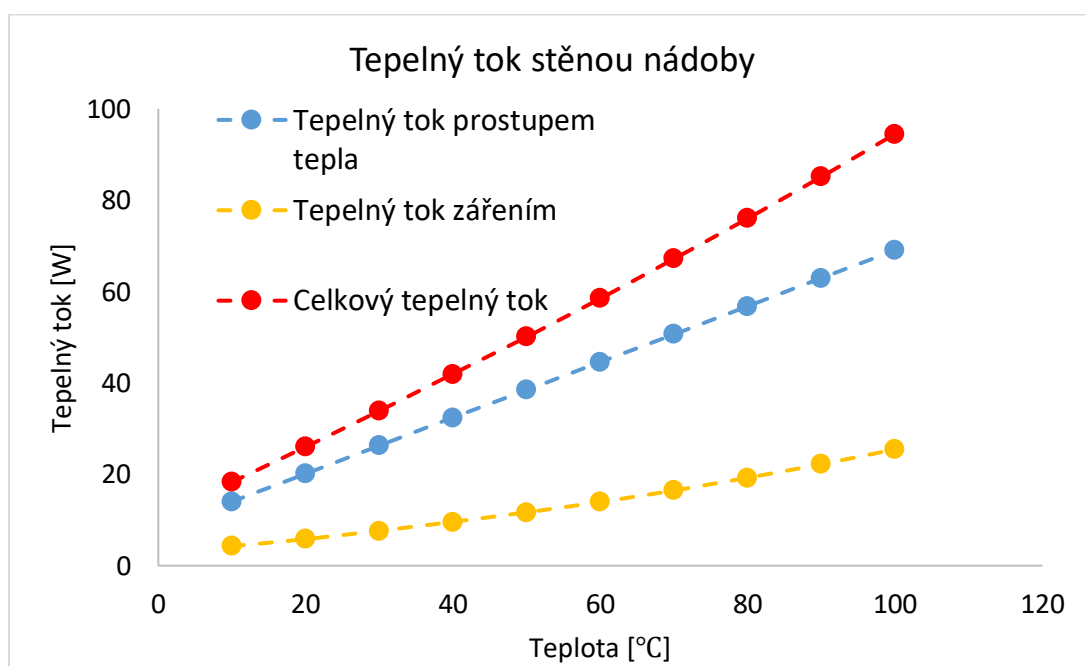
$$\dot{Q}_{S,R} = \frac{S_{NS}}{R_{RS}} \cdot \sigma \cdot \left[\left(\frac{\dot{Q}_S}{\frac{1}{\alpha_{s1} \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_{porc}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \right)^4 - T_{\infty}^4 \right] \quad (17)$$

Tepelný tok stěnou nádoby $\dot{Q}_s$ je dán kvartickou rovnicí (18), která je řešena numericky. Pro grafickou přehlednost se zavádějí parametry ξ (19) a χ (20).

$$\frac{\xi}{(\chi)^4} \cdot \dot{Q}_s^4 - \dot{Q}_s + \frac{S_{ss} \cdot (T - T_\infty)}{\chi + \frac{1}{\alpha_{s2} \cdot r_2}} - \xi \cdot T_\infty^4 = 0 \quad (18)$$

$$\xi = \frac{S_{NS}}{R_{RS}} \cdot \sigma \quad (19)$$

$$\chi = \frac{1}{\alpha_{s1} \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_{porc}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (20)$$



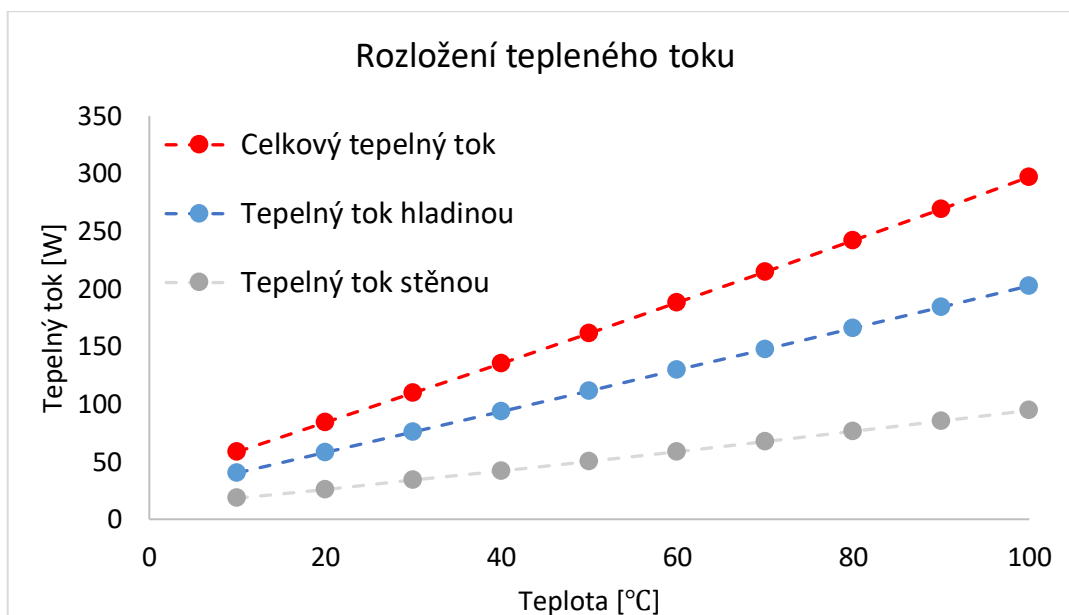
Graf č. 5 Závislost velikosti tepelných toků prostupem tepla a zářením prostřednictvím stěny nádoby na teplotě.

3.4 Celkový tepelný tok

Celkový tepelný tok je dán sumou paralelních tepelných toků (21).

$$\dot{Q} = \dot{Q}_H + \dot{Q}_S \quad (21)$$

Z výsledků matematického modelu je patrný rostoucí trend jednotlivých součinitelů tepelných toků v závislosti na teplotě. Především z grafu č. 7 je patrný nelineární charakter růstu jednotlivých tepelných toků stěnou a hladinou. Poměrné zastoupení tepelného toku stěnou na celkovém tepelném toku v závislosti na teplotě není monotónní funkcí. Nejnižší hodnoty poměrného zastoupení toku stěnou (30,9 %), tj. maximálního podílu tepelného toku hladinou (69,1 %), je dosaženo při teplotě 30 °C.

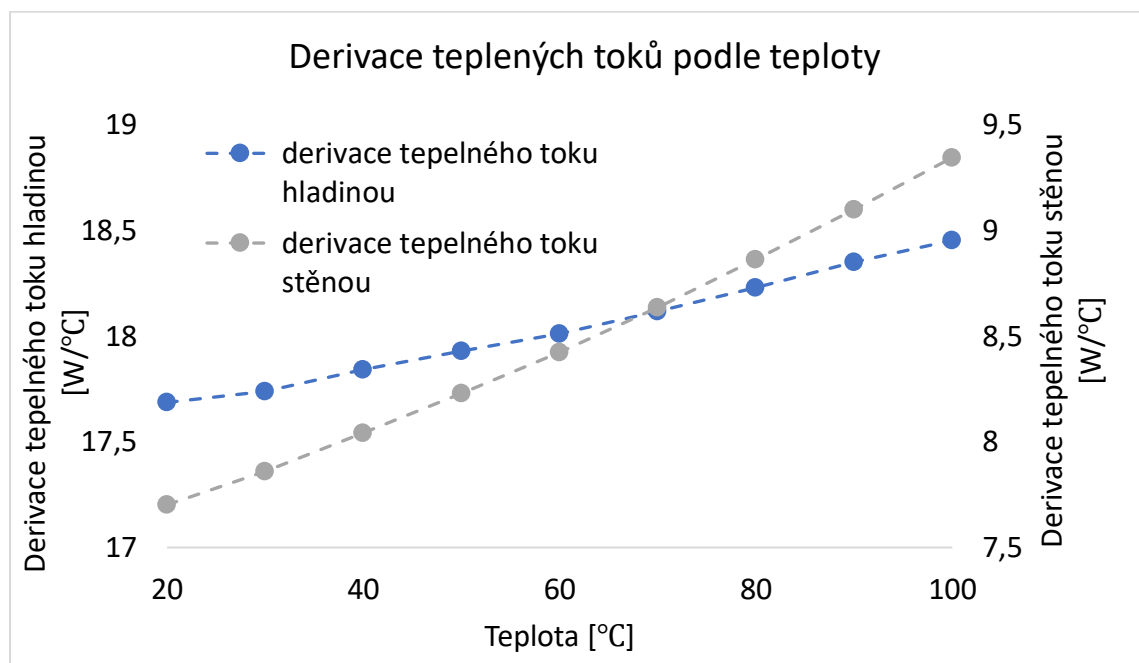


Graf č. 6 Velikost tepelného toků hladinou, stěnou a jejich součtu na teplotě kapaliny.

Na základě získaných výsledků nelze teoreticky vyvrátit ani potvrdit existenci Mpembova jevu z termokinetického hlediska. Model počítá se stacionárním charakterem tepelného proudění, názorně charakterizuje stav na počátku experimentu. Lze konstatovat, že počáteční tepelný tok roste s počáteční teplotou, kdy derivace tepelného toku podle počáteční teploty má přibližně lineární trend (viz graf č. 7).

Většina tepelného toku je realizována prouděním, které je vlivem setrvačných účinků v omezené míře udržováno i při poklesu gradientu teploty. Tlumení tohoto proudění je závislé na hodnotě viskozity kapaliny. Ta pro vodu v závislosti na teplotě klesá.

Z výše uvedených faktů lze usuzovat, že původně teplejší voda bude za stejných podmínek vlivem setrvačnosti cirkulovat intenzivněji než voda původně studená. Tepelný tok bude tedy také vyšší v případě původně teplejší vody. Za jistých podmínek by tak teplá voda mohla dosáhnout stavu úplné krystalizace dříve než voda původně studená. Existence Mpembova jevu je tedy možná.



Graf č. 7 Derivace tepelných toků podle teploty. Byla využita metoda zpětné numerické difference, obě x-ové osy jsou ve stejném měřítku.

4 Dosavadní poznatky

Zmínky o dřívějším mrznutí teplé vody můžeme nalézt již ve starověkém spisu Meteorologie od Aristotela (4. století př. n. l) [14]. Autor popisuje rituál z oblasti Pontus, kdy bylo při zimních rybolovech k upevnění udic podél vysekaných děr užíváno sněhových valů. Ty byly zalévány horkou vodou a v rychle zamrzající ledové krustě byly právě udice upevněny [14]. Francis Bacon se v díle Novum Organum [15] uvádí, že mírně teplá voda zamrzá dříve než voda studená. Do zimy 1461 je datován první pokus vědeckého charakteru, kdy Giovanni Marliani porovnává dobu mrznutí 4 uncí vroucí a studené vody [16]. Zaznamenává rychlejší zmrznutí vody původně teplé [16].

4.1 Mpembův experiment

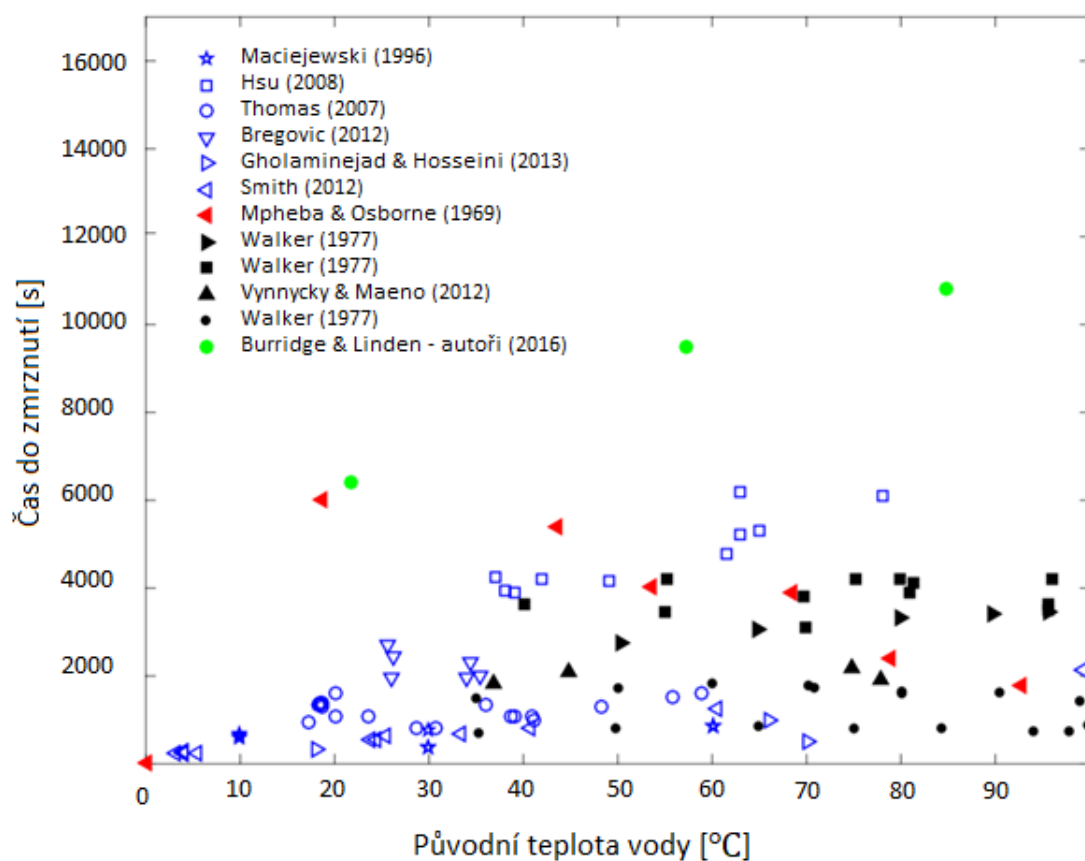
G. Mpemba se s jevem poprvé setkává během přípravy zmrzliny [3]. Z časových důvodů nenechává horký roztok ochladit na pokojovou teplotu a umísťuje jej do mrazicího boxu horký, ve stejnou dobu je rovněž připraven roztok shodného chemického složení, který ovšem nebyl vůbec ohříván a vložen do mrazicího boxu o pokojové teplotě, rovněž z důvodu časové úspory [3]. Mpemba zjistil, že ohřátý roztok zmrznul znatelně dříve.

4.2 Moderní výzkum

Problematickou se v poslední době zabývalo mnoho autorů. Burrridge v díle Questioning the Mpemba effect [4] se zabývá přímo rešerší dosavadních experimentálních výsledků včetně prvotního experimentu Mpemby a prof. Osborna z roku 1969. Jak samotní autoři grafu upozorňují, hodnoty byly získány za odlišných fyzikálních podmínek experimentu (objem kapaliny, teplota mrazáku, materiál nádoby) a porovnání je tedy ryze kvantitativního rázu. Z dostupného popisu [4] rovněž vyplývá, že sběr těchto dat probíhal „analogickou formou“ grafickým odečtem ze zveřejněných grafů a podlého tak značným nepřesnostem.

Nejprokazatelněji se podařilo Mpembův jev pozorovat přímo Mpembovi s prof. Osbornem, data jsou vyobrazena červenými body. Klesající trend času s rostoucí počáteční teplotou můžeme ještě pozorovat v případě dat Vynnycky & Maeno. Všechny datové soubory autora Walkera vykazují známky stagnace doby do mrznutí při vyšších počátečních teplotách, Mpembův jev ovšem přímo nepozoroval. Řada dalších prací včetně dat přímo citované Questioning the Mpemba effect (2016) [4] pozoruje opačné chování růstu času spolu s rostoucí teplotou, což odpovídá prvotní intuitivní představě.

Časy mrznutí se napříč autory až řádově liší, je tedy pravděpodobné, že porovnávaná data byla měřena pro rozdílné objemy kapaliny, popřípadě teploty v mrazicím boxu. To může být důvodem pozorování rozdílných trendů chování křivky času chladnutí na počáteční teplotě. Není vyloučeno, že existence Mpembova jevu je spjata s úzkým rozptylem objemu (vnější teploty), kdy např. geometrické parametry nádoby výrazně změni konvekční procesy v kapalině. Rovněž nelze vyloučit ovlivnění některých experimentálních sad výše diskutovanými neryze fyzikálními procesy.



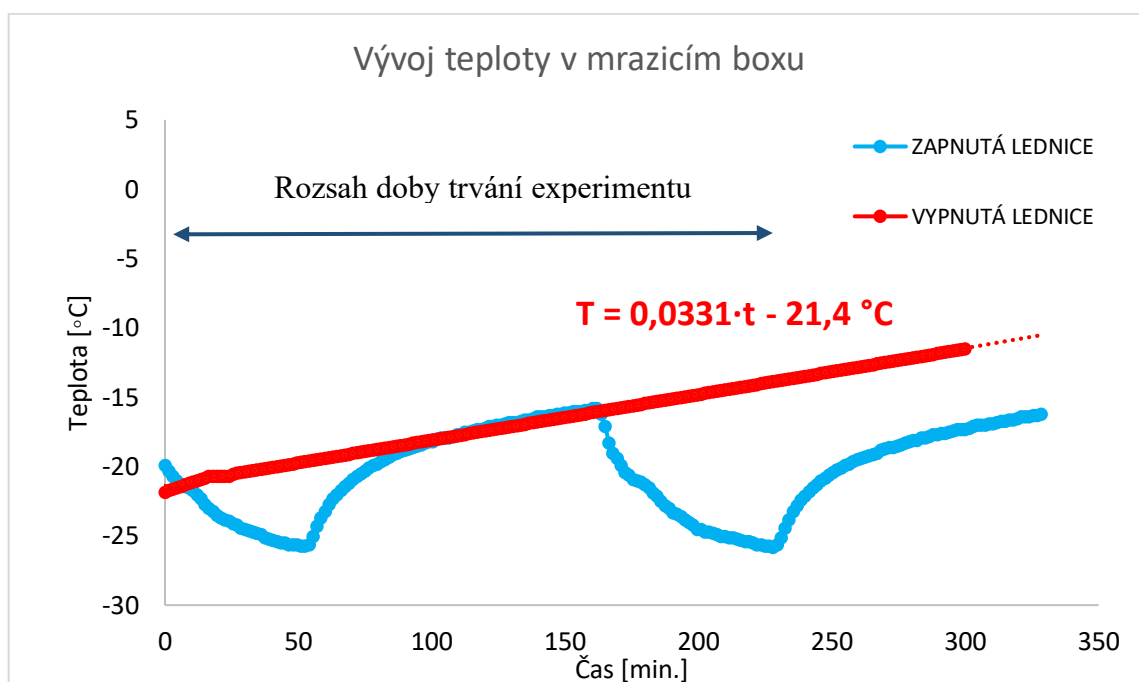
Graf č. 8 Převzatý graf [4] shrnující předchozí experimentální výsledky včetně prvotního Mpembova experimentu. Srovnání je pouze kvalitativního charakteru, nejprůkaznějších výsledků dosáhli Mpemba a Osborne. Autoři Burridge a Linden [4] jev nepozorovali.

5 Experimentální část

5.1 Podmínky experimentu

Všechny experimenty byly prováděny v mrazicí části chladničky Gorenje NRK6202AW4 nastavené na konstantní stupeň chlazení 5, který odpovídá minimální vnitřní teplotě $T_{\infty} = -25,4\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Měřením bylo zjištěno výrazné hysterezní chování lednice. Teplota, která je regulována termostatem, v čase během provozu osciluje v řádech stupňů, konkrétně v používaném stupni 5 v rozmezí $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jak je patrné z grafu č. 9, rovněž absolutní hodnota gradientu teploty není konstantní. Tyto podmínky nepovažujeme za příliš reprezentativní ani v případě přesného nastavení totožných počátečních podmínek (v rámci periodické funkce). Chování lednice by experiment značně ovlivnilo a jeho reprodukovatelnost by byla obtížná, patrně by byla možná pouze v lednici stejného typu.



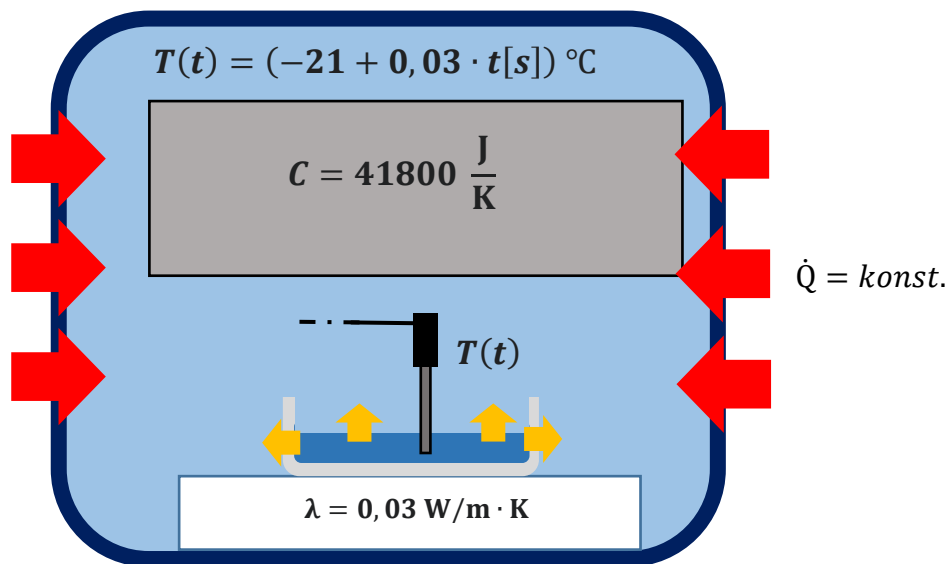
Graf č. 9 Vývoj teploty v mrazicím boxu pro zapnuté aktivní chlazení a vypnuté aktivní chlazení.

Experiment byl po důkladném zvážení prováděn v mrazicím boxu s vypnutým chlazením. Jak lze vidět v grafu č. 9, teplota během experimentu rostla vlivem tepelné výměny s okolím. S ohledem na dobré izolační vlastnosti lednice a vysokou hodnotu teplotního rozdílu s okolím má teplotní růst v celém průběhu lineární charakter konstantního průběhu. Přesným nastavením teploty mrazicího boxu na počátku experimentu ($-21,4 \pm 0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$) a konstantním průběhem oteplováním, které lze matematicky popsat směrnicí přímky $T(t) = (0,0331 \cdot t - 21,4)\text{ }^{\circ}\text{C}$, bylo docíleno poměrně přesného popisu podmínek experimentu, který bude reprodukovatelný v libovolném chladicím zařízení odpovídajících parametrů.

Pro potřeby maximální stabilizace teploty mrazicího boxu a pro minimalizaci nepřímého ovlivnění tohoto parametru (např. teplotou vody, dobou otevření lednice) bylo po celou dobu experimentů v mrazicím boxu 20 kg termostabilizačního materiálu o celkové tepelné kapacitě $C = 41,8\text{ kJ/K}$.

Nádoby s vodou byly položeny na izolační podložce z polystyrenu ($\lambda_p = 0,037\text{ W/m} \cdot \text{K}$ [6]) tloušťky 10 mm ve stejné výšce a vzdálenosti od chladicí mřížky.

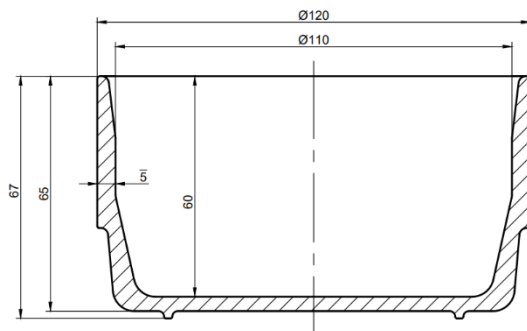
S ohledem na velice nízkou teplotní vodivost polystyrenu můžeme prohlásit, že k významným teplotním výměnám dochází pouze skrze hladinu a válcovou stěnou nádoby. Charakter styku nádoby s okolím, který může být ovlivněn vznikem námrazy, tak hraje marginální roli.



Obr. č. 5 Znázornění experimentálního sestavení v mrazicím boxu chladničky.



Obr. č. 6 Porcelánová miska používaná pro experimenty.



Obr. č. 7 Průřez používané nádoby.

Experimenty byly prováděny v totožných porcelánových válcových nádobách (viz obr. č. 6). Materiál nádob byl volen ve snaze se co nejvíce přiblížit podmínkám původního Mpembova experimentu a také popisovaným postupům tanzanských zmrzlinářů [3]. V podmínkách venkova rovníkové Afriky 60. let 20. století lze právě užívání nádob na hliněné bázi očekávat. Řada moderních výzkumů byla prováděna s využitím skleněných zkumavek, které mají rozdílné fyzikální vlastnosti, což může být příčinou menší úspěšnosti sledování jevu [17].

Tab. 1 Vybrané fyzikální vlastnosti materiálů používaných na konstrukci nádob.
Zobrazené fyzikální parametry byly převzaty ze zdrojů [10] a [17].

	c [J/kg · K]	λ [W/m · K]
Porcelán	1080	1,5
Borosilikátové sklo	840	0,8
Nerezová ocel	450	47

Z tabulky je patrné, že hodnoty fyzikálních veličin se liší v desítkách procent. Lze se domnívat, že charakter celkového prostupu tepla, které lze popsat paralelním zapojením tepelných odporů při hladině a ve stěně, bude v případě skleněné/kovové aparatury odlišný a může vést ke zcela odlišným fyzikálním pochodům než v původním Mpembově pokusu.

5.2 Měřicí aparatura AHLBORN



Obr. č. 8 Datalogger AHLBORN ALMEMO 2590.

Klíčovou veličinou, která kvalitativně i kvantitativně popisuje proces krystalizace, je teplota a její vývoj v čase. Pro účely experimentu byla využívána trojice ponorných odporových teploměrů Pt100-1 s platinovým termistorem. Přesnost udávaná výrobcem je $\pm 0,1$ °C. Data byla přijímána univerzálním dataloggerem AHLBORN ALMEMO 2590 a vyhodnocována využitím softwaru ALMEMO Control 5.19.

Snímací část termistoru byla přesně umístěna do potřebné polohy a udržována v ní pomocí stativu.

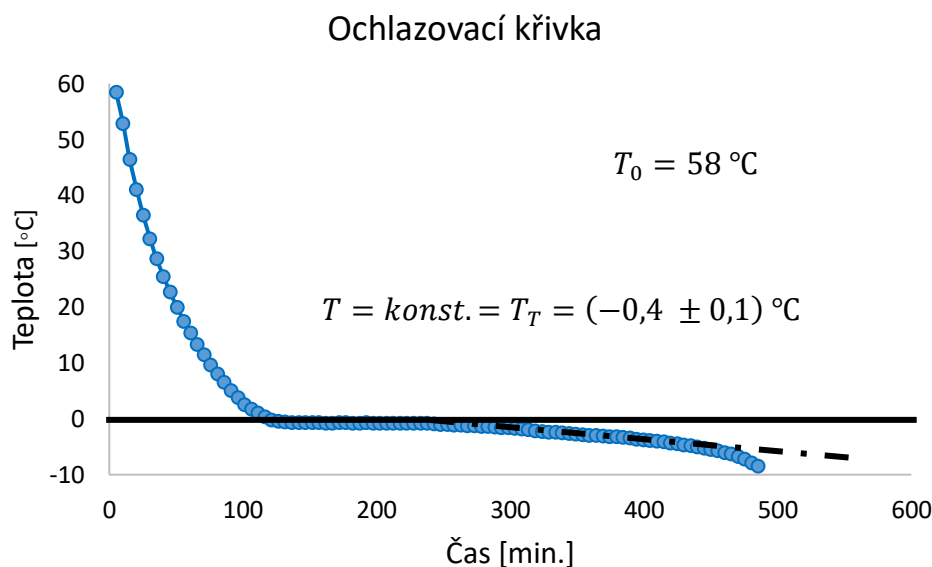
Pro měření byla zvolena frekvence snímání teploty 1,5 minuty, která je naprosto dostačující pro vykreslení studovaných procesů.



Obr. č. 9 Používané odporové teploměry Pt100-1 spolu s dataloggerem AHLBORN ALMEMO 2590.

5.3 Vyhodnocení experimentu

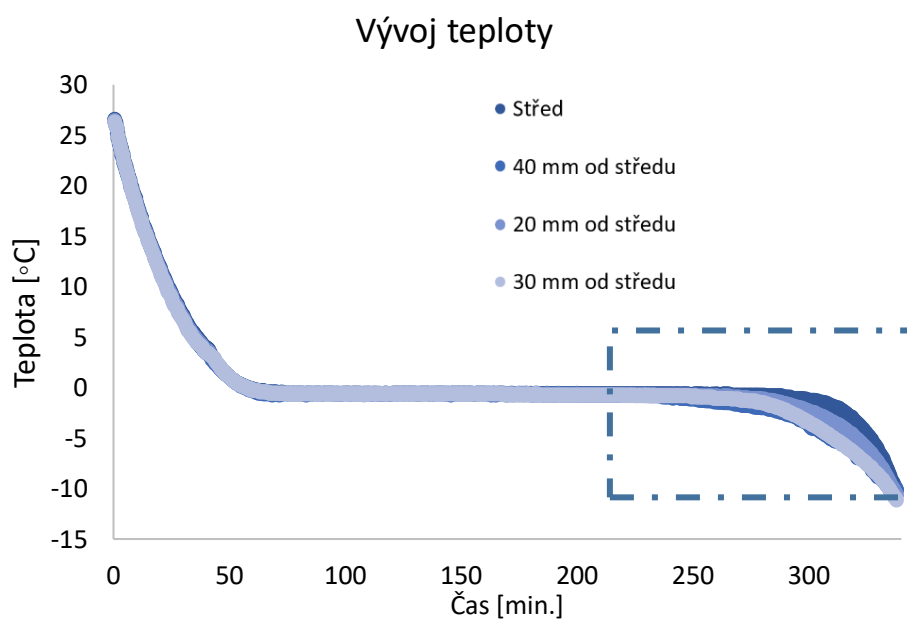
Mpembův jev hovoří o mrznutí vody, tj. její krystalizaci, a nebere tak v potaz teplotu. Jako relevantní výsledky tedy nelze brát dosažení konkrétní teploty, ale je potřeba sledovat fázovou strukturu vody. To bylo prováděno prostřednictvím ochlazovacích křivek. Po dosažení krystalizační teploty a vzniku krystalizačního jádra se teplota vody stabilizuje na transformační teplotě a je konstantní v průběhu celé krystalizace. Po dokončení krystalizace v celém objemu teplota dále klesá logaritmickým trendem do rovnovážné teploty s okolím.



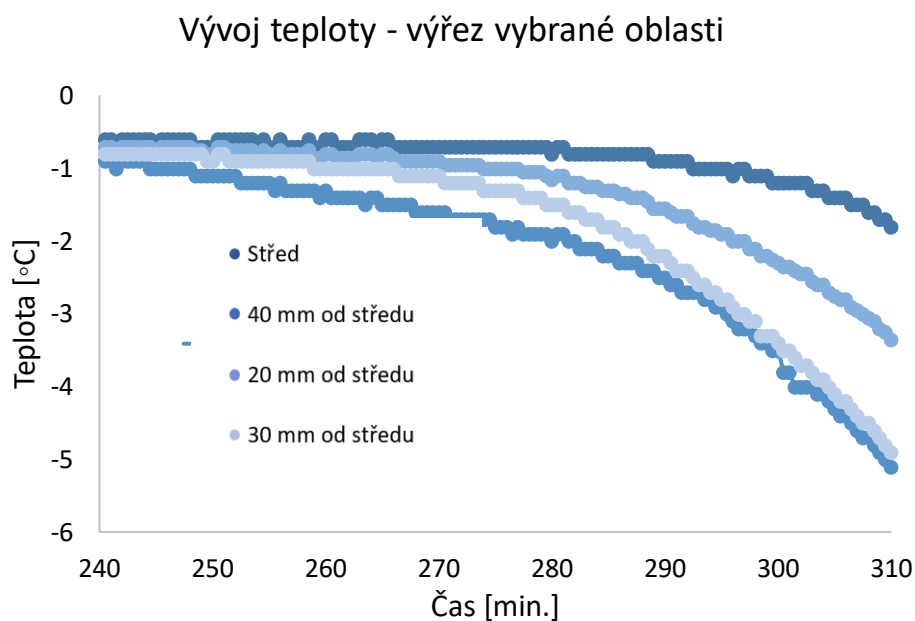
Graf č. 10 Ochlazovací křivka s izotermickou krystalizací.

Pro účely tohoto experimentu byl za klíčový časový parametr považován okamžik kompletního promrznutí kapaliny. Na ochlazovací křivce ho můžeme pozorovat jako bod nespojitosti, kdy se křivka láme z oblasti nulové derivace při krystalizaci do záporných hodnot znázorňujících obnovu procesu ochlazování.

S ohledem na poměrně nízkou tepelnou vodivost ledu a nezanedbatelné rozměry nádoby není teplota v průběhu krystalizace v celém objemu vody konstantní. Led se ochlazuje pod teplotu tuhnutí dříve, než je dosaženo promrznutí v celém objemu. Toto chování můžeme pozorovat v grafech č. 11 a č. 12.



Graf č. 11 Vývoj teploty v průřezu ochlazovaného objemu.

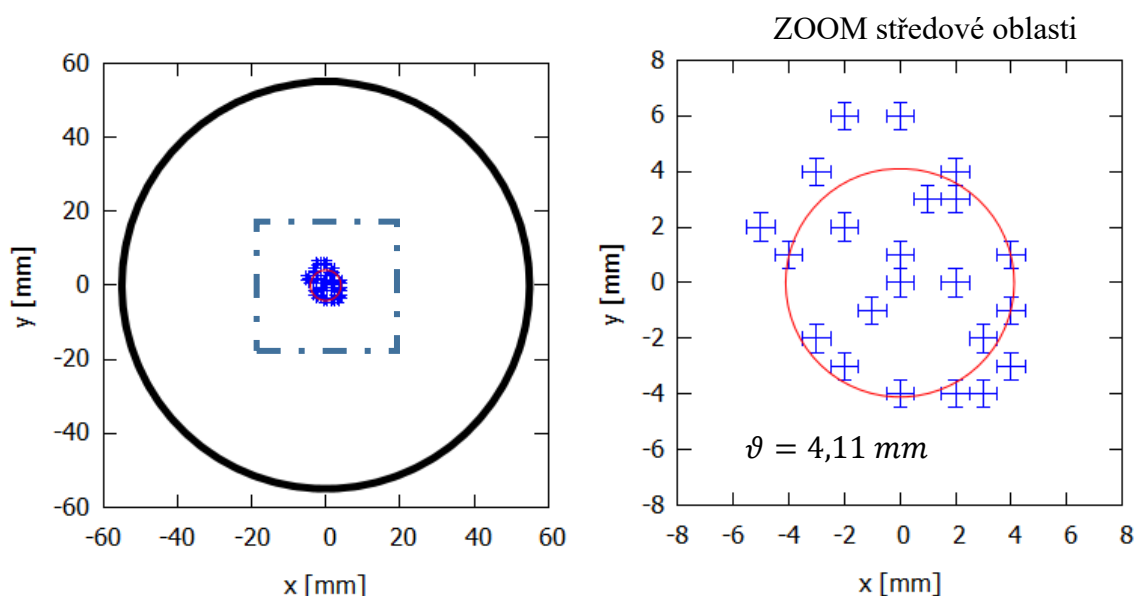


Graf č. 12 Vývoj teploty v průřezu ochlazovaného objemu. Výřez oblasti při konci krystalizace.



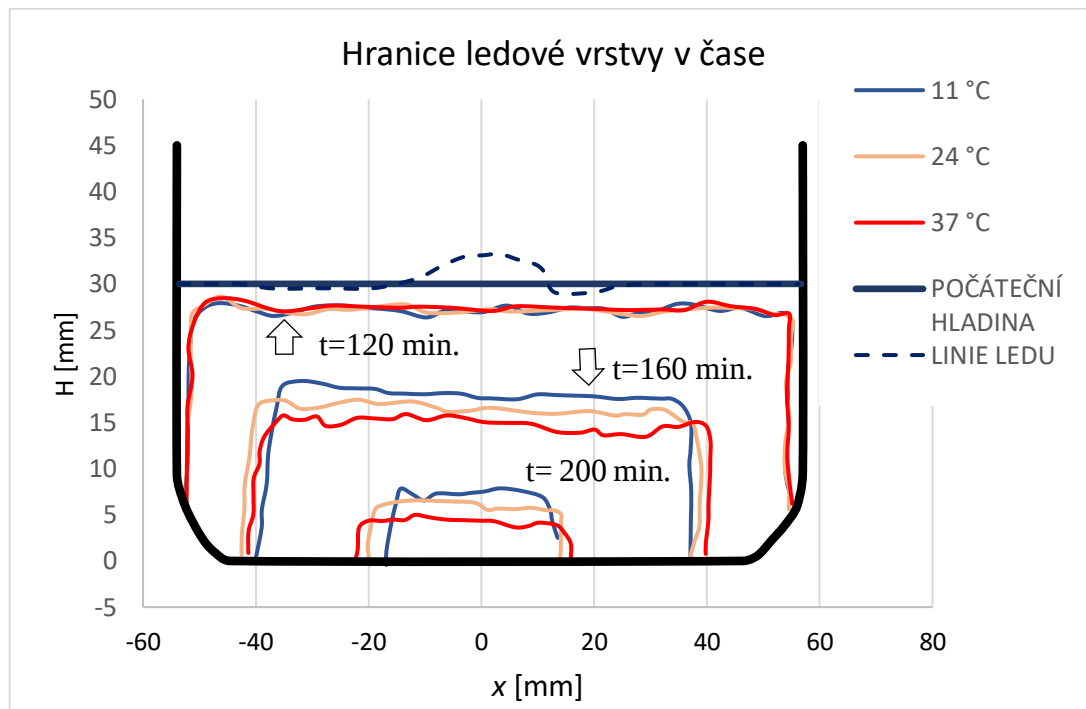
Obr. č. 10 Horní pohled na polovinu zčásti zkrystalizovaného experimentálního vzorku. Ve středu je patrná dutina vyplněna doposud kapalnou vodou. Fotografie je pro maximální kontrast upravena.

Z výsledku je zřejmá klíčovost vhodného umístění teplotního čidla, pokud možno co nejbližší k místu posledního výskytu vody v kapalně fázi. Sérií experimentů byla určena směrodatná odchylka tohoto bodu od geometrického středu nádoby $\vartheta = 4,11 \text{ mm}$. Odchylka je dána částečně nedeterministickou povahou této problematiky citlivé na počáteční podmínky. Odchylka průběhu následujících experimentů je zřejmě mírně nižší. Nerezová teplotní sonda, která je umístěna přímo v ose nádoby, se chová jako teplotní most a část tepelného toku je realizována přímo kondukcí snímačem.



Graf č. 13 Statistické vyhodnocení polohy posledního bodu výskytu kapalně fáze.

Dynamika krystalizace vody v nádobě je znázorňována prostřednictvím fotografií č. 10 a grafu č. 14, který prezentuje hranici ledu v konkrétním časovém okamžiku pro tři různé počáteční teploty vody. Pro získání dat byla využita fotoanalýza otisků průřezu částečně zmrzlých experimentálních vzorků v programu Tracker Video Tool Analysis.



Graf č. 14 Hranice ledové vrstvy v čase pro různé počáteční teploty vody.

Z charakteru křivek v čase $t = 120$ min. a $t = 200$ min. je patrné, že u chladnější vody dochází k intenzivnější krystalizaci ve vodorovném směru než v případě vody teplejší. V horizontálním směru je tendence opačná, nejrychleji krystalizuje voda o teplotě 37 °C. Celkově nejintenzivněji krystalizuje voda o teplotě 24 °C. Integrál této křivky, tj. plocha reprezentující zbývající vodu v kapalně fázi, má nejnižší hodnotu.



Obr. č. 11 Průřez zčásti zkrystalizovaného experimentálního vzorku. Ve středu je patrná dutina vyplněna doposud kapalnou vodou. Fotografie je pro maximální kontrast upravena.



Obr. č. 12 Průřez zčásti zkrystalizovaného experimentálního vzorku. Ve středu je patrná dutina vyplněna doposud kapalnou vodou. Fotografie je pro maximální kontrast upravena.

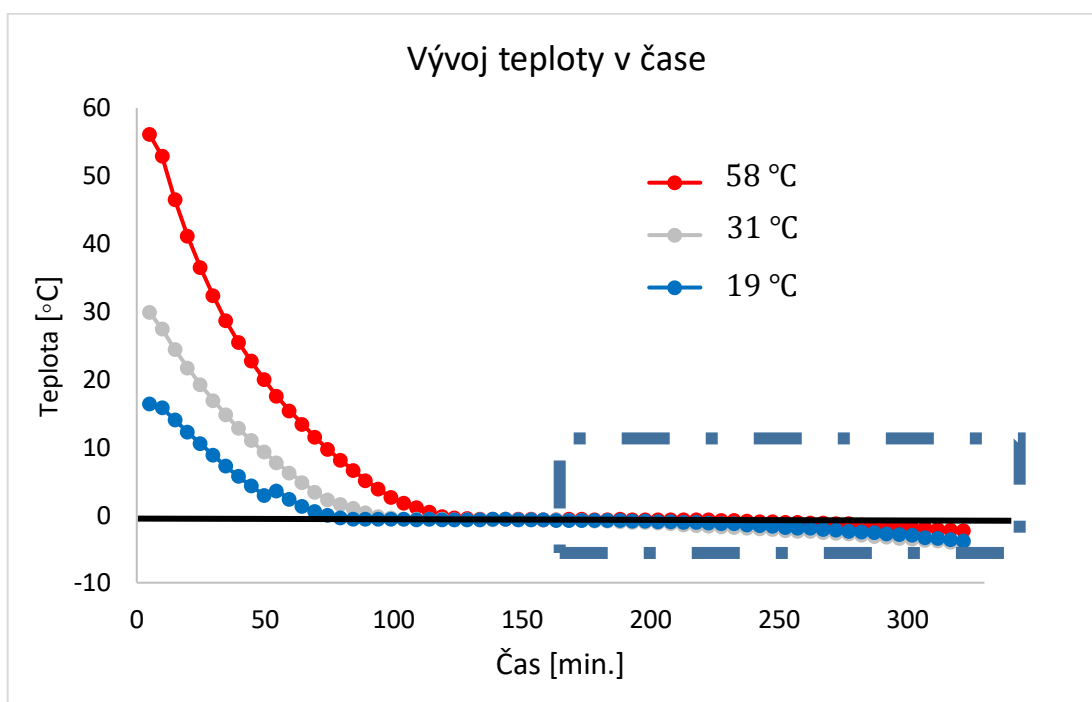
5.4 Výsledky měření

Hlavním předmětem této práce je stanovení času potřebného pro absolutní krystalizaci vody při různé počáteční teplotě. Uvedená data byla získána experimenty s výše popsanou experimentální aparaturou zahrnující uvedenou porcelánovou nádobu. Pro všechny experimenty bylo použito (220 ± 1) g předem převařené vody, teplota v mrazicím boxu na zahájení experimentu byla vždy $(-21,4 \pm 0,3)$ °C. Uváděná počáteční teplota vody odpovídá stavu bezprostředně po vložení do mrazicího boxu.

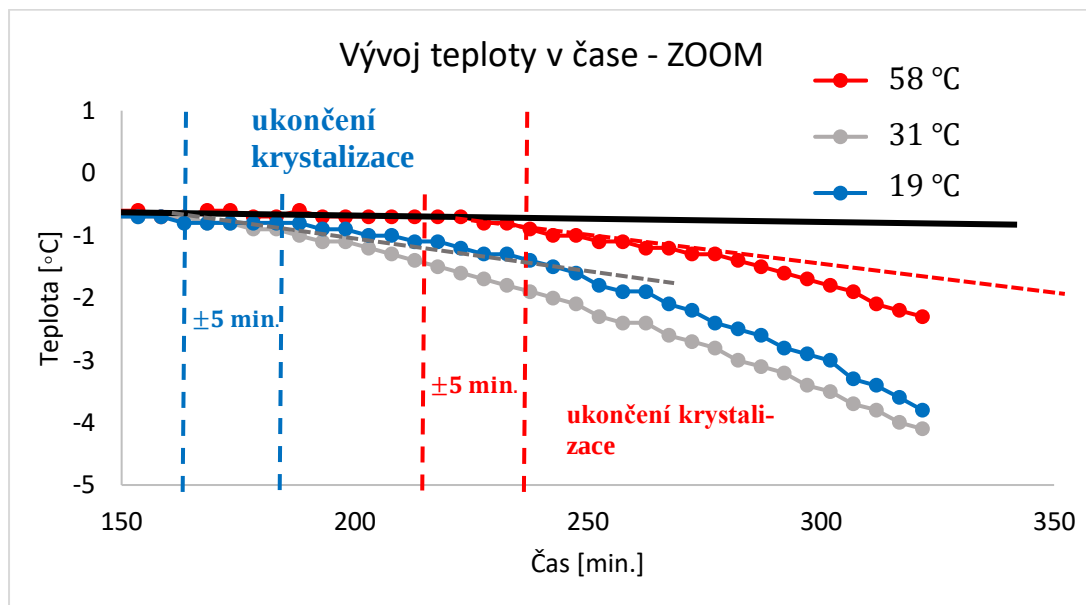
5.4.1 Závislost doby do zmrznutí na původní teplotě kapaliny

V níže umístěném grafu můžete vidět porovnání tří křivek popisující ochlazování vody o různé počáteční teplotě. Z grafu je jasně patrné, že k nejrychlejšímu ochlazení na krystalizační teplotu došlo u nejtudenější vody o teplotě 19 °C (modrá křivka), nejpomaleji v případě vody nejteplejší 57 °C (červená křivka), což odpovídá intuitivní představě. Druhý bod nespojitosti křivky, který odpovídá dokončení krystalizace, ovšem nastává jako první u vody o teplotě 31 °C (šedá křivka). Studenější voda (šedá křivka) tedy kompletně promrzla později. Nejpomaleji promrzla nejteplejší voda o původní teplotě 31 °C.

„Pravý“ Mpembův jev, kdy horká voda zmrzne dříve než voda při pokojové teplotě, nebyl v tomto experimentu nepozorován, ale byl pozorován z termodynamického hlediska analogický jev, kdy studená voda zmrzla pomaleji než voda o pokojové teplotě.

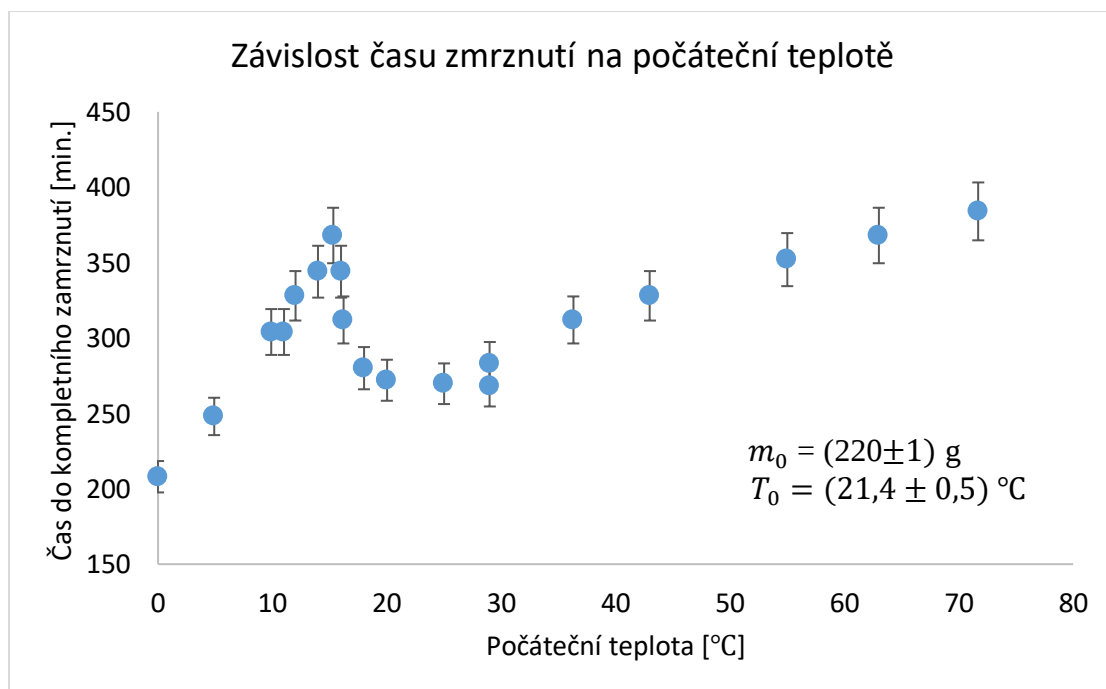


Graf č. 15 Vývoj teploty v čase, rozlišení stavu ukončení krystalizace je doprovázeno ukončení izotermické charakteristiky děje.



Graf č. 16 Vývoj teploty v čase, rozlišení stavu ukončení krystalizace není zcela přesné.

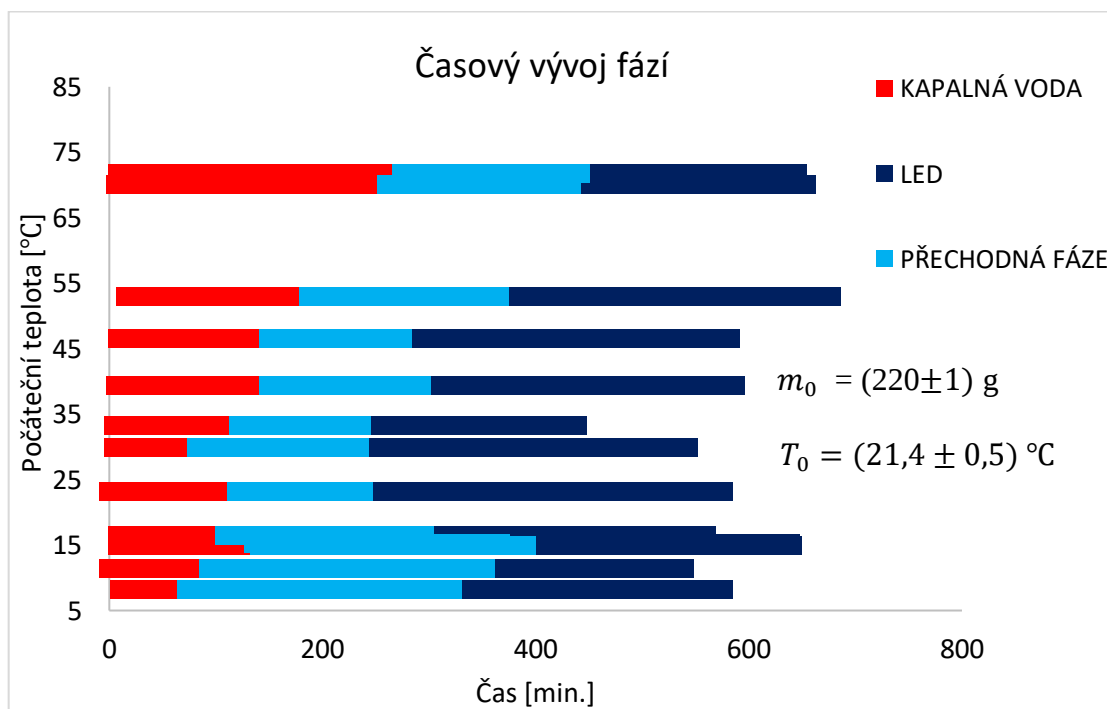
Pro stanovení konkrétní hodnoty doby tuhnutí je potřeba stanovit na časové ose bod, kdy dochází k lomu ochlazovací křivky. Ze zobrazených dat je patrné, že přechod v praxi není zcela nespojitý a určení jeho polohy nebude zcela přesné. Na základě analýzy dat a kvalifikovaného odhadu byla stanovena velikost chyby v určení na konstantní hodnotu 5 minut. Tato hodnota je dále používána jako chybová úsečka.



Graf č. 17 Závislost času mrznutí na počáteční teplotě.

Z grafu prezentujícího výsledky měření závislosti času zmrznutí na počáteční teplotě je patrný převažující trend růstu potřebného času spolu s teplotou, což je v rozporu Mpembova jevu. Odlišné je ovšem chování v intervalu (10; 18) °C, kde bylo zaznamenáno nemonotónní chování. Doba potřebná pro zmrznutí vody o teplotě 16 °C (lokální maximum) je přibližně stejná s dobou nutnou pro zmrznutí vody o teplotě 64 °C. Časový interval pro zmrznutí vody o teplotě 23 °C je o téměř 40 % kratší. Toto chování není doposud v odborné literatuře zabírající se touto tematikou popsáno. Je však potřeba upozornit na fakt, že obecně není doba mrznutí v tomto intervalu doposud experimentálně dostatečně zmapována.

Citovaný graf č. 8 [4] prezentující souhrn řady předchozích výzkumů obsahuje pouze jeden bod v tomto intervalu od autora Maciejewskieho. Jeho datový soubor obsahuje celkem 5 různých měřených hodnot. Pro teplotu 10 °C, která náleží intervalu s výskytem nemonotónnosti, autor uvádí dobu zamrznutí 900 s. Nejbližší další měřený bod odpovídá teplotě 30 °C a času mrznutí 720 s. Časový interval mrznutí vody o teplotě 30 °C byl tedy o 25 % menší, což přibližně odpovídá měřenému charakteru chování v této práci, kdy byl časový interval menší o 23 %. Pozorované chování koresponduje s tvrzením Francise Bacona v díle *Novum Organum* [15], že mírně teplejší voda zamrzá snadněji než voda chladná [15].



Graf č. 18 Přehled časového výskytu jednotlivých fází během krystalizace. Jednotlivé horizontální linie reprezentují ochlazovací křivky, kdy v červené oblasti se nachází kapalná voda, ve světle modré dochází ke krystalizaci, která je ukončena na počátku tmavě modré oblasti.

Zobrazení fázového diagramu v závislosti na čase (osa x) a počáteční teplotě (osa y) umožňuje další úhel pohledu na studovanou problematiku. Z diagramu je patrná závislost času zahájení krystalizace na teplotě. Platí, že čas nutný pro dosažení teploty zahájení krystalizace je úměrný teplotě. Opačný trend je pozorován v případě doby trvání krystalizace, s rostoucí počáteční teplotou je krystalizace dynamičtější a je ukončena dříve. Součtem těchto časů je dána celková doba nutná pro celkovou krystalizaci, vlivem opačně orientovaných závislostí těchto fyzikálních pochodů dochází ke vzniku nemonotónní funkce.

6 Praktická využitelnost

Obecně je Mpembův jev popsán stavem, kdy horká voda zamrzá rychleji než voda studená. Experimentální pozorování, a tedy i praktické uplatnění, je obtížné. V míře Mpembova původního experimentu nebyl doposud reprodukován. Tato interpretace jevu je dále označována jako „Původní Mpembův jev“. V rámci práce bylo experimentálně popsáno mrznutí vody o počáteční teplotě pod 20 °C. U chladnější vody byl časový interval mrznutí delší než v případě vody o přibližně pokojové teplotě. Tuto analogii „Původního Mpembova jevu“ dále popisujeme jako „Studenovodní Mpembův jev“.

6.1 „Původní Mpembův jev“

Již z triviálního popisu Mpembova jevu je patrné jeho využití pro získání časové úspory.

S ohledem na energetickou náročnost ohřevu nelze očekávat zahrnutím přehřevu úspory energetické. Praktickou využitelnost v praxi lze očekávat především v aplikacích, kde je ohřev již přímo vyžadován technologickým postupem výroby.

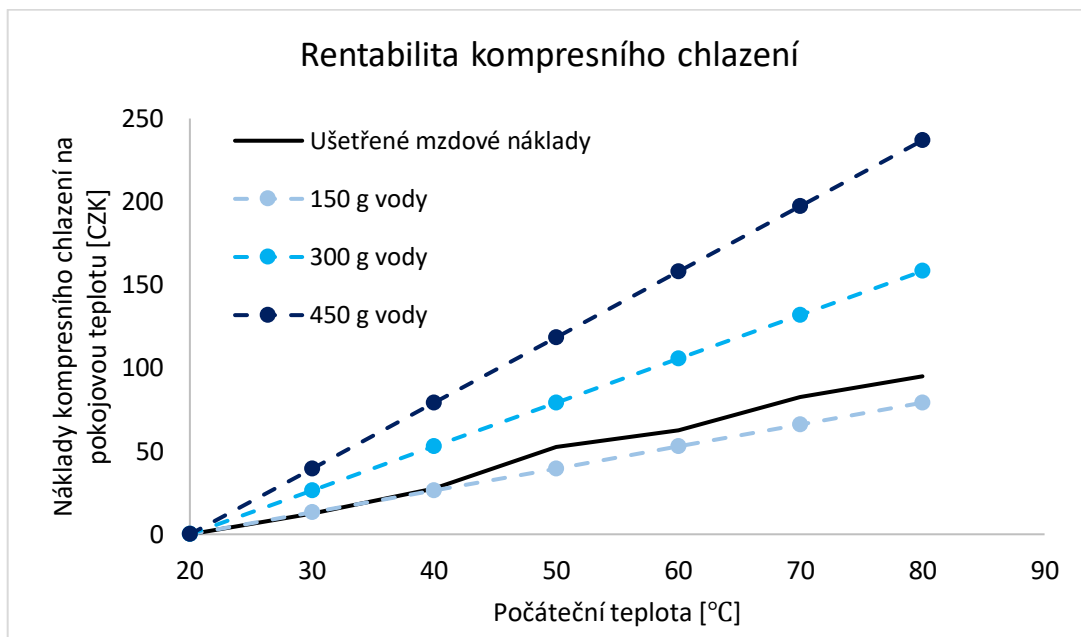
Typickým příkladem je výroba zmrzliny. Přehřev je v tomto případě obecně používán pro nutnost pasteurace mléka a zajištění homogenity výrobní směsi.

V současném zmrzlinářském průmyslu se uplatňuje vícestupňové ochlazování vylučující výskyt Mpembova jevu. V mezistupni dochází k přidání některých aditiv, která nejsou stabilní při vysokých teplotách. Vícestupňové ochlazování rovněž umožňuje použít v prvním kroku, kdy je teplota polotovaru vyšší než okolní teplota, úspornější bezkompresní chladič.

Samotný Mpemba se s jevem poprvé setkává při výrobě zmrzliny a dle jeho vyjádření [3] byl běžně využíván tanzanskými zmrzlináři. Oproti bezkompresnímu chlazení s využitím okolí jako chladiče tak muselo být veškeré teplo odvedeno prostřednictvím kompresorového chlazení s nutným vnějším přísunem energie.

Pro chladicí zařízení s chladicím faktorem 2,7 [18] a současné ceně elektrické energie v Tanzanii 2,3 CZK/kWh [19] uvádíme v grafu č. 19 náklady kompresního chlazení na pokojovou teplotu. V grafu je rovněž zobrazena křivka prezentující mzdové náklady na jednoho dělníka potravinářského průmyslu v Tanzanii [20] během celkového ušetřeného času oproti bezkompresnímu chlazení na pokojovou teplotu. V kalkulaci je uvažována existence Mpembova jevu dle původních experimentálních výsledků [3], které však již nebyly nikdy reprodukovány.

Ze srovnání vyplývá rentabilita pouze při chlazení výrobku do cca 150 g hmotnosti. Při potřebě ochlazení vyšší hmotnosti výrobku je finančně výhodnější čekání dělníka na ochlazení při pokojové teplotě než nákladné kompresorové chlazení. Ve výpočtu byla doba ochlazování uvažována jako nezávislá na hmotnosti. V praxi by se musely využívat rozdílné nádoby s poměry geometrických parametrů úměrnými hmotnosti chlazené vody.



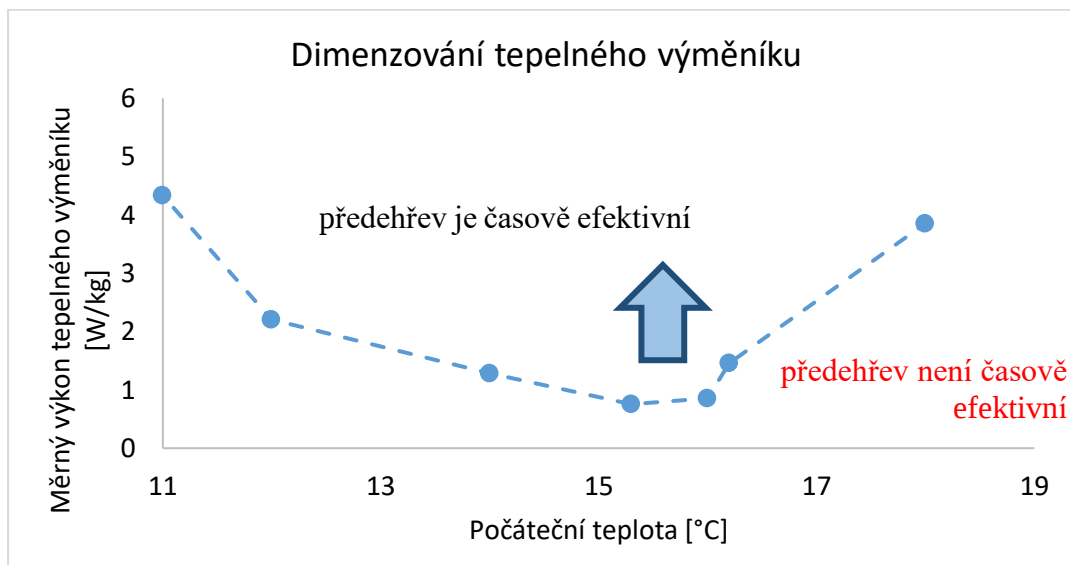
Graf č. 19 Finanční náklady kompresního chlazení vody na pokojovou teplotu v závislosti na původní teplotě. Pro srovnání jsou uváděny ušetřené mzdové náklady na zkrácené době chlazení.

Z těchto výsledků je patrné, že hlavním benefitem „Původního Mpembova jevu“ je úspora času. Z energetického hlediska by jeho využití spíše nevýhodné. Potenciální uplatnění by tedy našel při nutnosti minimalizace časů výroby, především v zakázkové výrobě, popřípadě domácím využití. V případě sériové, či obdobně dlouhodobé výroby, je ekonomicky nerentabilní.

6.2 „Studenovodní Mpembův jev“

Z experimentálních výsledků obsažených v této práci lze vyvodit, že mražení vody o původní teplotě lehce pod 20 °C je časově výrazně náročnější než mražení vody o této, popř. lehce vyšší teplotě. Především v chladnějších obdobích roku se může jednat o teplotu kapalin bezprostředně po transportu venkovním prostředím. Jedná se tedy z pohledu průmyslu o zajímavou oblast.

Případný přehřev není z časového hlediska zcela zanedbatelný. Aby přinesl požadovanou časovou úsporu, je nutné teplo přenést za menší časový úsek, než činí samotná časová úspora Mpembova jevu. V níže uvedeném grafu č. 20 se uvádí měrný výkon tepelného výměníku, při němž je doba ohřevu rovna uspořenému času v závislosti na počáteční teplotě vody (modrá křivka). Pro pozitivní časový efekt Mpembova jevu je nutné použít tepelné výměníky o vyšším měrném výkonu, v grafu č. 20 to odpovídá ploše nad modrou křivkou.



Graf č. 20 Závislost potřebného měrného výkonu výměníku na počáteční teplotě pro časově rovnocenné chlazení bez/s předehřevem. Pro oblast nad křivkou je předehřev v daném tepelném výměníku časově výhodnější, v oblasti pod křivkou je časově nevýhodný.

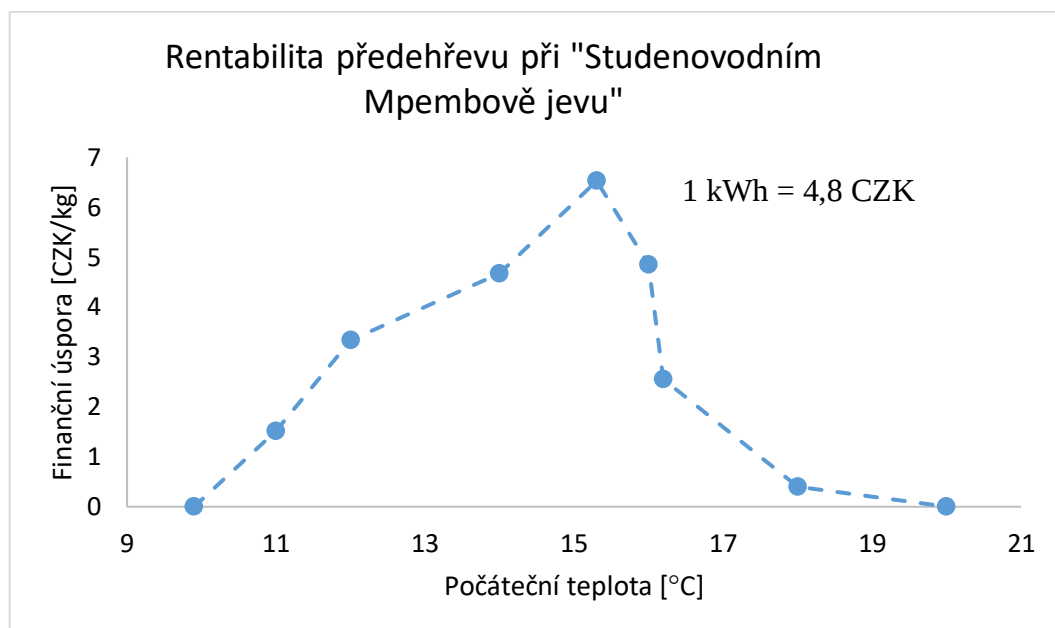
Hodnoty mezního měrného výkonu tepelného výměníku jsou poměrně nízké, při použití protiproudých tepelných výměníků by předehřev neměl být nákladný. Nabízí se využití odpadního tepla z jiných sektorů výroby.

Pro technické parametry používané lednice Gorenje NRK6202AW4 byla kalkulována ekonomická rentabilita předehřevu v oblasti „Studenovodního Mpembova jevu“, výsledky jsou zobrazeny v grafu č. 21. Ztrátový tepelný tok činí 60 W³. Byla uvažována hodnota chladicího faktoru 2,7 [18], účinnost ohřevu 0,9 a cena 1 kWh 4,8 CZK. V rámci výpočtu byl využit celý mrazicí výkon lednice 14 kg/den.

Ztrátový tepelný tok je uvažován pouze v době chlazení. V praxi model odpovídá situaci kontinuálního chlazení při sériové výrobě. V případě malokusové, popřípadě nárazové výroby, není využití Mpembova jevu ani v této teplotní oblasti ekonomicky rentabilní. Výpočtově významný parametr ztrátového tepelného toku je konstantní i mimo dobu samotného chlazení. Finanční náklady na vychlazení celého vnitřního prostoru lednice jsou oproti kontinuálnímu provozu neúměrně vysoké, vypnutí lednice mimo samotné chlazení produktu tedy rovněž není vhodné.

Využití „Studenovodního Mpembova jevu“ a předehřevu na pokojovou teplotu je výhodné z časového hlediska, finanční rentabilita přichází v úvahu pouze v případě masové sériové výroby.

³ Ztrátový tepelný tok byl určen na základě chladicí křivky vypnuté lednice zobrazené v grafu č. 9.



Graf č. 21 Finanční úspora aplikací přehřevu v závislosti na teplotě pro parametry použité lednice Gorenje. Model počítá s nulovým příkonem chladničky mimo samotné mrazení.

7 Závěr

V rámci práce byl popsán Mpembův jev a možné hypotézy objasňující jeho existenci. Prostřednictvím demonstrativního experimentu s roztokem CaCO_3 byl pozorován Mpembův jev způsobený závislostí teploty tání na koncentraci příměsi a teplotně podmíněnému vysrážení rozpuštěné látky.

Byl vytvořen stacionární termokinetický model přenosu tepla z nádoby s horkou vodou. Prostřednictvím převzatých závislostí fyzikálních vlastností vody a vzduchu byly vypočteny parametry popisující tepelný tok v závislosti na teplotě vody a vzduchu.

V experimentální části bylo popsáno hysterezní chování běžné chladničky, kdy byly podniknuty kroky pro maximální reprodukovatelnost experimentu. V samotném experimentu byl při teplotách nad $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ pozorován trend růstu doby mrznutí v závislosti na počáteční teplotě, což je v rozporu s Mpembovým jevem. Dle provedené rešerše hodnoty kvalitativně odpovídají měření řady autorů, např. BurrIDGE a spol. [4]. Obecně napříč autory nepanuje shoda v pozorovaném trendu této závislosti.

V rozmezí teplot ($10;18$) $^{\circ}\text{C}$ bylo pozorováno výrazné nemonotónní chování s lokálním maximem času tuhnutí při $16\text{ }^{\circ}\text{C}$. Doba tuhnutí při této počáteční teplotě je o 40 % delší než při teplotě pokojové. Toto chování je z termodynamického pohledu analogické s původní definicí Mpembova jevu. V rámci práce tedy došlo k jeho pozorování, ale v odlišné oblasti teplot než u předešlých autorů. Data z předchozích výzkumů nemají v této oblasti dostatek dat pro odpovídající porovnání. O tom, že mírně teplá voda zamrzá snadněji než studená, píše Francis Bacon v díle *Novum Organum* [15] ze 17. století.

Pro energetické náklady a cenu lidské pracovní síly není masivní aplikace „Původního Mpembova jevu“ při vyšší než pokojové teplotě rentabilní, ani při uvažování výsledků E. Mpemby [3]. Možné teoretické využití je pouze v případě velmi malých vzorků do 150 g, které jsou již z technologických důvodů předehrívány.

V práci přímo pozorovaný „Studenovodní Mpembův jev“ může zapříčinit nepřiměřené prodloužení doby mrznutí látek o teplotě mírně nižší, než je teplota pokojová. Předeřev na pokojovou teplotu, např. produktů bezprostředně po transportu v chladnějším období, přináší znaitelné časové úspory s nízkými náklady na předeřev. V případě masivní sériové výroby může být předeřev rentabilní i z energetického hlediska.

Seznam použitých zdrojů

- [1] PERUTZ, M. F. A Description of the Iceberg Aircraft Carrier and the Bearing of the Mechanical Properties of Frozen Wood Pulp Upon Some Problems of Glacier Flow. *Journal of Glaciology* [online]. 1948 [cit. 2021-5-14]. ISSN 1727-5652. Dostupné z: doi.org/10.3189/S0022143000007796
- [2] U.S. CENSUS BUREAU Ice manufacturing 2002 [online]. 2002 Wayback Machine Economic Census. [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: web.archive.org/web/20170722052238/https://www.census.gov/prod/ec02/ec0231i312113.pdf
- [3] MPEMBA, E. a D.G. OSBORNE. Cool? *Physics Education* [online]. 1969, 172-175 [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/4/3/312/pdf
- [4] BURRIDGE, H., Linden, P. Questioning the Mpemba effect: hot water does not cool more quickly than cold. (2016). [cit. 2021-5-14]. doi.org/10.1038/srep37665
- [5] BÖHM, Pavel. Mpembův jev - skutečnost nebo fikce? (Vliv historie na mrznutí vody). 2006. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky. Vedoucí práce Obdržálek, Jan. [cit. 2021-5-14].
- [6] ENGINEERING TOOLBOX, (2003). Thermal Conductivity of some selected Materials and Gases. [online] Dostupné z: https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html [cit. 2021-5-14].
- [7] ROMILDO WHIRLPOOL EUROPE S.R.L. No-frost refrigerator. European Patent Office. EP1825202A1. Uděleno 2005. [cit. 2021-5-14].
- [8] CENGEL, Yanus a Michael BOLES. *Thermodynamics: An Engineering Approach*. 8th Edition. McGraw-Hill Education, 2014. ISBN 978-0073398174. [cit. 2021-5-14].
- [9] TALLING, J.F. a I.B. TALLING. The Chemical Composition of African Lake Waters. *Freshwater Biological Association* [online]. 1965 [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: [doi:doi.org/10.1002/iroh.19650500307](https://doi.org/10.1002/iroh.19650500307)
- [10] ENGINEERING TOOLBOX, (2003). Air - Thermophysical Properties. [online] Dostupné z: www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d_156.html [cit. 2021-5-14].
- [11] PAVELEK, M. a kolektiv. *Termomechanika*. CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6. [cit. 2021-5-14]
- [12] ENGINEERING TOOLBOX, (2003). Water - Thermophysical Properties. [online] Dostupné z: www.engineeringtoolbox.com/water-thermal-properties-d_162.html [cit. 2021-5-14]
- [13] ENGINEERING TOOLBOX, (2003). Emissivity Coefficient Materials. [online] Dostupné z: www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html [cit. 2021-5-14].
- [14] ARISTOTELES. *Meteorologie* [online]. Kniha I., část 12 [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: classics.mit.edu/Aristotle/meteorology.1.i.html
- [15] JENG, Monwhea. Can hot water freeze faster than cold water? [online]. Department of Physics, University of California, 1998 [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: https://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/hot_water.html?showall=1#Historical

- [16] BACON, Francis. Novum Organum [online]. kapitola L., část 3. [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: www.thelatinlibrary.com/bacon/bacon.liber2.shtml
- [17] ENGINEERING TOOLBOX, (2003). Specific Heat of some common Substances. [online] Dostupné z: https://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-d_391.html [cit. 2021-5-14].
- [18] TAIB, M. Y., A. A. AZIZ a A. B. S. ALIAS. *Performance analysis of a domestic refrigerator* [online]. Universiti Malaysia Pahang [cit. 2021-5-17]. ISBN 978-967-5080-9501. Dostupné z: <https://core.ac.uk/download/pdf/159178062.pdf>
- [19] GLOBAL PETROL PRICES. Tanzania: Electricity prices [online]. [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: https://www.globalpetrolprices.com/Tanzania/electricity_prices/
- [20] PAYLAB: TANZANIA. Agriculture, Food Industry [online]. [cit. 2021-5-14]. Dostupné z: <https://www.paylab.com/tz/salaryinfo/agriculture-food-industry>

Seznam použitých veličin a zkratk

Symbol	Veličina	Jednotka
λ_{led}	tepelná vodivost ledu	W/m · K
λ_{Al}	tepelná vodivost hliníku	W/m · K
$\lambda_{porc.}$	tepelná vodivost porcelánu	W/m · K
λ_p	tepelná vodivost polystyrenu	W/m · K
δ, δ_1	tloušťka vrstvy materiálu, tloušťka dna nádoby	m
$\dot{Q}_H$	tepelný tok prostřednictvím hladiny	W
$\dot{Q}_{H,R}$	tepelný tok zářením hladinou	W
$\dot{Q}_{H,P}$	tepelný tok prostupem hladinou	W
$\dot{Q}_S$	tepelný tok stěnou nádoby	W
$\dot{Q}_{S,R}$	tepelný tok zářením stěnou nádoby	W
$\dot{Q}_{S,P}$	tepelný tok prostupem stěnou nádoby	W
$\dot{Q}_D$	tepelný tok dnem nádoby	W
$R_{X1}, R_{X2}, R_{X3}, R_{X4},$	variace tepelných odporů dnem nádoby	K/W
k	součinitel prostupu tepla	W/m ² · K
T	střední teplota (hodnota na teploměru)	K
ΔT	teplotní rozdíl	K
T_{SS}	teplota povrchu stěny nádoby	K
T_∞	teplota vnitřního povrchu mrazicího boxu	K
σ	Stefan-Boltzmanova konstanta	W/m ² · K ⁻⁴
S_0	obecná plocha povrchu	m ²
S_H	plocha hladiny	m ²
S_M	vnitřní plocha mrazicího boxu	m ²
α_{H1}	součinitel přestupu tepla voda-hladina	W/m ² · K
α_{H2}	součinitel přestupu tepla hladina-vzduch	W/m ² · K
α_{S1}	součinitel přestupu tepla voda-stěna nádoby	W/m ² · K
α_{S2}	součinitel přestupu tepla stěna nádoby-vzduch	W/m ² · K
γ	teplotní roztažnost	K ⁻¹
ν	kinematická viskozita	m ² · s ⁻²
L	charakteristický rozměr	m
g	tíhové zrychlení (9,81 m · s ⁻²)	m · s ⁻²
A, B, C	empirické konstanty [8]	–
Pr	Prandtlovo číslo	–
R_{RS}	součinitel vzájemné emisivity stěna nádoby-mrazák	–
R_{RH}	součinitel vzájemné emisivity voda-mrazák	–
ε_M	emisivita povrchu mrazicího boxu	–
ε	emisivita vody	–
H	výška hladiny	m
r_1, r_2	vnitřní a vnější poloměr nádoby	m
ξ	parametr kvartické rovnice	W/m · K
χ	parametr kvartické rovnice	W/m · K
C	tepelná kapacita	kJ · K ⁻¹
ϑ	rozptyl posl. místa kap. fáze vody od středu nádoby	mm
t	čas	min.
m_0	počáteční hmotnost	g

Seznam grafů a obrázků

Graf č. 1 Ochlazovací křivky horkého a chladného roztoku $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$. Vlivem přechodné tvrdosti vody zamrzá dříve ohřátý roztok, což naplňuje podstatu Mpembova jevu.	Str. 12
Graf č. 2 Součinitel přestupu tepla na rozhraní vody a hladiny.	Str. 16
Graf č. 3 Závislost velikosti tepelných toků prostupem tepla a zářením prostřednictvím volné hladiny na teplotě.	Str. 17
Graf č. 4 Závislost součinitele přestupu tepla z vody na vnitřní stěnu nádoby na teplotě.	Str. 19
Graf č. 5 Závislost velikosti tepelných toků prostupem tepla a zářením prostřednictvím stěny nádoby na teplotě.	Str. 20
Graf č. 6 Velikost tepelného toku hladinou, stěnou a jejich součtu na teplotě kapaliny.	Str. 21
Graf č. 7 Derivace tepelných toků podle teploty. Byla využita metoda zpětné numerické difference, obě x-ové osy jsou ve stejném měřítku.	Str. 22
Graf č. 8 Převzatý graf [4] shrnující předchozí experimentální výsledky včetně prvotního Mpembova experimentu. Srovnání je pouze kvalitativního charakteru, nejprůkaznějších výsledku dosáhnul Mpemba & Osborne. Autoři, Burridge & Linden [4], jev nepozorovali.	Str. 24
Graf č. 9 Vývoj teploty v mrazicím boxu pro zapnuté aktivní chlazení a vypnuté aktivní chlazení.	Str. 25
Graf č. 10 Ochlazovací křivka s izotermickou krystalizací.	Str. 28
Graf č. 11 Vývoj teploty v průřezu ochlazovaného objemu.	Str. 29
Graf č. 12 Vývoj teploty v průřezu ochlazovaného objemu. Zoom oblasti při konci krystalizace.	Str. 29
Graf č. 13 Statistické vyhodnocení polohy posledního bodu výskytu kapalně fáze.	Str. 30
Graf č. 14 Hranice ledové vrstvy v čase pro různé počáteční teploty vody.	Str. 31
Graf č. 15 Vývoj teploty v čase, rozlišení stavu ukončení krystalizace je doprovázeno ukončení izotermické charakteristiky děje.	Str. 33
Graf č. 16 Vývoj teploty v čase, rozlišení stavu ukončení krystalizace není zcela přesné.	Str. 34
Graf č. 17 Závislost času mrznutí na počáteční teplotě.	Str. 34
Graf č. 18 Přehled časového výskytu jednotlivých fází během krystalizace. Jednotlivé horizontální linie reprezentují ochlazovací křivky, kdy v červené oblasti se nachází kapalná voda, ve světle modré dochází ke krystalizaci, která je ukončena na počátku tmavě modré oblasti.	Str. 35
Graf č. 19 Finanční náklady kompresního chlazení vody na pokojovou teplotu v závislosti na původní teplotě. Pro srovnání jsou uváděny ušetřené mzdové náklady na zkrácené době chlazení.	Str. 37
Graf č. 20 Závislost potřebného měrného výkonu výměníku na počáteční teplotě pro časově rovnocenné chlazení bez/s přehřevem. Pro oblast nad křivkou je přehřev v daném tepelném výměníku časově výhodnější, v oblasti pod křivkou je časově nevýhodný.	Str. 38

Graf č. 21 Finanční úspora aplikací přehřevu v závislosti na teplotě pro parametry použité lednice Gorenje. Model počítá s nulovým příkonem chladničky mimo samotné mrazení.	Str. 39
Obr č. 1 Přenos tepla z vody do okolí je realizován paralelními tepelnými toky hladinou, stěnou a dnem nádoby.	Str. 14
Obr č. 2 Přenos tepla dnem nádoby může být značně variabilní.	Str. 15
Obr č. 3 Přenos tepla hladinou je realizován prostupem tepla a zářením.	Str. 15
Obr. č. 4 Tepelný tok stěnou nádoby je realizován prostupem tepla a zářením.	Str. 18
Obr. č. 5 Znárodnění experimentálního sestavení v mrazicím boxu chladničky.	Str. 26
Obr. č. 6 Porcelánová miska používaná pro experimenty.	Str. 26
Obr. č. 7 Průřez používané nádoby.	Str. 26
Obr. č. 8 Datalogger AHLBORN ALMENO 2590.	Str. 27
Obr. č. 9 Používané odporové teploměry Pt100-1 spolu s dataloggerem AHLBORN ALMENO 2590.	Str. 27
Obr. č. 10 Horní pohled na polovinu zčásti zkrystalizovaného experimentálního vzorku. Ve středu je patrná dutina vyplněna doposud kapalnou vodou. Fotografie je pro maximální kontrast upravena.	Str. 30
Obr. č. 11 Průřez zčásti zkrystalizovaného experimentálního vzorku. Ve středu je patrná dutina vyplněna doposud kapalnou vodou. Fotografie je pro maximální kontrast upravena.	Str. 32
Obr. č. 12 Průřez zčásti zkrystalizovaného experimentálního vzorku. Ve středu je patrná dutina vyplněna doposud kapalnou vodou. Fotografie je pro maximální kontrast upravena.	Str. 32

Seznam tabulek

Tab. 1 Vybrané fyzikální vlastnosti materiálů používaných na konstrukci nádob. Zobrazené fyzikální parametry byly převzaty ze zdrojů [10] a [17].

.....Str. 27