



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**MODELOVÁNÍ PERFUZNÍCH KŘIVEK V DYNAMICKÉ
MAGNETICKÉ REZONANCI**

MODELLING OF PERFUSION CURVES IN DYNAMIC MAGNETIC RESONANCE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Erik Ochodnický

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Erik Ochodnický**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Modelování perfuzních křivek v dynamické magnetické rezonanci

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Magnetická rezonance (MR) je populární metodou diagnostiky v lékařství. Tento přístup umožňuje také záznam dynamických vlastností tkání. Ten se pořizuje tak, že pacientovi je do krve vstříknuta kontrastní látka, průběh jejíž koncentrace je pak zaznamenáván magnetickou rezonancí. Výsledný průběh pro jeden pixel/voxel nazýváme perfuzní křivkou. Perfuzní křivky je však z MR měření nutno nejprve rekonstruovat.

Ukazuje se, že pro přesný odhad perfuzních parametrů tkání je nutné vysoké časové rozlišení a dobrý model perfuzních křivek. Několik modelů a příslušných algoritmů bude v rámci DP vyzkoušeno a porovnáno.

Cíle diplomové práce:

Student nejprve nastuduje fyzikální základy MR.

Seznámí se s matematickým modelem pořízení MR záznamu a se způsoby jak výsledky měření numericky rekonstruovat.

Nastuduje a kvantitativně a kvalitativně porovná několik modelů perfuzních křivek, jednak na (dodaných) simulovaných datech, jednak na reálných měřeních (poskytne ÚPT AVČR Brno).

Seznam doporučené literatury:

RAJMIC, P., DAŇKOVÁ, M. Úvod do řídkých reprezentací signálů a komprimovaného snímání. Skriptum, Vysoké učení technické v Brně, 2014. ISBN 978-80-214-5169-8.

BUSHONG, S. C., CLARKE, G. Magnetic resonance imaging, physical and biological principles. Elsevier, 2015.

ABSTRAKT

Perfúzne zobrazovanie pomocou dynamickej MRI má veľmi široké uplatnenie v lekárskej praxi, pretože poskytuje informácie o perfúznej charakteristike sledovaného tkaniva. Pri využití klasickej rekonštrukcie platí, že z dôvodu časovej náročnosti merania nie sme schopní zaznamenať dostatok vzoriek pre dosiahnutie potrebného časového a priestorového rozlíšenia. Je preto nutné využitie tzv. komprimovaného snímania, ktoré umožní rekonštrukciu z menšieho počtu vzoriek pomocou optimalizačného modelu. V práci sú overené viaceré modely rekonštrukcie sekvencie obrazov pre reálne i simulované dáta a tiež sú porovnané viaceré algoritmy na ich riešenie. Medzi použité modely patria dva L+S modely s odlišnou regularizáciou zložky S, riešené pomocou Forward-Backward a Chambolle-Pock algoritmu. Kvalita rekonštrukcie jednotlivých modelov bola porovnávaná najmä podľa získaných perfúzných kriviek. V poslednej časti je preskúmaná možnosť modifikácie SASS modelu pre zvýšenie kvality rekonštrukcie a odolnosti voči podvzorkovaniu, za účelom lepšej adaptácie modelu pre dynamické dáta.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ

magnetická rezonancia, komprimované snímanie, L+S model, perfúzne krivky, Chambolle-Pock algoritmus, SASS

ABSTRACT

Perfusion MRI can provide information about perfusion characteristics of the observed tissue, which makes it a widely applicable medical procedure. Measuring process of MRI is very time-consuming, and therefore, using classical reconstruction methods, we are often not able to obtain enough samples to accomplish the needed time and space resolution for perfusion analysis. That is why it is necessary to use compressed sensing, which allows reconstruction from under-sampled data by solving an optimization model. In this work, several models for reconstruction of an image sequence are verified on real and artificial data, along with multiple algorithms capable of solving these models. Among the optimization models used in this work are two L+S models with different regularization of the S component that are solved by Forward-Backward and Chambolle-Pock algorithm. The quality of reconstruction for various models was compared especially by their perfusion curves. In the last section, we explore possible modifications of the SASS model in order to increase quality of reconstruction and resistance to under sampling for the purpose of better adaptation for dynamic data.

KEYWORDS

magnetic resonance, compressed sensing, L+S model, perfusion curves, Chambolle-Pock algorithm, SASS

OCHODNICKÝ, Erik. *Modelování perfúzních křivek v dynamické magnetické rezonanci..* Brno, 2020, 73 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedúci práce: doc. Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.

VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som svoju diplomovú prácu na tému „Modelování perfuzních křivek v dynamické magnetické rezonanci.“ vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce, využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej diplomovej práce ďalej vyhlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto diplomovej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona Českej republiky č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákoníka Českej republiky č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora

POĎAKOVANIE

Chcel by som poďakovať vedúcemu diplomovej práce pánovi doc.,Mgr. Pavlu Rajmicovi, Ph.D. za odborné vedenie, mnohé konzultácie, výborný prístup a ochotu prebrať každý dotaz.

Brno

.....

podpis autora

Obsah

Úvod	8
1 Zobrazovanie pomocou magnetickej rezonancie (MRI)	9
1.1 Základný princíp MR	9
1.2 Sklápanie vektora $\mathbf{M}$ do roviny xy	10
1.3 Relaxácia a FID	11
1.3.1 T1-relaxácia	12
1.3.2 T2/T2* relaxácia	13
1.4 Lokalizácia signálu z MRI	14
1.5 Metódy snímania	15
1.5.1 Saturation recovery	16
1.5.2 Inversion recovery	16
1.5.3 Spin-echo	17
1.6 Dynamická MRI	17
1.6.1 Modelovanie perfúzneho zobrazovania	18
1.6.2 Časové vs. priestorové rozlíšenie	19
2 Matematické spracovanie signálu	20
2.1 Matematický popis MRI	20
2.2 Trajektórie snímania	21
2.3 Matematická teória k spracovaniu signálu	22
2.3.1 Spojitá Fourierova transformácia	22
2.3.2 Diskrétna Fourierova transformácia	23
2.3.3 FFT (Fast Fourier Transform)	24
2.3.4 NUFFT (Non-Uniform Fast Fourier Transformation)	25
2.3.5 Normy	26
3 Zvýšenie rozlíšenia MRI	30
3.1 Klasické vzorkovanie	30
3.2 Vplyv trajektórií na rekonštrukciu	30
3.3 Paralelné zobrazovanie	32
3.4 Komprimované snímání (CS) v MRI	33
3.4.1 Riedke riešenie systému lineárnych rovníc	34
3.5 Apriorné informácie o signále pre CS	35
3.5.1 Riedkosť v reprezentácii	35
3.5.2 Nízka maticová hodnosť	36
3.5.3 Totálna variácia	36

3.5.4	Zložené modely	36
4	Optimalizácia	37
4.1	Proximálne optimalizačné metódy	37
4.1.1	Vlastnosti proximálneho operátora	38
4.1.2	Proximálny operátor pre l_1 normu	38
4.1.3	Proximálny operátor indikátorovej funkcie množiny M	39
4.1.4	Proximálny operátor TV	40
4.1.5	Proximálna gradientná metóda (Forward-Backward splitting)	41
4.1.6	Chambolle-Pock (CP) algoritmus	41
5	Optimalizačné modely pre CS	43
5.1	L+S model	43
5.1.1	L+S model pomocou FB algoritmu	44
5.1.2	L+S model pomocou CP algoritmu	45
5.1.3	Overenie na simulovaných dátach	47
5.1.4	Overenie na reálnych dátach	50
5.1.5	Výsledky	51
5.1.6	L+S model s obmedzenými diferenciami	54
6	2D- Sparsity-assisted signal smoothing	57
6.1	Upravený model SASS2D	58
6.1.1	Upravený model SASS2D-1	59
6.1.2	Upravený model SASS2D-2	60
6.1.3	Overenie na statických reálnych dátach	61
7	Záver	65
	Literatúra	66
	Zoznam symbolov, veličín a skratiek	70
	Zoznam príloh	71
A	Odvedenie proximálnych operátorov v Chambolle Pock algoritme	72
B	Obsah prílohy	73

Úvod

Výšetrenie pomocou magnetickej rezonancie (MRI) má v lekárskej diagnostike významné zastúpenie, pretože poskytuje snímky mäkkého tkaniva s relatívne vysokým rozlíšením, pre prakticky ľubovoľný rez tela. MRI využíva interakciu magnetického poľa atómov (hlavne vodíka) v tele so silným vonkajším magnetickým poľom, a umožňuje tak nasnímať určitú charakteristiku tkaniva vo zvolenom reze bez použitia škodlivého žiarenia. Populárnou technikou sa stala dynamická kontrastná MRI (DCE-MRI), t.j. technika ktorá skúma dynamiku prechodu kontrastnej látky sledovaným rezom pacienta. Táto technika poskytuje hlbšie informácie o sledovanom tkanive a vďaka tomu má široké uplatnenie napr. v diagnostike nádorov a kardiovaskulárnych chorôb.

Pre správnu diagnostiku je ale potrebné vysoké časové i priestorové rozlíšenie snímania, čo predstavuje výraznú komplikáciu pri použití bežného snímania pod Nyquistovým kritériom. Preto je často nutná rekonštrukcia z podvzorkovaného signálu, ktorá je možná iba v prípade, ak máme k dispozícii apriornú informáciu o signáli (tzv. komprimované snímanie). Pomocou týchto informácií sme schopní zostaviť optimalizačný model, ktorý nám umožní zlepšiť časové rozlíšenie pri zachovaní priestorového alebo naopak. Hlavnou náplňou tejto práce je návrh a overenie modelov umožňujúcich komprimované snímanie v dynamickej MRI, určenie algoritmu na ich riešenie a následná implementácia v prostredí MATLAB. Dôraz pri hodnotení modelov budeme klásť na priebeh perfúzných kriviek¹, ktoré nám umožňujú perfúznú analýzu tkaniva.

Práca je vedená nasledovne. Na úvod je v kapitole 1 predstavený princíp zobrazovania pomocou MR, a taktiež spôsob vzniku signálu ktorý budeme ďalej spracovávať. Následne je uvedená matematická teória (kapitola 2) k spracovaniu signálu z MRI, s dôrazom na Fourierovu transformáciu a teóriu spojitých lineárnych operátorov. V kapitole 3 je bližšie rozobrané komprimované snímanie v MRI a iné metódy na zvýšenie rozlíšenia rekonštrukcie bez zmeny snímacej techniky. Kapitola 4 je venovaná optimalizácií, hlavne proximálnym optimalizačným metódam a konvexnej optimalizácii. Obsahuje tiež odvodenia tzv. proximálnych operátorov pre funkcie najčastejšie sa vyskytujúce v proximálnych algoritmoch, vhodných na riešenie modelov pre MRI. V kapitole 5 sú uvedené optimalizačné modely pre komprimované snímanie, odvodenia algoritmov na ich riešenie a porovnanie výsledkov pre jednotlivé modely, na simulovaných a reálnych dátach. Posledná kapitola 6 pojednáva o modifikácii modelu SASS pre zvýšenie kvality rekonštrukcie, so zámerom použitia na rekonštrukciu dynamických dát z MRI.

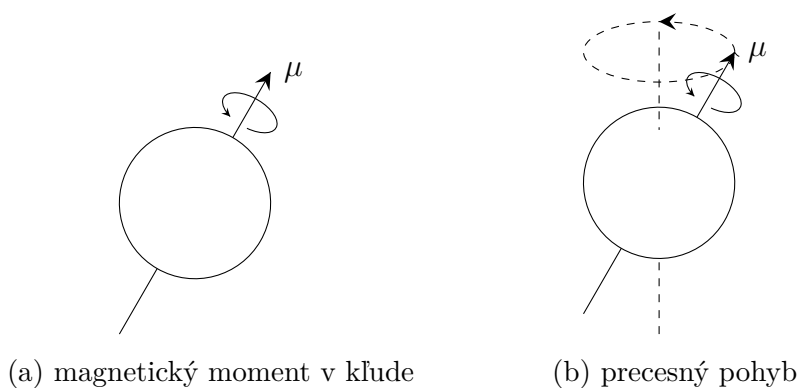
¹t.j. kriviek vyjadrujúcich priebeh kontrastnej látky pre jeden pixel

1 Zobrazovanie pomocou magnetickej rezonancie (MRI)

Zobrazovanie magneticou rezonanciou (MRI) je pokročilá metóda, so širokým využitím v lekárstve na zobrazovanie vnútorných orgánov tela. Je to metóda umožňujúca zobrazenie charakteristiky tkaniva v skoro ľubovoľnom reze tela, ktorá navyše nevyužíva ionizujúce žiarenie, ako napr. CT alebo röntgen a tým sa stáva univerzálnejšou zobrazovacou technikou. MRI využíva fyzikálny jav tzv. *nukleárnu magneticкую rezonanciu (NMR)*, objavený okolo roku 1940 (Isidor Rabi, Felix Bloch) [12], ktorý objasňuje správanie atómu s magnetickým nábojom vo vonkajšom magnetickom poli. MR umožňuje, okrem zobrazenia rezov tela, tiež napr. rozbor molekulárneho zloženia tkaniva tzv. *MR spektroskopiu*.

1.1 Základný princíp MR

Magnetická rezonancia využíva interakciu magneticky nabitých atómov a vonkajšieho magnetického poľa B_0 . V jadre atómu, každý protón a neutrón rotuje okolo svojej osi a vytvára tak magnetický moment. Obecne majú častice tendenciu svoje magnetické momenty navonok vynulovať, ale ak je počet neutrónov a protónov nepárny, tak je výsledný moment μ nenulový [15]. Preto sú pre sledovanie vhodné atómy s nepárnym počtom protónov, najmä atóm vodíka ${}^1\text{H}$, obsahujúci jediný protón, ktorý generuje najsilnejší magnetický moment. Jeho vysoké zastúpenie v ľudskom tele dovoľuje použitie MRI na zobrazovanie tkaniva.



Obr. 1.1: Magnetický moment dipólu

Obecne sú vektory magnetického momentu atómov rozmiestnené náhodne a teda vektor celkovej magnetizácie telesa je nulový. Ale ak pôsobí silné vonkajšie magnetické pole B_0 , vektory magnetizácie μ sa zrovnajú rovnobežne so smerom siločiar

externého poľa B_0 a navyše začnú vykonávať *precesný* pohyb. Pre každý atóm môže nastať prípad, že sa protóny orientujú v smere siločiar (paralelne), alebo proti smeru (antiparalelne). Platí ale, že výsledný vektor tkanivovej magnetizácie $\mathbf{M}$ bude orientovaný v smere B_0 . Okrem rotácie nastáva tzv. precesný pohyb, ktorý sa dá predstaviť ako pohyb po plášti pomyselného kužela (obr. 1.1).

Frekvencia tohto pohybu (tzv. *Larmorova*), lineárne závisí na sile magnetického poľa a type atómového jadra. Dá sa vyjadriť rovnicou:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \gamma B_0 \quad (1.1)$$

kde γ je *gyromagnetický pomer* jednoznačný pre každý atóm. Napríklad pre vodík je $\gamma/2\pi = 42,58$ MHz/T [12]. Teda všetky atómy vodíka v homogénnom poli B_0 kmitajú na rovnakej frekvencii, určenej pomocou rovnice (1.1). Tento fakt nám pomôže pri priestorovom určovaní signálu a formovaní obrazu.

Máme teda vektor $\mathbf{M}$, ktorý predstavuje súčet vektorov magnetizácie jednotlivých atómov, konajúcich precesný pohyb s frekvenciou, danou silou B_0 , celého skúmaného objektu. Tento vektor má v klude smer totožný s poľom B_0 ale jeho veľkosť je v porovnaní zanedbateľná, a preto aby sme mohli daný moment merať, je nutné ho sklopiť do roviny xy , v ktorej sú umiestnené prijímacie cievky.

V literatúre je často uvádzaný tzv. **rotujúci súradný systém** t.j. systém, v ktorom je os z totožná s pôvodnou osou, a rovina xy rotuje okolo tejto osi Larmorovou frekvenciou. V tomto systéme sa momenty jednotlivých spinov na Larmorovej frekvencii javia ako stacionárne, preto je tento systém vhodný na zobrazenie sklápania vektora magnetizácie.

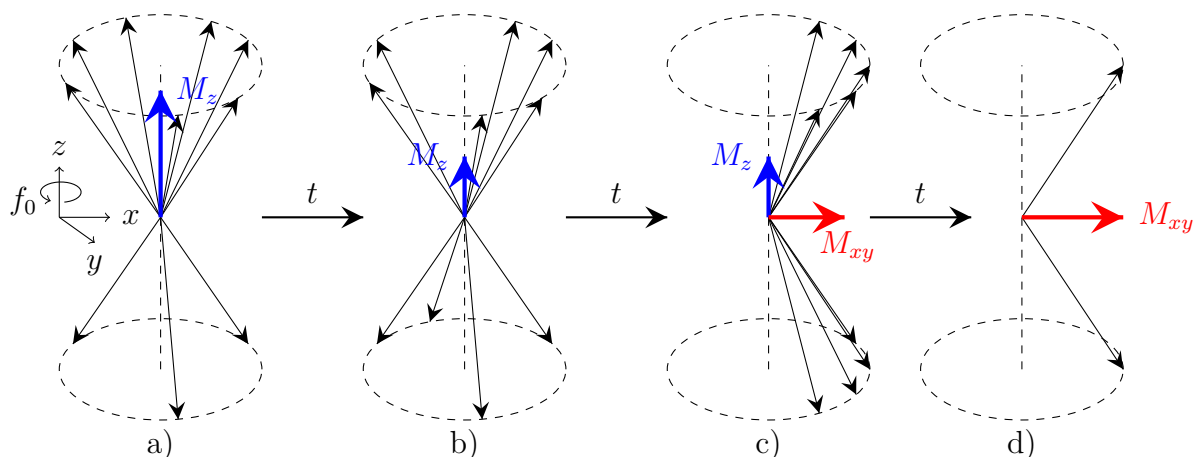
1.2 Sklápanie vektora $\mathbf{M}$ do roviny xy

Platí, že ak na spiny rotujúce na Larmorovej frekvencii aplikujeme rádio-frekvenčný (RF) pulz B_1 rovnakej frekvencie, časť energie sa absorbuje a spôsobí dve hlavné zmeny, ktoré sa prejavujú ako vychýlenie magnetického momentu spinov, od smeru magnetického poľa B_0 :

- Po aplikácii RF pulzu sa viac protónov orientuje antiparalelne, teda opačne oproti hlavnému magnetickému poľu, čo vyvolá zmenšenie magnetického momentu M_z .
- Navyše sa fázy precesie spinov zjednotia, teda vektory ktoré boli doposiaľ orientované náhodne, začnú splývať. Tým vznikne priečna zložka magnetizácie $\mathbf{M}_{xy}$. Princíp akým vzniká ilustruje (obr. 2.1).

Podľa dĺžky a frekvencie pulzu, sme schopný sklopiť vektor o ľubovoľný uhol $0-180^\circ$. Okrem istých rýchlych zobrazovacích techník, využívajúcich jediný pulz, sa v praxi

využívajú najmä sekvencie pulzov, pretože signál iba z jedného pulzu nebýva dostatočný na rekonštrukciu celého obrazu. Najpoužívanéjšie sklápacie uhly sú 90° z dôvodu najsilnejšej odozvy, 180° pulz v pulzných sekvenciách, alebo menšie sklápacie uhly $< 90^\circ$, pre ktoré pokles amplitúdy signálu umožňuje kratšie časy snímania [5].



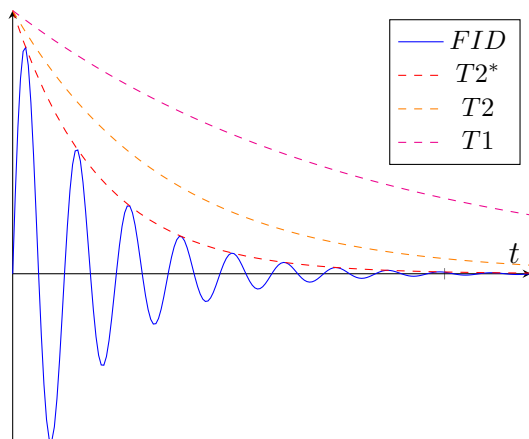
Obr. 1.2: Vznik priečnej zložky magnetizácie, po aplikácii RF pulzu B_0 , na spiny v rotujúcom súradnom systéme. Medzi a) a b): je vidno preskočenie spinu do anti-parallelnej orientácie, b) až d) : prejavuje sa zjednotenie fázy. d) prípad 90° pulzu, kedy sa celý vektor magnetizácie preklopí do roviny xy .

1.3 Relaxácia a FID

Po ukončení excitácie RF pulzom, jednotlivé spiny stále konajú precesný pohyb na Larmorovej frekvencii, ale majú tendenciu sa vrátiť do rovnovážneho stavu, teda rovnobežne s hlavným magnetickým poľom. Návrat vektora magnetizácie je podľa Faradayovho zákona sprevádzaný indukciou napätia v prijímacích cievkach, umiestnených v sklopnej rovine. Tento nameraný signál nazývaný *free induction decay* (FID) vyjadruje priebeh vektora magnetizácie $\mathbf{M}$ v čase, a má harmonický priebeh s exponenciálne klesajúcou amplitúdou. (obr. 1.3)

V praxi je súčasne excitované veľké množstvo atómov, a preto celkový signál nameraný cievkou tvorí zhuk signálov od jednotlivých excitovaných spinov, na obecné rozdielných frekvenciách. Namerané FID obsahuje informácie o tkanivových charakteristikách snímaného objektu, a po spracovaní umožňuje rekonštrukciu hľadaného obrazu.

Relaxácia prebieha na viacerých úrovniach; vektor magnetizácie sa vracia do polohy rovnobežnej s osou z , spiny strácajú spoločnú fázu, a niektoré menia svoju

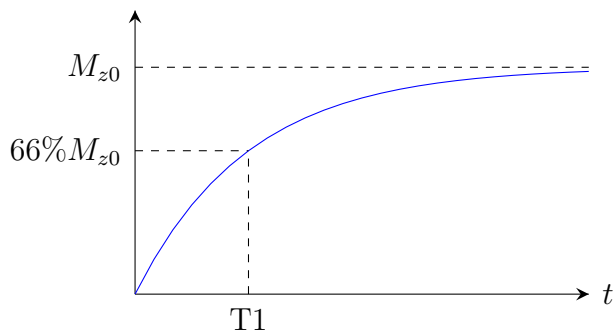


Obr. 1.3: Ukážka signálu FID a relaxačných parametrov

orientáciu z antiparalelnej na paralelnú. Bežne sa relaxácia rozdeľuje na T_1 , T_2 a T_2^* .

1.3.1 T_1 -relaxácia

T_1 relaxácia vyjadruje návrat zložky vektora magnetizácie M_z na jeho pôvodnú veľkosť (nazývaná aj *spin-mriežková* relaxácia). Jedná sa o exponenciálny nárast, s konštantou T_1 , vyjadrujúcou čas, za ktorý sa M_z vráti na 63 % svojej pôvodnej veľkosti. Parameter T_1 nie je možné merať priamo, pretože návrat M_z prebieha pozdĺž osi z , ale dá sa určiť na základe rôznych pulzných sekvencií.



Obr. 1.4: Priebeh T_1 relaxácie

Matematicky je M_z modelovaná pomocou diferenciálnej rovnice

$$\frac{dM_z(t)}{dt} = \frac{1}{T_1} [M_o - M_z(t)]$$

s riešením $M_z(t) = M_o (1 - e^{-t/T_1})$ [15].

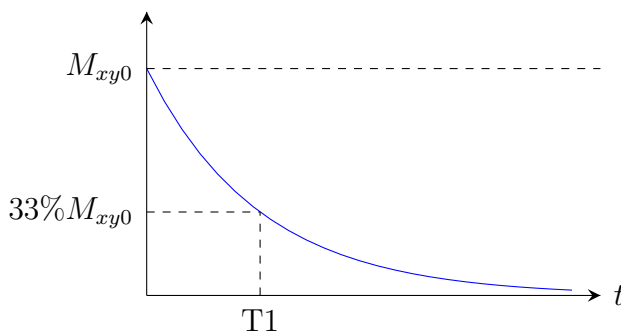
1.3.2 T2/T2* relaxácia

T2/T2* relaxácia vyjadruje pokles veľkosti vektora magnetizácie $\mathbf{M}_{xy}$, vplyvom straty fázovej jednoty. Ak sa vektory rozfázujú, ich zložky v rovine xy v rotujúcom súradnom systéme sa začnú rušiť, a tým nastane zmenšenie $\mathbf{M}_{xy}$.

Okrem hlavného silného magnetického poľa B_0 , je v zobrazovanom okolí prítomné i magnetické pole jednotlivých atómov tkaniva, ktoré po sčítaní vytvorí miniatúrne nehomogenity. Tie sú z podstaty MRI neodstrániteľné, a určitým spôsobom ovplyvňujú zachytený signál FID. Táto nehomogenita potom spôsobuje, že sa jednotlivé frekvencie spinov začnú líšiť, a dôjde k rozfázovaniu vektorov μ , a teda k poklesu $M_{xy} = |\mathbf{M}_{xy}|$.

Jedná sa teda o exponenciálny pokles M_{xy} s konštantou T2, ako čas, za ktorý klesne M_{xy} na 33 % svojej pôvodnej veľkosti. T2 by bolo možné v dokonale homogénnom poli B_0 určiť priamo z nameraného signálu, avšak, ak uvažíme i prípadnú nehomogenitu vonkajšieho magnetického poľa B_0 , rozfázovanie a teda aj pokles M_{xy} prebieha ešte rýchlejšie. Relaxáciu $\mathbf{M}_{xy}$, s pripustením nedokonalnej homogenity poľa B_0 (nazývanú i *spin-spinová* relaxácia) označíme T2*, a obecné platí:

$$T2^* < T2 < T1$$



Obr. 1.5: Priebeh T2 relaxácie

Priebeh M_{xy} je popísaný rovnicou $M_{xy}(t) = M_{xy}(0)e^{-t/T_2}$.

V MRI sme schopní pomocou rôznych pulzných sekvencií, riadiť tzv. váhovanie obrazu, kde namerané FID zodpovedá žiadanej relaxácii (T1, T2, T2* váhovanie). Jednotlivé váhovania signálov poskytujú odlišné informácie o tkanive, čo nám dáva možnosť pre rôzne typy vyšetrení, nastaviť váhovanie obrazu tak, aby bolo optimálne. To predstavuje veľkú výhodu MRI v jej aplikácii.

1.4 Lokalizácia signálu z MRI

Doteraz sme brali do úvahy iba statické pole B_0 a pulz ktorý sklápa spiny na Larmorovej frekvencii do kolmej roviny xy . V tomto prípade atómy celého tela rotujú na jednotnej frekvencii, a nameraný signál po excitácii RF pulzom na tejto frekvencii, pochádza z celého tela. Ako je ale možné priestorovo lokalizovať prichádzajúci signál? Slúžia k tomu vedľajšie gradientné magnetické polia $\mathbf{G}$ (často lineárne), ktoré menia magnetizáciu a tým aj frekvenciu a fázu spinov v rámci priestoru. Obecné sa potom signály pochádzajúce z dvoch rozdielnych priestorových súradníc líšia na základe ich frekvencie, čo nám umožňuje rozpoznať miesto pôvodu signálu, podľa frekvenčnej zložky, prítomnej v celkovom nameranom signále. Frekvencia teda pre nás určuje priestorovú súradnicu [14].

$$f_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} \gamma (B_0 + \langle \mathbf{G}, \mathbf{z} \rangle)$$

kde $\mathbf{z}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^3$. V priestorovej lokalizácii hrá samozrejme rolu aj frekvencia excitačného RF pulzu, ktorý je schopný vybrať jednotlivé spiny, ktoré chceme pozorovať.

Napríklad na lokalizáciu jednotlivého **rezu** tela slúži lineárne gradientné magnetické pole (G_{x_i}), ktoré lineárne zmení silu magnetického poľa pozdĺž určenej osi x_i (napr. G_z pozdĺž osi z pre transversálny rez). Frekvencia precesie protónov sa teda bude líšiť lineárne pozdĺž osi z podľa vzťahu:

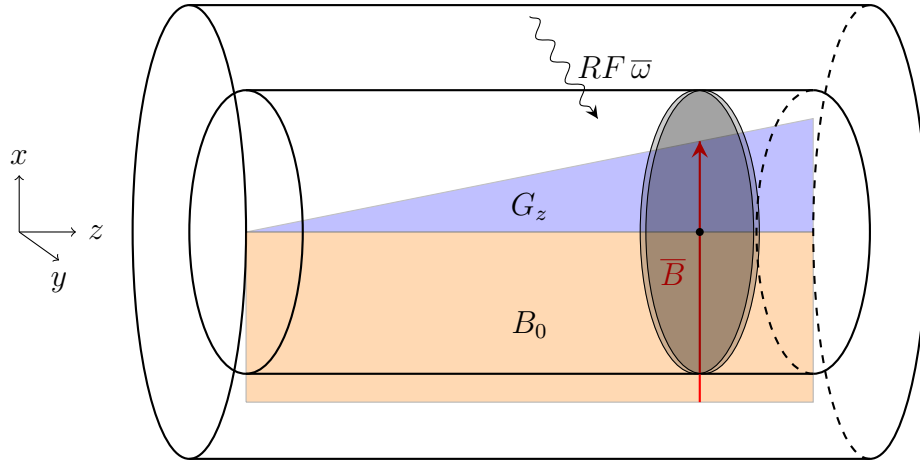
$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi} \gamma (B_0 + G_z z)$$

Následne aplikácia RF pulzu na frekvencii $\bar{\omega}$, vyvolá sklopenie spinov s rovnakou frekvenciou, odpovedajúcou intenzite magnetického poľa: $\bar{B} = \bar{\omega} \frac{2\pi}{\gamma}$, a teda dôjde k *excitácii* celého transversálneho rezu. (obr. 1.6).

V prípade, ak po pôvodnom RF pulze nie je aplikované žiadne ďalšie magnetické pole, spiny rotujú na jednotnej frekvencii, a v prijímacích cievkach je indukovaný signál, ktorý má v podstate jednu frekvenciu.

Poznámka: V práci budeme uvažovať výlučne spracovanie obrazu pomocou spätnej 2D Fourierovej transformácie. Jedná sa o najbežnejšie spracovanie, pre ktoré sa signál priestorovo kóduje nasledovne.

Fázové kódovanie: Aby sme boli schopní priestorovo lokalizovať pôvod signálu, aplikujeme hneď po excitácii dodatočné gradientné magnetické pole v smere jednej osi v rovine rezu. Najbežnejšie je to os x a jedná sa iba o krátky „pulz“, tzv. **fázový gradient** $\mathbf{G}_\Phi$ ktorý na minimálny okamih lineárne pozmení frekvenciu spinov pozdĺž zvolenej osi, a tým do signálu zavedie fázový posun. Hneď po tomto pulze konajú spiny precesiu na jednotnej frekvencii, ale ich fáza je funkciou polohy pozdĺž osi x .



Obr. 1.6: Excitácia transversálneho rezu pozdĺž osi z , pomocou RF pulzu na frekvencii $\bar{\omega}$

Frekvenčné kódovanie: Nasleduje tzv. **čítací gradient $\mathbf{G}_R$** , aplikovaný kolmo na fázový (v našom prípade v smere osi y), ktorý je opäť lineárny, konštantný a je prítomný počas celého zaznamenávania signálu. Spôsobuje zmenu frekvencie excitovaných spinov pozdĺž osi y , a teda frekvencia sa stane funkciou polohy spinu pozdĺž tejto osi.

Takto nameraný signál, je už zložený z viacerých frekvencií, ktoré majú navyše fázové posuny. Sme teda schopní zistiť, odkiaľ pochádza frekvenčná zložka, a jej amplitúda odráža vlastnosť tkaniva, ktoré sa na danom mieste nachádza [5] [15].

Zhrnutie: Nameraný FID signál prezentuje frekvenčnú charakteristiku tkaniva, na súradniciach určených pomocou aplikovaných gradientných polí $\mathbf{G}_R$, $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_z$. Je veľmi dôležité si uvedomiť, že signál odráža frekvenciu, teda 2D Fourierove koeficienty hľadaného obrazu v priestore. Tento 2D Fourierov priestor býva v literatúre označený ako *k*-priestor. Našou úlohou je, z nameraných súradníc v *k*-priestore, rekonštruovať pomocou spätnej Fourierovej transformácie pôvodný obraz.

Manipuláciou gradientov $\mathbf{G}_R$ a $\mathbf{G}_\Phi$ sme schopní v *k*-priestore nasnímať 1D trajektóriu, (obecne to nemusí byť priamka) na každú pulznú sekvenciu. Teda opakovanými meraniami, s rôzne nastavenými gradientnými poľami, sme schopný pokryť *k*-priestor, a po spätnej diskkrétnej 2D Fourierovej transformácii dostať výsledný obraz.

1.5 Metódy snímania

Ako bolo vidno v sekcii (1.3), relaxácia vektora magnetizácie M_{xy} prebieha na viacerých úrovniach, pričom každá nesie nejakú informáciu o tkanive. Nastavením pulznej

sekvencie pri excitácií, je možné v signáli vyzdvihnúť požadovaný typ relaxácie, či už sa jedná o T_1 , T_2 alebo T_2^* . Ďalší významný faktor ovplyvňujúci silu signálu je samozrejme hustota protónov v tkanive tzv. PD (*proton density*), ktorý ale samostatne, pre väčšinu aplikácií neponúka dostatočné rozlíšenie, preto sa kombinuje s relaxačnými časmi. Zároveň platí, že merať čisté relaxačné časy T_1 resp. T_2 je náročné, preto sa v praxi používajú hlavne metódy, ktoré jednotlivé faktory kombinujú [15].

Existuje množstvo techník zobrazovania, ale tri najbežnejšie využívané patria do triedy pulzných techník. Sú to techniky využívajúce popísané sklopenie do roviny xy , po ktorom nasledujú jeden, alebo viacero pulzov, až do ukončenia relaxácie [15]. Každá zobrazovacia metóda používa rozličnú kombináciu prvého a nasledujúcich pulzov, a časových intervalov medzi nimi. Tieto kombinácie nám dávajú výsledný obraz, vyzdvihujúci určitú charakteristiku snímaného tkaniva. (T_1, T_2 , PD)

1.5.1 Saturation recovery

Jedná sa o postupnosť časovo rovnomerne rozmiestnených pulzov, otáčajúcich vektor magnetizácie o 90° stupňov. Tesne po prvom 90° pulze je vektor $\mathbf{M}$ v rovine xy a signál má maximálnu amplitúdu. Hneď sa začnú uplatňovať relaxácie, ktoré spôsobia rozfázovanie a navyše sklopenie $\mathbf{M}$ bližšie k osi z . Toto sklopenie prebieha rôzne rýchlo v rozdielnych oblastiach skúmaného objektu, podľa ich T_1 hodnôt. Nasledujú ďalšie 90° pulzy po ktorých sa okamžite meria odozva. Nasledujúce pulzy spôsobia, že vektor magnetizácie je opäť rotovaný o 90° , no tentokrát je unesený až za rovinu xy , a ako ďaleko za túto rovinu sa dostane závisí na T_1 relaxácii, uplatnenej medzi pulzmi. Pre oblasti s krátkou T_1 , sa v čase medzi pulzmi vráti vektor magnetizácie blízko k osi z , a následný pulz ho preklopí jemne za rovinu xy . Na rozdiel v oblastiach s dlhou T_1 , vektor $\mathbf{M}$ vykoná iba krátky pohyb v smere osi z , a teda ďalší pulz zrotuje vektor magnetizácie blízko osi z v zápornom smere. Tým bude nameraný signál závisieť na lokálnej hodnote T_1 relaxácie, po každom 90° pulze. Čas medzi opakovanými pulzmi, nazývaný TR (*time of repetition*), hrá veľkú rolu, a jeho optimálnym nastavením možno doceliť žiadaný kontrast, a do určitej miery i váhovanie obrazu. Platí, že pre TR väčší ako je priemerná hodnota T_1 obraz odzrkadľuje prevažne hustotu protónov (PD), zatiaľ čo kratšie TR ponúkajú prevažne T_1 váhovaný obraz s lepším kontrastom.

1.5.2 Inversion recovery

Jedná sa o metódu využívajúcu dva pulzy. Prvý je 180° pulz, ktorý prevráti vektor $\mathbf{M}$ do záporného smeru osi z , po ktorom nasleduje tzv. čítací 90° pulz. Významnou relaxáciou medzi pulzmi je opäť T_1 , ktorá rotuje $\mathbf{M}$ späť k osi $+z$, pretože namerané

FID závisí priamo na uhle, o ktorý sa v čase medzi pulzmi vektor magnetizácie zrotuje. Pre tkanivo, ktoré má krátku T_1 , sa po 180° pulze stihne $\mathbf{M}$ vrátiť blízko osi z a teda následný 90° pulz priblíži vektor $\mathbf{M}$ k rovine xy , a jeho priemet na túto rovinu bude kladný. Pre tkanivo s dlhou T_1 relaxáciou sa vektor magnetizácie nestihne výrazne vrátiť a po čítacom pulze bude $\mathbf{M}$ orientovaný v smere $-z$ a jeho projekcia na rovinu xy bude záporná.

Metóda inversion recovery poskytuje v porovnaní so saturation recovery, ešte výraznejšie váhovanie vzhľadom na T_1 , čo umožňuje vysoký kontrast, užitočný napr. pri rozlišovaní bielej a šedej hmoty v mozgu [15].

1.5.3 Spin-echo

Jedná sa o metódu, ktorá bola špeciálne vytvorená na zobrazenie T_2 relaxácie. Pri meraní T_2 vzniká problém, pretože nehomogenita ktorá nás zaujíma, spôsobená magnetickým poľom atómov prítomných v meranom objekte, je oveľa menšia ako nehomogenita, spôsobená nedokonalosťou permanentného magnetu a aplikáciou čítacích lineárnych gradientov. FID je v tomto prípade T_2^* váhované. Preto je nutné efekt nežiadúcej nehomogenity zo signálu odstrániť.

Sekvencia spin-echo začína 90° pulzom, ktorý sklopí vektor $\mathbf{M}$ do roviny xy . Nehomogenity magnetického poľa následne spôsobia stratu fázy vektorov magnetizácie v rovine xy , teda začnú mať rozličnú orientáciu v tejto rovine. Po krátkom čase TI (interpulse time), po ktorom sa ešte nestihne uplatniť T_1 relaxácia, aplikujeme 180° pulz, a tým sa dostane každá zložka vektora $\mathbf{M}$ do opačnej orientácie. Každý vektor začne konať precesiu v opačnom smere, avšak frekvencia ostane rovnaká. To spôsobí, že tak, ako sa po prvom pulze začali vektory rozchádzať, po 180° pulze začnú konvergovať, a za čas $TE=2TI$ (*TE-time of echo*) sa vytvorí tzv. *echo* signálu, v ktorom je prítomný iba efekt T_2 , pretože strata fázy, v dôsledku nedokonalosti prístroja, sa vyruší. Ak je čas medzi pulzmi väčší, v porovnaní s T_1 charakteristikou, vplyv T_1 bude vo výslednom FID zanedbateľný. V opačnom prípade, pre krátke časy medzi pulzmi, bude nameraný signál ovplyvnený aj T_1 [15].

1.6 Dynamická MRI

V práci sa budeme zaoberať hlavne dynamickou kontrastnou MRI (*DCE- dynamic contrast enhanced*). Jedná sa o vyšetrenie, kedy je po podaní kontrastnej látky (CA-contrast agent), daný rez objektu snímaný kontinuálne v čase. Tento prístup nám umožní sledovať, ako sa vyvíja T_1 charakteristika sledovaného rezu, a keďže jediné čo sa v čase mení je koncentrácia kontrastnej látky, vieme jej priebeh zaznamenať.

Ako kontrastná látka je najčastejšie používaná *gadolinium chelate*, alebo *magnevist*, ovplyvňujúce T1 charakteristiku, a keďže aj spôsob podania CA má vplyv na jej priebeh v skúmaných orgánoch, je nutné zaručiť jej plynulú distribúciu do krvi. Po injekcii do žily, je CA distribuovaná srdcovo-cievny systémom po celom tele, a jej priebeh je sledovaný pomocou T1-váhovanej MRI v zvolenom reze. Z množstva kontrastnej látky a dynamiky jej prechodu cez sledovanú oblasť môžeme vyvodit informácie o fyziológii a patológii tkaniva [36]. Často postačuje už sledovanie koncentrácie v jednom 2D snímku, no moderné prístroje sú schopné i sledovania viacerých rezov simultánne [18] (tzv. multislice acquisition).

DCE-MRI patrí do skupiny **perfúzných** zobrazovacích techník, t.j. techník ktoré snímajú prekrvenie jednotlivých tkanív. Následne na základe týchto informácií sme schopní určiť diagnózu, príp. stav liečby [23]. Najvýznamnejšia aplikácia dynamickej MRI je na diagnózu kardiovaskulárnych a onkologických chorôb, z dôvodu, že je schopná rozlíšiť tumor od zdravého tkaniva na základe ich rozličnej priepustnej charakteristiky, a navyše je v mnohých prípadoch schopná zachytiť aj stav tumoru, a tým zistiť reakciu na liečenie [18].

Perfúznymi krivkami rozumieme priebehy koncentrácie CA, pre daný voxel. Pre ich ďalšiu analýzu a získanie perfúzných parametrov, je nutné ich upravenie. To sa prevádza najčastejšie pomocou prekontrastných meraní sledovanej oblasti, ktoré umožnia upravenie intenzity perfúzných kriviek.

Priebeh DCE-MRI:

1. Prekontrastné meranie
2. Podanie kontrastnej látky pacientovi do žily.
3. Kontinuálne snímanie zvolenej oblasti.
4. Rekonštrukcia časových snímok.
5. Vyjadrenie a analýza perfúzných kriviek.
6. Diagnóza.

1.6.1 Modelovanie perfúzneho zobrazovania

Pre analýzu perfúzných kriviek existuje množstvo matematických modelov. Najpoužívanjšie sú farmakokinetické modely, ktoré sú schopné určiť hľadané parametre tkaniva nutné pre diagnózu [23] [36].

Táto práca sa bude venovať hlavne algoritmom na rekonštrukciu časových sekvencií z DCE-MRI a porovnávaní kvality rekonštruovaných perfúzných kriviek. Perfúznou analýzou sa zaoberať nebude.

1.6.2 Časové vs. priestorové rozlíšenie

Pre statickú¹ MRI platí, že pre väčšie priestorové rozlíšenie je nutná dlhšia doba akvizície. Pri dynamickej MRI sme navyše limitovaní dĺžkou snímania pre každú časovú snímku, pretože chceme dostatočne hladko zachytiť priebeh kontrastnej látky. Preto je pre DCE-MRI dôležité správne vyvážiť priestorové a časové rozlíšenie [36]. Pre dostatočnú lokalizáciu v rámci rezu je potrebné relatívne vysoké priestorové rozlíšenie. Zároveň pre dostatočne hladké zachytenie priebehu koncentrácie CA a pre identifikáciu tkanív potrebujeme dosiahnuť vysoké rozlíšenie v čase.

Aby sme boli schopní tieto požiadavky splniť, väčšinou nepostačuje plné kartézské (Nyquistove) snímanie z dôvodu časovej náročnosti. Preto je nutné namerať menej vzoriek v k-priestore, čo by pre obyčajnú kartézsku rekonštrukciu znamenalo aliasing a zníženie rozlíšenia. Ale ako sa ukáže, existujú metódy umožňujúce zvýšenie časového rozlíšenia pri zachovaní priestorového a naopak [23]. Sú to techniky, ako napr. snímanie viacerými cievkami, komprimované snímanie alebo nekartézské trajektórie, ktoré budú prezentované v ďalších kapitolách.

¹t.j. jeden časový snímok

2 Matematické spracovanie signálu

Doposiaľ sme sa venovali spôsobu akým signál vzniká. V pokračovaní tejto práce sa zameriame na spracovanie FID a spôsob rekonštrukcie. V závere časti (1.4) bolo spomenuté, že z merania FID po aplikovaní nastavených čítacích gradientov sme schopní namerať Fourierove koeficienty rezu tela. Na akých súradniciach v k -priestore sa jednotlivé namerané body nachádzajú určujú lineárne magnetické gradienty.

2.1 Matematický popis MRI

Z Blochovej rovnice, popisujúcej chovanie častice s magnetickým nábojom v exter-nom magnetickom poli a Faradayovho zákona je možné odvodiť, že signál indukovaný v cievkach má nasledujúci tvar [22]:

$$s(t) = \int_R m(r) e^{-2i\pi k(t) \cdot r} dr \quad (2.1)$$

kde $m(r)$ je vektor transversálnej magnetizácie v bode $r \in R$ a R označíme oblasť z ktorej prichádza signál (najčastejšie excitovaný 2D rez, ale môže to byť aj 3D oblasť). Dimenziu R označíme $\dim R = n$. Označme

$$\mathbf{k}(t) = \gamma \int_0^t \mathbf{G}(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

funkciu, ktorá vyjadruje trajektóriu v k -priestore [14], na ktorej sú jednotlivé vzorky namerané.

$\mathbf{G}(t) = [G_x(t), G_y(t), G_z(t)]$ (pre prípad $n = 3$) je vektor gradientov magnetických polí pôsobiacich na objekt po excitácii, ktorý sa mení v čase, a tým určuje danú trajektóriu merania [22].

Konkrétne pre prípad snímania rezu ($n = 2$) je rovnica tvaru:

$$s(t) = \int_R m(x, y) e^{-i2\pi(k_x(t)x + k_y(t)y)} dx dy \quad (2.3)$$

kde k_x, k_y sú zložky $\mathbf{k}$ a R je sledovaná oblasť v $\mathbb{R}^2$.

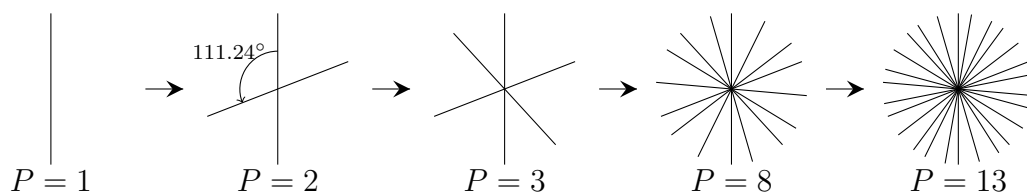
Táto rovnica zodpovedá dvojrozmernej Fourierovej transformácii funkcie $m(x, y)$, ktorá prezentuje hľadaný obraz. Našou úlohou je spätnou diskretnou Fourierovou transformáciou získať zo signálu $s(t)$ pôvodný obraz $m(x, y)$. V tejto práci budeme používať iba 2D Fourierovu transformáciu, teda snímky rezu tela, no všeobecne je možné merať súradnice v 3D priestore a získať tak 3D rekonštrukciu. Teoreticky by sme po spätnej Fourierovej transformácii mali obdržať reálny obraz, ale dôsledkom prítomnosti šumu a nepresnosti merania môže byť komplexný. Preto sa používa absolútna hodnota $|m(x, y)|$ [24].

Pri opakovaných meraniach s rôzne nastaveným gradientným polom $\mathbf{G}$ sme schopní namerať určitý počet trajektórií v k -priestore. Každý nameraný bod predstavuje koeficient Fourierovej transformácie funkcie m . Voľba trajektórií a ich počet je významným faktorom ovplyvňujúcim celkový čas merania a kvalitu obrazu.

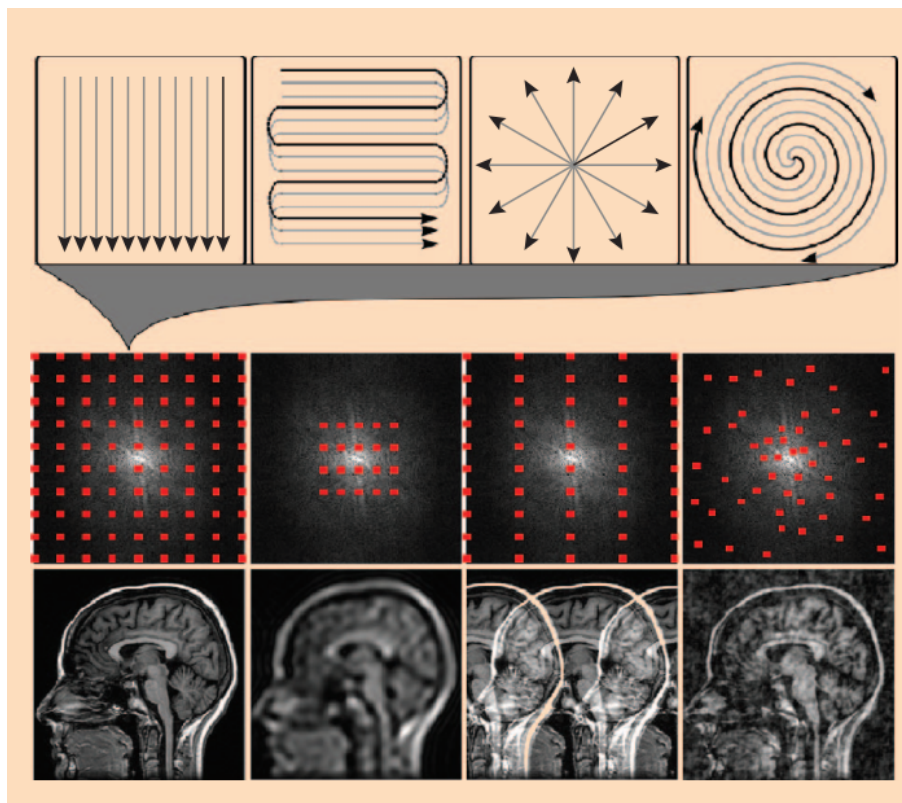
2.2 Trajektórie snímania

Vo všeobecnosti platí, že čas snímania je úmerný počtu snímaných trajektórií. Preto je samozrejme vhodné ich počet minimalizovať. Priestorové rozloženie nameraných vzoriek v k -priestore má podstatný vplyv na rekonštruovaný obraz. Na obr. 2.2 sú zobrazené najbežnejšie typy trajektórií, medzi ktoré patria kartézske, radiálne a špirálové. Ďalej je viditeľný efekt podvzorkovania a umiestnenia vzoriek vo frekvenčnom spektre na rekonštruovaný obraz. Všeobecne má podvzorkovanie, t.j. snímanie pod *Nyquistovým kritériom* (3.1), za následok zmenšenie rozlíšenia a možný vznik **aliasingu** (replikácie obrazu). Snímané trajektórie môžu byť takmer ľubovoľné. Obmedzenie predstavuje napr. gradientné magnetické pole $\mathbf{G}$, ktoré je limitované jeho maximálnou hodnotou a rýchlosťou nabehnutia.

Pri dynamickom snímaní je často výhodné použiť radiálne trajektórie so **zlatým uhlom** [35]. Snímanie prebieha tak, že každá ďalšia snímaná priamka v k -priestore zvierá s predchádzajúcou priamkou zlatý uhol rovný približne $111,24^\circ$ (pre priamky so stredom v počiatku k -priestoru). Rotácia práve o zlatý uhol umožní rovnomerné rozmiestnenie radiál, ktoré optimálne pokryjú spektrum. Zlatý uhol zaručí, že v každom okamihu zvierajú radiály maximálne tri rozličné uhly a pre počet radiál rovný fibonaccimu číslu iba dva. Tento prístup nám umožňuje dynamické snímanie nezávislé na voľbe počtu trajektórií, reprezentujúcich jeden časový snímok. Máme preto možnosť zvoliť počet radiál na jeden snímok až pri rekonštrukcii, pričom optimálne je zvoliť počet radiál rovný nejakému fibonaccimu číslu.



Obr. 2.1: Radiálne trajektórie vzniknuté pomocou zlatého rezu.



Obr. 2.2: Trajektórie snímania a efekt podvzorkovania. Prvý stĺpec predstavuje plné kartézské vzorkovanie podľa Nyquistového kritéria. Na ďalších je vidno efekt aliasingu a znížené rozlíšenie. Prevzaté z [22]

2.3 Matematická teória k spracovaniu signálu

Z predchádzajúcej kapitoly vyplynula súvislosť Fourierovej transformácie (FT) a MRI. Preto bude v nasledujúcej kapitole spomenutá teória k spojitaj, diskkrétnej aj nerovnomernej FT.

2.3.1 Spojitá Fourierova transformácia

Najprv spomenieme *Fourierov rad*, od ktorého sa odvíja aj FT. Motiváciu Fourierového radu môžeme vidieť, ako snahu rozložiť periodický signál na súčet kosínusových a sínusových vln. Všeobecne má rad tvar

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.4)$$

Veta 2.3.1. [33] *Reálnu funkciu $f(t)$, ktorá je periodická na intervale $\langle 0, T \rangle$, s konečnou variáciou, je možné rozložiť do **Fourierovho radu** tvaru:*

$$f'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nt/T} \quad (2.5)$$

kde jednotlivé **Fourierove koeficienty** c_n , pre $n \in \mathbb{N}$, sú definované ako

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi nt/T} dt. \quad (2.6)$$

Fourierov rad f' konverguje bodovo (v norme) k funkcii f v každom bode okrem bodov nespojitosti, kde konverguje k $1/2(\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t))$. [33]

Ak by sme chceli vyjadriť neperiodickú funkciu, je možné uvažovať $T \rightarrow \infty$. V tom prípade prejde frekvenčná premenná $\gamma = \frac{n}{T}$ na kontinuum, teda obsiahne celú reálnu os. Koeficienty c_n budú priradené pre $n \in \mathbb{R}$. Tieto úvahy smerujú k Fourierovej transformácii [24].

Definícia 2.1. Pod **Fourierovou transformáciou** funkcie $f(t)$ rozumieme integrál:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi t\gamma} dt \quad (2.7)$$

Je nutné zaručiť konvergenciu, teda konečnosť integrálu. Tú zaručia nasledujúce podmienky:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$
2. $f(t)$ má na každom konečnom intervale maximálne konečný počet bodov nespojitosti.

Poznámka: Keďže sú digitálne obrazy vždy omedzené a majú konečný počet nespojitostí, Fourierov integrál vždy existuje [19].

Definícia 2.2. Inverznú (spätnú) Fourierovu transformáciu $\mathcal{F}^{-1}$ definujeme ako:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma) e^{i2\pi t\gamma} d\gamma \quad (2.8)$$

Keďže náš signál je 2D, uvedieme aj tvar 2D spojitej Fourierovej transformácie:

$$\mathcal{F}(f) = F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.9)$$

2.3.2 Diskrétna Fourierova transformácia

Signál z MRI má diskretný charakter, je preto nutné diskretizovať aj Fourierovu transformáciu. Sledovaný interval $\langle 0, T \rangle$ na ktorom je definovaná funkcia f rozdelíme na N rovnomerných úsekov. Vzorkovací interval bude $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Označme

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Definícia 2.3. *Diskrétnou Fourierovou transformáciou (DFT) signálu $f(t) = [f(t_0), \dots, f(t_{N-1})]$ rozumieme:*

$$\mathcal{F}_D(f)(\gamma) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-2\pi i \gamma t_k} \quad (2.10)$$

kde $\gamma = \frac{n}{T}$ reprezentuje frekvenčnú súradnicu pre zvolené $n \in \langle 0, N-1 \rangle$.
Pre 2D signál $f(n_x, n_y)$ má DFT tvar:

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f(n_x, n_y) e^{-i2\pi \left(k_x \frac{n_x}{N_x} + k_y \frac{n_y}{N_y} \right)} \quad (2.11)$$

kde $x = 0, \dots, N_x-1$, $y = 0, \dots, N_y-1$ sú diskkrétne súradnice a N_x, N_y sú rozmery diskrétného signálu. Inverzná DFT je definovaná:

$$f(n_x, n_y) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} \hat{f}(k_x, k_y) e^{i2\pi \left(k_x \frac{n_x}{N_x} + k_y \frac{n_y}{N_y} \right)} \quad (2.12)$$

[30]

Dôležitá vlastnosť FT je jej **separabilita**. Znamená to, že je možné ju rozpísať ako zloženie dvoch po sebe idúcich transformácií, ktoré závisia iba na jednej premennej [30]. Pre 2D DFT (2.11) teda platí, že sa dá rozpísať ako:

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \sum_{n_x=0}^{N_x-1} e^{-i2\pi \left(k_x \frac{n_x}{N_x} \right)} \left[\sum_{n_y=0}^{N_y-1} f(n_x, n_y) e^{-i2\pi \left(k_y \frac{n_y}{N_y} \right)} \right]. \quad (2.13)$$

Vyjadruje to výpočet DFT po riadkoch a následnú DFT na výsledok po stĺpcoch. Z toho vyplýva, že nie sme odkázaní na priamy výpočet pomocou definície 2.11, s $N_x \cdot N_y$ operáciami, ale stačí rádovo $N_x + N_y$ operácií. To predstavuje veľmi významný rozdiel pre veľké N_x resp. N_y . Napr. pre $N_x = N_y = 256$ stačí, miesto 65 536 operácií, previesť iba 512.

2.3.3 FFT (Fast Fourier Transform)

Jedná sa o algoritmus výpočtu diskkrétnej Fourierovej transformácie 1D signálu, ktorý ponúka podstatné zníženie počtu násobení, a tým umožňuje výpočet DFT aj pre veľké N .

Pre priamy výpočet

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

je treba $O(N^2)$ operácií. Vyskytujú sa pri ňom opakujúce sa násobenia, a to využíva algoritmus FFT, ktorý tieto duplikované operácie prevádza iba raz a výsledok uloží

do pamäte. Na tomto princípe je možné pre signál dĺžky N spočítať FFT s využitím iba $O(N \log(N))$ násobení a sčítaní [3]. Algoritmus je najefektívnejší pre dĺžku rovnú mocnine dvojky $N = 2^k$.

Pre 2D signál je vďaka separabilite FT a algoritmu FFT možné spočítať jeho 2D-FFT (2.11), rádovo pomocou $O(N \log(N))$ násobení a sčítaní, kde N je väčší z rozmerov signálu. Preto je algoritmus FFT nutný pre výpočty diskretnej Fourierovej transformácie pre signály veľkých rozmerov, ako sú aj dáta z MRI.

2.3.4 NUFFT (Non-Uniform Fast Fourier Transformation)

Podstata efektívnosti algoritmu FFT je v počítaní DFT rovnomerne navzorkovaného signálu pre rovnomerne rozmiestnené body vo frekvenčnej oblasti.

Ale ako sa ukazuje, často je potrebné vypočítať DFT pre nerovnomerne rozmiestnené frekvenčné súradnice. Priamy výpočet tzv. NUFT (non-uniform Fourier transformation) rovnomerne navzorkovaného signálu x_k , kde $k \in \langle 0, N-1 \rangle$, v ľubovoľných frekvenčných súradniciach $\omega_m \in \mathbb{R}$ podľa

$$X(\omega_m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\omega_m k}, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.15)$$

by vyžadoval $O(NM)$ operácií a v prípade 2D až rádovo $O(N^2 M^2)$.

Pre aplikáciu v MRI je to samozrejme časovo nepostačujúce, a preto je nutné využiť rýchlejší algoritmus. Existuje viacero NUFFT (non-uniform Fast-Fourier Transformation) algoritmov, no v tejto práci budeme používať metódu z článku [11] tzv. *NUFFT using Min-Max Interpolation*. Hlavná myšlienka tohto algoritmu je v napočítaní nadvzorkovanej FFT pôvodného signálu a následnej optimálnej interpolácii do žiadaných frekvenčných súradníc, využívajúc malé lokálne okolia vo frekvenčnej doméne [11]. Tak dosiahneme podobné zrýchlenie ako pre FFT.

NUFFT je samozrejme implementovaná aj pre 2D signály. Operátor NUFFT (označíme R) vyjadruje výpočet

$$R(f) = \hat{f}(k_x^m, k_y^m) = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f(x, y) e^{-i2\pi(k_x^m x + k_y^m y)} \quad m = 1, \dots, M \quad (2.16)$$

$$R^*(\hat{f}) = f(x, y) = \sum_{m=0}^M \hat{f}(k_x^m, k_y^m) e^{i2\pi(k_x^m x + k_y^m y)} \quad (2.17)$$

kde M je celkový počet nerovnomerných súradníc v k -priestore. V prípade, že sú súradnice vo frekvenčnej doméne rozmiestnené nerovnomerne, tak že vzorky reprezentujú rôzne veľké časti spektra, je nutné túto nerovnováhu kompenzovať. Na tento účel sa používa tzv. **kompenzácia hustoty** w pre každú nameranú súradnicu v spektre.

Výpočet adjungovaného operátora vyzerá potom nasledovne:

$$\mathcal{R}^*(\hat{f}) = f(x, y) = \sum_{m=0}^M w_m \hat{f}(k_x^m, k_y^m) e^{i2\pi(k_x^m x + k_y^m y)} \quad (2.18)$$

Výpočet tejto kompenzácie je väčšinou prevádzaný podľa Voroného diagramu, ktorý každému bodu v k-priestore priradí Voroného bunku resp. jej váhu zodpovedajúcu plošnému obsahu.

Definícia 2.4. *Nech je $\mathcal{S} \in V$ konečná množina tzv. referenčných bodov z metrickeho priestoru $V := (V, \rho)$. **Voroného bunkou** bodu $X \in \mathcal{S}$ rozumieme množinu*

$$\mathcal{V} = \{P \in V; \rho(X, P) \leq \rho(Y, P), \forall Y \in \mathcal{S}\}. \quad (2.19)$$

Je to teda množina bodov pre ktoré platí, že sú bližšie k referenčnému bodu X , ako k ostatným referenčným bodom. Po vydelení jednotlivých obsahov buniek obsahom najväčšej z nich dostaneme normované kompenzácie hustoty pre jednotlivé súradnice, reprezentované diagonálnym operátorom W , vyjadrujúcim ich bodové pre násobenie. Operátor NUFFT so započítaním kompenzácie hustoty označíme $\mathcal{R} = WR$ resp. $\mathcal{R}^*$ pre adjungovaný operátor.

Poznámka: Operátor $\mathcal{R}$ nie je unitárny a nemá inverziu.

2.3.5 Normy

Definícia 2.5. *Normou nazývame zobrazenie $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, kde V je vektorový priestor, ktoré pre $\forall a \in \mathbb{C}$ a pre $\forall x, y \in V$ splňuje nasledujúce podmienky:*

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ak nie je splnená podmienka 3 (zobrazenie nerozoznáva body), jedná sa o tzv. seminormu.

Definícia 2.6. *Lineárny priestor v ktorom zavedieme normu nazývame normovaný lineárny priestor. (NL-priestor)*

Definícia 2.7. [16] *Pre $x = (x_1, \dots, x_n) \in V = \mathbb{C}^n$ definujeme $\mathbf{l}_p$ normu ako:*

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pre } 1 \leq p < \infty \\ \|x\|_p &= \sum_{i=1}^n |x_i|^p & \text{pre } 0 < p < 1 \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| & \text{pre } p = \infty \\ \|x\|_0 &= \text{card}\{x_i | x_i \neq 0\}, & \text{pre } p = 0 \end{aligned}$$

Poznámka: Pre $0 < p < 1$ nie je pre $\|\cdot\|_p$ splnená podmienka 2. z definície 2.7, a teda sa nejedná o normu v zmysle uvedenej definície.

Definícia 2.8. [33] **Priestorom s vnútorným súčinom** (VS-priestorom) nad $\mathbb{C}$ nazývame dvojicu $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, kde V je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ je tzv. vnútorný (skalárny) súčin na V splňujúci $\forall c \in \mathbb{C}$ a $x, y, z \in V$, nasledujúce vlastnosti :

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Každý VS priestor je zároveň NL priestorom s normou $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Je tiež metrickým priestorom s indukovanou metrikou $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Definícia 2.9. Nech $x = (x_1, \dots, x_n)$ je prvkom vektorového priestoru V . **1D Totálnou variáciou** (TV) vektora x rozumieme:

$$\text{TV}(x) = \|\nabla_t x\|_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \quad (2.20)$$

Jedná sa o seminormu, pretože nerozlišuje body.

Interpretáciu TV je možné vnímať, ako mieru zmeny signálu v čase. Jedná sa o celkový súčet absolútnych hodnôt prvých diferencií signálu, teda rýchlo meniaci sa signál bude mať veľkú TV a konštantný signál nulový.

Pre dvoj-dimenzionálny signál je možné uvažovať dva prípady 2D totálnej variácie a to izotropný a anizotropný.

Definícia 2.10. [2] **2D totálnou variáciou** matice $X = [x]_{ij} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ rozumieme seminormu:

1. $\text{TV}_{izo}(X) = \sum_{i,j} \sqrt{|x_{i+1,j} - x_{i,j}|^2 + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|^2}$ izotropný prípad.
2. $\text{TV}_{anizo}(X) = \sum_{i,j} (|x_{i+1,j} - x_{i,j}| + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|)$ anizotropný prípad.

V práci budeme používať skrátené označenie $\text{TV}_{2D}(X)$ a bude ním myslená izotropná diskretná 2D totálna variácia.

Normy matíc: Aplikovať normu je možné samozrejme aj na matice. V tejto práci sa bude jednať hlavne o matice $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ a pokiaľ nebude inak uvedené, norma matice bude definovaná ako $\|X\| := \|\text{vec}(X)\|$, kde $\text{vec}(X) \in \mathbb{C}^{mn}$ vyjadruje preusporiadanie matice do stĺpcového vektora. Je možné uvažovať ľubovoľnú l_p normu, avšak najbežnejšia je norma pre l_2 .

Definícia 2.11. *Nech $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Jej tzv. **Frobeniova norma** (značíme $\|\cdot\|_F$), je definovaná ako*

$$\|X\|_F := \|\text{vec}(X)\|_2 \quad (2.21)$$

V práci budeme uvažovať ešte tzv. *nukleárnu normu matice* no pre jej vyjadrenie je potrebný singulárny rozklad matice (SVD). Jedná sa o rozloženie X na

$$X = \sum_{l=1}^n \sigma_l u_l v_l^* \quad (2.22)$$

kde $n = \min\{m, n\}$, a konštanty $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ nazveme *singulárne čísla* matice X . Vektor $u_l \in \mathbb{C}^n$, resp. $v_l \in \mathbb{C}^m$ nazveme *ľavý* resp. *pravý singulárny vektor*. Je známe, že platí $\text{rank } X = \|\sigma(X)\|_0$, pre $\sigma = \sigma(X) = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, teda že hodnosť matice je rovná počtu nenulových singulárnych čísel [29].

Definícia 2.12. ***Nukleárna norma** matice X , značíme $\|\cdot\|_*$ je definovaná ako l_1 norma vektora singulárnych čísel matice X :*

$$\|X\|_* := \|\sigma(X)\|_1 = \sum_{l=1}^n \sigma_l \quad (2.23)$$

Nukleárnu normu matice budeme používať ako odhad hodnoty matice. Je vhodná hlavne z toho dôvodu, že je definovaná pomocou l_1 normy, ktorá je na rozdiel od l_0 konvexná.

Normy operátorov:

Veta 2.3.2. [33] *Nech $T : X \rightarrow Y$ je lineárny operátor, potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

1. T je ohraničený
2. T je spojitý
3. $\exists C > 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|$ pro $\forall x \in X$

Definícia 2.13. *Majme dva úplné¹ VS-priestory (nazývané Hilbertove) H_1, H_2 a spojitý lineárny operátor $T : H_1 \rightarrow H_2$. Definujme operátor $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ pre ktorý platí*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2. \quad (2.24)$$

T^* nazveme operátorom **adjungovaným** k T .

Definícia 2.14. [33] *Normu lineárneho spojitého (ohraničeného) operátoru $T : X \rightarrow Y$ definujeme*

$$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{C | C > 0, \|Tx\| \leq C\|x\| \forall x \in X\}. \quad (2.25)$$

¹Priestor v ktorom je každá cauchyovská postupnosť konvergentná.

Platia pre ňu samozrejme všetky vlastnosti normy z definície 2.7 a navyše platí:

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \quad \forall x \in X \quad (2.26)$$

Z toho vyplýva nasledujúca veta:

Veta 2.3.3. [33] *Nech $T_1 : X \rightarrow Y$ a $T_2 : Y \rightarrow Z$ sú spojité lineárne operátory. Potom pre normu zloženého operátora $T_2T_1 : X \rightarrow Z$, ktorý je opäť lineárny, platí:*

$$\|T_2T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|. \quad (2.27)$$

Definícia 2.15. *Spojité lineárne operátory $U : X \rightarrow Y$ nazveme **unitárnymi** ak splňujú:*

$$UU^* = U^*U = I \quad (2.28)$$

kde U^* je adjungovaný operátor k U a I je identita.

Tvrdenie 2.1. [30] *Adjungovaný operátor T^* je spojité, lineárny a má nasledujúce vlastnosti:*

1. $T^{**} = T$
2. $\|T^*\| = \|T\|$
3. $\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$

Tvrdenie 2.2. *Unitárny operátor U má nasledujúce vlastnosti:*

1. $U^* = U^{-1}$
2. $\langle Ux, y \rangle = \langle x, U^{-1}y \rangle$
3. $\|U\| = \|U^*\| = \|U^{-1}\| = 1$

Tvrdenie 2.3. *Operátor spojitej a diskkrétnej Fourierovej transformácie je spojité, lineárny a unitárny. Pre normu platí:*

$$\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}^{-1}\| = \|\mathcal{F}_D\| = \|\mathcal{F}_D^{-1}\| = 1 \quad (2.29)$$

Pre $\mathcal{R}$, operátor NUFFT, sa norma určuje komplikovane, no numerické výpočty ukazujú [25], že je možné uvažovať veľkosť normy menšiu alebo rovnú jednej, teda:

$$\|R\| = \|R^*\| \leq 1. \quad (2.30)$$

3 Zvýšenie rozlíšenia MRI

V tejto kapitole budú rozobrané metódy, umožňujúce na základe apriorných informácií o signáli skrátiť čas akvizície pri zanechaní požadovaného rozlíšenia.

3.1 Klasické vzorkovanie

Konvenčný prístup ku vzorkovaniu signálu podlieha **Nyquist–Shannonovmu teóremu**, ktorý tvrdí, že vzorkovacia frekvencia musí byť aspoň dvojnásobná oproti maximálnej frekvenčnej zložke signálu.

$$f_{\text{vz}} > 2f_{\text{max}} \quad (3.1)$$

Podmienku (3.1) budeme nazývať Nyquistove kritérium vzorkovania a *podvzorkovaním* bude myslené nesplnenie daného vzťahu. Pri nesplnení tohto kritéria nie je zaručené, že rekonštrukcia bude presná a hrozí efekt prekrytia spektier tzv. *aliasing* [29]. Platí ale, že ak máme k dispozícii nejaké apriorné informácie o rekonštruovanom signáli, tak sa znižuje počet vzoriek, ktoré musíme namerať. Takto sme schopní zo zdanlivo podvzorkovaného merania správne rekonštruovať signál. Apriorné informácie môžu byť rôzneho charakteru, ako napríklad frekvenčný rozsah, riedkosť v nejakej báze, nízka maticová hodnota a pod. [29]

Nyquistove kritérium pre obrazovú rekonštrukciu znamená, že pre kartézsky nameraný obraz veľkosti $N \times N$ potrebujeme rovnaké množstvo rovnomerne rozmiestnených spektrálnych vzoriek. Pri podvzorkovaní dôjde k aliasingu.

3.2 Vplyv trajektórií na rekonštrukciu

V krátkosti zhrniem rozdiel medzi kartézskou a nekartézskou rekonštrukciou pre MRI.

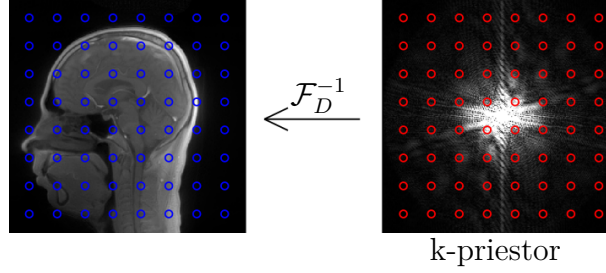
1. **Kartézska rekonštrukcia** obrazu veľkosti $N \times N$ spočíva v nameraní rovnakého počtu hodnôt (Nyquistove kritérium) v k-priestore na pravidelnej mriežke. V praxi je to väčšinou N meraných trajektórií, na každej N hodnôt. Signál uvažujeme ako maticu $d \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Následne prevedieme spätnú diskretnú Fourierovu transformáciu (FFT), pomocou ktorej získame priamo výsledný obraz. Rekonštrukcia je lineárna.

Označme x -hľadaný obraz, d -dáta, $\mathcal{F}_D$ operátor FFT. Problém tvaru

$$d = \mathcal{F}_D x \quad (3.2)$$

vyriešime jednoducho pomocou inverzie, ako

$$\mathcal{F}_D^{-1}d = x. \quad (3.3)$$



Obr. 3.1: Schéma kartézskej rekonštrukcie

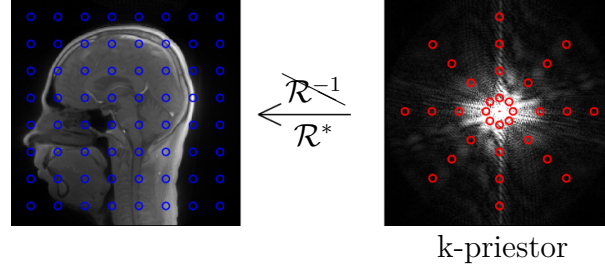
2. **Nekartézska rekonštrukcia** obrazu $N \times N$ je omnoho komplikovanejšia, používa sa viacero druhov snímaných trajektórií a namiesto FFT je nutné použiť operátor NUFFT. Ak by sme sa chceli vyhnúť podvzorkovaniu, museli by sme namerať ešte väčší počet súradníc v k-priestore (napríklad pre radiály to je $N^2 \cdot \pi/2$ trajektórií) [24]. Ale na rozdiel od kartézskeho vzorkovania má nepravidelné vzorkovanie výhodu vo väčšej odolnosti voči artefaktom, takže podvzorkovanie nemá až taký negatívny vplyv. Ďalšou výhodou je, že si môžeme vybrať oblasť vo frekvenčnom spektre, ktorá bude hustejšie navzorkovaná ako iné oblasti. Typicky je hustejšie navzorkovaný stred k-priestoru, čo má za následok napríklad väčšiu odolnosť voči pohybovým artefaktom [23]. Navyše často je viac informácií zakódovaných v okolí stredu spektra na nízkych frekvenciách, teda jeho hustejšie vzorkovanie prináša viac informácií. Nameraný signál uvažujeme ako maticu $d \in \mathbb{C}^{M \times K}$, pre K trajektórií s M vzorkami a $R : \mathbb{C}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times K}$ je príslušný NUFFT. Naším cieľom je zníženie počtu trajektórií, preto budeme uvažovať menší počet vzoriek ako pre kartézske meranie. Teda $MK \ll N^2$. Problém

$$d = Rx \quad (3.4)$$

je nedourčený, teda možných obrazov je nekonečne veľa. Jedna z možností je aplikovať priamo na signál adjungovaný operátor R^* z def. 2.17 resp. $\mathcal{R}^*$ t.j. s kompenzáciou hustoty v prípade nerovnomerne pokrytého spektra. Ak je kompenzácia zahrnutá v operátore, je tiež potrebné ňou prenásobiť vstupné dáta. Tento prístup nepracuje s informáciami o signáli, preto bude mať rekonštruovaný obraz znížené rozlíšenie a môže obsahovať artefakty. Táto jednoduchá rekonštrukcia (nazývaná ako „regridding“) prichádza do úvahy iba v prípade veľkého počtu trajektórií s minimálnym podvzorkovaním.

$$\mathcal{R}^* Wd = x \quad (3.5)$$

Pre vyriešenie rovnice (3.4) je možné hľadať optimálny obraz X na základe apriorných informácií napr. jeho riedkosti. To odpovedá komprimovanému snímaniu a nelineárnej rekonštrukcii za pomoci optimalizačného problému.



Obr. 3.2: Schéma rekonštrukcie pomocou radiálneho snímání a operátoru $\mathcal{R}^*$.

3.3 Paralelné zobrazovanie

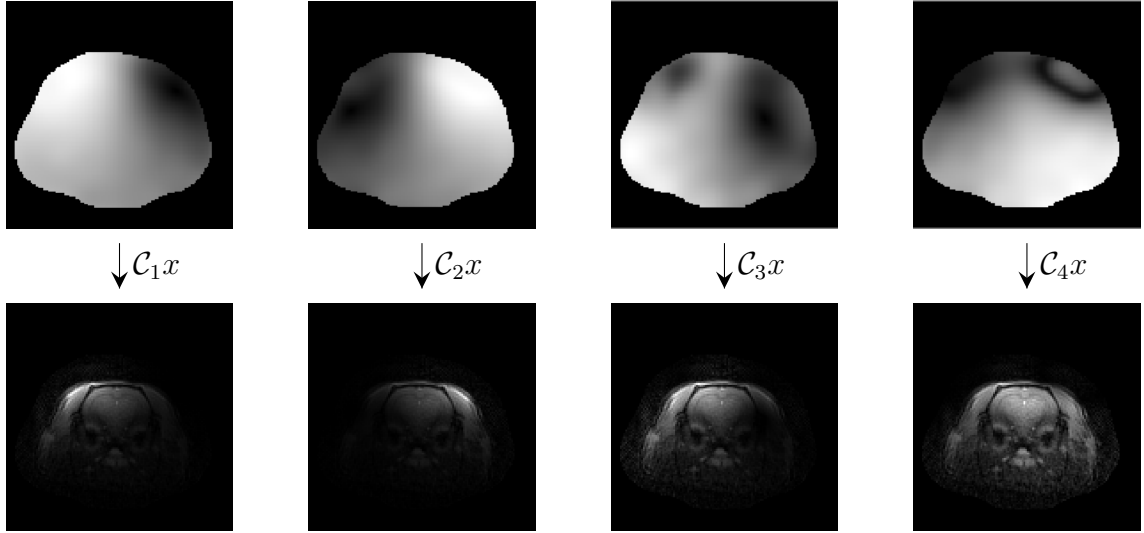
Pri zázname signálu z MR je možné použitie viacerých cievok umiestnených v okolí sledovaného objektu. Dnes používané prístroje bývajú vybavené väčším počtom cievok, typicky 4, 8, 12, 16 alebo viac, s rôznou orientáciou v priestore. Platí, že čím bližšie sledovanej časti tela sa cievka nachádza, tým je citlivejšia na prichádzajúci signál. Intenzita signálu teda závisí na polohe cievky. Preto je nutné ich citlivosti zohľadniť v rekonštrukcii. V praxi sa požívajú tzv. citlivostné mapy, vyjadrujúce intenzitu snímání cievky pre každý pixel. Citlivosti ale často závisia aj na sledovanom objekte, preto je vhodné tieto mapy napočítať pre každý snímávaný objekt. Existuje viacero prístupov ako tieto mapy citlivostí získať. V tejto práci sa obmedzíme na metódu ESPIRIT z článku [32], ktorá je schopná priamo z nameraných dát v k-priestore, dané mapy napočítať.

Citlivosti zavedieme pomocou operátoru: $\mathcal{C}_c$, pre každú cievku $c = 1, 2, \dots, N_c$, ktorý vyjadruje násobenie mapy citlivosti po zložkách s rekonštruovaným obrazom: $x_c = \mathcal{C}_c x$. Tieto mapy je možné vnímať, ako matice rozmeru rekonštruovaného obrazu, so všeobecne komplexnými hodnotami. Rekonštruovaný obraz priamo pomocou dát c -tej cievky bez zahrnutia použitia jej citlivosti označíme x_c .

Sme takto schopní namerať signál na každej cievke zvlášť, a tým pádom získame omnoho viac dát bez zmeny pulznej sekvencie. To nám umožňuje zlepšenie kvality rekonštrukcie, príp. zníženie času snímání.

Ak nemáme informácie o citlivostiach, je možné výsledný obraz rekonštruovať pomocou metódy *Sum Of Squares* (SoS)

$$x_{SoS} = \sqrt{\sum_c |x_c|^2} \quad (3.6)$$



Obr. 3.3: Absolútna hodnota máp citlivosti a výsledok ich bodového prenášobenia výsledným obrazom x .

ktorá ale predpokladá, že sú cievky rozmiestnené pravidelne okolo objektu a intenzity pre jednotlivé mapy majú hodnoty v podobnom rozsahu [20].

Jednoduchá NUFFT rekonštrukcia statického snímku s použitím viacerých cievok môže mať tvar:

$$\hat{x}_{SoS} = \sqrt{\sum_{c=1}^{N_c} |\mathcal{R}^* d_c|}. \quad (3.7)$$

3.4 Komprimované snímanie (CS) v MRI

Myšlienka komprimácie dát spočíva v nameraní signálu a následnej aplikácii zriedovacej transformácie, po ktorej stačí uložiť iba relatívne malé množstvo koeficientov nesúcich väčšiu časť informácie. Táto metóda je odkázaná na nájdenie potrebnej transformácie v ktorej je signál riedky. Ako príklad môžeme uviesť kompresný formát JPEG, ktorý na kompresiu využíva DCT (diskrétnu kosinovú transformáciu) [29].

Prístup komprimovaného snímania (CS-compressed sensing) je ale odlišný; predpokladá apriornú informáciu o signáli, ako napr. jeho riedkosť vo vhodnej reprezentácii, a na základe toho sníma signál iba toľkokrát koľko treba. Inými slovami, komprimované snímanie je efektívna metóda snímania signálu, ktorá nasníma nízky počet vzoriek nezávislo na signáli, a až neskôr používa výpočtovú silu na rekonštrukciu zo zdanlivo nekompletného súboru meraní [6]. Tento prístup je neadaptívny a je možný iba pri splnení troch predpokladov [22]

1. **Riedkosť v nejakej reprezentácii:** Obraz by mal mať riedku reprezentáciu v známej báze, teda musí byť kompresibilný. Pre niektoré snímky platí, že sú riedke priamo bez transformácie, ako napr. obrázky z angiogramu, kde je vidno prakticky iba kontrastne zosilnené cievy na tmavom pozadí. Komplexnejšie obrázky ako napríklad snímky mozgu vykazujú riedkosť po Waveletovej transformácii.
2. **Nekohérentnosť artefaktov:** artefakty spôsobené podvzorkovaním sa musia chovať ako šum. Najmenšiu kohérenciu vykazujú náhodne rozmiestnené vzorky v k -priestore, a naopak pre pravidelné meranie je kohérenca vysoká. Je teda vhodné rozmiestniť vzorky v k -priestore, tak, aby sa čo najviac podobali náhodnému rozmiestneniu. Platí ale, že merania by mali byť realizované na relatívne hladkých krivkách v k -priestore, z dôvodu hardvérových a fyziologických obmedzení MR. Daným požiadavkám vyhovujú používané radiálne aj špirálové trajektórie, ktoré navyše prinášajú výhodu hustejšie snímaného stredu k -priestoru.
3. **Nelineárna rekonštrukcia:** Platí, že rekonštrukcia je nelineárna a prebieha pomocou optimalizácie.

3.4.1 Riedke riešenie systému lineárnych rovníc

Definícia 3.1. [16] Vektor $x \in \mathbb{C}^N$ nazveme **k -riedkym**, ak platí

$$\|x\|_0 \leq k. \quad (3.8)$$

Je to teda vektor, s maximálne k nenulovými hodnotami.

Majme merania $y \in \mathbb{C}^M$ hľadaného signálu $x \in \mathbb{C}^N$ pomocou tzv. *snímacej matice* $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$:

$$y = Ax \quad (3.9)$$

kde $M < N$. Jedná sa teda o nedourčenú sústavu lineárnych rovníc s nekonečne veľa riešeniami. Z dôvodu komprimácie signálu je rozumné hľadať jej riedke riešenia, teda tie čo obsahujú čo najviac nulových hodnôt. Tomuto prístupu zodpovedá nasledujúci optimalizačný problém:

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{splňujúce } Ax = y \quad (3.10)$$

pre známe y a maticu A , ktorá je plnej riadkovej hodnosti. Riešenie problému existuje a je jednoznačné, ale ak by sme chceli popísaný optimalizačný problém vyriešiť presne, odpovedalo by to NP-zložitosti, čo je v praxi neprijateľné [4]. Preto je nutné znížiť požadovanú presnosť a hľadať x numericky pomocou aproximácie. Ale keďže

je l_0 norma nekonvexná, nemôžeme na problém aplikovať žiadny z algoritmov skupiny konvexnej optimalizácie. Preto sa v praxi problém relaxuje na najbližšiu konvexnú l_1 normu. Podmienky ekvivalencie pôvodného problému a jeho l_0 relaxácie možno nájsť napr. v [16]. Ukazuje sa ale, že táto relaxácia nemá vo väčšine prípadov negatívny dopad a často sa riešenia dokonca zhodujú.

V praxi sa navyše v signáli vyskytuje šum, preto požadovanie presného splnenia okrajovej podmienky $y = Ax$ nie je nutné. Povoľujeme preto malú odchýlku ϵ od nameraných dát, čo nás v kombinácii s relaxáciou vedie k nasledujúcemu optimalizačnému problému:

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{splňujúce } \|Ax - y\|_2 \leq \epsilon \quad (3.11)$$

Optimalizačná úloha sa častejšie uvádza v jej penalizačnom tvare:

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right\} \quad (3.12)$$

kde $\lambda > 0$ predstavuje regularizačný parameter ktorý určuje charakter riešenia. Pre veľké λ je preferovaná riedkosť riešenia pred jeho vzdialenosťou od nameraných dát a naopak pre malé λ splňuje riešenie podmienku $y = Ax$ s menšou odchýlkou za cenu menšej riedkosti. Preto je dôležitý parameter λ správne nastaviť. Podmienka 1 umožňujúca komprimované snímanie, môže byť nahradená inou apriornou informáciou o signáli. V tomto prípade predpokladáme že obraz má vlastnosť, ktorá sa prejaví ako nízka hodnota účelovej funkcie $f(x)$. Optimalizačný model má potom tvar:

$$\min_x \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2}_{\text{vernostný člen}} + \underbrace{\lambda f(x)}_{\text{regularizačný člen}} \right\} \quad (3.13)$$

3.5 Apriorné informácie o signále pre CS

Pre signál z MRI predstavujú $x, y \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y}$ matice. Vo vernostnom člene optimalizácie bude tým pádom vystupovať dvojková norma matice, ktorá prejde z vektorovej l_2 normy na Frobeniovu normu (def. 2.11). l_1 normou matice, bude myslený súčet absolútnych hodnôt všetkých prvkov matice, čo je ekvivalentné s l_1 normou preskladané matice do vektoru.

3.5.1 Riedkosť v reprezentácii

Táto vlastnosť už bola v predchádzajúcej kapitole rozobraná, uvedieme ako by vyzerala účelová funkcia. Uvažujme hľadaný obraz x riedky v reprezentácii $\mathcal{A}$. Regularizačný člen bude mať tvar $f(x) = \|\mathcal{A}(x)\|_1$ a celková optimalizácia:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|\mathcal{A}(x)\|_1 \right\} \quad (3.14)$$

3.5.2 Nízka maticová hodnosť

Predpokladom bude v tomto prípade, nízka maticová hodnosť hľadaného obrazu x . To znamená, že v matici obrazu je viac rovnakých alebo veľmi podobných riadkov alebo stĺpcov. Nízka hodnosť sa dá vyjadriť, ako počet nenulových singulárnych čísel, ktoré vieme určiť pomocou SVD rozkladu (2.22). Platí: $\text{rank}(x) = \|\sigma(x)\|_0$. Pre možné použitie konvexnej optimalizácie je treba opäť normu relaxovať. Regularizačný člen bude mať tvar $f(x) = \|x\|_*$ kde $\|\cdot\|_*$ je *nukleárna norma* z definície 2.12, aproximujúca hodnosť matice. Tvar optimalizácie bude:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_* \right\} \quad (3.15)$$

3.5.3 Totálna variácia

V kapitole 2 sme definovali 1D 2.9 a 2D 2.10 totálnu variáciu. V aplikácií na rekonštrukciu obrazov z MR je možné použitie oboch noriem. Pri dynamickej MRI sa naskytuje využitie 1D TV v smere časovej osi. Jedná sa o prípad kedy prvá diferenciálna signálu prezentuje jeho zriedovacu transformáciu: $\mathcal{A}(x) = \nabla_t x$ a optimalizačný model má tvar:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|\nabla_t x\|_1 \right\} \quad (3.16)$$

Pre rekonštrukciu statického snímku prichádza do úvahy hľadaný obraz regularizovať pomocou 2D TV. Tento tvar penalizačnej funkcie $f = \text{TV}_{2D}$, vynúti riešenie s malými zmenami susedných hodnôt.

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \text{TV}_{2D}(x) \right\} \quad (3.17)$$

3.5.4 Zložené modely

Tieto modely predpokladajú viacero apriorných informácií súčasne. Môžeme predpokladať napríklad riedkosť v reprezentácii matice, v kombinácii s jej nízkou hodnotou (L& S model [21]). Alebo je tiež možné rozdeliť výsledný obraz na súčet dvoch alebo viacerých matic, a o každej z nich predpokladať inú vlastnosť. Tento prístup využíva napríklad L+S model [25], uvažovaný v ďalšej časti textu.

4 Optimalizácia

V tejto práci sa obmedzíme na konvexnú optimalizáciu, pretože všetky optimalizačné modely použité v tejto práci budú konvexné. Optimalizačnú úlohu uvažujeme v nasledujúcom tvare:

$$\min_x f(x) \quad \text{vzhľadom k } x \in S \quad (4.1)$$

kde S je množina prípustných riešení a $f(x)$ je tzv. účelová funkcia.

Definícia 4.1. *Množina S je konvexná, ak platí, že s každou dvojicou bodov x_1, x_2 obsahuje aj úsečku ktorá ich spojuje. Vyjadrené matematicky:*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S \quad \text{pre } \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (4.2)$$

Definícia 4.2. [1] *Konvexnou funkciou $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rozumieme funkciu splňujúcu pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad (4.3)$$

Inak povedané, každá spojnica dvoch bodov grafu funkcie f leží nad jej grafom. Ak nahradíme nerovnosť ostrou nerovnosťou ($<$), funkciu f nazveme striktnie konvexnou.

Konvexnou optimalizáciou rozumieme optimalizačný problém (4.1), pre konvexnú množinu prípustných riešení S a konvexnú funkciu f . Tento druh optimalizácie má výhodu, že ak nájdeme lokálne minimum, jedná sa i o minimum globálne. Významnou triedou algoritmov na riešenie konvexných úloh sú proximálne algoritmy, predstavené v nasledujúcej časti.

4.1 Proximálne optimalizačné metódy

Proximálne algoritmy sú dobre použiteľné na riešenie optimalizácie súčtu viacerých konvexných funkcií. Výhodou proximálnych metód je, že dané funkcie nemusia byť diferencovateľné ani hladké. Hlavný krok týchto algoritmov spočíva vo výpočte *proximálneho operátora* funkcie, ktorý zahŕňa relatívne jednoduchý konvexný optimalizačný problém. Tieto menšie podproblémy je možné riešiť štandardnými metódami, často majú priamo analytické riešenie, alebo môžu byť vyriešené rýchlymi špecializovanými metódami [26]. V pokračovaní zavedieme proximálny operátor a spomenieme proximálne algoritmy, používané pri rekonštrukcii snímok z MRI.

Definícia 4.3. [7] *Nech je $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zdola polospojité konvexná funkcia. Potom operátor $\text{prox}_f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definujeme pre každý bod $x \in \mathbb{R}^N$ ako:*

$$\text{prox}_f(x) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ f(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 \right\}. \quad (4.4)$$

Korektnosť zavedenia vyplýva z toho, že minimalizovaná funkcia v (4.4) je striktne konvexná, a teda pre každé x má minimalizácia práve jedno riešenie.

Proximálny operátor je možné vnímať ako zovšeobecnenie projekčného operátora na konvexnú množinu P_M . Ten môžeme dostať, ak za f dosadíme indikátorovú funkciu ι_M množiny M :

$$\iota_M(x) := \begin{cases} 0, & \text{pre } x \in M \\ \infty, & \text{pre } x \notin M. \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1.1 Vlastnosti proximálneho operátora

1. **Separabilita:** [26] Ak je funkcia f separabilná v rámci premenných t.j. $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$, potom platí

$$\text{prox}_f(u, v) = (\text{prox}_\phi(u), \text{prox}_\psi(v)). \quad (4.6)$$

2. **Transformácia:** [26] Pre $f(x) = \varphi(\beta x + b)$ a $\beta \neq 0$ platí:

$$\text{prox}_f(x) = \frac{1}{\beta} \left(\text{prox}_{\beta^2 \varphi}(\beta x + b) - b \right). \quad (4.7)$$

3. **Moreauova identita:** [9] Pre konjugovanú funkciu f^* definovanú ako $f^*(y) = \sup_x (y^T x - f(x))$ k funkcii f platí, že jej proximálny operátor je možné vypočítať pomocou

$$\text{prox}_{\sigma f^*}(x) = x - \sigma \text{prox}_{f/\sigma}(x/\sigma) \quad \text{pre } \sigma > 0. \quad (4.8)$$

4.1.2 Proximálny operátor pre l_1 normu

Ak za funkciu f dosadíme $f = \lambda \|\cdot\|_1$, príslušný proximálny operátor bude vyjadrovať výpočet

$$\text{prox}_{\lambda \|\cdot\|_1}(x) = \arg \min_y \left\{ \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + \lambda \|y\|_1 \right\}. \quad (4.9)$$

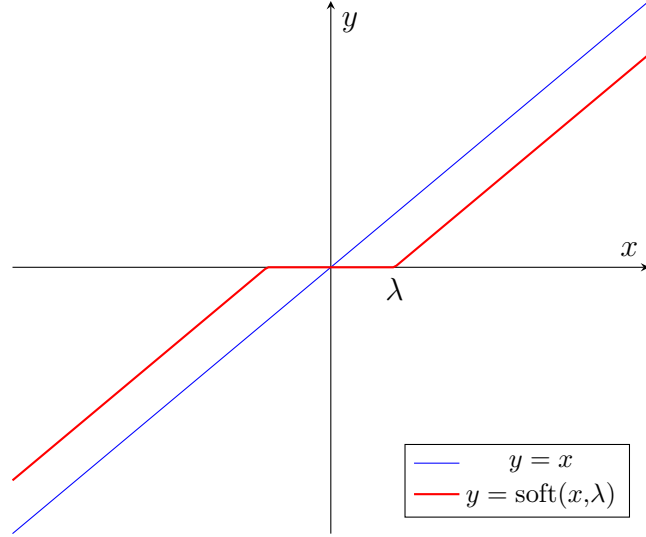
Tento minimalizačný problém má explicitné riešenie [26]

$$\text{prox}_{\lambda \|\cdot\|_1}(x_i) = \begin{cases} x_i - \lambda, & x_i > \lambda \\ 0, & -\lambda \leq x_i \leq \lambda \\ x_i + \lambda, & x_i < -\lambda \end{cases} \quad (4.10)$$

s ekvivalentným vyjadrením

$$\text{prox}_{\lambda\|\cdot\|_1}(x_i) = \frac{x_i}{|x_i|} \max(|x_i| - \lambda, 0) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.11)$$

Táto funkcia je známa, ako *mäkké prahovanie*, alebo *soft-tresholding* (obr. 4.1) a budeme ju značiť $\text{soft}(x, \lambda)$. Je vidno, že prahovanie prebieha postupne po zložkách pre $i = 1, \dots, N$.



Obr. 4.1: Soft-tresholding

Špeciálnym prípadom je nukleárna norma, vyjadrujúca l_1 normu singulárnych čísel. Proximálny operátor pre nukleárnu normu vyjadruje soft-tresholding singulárnych čísel matice X . Budeme ho značiť svt (singular-value thresholding).

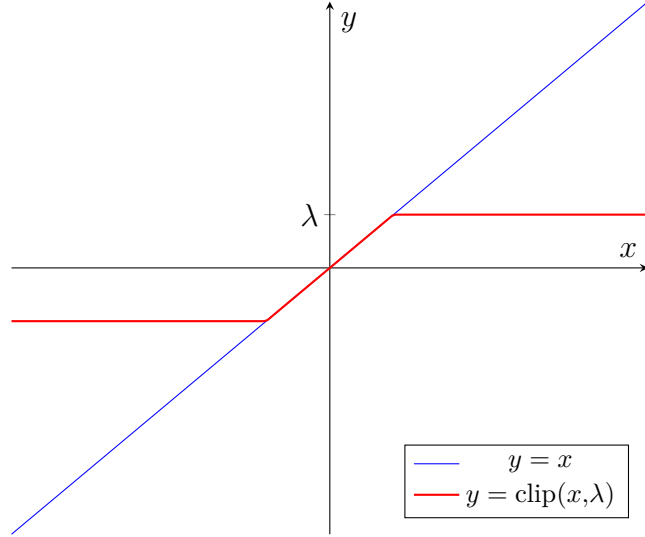
$$\text{svt}(X, \lambda) := \text{prox}_{\lambda\|\cdot\|_*}(X) = \sum_{l=1}^n \text{soft}(\sigma_l, \lambda) u_l v_l^* \quad (4.12)$$

Výpočet teda prebieha tak, že sú nájdené singulárne čísla a vektory matice X , následne na každé singulárne číslo použijeme soft-tresholding a spätne prenásobíme singulárnymi vektormi. Výsledkom môže byť zníženie hodnoty matice, pretože singulárne čísla, nižšie ako zvolený prah λ , sú vynulované. Náročnosť výpočtu tohto operátora je ale relatívne vysoká z dôvodu svd rozkladu.

4.1.3 Proximálny operátor indikátorovej funkcie množiny M

Množinu M budeme uvažovať tvaru $M = \{z : \|z\|_\infty \leq \lambda\}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ je zvolená konštanta. Keďže sa jedná o proximálny operátor indikátorovej funkcie, tak tento operátor prejde na projekčný operátor na množinu $\{z : \|z\|_\infty \leq \lambda\}$. Ten má explicitné vyjadrenie, nazývané **klipovacia** funkcia (obr. 4.2):

$$\text{proj}_{\{\diamond: \|\diamond\|_\infty \leq \lambda\}}(z) = \text{clip}(z, \lambda) = \max(\min(z, \lambda), -\lambda). \quad (4.13)$$



Obr. 4.2: Klipovacia funkcia $\text{clip}(x, \lambda)$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Jedná sa o funkciu úzko súvisiacu s mäkkým prahovaním, ich vzájomný vzťah je určený

$$\text{clip}(z, \lambda) = (z - \text{soft}(z, \lambda)) \quad (4.14)$$

Tak ako pri mäkkom prahovaní, operátor sa na signál aplikuje po zložkách preto nezávisí na tom aká je dimenzia vstupného signálu z .

4.1.4 Proximálny operátor TV

1D TV: V prípade totálnej variácie jedno-dimenzionálneho signálu nemá príslušný proximálny operátor

$$\text{prox}_{\lambda TV(\cdot)}(x) = \arg \min_y \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + \lambda \|\nabla_t y\|_1 \quad (4.15)$$

priamo explicitné vyjadrenie. V článku [8] bol navrhnutý rýchly, priamy algoritmus výpočtu tohto operátoru, využívajúci duálny problém. Tento konečný algoritmus lineárnej zložitosti nám umožňuje tento proximálny operátor rýchlo a efektívne vypočítať.

2D TV: Proximálny operátor pre TV_{2D} (z definície 2.10):

$$\text{prox}_{\lambda TV_{2D}(\cdot)}(x) = \arg \min_y \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + \lambda TV_{2D}(y) \quad (4.16)$$

opäť nemá analytické vyjadrenie. Jeho výpočet je náročnejší ako v prípade 1D, a preto sa prevádza iteračne. V práci je použitá implementácia z MATLAB toolboxu [27].

4.1.5 Proximálna gradientná metóda (Forward-Backward splitting)

Uvažujme úlohu:

$$\min_x G(x) + H(x) \quad (4.17)$$

kde $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je zdola polospojité konvexná funkcia (všeobecne nemusí byť diferencovateľná) a $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná konvexná funkcia s β -lipschitzovským spojitým gradientom, to znamená, že splňuje:

$$\|\nabla G(x) - \nabla G(y)\| \leq \beta \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (4.18)$$

pre $\beta > 0$. Norma $\|\cdot\|$ je operátorová norma podľa definície 2.14 pre dvojkovú vektorovú normu. Pre prípad matíc je rovná ich najväčšiemu singulárnemu číslu [23]. Jedná sa o iteratívny algoritmus striedajúci dva kroky a to dopredný- ktorý využíva výpočet gradientu funkcie G a spätný- implicitný krok ktorý zahŕňa výpočet proximálneho operátora funkcie H [7]. Ak je splnená podmienka $t < 2/\beta$ tak algoritmus konverguje. Existenciu a jednoznačnosť zaručia podmienky:

1. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} G(x) + H(x) = \infty$
2. striktná konvexnosť (def. 4.2) $G + H$.

Algoritmus 1: [7] FB-Forward Backward algoritmus

Vstup: funkcie G a H ,

Výstup: $x^{(n)}$

Zvoľ $t > 0$

Zvoľ počiatočný odhad $x^{(0)}$

for $n = 1, 2, \dots$ **do**

$\tilde{x}^{(n+1)} := x^{(n)} - t \nabla G(x^{(n)})$
 $x^{(n+1)} := \text{prox}_{tH}(\tilde{x}^{(n+1)})$

return $x^{(n)}$

4.1.6 Chambolle-Pock (CP) algoritmus

Tento algoritmus z článku [17], nazývaný tiež *primal-dual algoritmus*, predpokladá minimalizačný problém tvaru:

$$\arg \min_x \{f_1(x) + f_2(Kx)\} \quad (4.19)$$

kde f_1 , a f_2 sú konvexné funkcie. Nie je nutná diferencovateľnosť ani jednej z nich, čo predstavuje veľkú výhodu tohto algoritmu oproti FB. Ďalšou výhodou je prítomnosť lineárneho operátora K . Algoritmus konverguje, ak platí podmienka:

$$\sigma \zeta \|K\|^2 < 1. \quad (4.20)$$

Norma $\|\mathcal{K}\|$ je operátorová norma z definície 2.14 a σ, ζ sú volené konštantný vystupujúce v algoritme. Odvodenie CP algoritmu pre konkrétny prípad spracovania obrazového signálu možno nájsť v [34].

Algoritmus 2: Chambolle-Pock algoritmus

Vstup: funkcie f_1, f_2 a lineárny operátor $\mathcal{K}$

Výstup: $\bar{p}^n$

Zvoľ $\zeta, \sigma > 0$ a $\theta \in \{0, 1\}$

Zvoľ štartovacie hodnoty primárnych $p^{(0)}$ a duálnych premenných $q^{(0)}$

Zvoľ štartovaciu hodnotu pre výstupnú premennú $\bar{p}^{(0)} = p^{(0)}$.

$n = 0$

repeat

$q^{(n+1)} = \text{prox}_{\sigma f_2^*}(q^{(n)} + \sigma \mathcal{K} \bar{p}^{(n)});$
 $p^{(n+1)} = \text{prox}_{\zeta f_1}(p^{(n)} - \zeta \mathcal{K}^* q^{(n+1)});$
 $\bar{p}^{(n+1)} = p^{(n+1)} + \theta(p^{(n+1)} - p^{(n)});$
 $n = n + 1;$

until *konvergencia*;

return $\bar{p}^{(n)}$

5 Optimalizačné modely pre CS

Doteraz bolo v texte uvedené, ako vyzerá optimalizácia pri komprimovanom snímaní ľubovoľného signálu $x \in \mathbb{C}^N$. Pre rekonštrukciu dát zo **statickej** MRI (pri použití viacerých cievok a nekartézskych trajektórií) má model pre ľubovoľnú regularizačnú funkciu $r(x)$ tvar:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{N_c} \|d_c - \mathcal{R} \mathcal{C}_c x\|_2^2 + \lambda r(x) \right\} \quad (5.1)$$

kde $d_c \in \mathbb{C}^{N_s \times N_d \times N_c}$ - sú namerané dáta pre každú cievku pre násobené kompenzáciou hustoty W , $x \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y}$ resp. $\mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ - je hľadaný obraz, $\mathcal{C}_c \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y}$ - značia citlivosti cievok a $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{N_p \times N_s}$ - je NUFFT operátor s kompenzáciou hustoty (N_p značí počet projekcií a N_s počet vzoriek na projekciu).

Aby sme sa zbavili sumy v (5.1), je možné preskladať vernostný člen do tvaru

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{N_c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{R} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{N_c} \end{bmatrix} x \right\|_2^2. \quad (5.2)$$

Dostaneme tak tvar, ktorý je prehľadnejší a vhodnejší pre použitie spomenutých algoritmov konvexnej optimalizácie.

Pre **dynamickú** rekonštrukciu budeme uvažovať dáta pre N_f časových okamihov teda $d_{c,f} \in \mathbb{C}^{N_s \times N_d \times N_c \times N_f}$. Podľa charakteru trajektórií je možné, buď použiť rovnaký operátor $\mathcal{R}$ pre každý časový snímok, alebo ak nie sú snímané body v k-priestore stále rovnaké (ako napríklad pri radiálach so zlatým uhlom), uvažovať operátory $\mathcal{R}_f$. Hľadané obrazy označíme x_f a model optimalizácie bude mať tvar:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{c=1}^{N_c} \|d_{c,f} - \mathcal{R}_f \mathcal{C}_c x_f\|_2^2 + \lambda r(x) \right\} \quad (5.3)$$

Podobnou úvahou je možné odstrániť aj druhú sumu z vernostného členu [28].

5.1 L+S model

Tento model uvažuje výsledný obraz ako súčet dvoch zložiek:

$$M = L + S$$

a o každej z nich predpokladá apriornú informáciu. Tento model je vhodný pre použitie na dynamickú MRI, pretože umožňuje zachytiť viac apriorných informácií o dynamických snímkach ako napr. *L&S* model. Model L+S bol prezentovaný

v článku [25]. V tejto práci bude rozobratý a odvodený prípad, keď o L predpokladáme, že má nízku hodnotu a S má riedku diferenciu v časovej doméne, t.j. má nízku TV [25].

Pri dynamickom snímaní, má hľadaná matica $M \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y \times N_f}$ tri rozmery: dva priestorové a jeden časový, a preto ak hovoríme o nízkej hodnosti alebo iných vlastnostiach matice M , je nutné ju preskladať na dvojrozmernú. Vhodné preskladanie je do tzv. **Casoratiho matice** $M \in \mathbb{C}^{N_x \cdot N_y \times N_f}$, kde sú časové snímky preskladané do jednotlivých stĺpcov. Pre túto maticu platí, že v riadkoch sa priamo nachádzajú perfúzne krivky pre jednotlivé pixely, čo nám umožňuje zachytiť napríklad podobnosť perfúzných kriviek pre pixely pomocou nízkej hodnosti tejto matice. Tento model vedie na optimalizáciu:

$$\arg \min_{L, S} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{c=1}^{N_c} \|d_{c,f} - \mathcal{R}_f \mathcal{C}_c(L_f + S_f)\|_2^2 + \lambda_L \cdot r_L(L_f) + \lambda_S \cdot r_S(S_f) \right\}. \quad (5.4)$$

kde $r_L = \|\cdot\|_*$ a $r_S = \|\nabla_t \cdot\|_1$. V ďalšej časti je uvedené porovnanie dvoch algoritmov popísaných v predchádzajúcej časti na riešenie tohto L+S modelu.

5.1.1 L+S model pomocou FB algoritmu

Tento prístup bol realizovaný v práci [10]. Po úprave a preznačení operátorov je možné zapísať model ako

$$\hat{L}, \hat{S} = \arg \min_{L, S} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \|d - \mathcal{RC}(L + S)\|_2^2}_{G(L, S)} + \underbrace{\lambda_L \cdot \|L\|_* + \lambda_S \cdot \|\nabla_t S\|_1}_{H(L, S)} \right\}. \quad (5.5)$$

Je nutné nájsť parameter β splňujúci (4.18), pomocou ktorého určíme $t < \frac{2}{\beta}$. Gradient funkcie $G(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2$ pre všeobecný lineárny operátor A je rovný

$$\nabla G(x) = A^*(Ax - y). \quad (5.6)$$

V tomto prípade je jednoduché odvodiť z (4.18) a (5.6) pomocou vzťahu (2.26), že $\beta = \|A\|^2$ (operátorová norma). Pre našu funkciu G je gradient rovný

$$\nabla G(L, S) = \mathcal{C}^* \mathcal{R}^*(\mathcal{RC}(L + S) - d). \quad (5.7)$$

Odvedenie $\beta = \|A\|^2$ platí pre funkciu jednej premennej, preto v našom prípade prepíšeme G ako funkciu jednej zloženej premennej

$$G([L \ S]) = \frac{1}{2} \left\| [\mathcal{RC} \ \mathcal{RC}], \begin{bmatrix} L \\ S \end{bmatrix} - d \right\|_2^2 \quad (5.8)$$

kde $\mathcal{R}$ je operátor NUFFT s kompenzáciou hustoty a jeho norma je vďaka normalizácii kompenzácie hustoty a podľa (2.30) $\|\mathcal{R}\| < 1$ v prípade podvzorkovania. Po aplikácii operátora normovaných citlivostí $\mathcal{C}$ (t.z. že sú podelené ich maximálnou hodnotou) bude hodnota normy zachovaná [25] teda $\|\mathcal{RC}\| < 1$. Platí že, $\|[\mathcal{RC} \mathcal{RC}]\|^2 = \|\mathcal{RC}\mathcal{C}^*\mathcal{R}^* + \mathcal{RC}\mathcal{C}^*\mathcal{R}^*\| = 2\|\mathcal{RC}\mathcal{C}^*\mathcal{R}^*\| = 2\|\mathcal{RC}\|^2$, a preto môžeme vyjadriť $\beta = \|A\|^2 = \|[\mathcal{RC} \mathcal{RC}]\|^2 = 2\|\mathcal{RC}\|^2 < 2$.

V práci je použitý parameter $t = 1$ ktorý splňuje podmienku $t < \frac{2}{\beta}$ okrajovo, ale ukazuje sa, že pre praktické použitie je dostačujúci a algoritmus konverguje.

Funkcia H je separabilná, a preto podľa (4.6) je možné vyjadriť jej proximálny operátor ako

$$\text{prox}_H \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{prox}_{\lambda_L \|\cdot\|_*}(u) \\ \text{prox}_{\lambda_S \|\nabla_{t \cdot}\|_1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{svt}(u, \lambda_L) \\ \text{prox}_{\lambda_S \text{TV}(\cdot)}(v) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Algoritmus (1) bude po upravení vyzerat nasledovne [28] :

Algoritmus 3: FB-Forward Backward algoritmus pre L+S model

Vstup: Dáta d , operátory $\mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*$, parametre λ_L, λ_S

Výstup: $M, L^{(n)}, S^{(n)}$

Zvoľ $t > 0$

Zvoľ počiatočné odhady $L^{(0)}, S^{(0)}$.

for $n = 1, 2, \dots$ **do**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{L}^{(n+1)} := L^{(n)} - t \cdot \mathcal{C}^* \mathcal{R}^* \left(\mathcal{RC} \left(L^{(n)} + S^{(n)} \right) - d \right) \\ \tilde{S}^{(n+1)} := S^{(n)} - t \cdot \mathcal{C}^* \mathcal{R}^* \left(\mathcal{RC} \left(L^{(n)} + S^{(n)} \right) - d \right) \\ L^{(n+1)} = \text{prox}_{t\lambda_L \|\cdot\|_*} \left(\tilde{L}^{(n+1)} \right) \\ S^{(n+1)} = \text{prox}_{t\lambda_S \|\nabla_{t \cdot}\|_1} \left(\tilde{S}^{(n+1)} \right) \end{array} \right.$$

return $M = L^{(n)} + S^{(n)}$

5.1.2 L+S model pomocou CP algoritmu

Tvar L+S modelu (5.4) vhodný pre Chambolle-Pock algoritmus je

$$[\hat{L}\hat{S}] = \arg \min_{[LS]} \left\{ f_2 \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{RC} & \mathcal{RC} \\ 0 & \nabla_t \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} L \\ S \end{bmatrix} \right) + f_1 \left(\begin{bmatrix} L \\ S \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (5.10)$$

kde

$$f_1 \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \lambda_L \|u\|_* \quad \text{a} \quad f_2 \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \|d - u\|_2^2 + \lambda_S \|v\|_1. \quad (5.11)$$

Separabilita funkcií f_1 a f_2 nám umožňuje vyjadriť jednotlivé proximálne operátory zvlášť pre každú zložku. Teda operátory vystupujúce v alg. 2 možno vyjadriť ako

$$\text{prox}_{\zeta f_1} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{prox}_{\zeta \lambda_L \|\cdot\|_*}(u) \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{svt}(u, \zeta \lambda_L) \\ v \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

a

$$\text{prox}_{\sigma f_2} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{prox}_{\frac{\sigma}{2} \|d-\cdot\|_2^2}(u) \\ \text{prox}_{\sigma \lambda_s \|\cdot\|_1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u+\sigma d}{1+\sigma} \\ \text{soft}(v, \sigma \lambda_s) \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

V algoritme ale vystupuje proximálny operátor konjugovanej funkcie k f_2 pre ktorý platí Moreauova identita (4.8). Odvodenie operátora sa nachádza v prílohe A a jeho výsledný tvar je

$$\text{prox}_{\sigma f_2^*} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{u - d\sigma}{\sigma + 1} \\ \text{clip}(v, \lambda_s) \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Chambolle-Pock algoritmus pre dynamickú MRI bude vyzeráť nasledovne[28]:

Algoritmus 4: Chambolle-Pock algoritmus pre L+S model

Vstup: Dáta d , operátory $\mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*, \nabla_t, \nabla_t^*$, parametre λ_L, λ_S .

Výstup: $\bar{p}_L^{(n)}, \bar{p}_S^{(n)}$

Zvoľ $\zeta, \sigma > 0$ a $\theta \in \{0, 1\}$

Zvoľ štartovacie hodnoty primárnych $p_L^{(0)}, p_S^{(0)}$ a duálnych premenných $q_L^{(0)}, q_S^{(0)}$

Zvoľ štartovciú hodnotu pre výstupnú premennú $\bar{p}_L^{(0)} = p_L^{(0)}, \bar{p}_S^{(0)} = p_S^{(0)}$.

$n = 0$

repeat

$$\begin{aligned} u_L &= q_L^{(n)} + \sigma \mathcal{R} \mathcal{C} (\bar{p}_L^{(n)} + \bar{p}_S^{(n)}) \\ u_S &= q_S^{(n)} + \sigma \nabla_t \bar{p}_S^{(n)} \\ q_L^{(n+1)} &= \frac{u_L - \sigma d}{1 + \sigma} \\ q_S^{(n+1)} &= u_S - \sigma \text{prox}_{(\lambda_S/\sigma) \|\cdot\|_1} (u_S/\sigma) = \text{clip}(u_S, \lambda_S) \\ v_L &= p_L^{(n)} - \zeta \mathcal{C}^* \mathcal{R}^* q_L^{(n+1)} \\ v_S &= p_S^{(n)} - \zeta (\mathcal{C}^* \mathcal{R}^* q_L^{(n+1)} + \nabla_t^* q_S^{(n+1)}) \\ p_L^{(n+1)} &= \text{svt}(v_L, \zeta \lambda_L) \\ p_S^{(n+1)} &= v_S \\ \bar{p}_L^{(n+1)} &= p_L^{(n+1)} + \theta (p_L^{(n+1)} - p_L^{(n)}) \\ \bar{p}_S^{(n+1)} &= p_S^{(n+1)} + \theta (p_S^{(n+1)} - p_S^{(n)}) \\ n &\leftarrow n + 1 \end{aligned}$$

until konvergencia;

return $\bar{p}^{(n)} = \bar{p}_L^{(n)} + \bar{p}_S^{(n)}$

Ostáva už iba odvodenie normy operátora $\mathcal{K}$ aby sme mohli určiť parametre ζ, σ . Pre skrátenie zápisu označme $E = \mathcal{RC}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} E & E \\ 0 & \nabla_t \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} E^* & 0 \\ E^* & \nabla_t^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & E \\ 0 & \nabla_t \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} E^*E & E^*E \\ E^*E & E^*E + \nabla_t^*\nabla_t \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} E^*E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & E^*E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E^*E & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^*E + \nabla_t^*\nabla_t \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \|[E^*E] + [E^*E] + [E^*E] + [E^*E + \nabla_t^*\nabla_t]\| \leq \\
&\leq \|[E^*E]\| + \|[E^*E]\| + \|[E^*E]\| + \|[E^*E]\| + \|\nabla_t^*\nabla_t\| \leq \\
&\leq 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 8
\end{aligned}$$

Musí preto platiť

$$\zeta\sigma < \frac{1}{8}. \quad (5.15)$$

Experimentálne bolo overené, že vyhovuje nastavenie $\zeta = 0,9$ a odpovedajúce $\sigma = 1/(0,9 \cdot 8)$.

5.1.3 Overenie na simulovaných dátach

Na overenie L+S modelu, riešeného pomocou dvoch spomínaných algoritmov, boli použité simulované dynamické dáta (tzv. fantom). Dáta dodal ÚPT¹ a jedná sa o simuláciu snímania rezu hlavy potkana. Dynamické dáta obsahujú 10 000 radiál, na každej 128 vzoriek snímaných s využitím zlatého uhlu. Rozmer rekonštruovaného obrazu uvažujeme 128×128 pixelov a každý časový snímok rekonštruujeme pomocou 21 radiál. To vedie k viac ako 9-násobnému podvzorkovaniu oproti kartézskemu snímaniu pre každý snímok. Mapy citlivosti boli napočítané metódou ESPIRIT s využitím prvých 400 radiál.

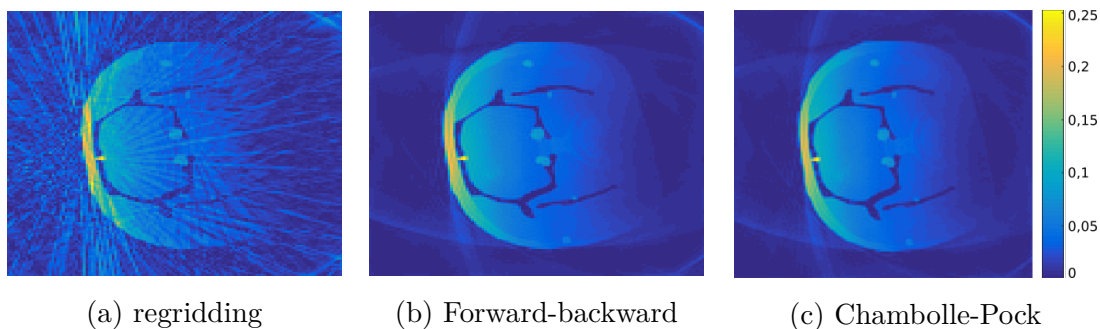
Regularizačné parametre modelu L+S (5.4) a parametre algoritmov FB a CP, vyhovujúce príslušným obmedzeniam uvedeným v predchádzajúcej časti, boli určené experimentálne. Parametre $\lambda_S = 0,1$ a $\lambda_L = 0,025 \cdot \sigma_1$ (kde σ_1 je najväčšie singulárne číslo matice L^2) boli rovnaké pre oba algoritmy. Časový krok FB algoritmu bol nastavený na $t = 1$ a pre CP algoritmus $\zeta = 0,9$, $\sigma = 0,13$ a $\theta = 1$.

Výsledky

Ako je vidno z obr. 5.1 L+S model (5.4) je schopný z podvzorkovaného merania úspešne rekonštruovať hľadaný obraz. Je viditeľné potlačenie tzv. „streakingu“ t.j. artefaktov spôsobených aliasingom, ktorý výrazne znehodnocuje rekonštruovaný obraz (ako v prípade regriddingu).

¹ÚPT-Ústav prístrojové techniky, AV ČR, Brno.

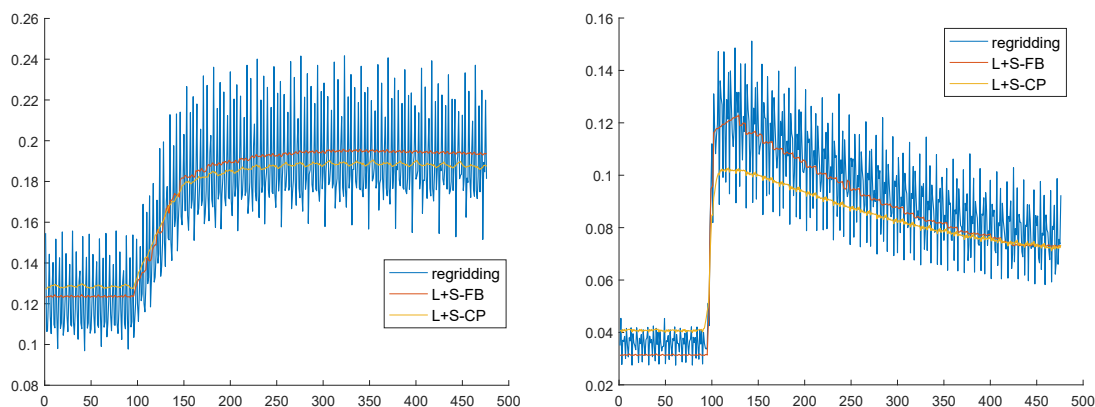
²Tieto parametre boli prebraté z práce [23], no bola preverená ich optimálnosť pre použité dáta.



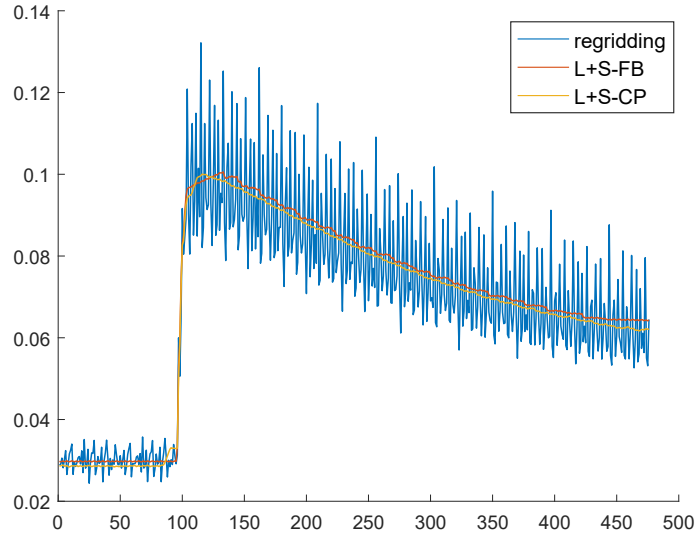
Obr. 5.1: Ukážka posledného rekonštruovaného snímku fantómu pre 21 radiál na jeden časový okamih pomocou a) priamej aplikácie adjungovaného NUFFT operátora, a L+S modelu (5.4) s 30 iteráciami, riešeného pomocou: b) Forward-backward algoritmu; c) Chambolle-Pock algoritmu. Snímky b) a c) prakticky splývajú.

Pozícia perfúzných kriviek

Algoritmy konvergujú k rovnakému riešeniu, avšak pre menší počet iterácií sa môžu riešenia líšiť. Jeden z rozdielov medzi riešeniami pre menší počet iterácií, t.j. 15, je rozdielna pozícia perfúzných kriviek, z oblastí kde je významný prestup kontrastnej látky. Jedná sa o perfúzne krivky ktoré vykazujú väčšie skoky. Na obr. 5.2 sú zobrazené perfúzne krivky pre dva pixely práve z takejto oblasti. Z obrázku je vidieť, že L+S model výrazne zlepšuje kvalitu rekonštruovaných perfúzných kriviek oproti regriddingu, ale krivky rekonštruované dvoma odlišným algoritmami majú odlišný priebeh. Tento efekt sa pre väčší počet iterácií vytratí. Pre 30 iterácií majú výsledné perfúzne krivky rovnakú pozíciu (obr. 5.3).



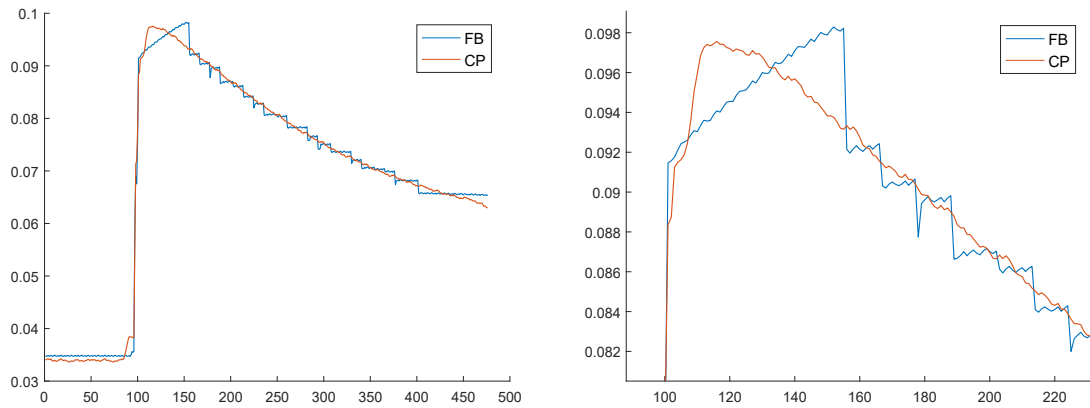
Obr. 5.2: Perfúzne krivky pre FB a CP algoritmus po 15 iteráciách pre dva pixely. Modrou je značená krivka rekonštruovaná pomocou regriddingu, červenou pomocou FB algoritmu a oranžovou pomocou CP algoritmu. Horizontálna os predstavuje čas a vertikálna os hodnotu sledovaného pixelu pre časový okamih.



Obr. 5.3: Perfúzna krivka pre FB a CP algoritmus po 30 iteráciách. Je vidno, že ich pozícia je rovnaká.

Skokové zmeny

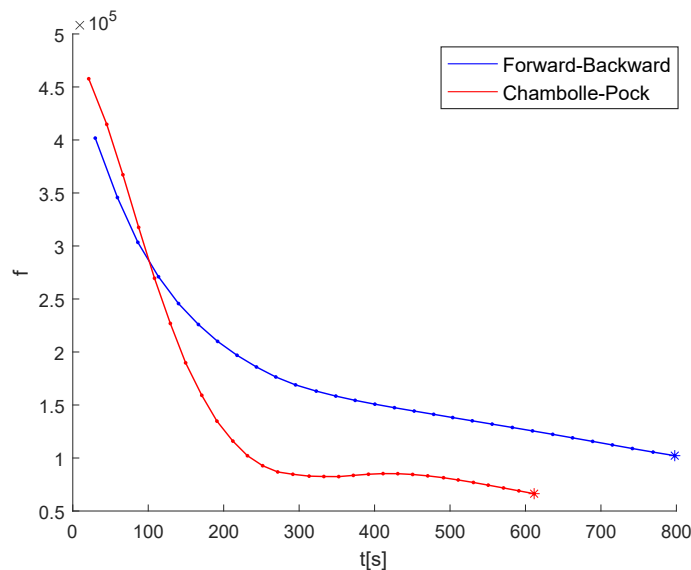
Z rekonštrukcie fantómu je vidieť, že v perfúzných krivkách získaných FB algoritmom sa vyskytujú skokové zmeny (obr. 5.4), zatiaľ čo v krivkách získaných pomocou CP algoritmu tieto skoky prítomné nie sú. Tento jav sa v riešení pomocou FB vyskytuje nezávisle na počte iterácií a pravdepodobne ho spôsobuje Condatov algoritmus [8] na priamy výpočet $\text{prox}_{TV_{1D}}$ (4.15), ktorý preferuje väčšie skoky pred plynulým priebehom. V prípade CP algoritmu sa proximálny operátor zjednoduší na $\text{soft}(x, \lambda)$.



Obr. 5.4: Perfúzne krivky pre jeden pixel, pre 30 iterácií oboch algoritmov. Riešenie FB algoritmom vykazuje „schodovitý“ priebeh. Vľavo je celý časový priebeh, napravo priblíženie.

Konvergenca

Algoritmy 3 a 4 majú formálne rozdielne kroky; vo FB je počítaný proximálny operátor 1D totálnej variácie $\text{prox}_{TV(\cdot)}$ (4.1.4) pomocou algoritmu z článku [8], zatiaľ čo v CP algoritme vystupuje namiesto toho jednoduchší soft operátor. Ale v CP prebieha navyše výpočet priamej a adjungovanej totálnej variácie hľadanej matice. Ostatné operácie sú prakticky rovnaké (zanedbávame jednoduché násobenia a sčítania, ktoré nemajú výrazný vplyv na čas algoritmu). Konvergenciu posudzujeme podľa hodnoty účelovej funkcie (5.4) po jednotlivých iteráciách a ich časovej náročnosti. Pre simulované dáta, klesá hodnota účelovej funkcie rýchlejšie v prípade CP algoritmu, a už pre 7 iterácií dosiahne nižšiu hodnotu ako FB algoritmus. Celkový čas algoritmu a finálna hodnota účelovej funkcie je nižšia v prípade CP algoritmu (obr. 5.5).

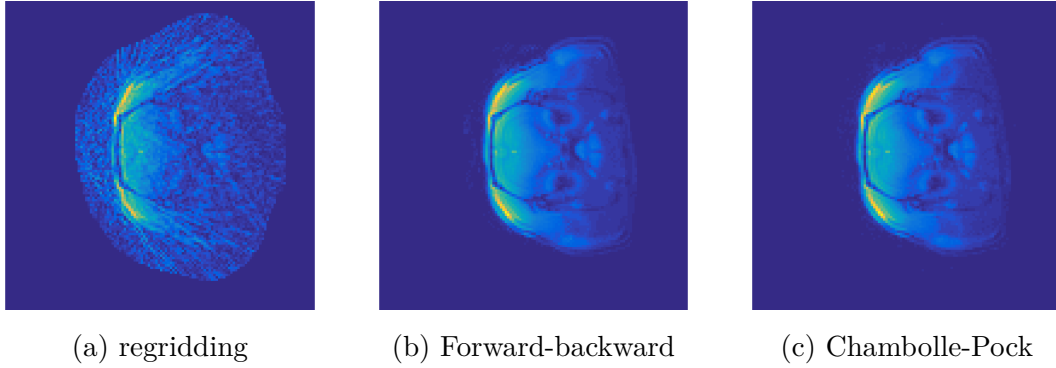


Obr. 5.5: Konvergenčné profily FB a CP algoritmu pre L+S model s 30 iteráciami, pre simulované dáta. Horizontálna os vyjadruje čas potrebný pre algoritmus a vertikálna os vyjadruje hodnotu účelovej funkcie po iteráciách. Každý bod vyjadruje ukončenie jednej iterácie.

5.1.4 Overenie na reálnych dátach

Chambolle-Pock a Forward-Backward algoritmy pre L+S model boli overené aj na reálnych dátach, DCE-MRI rezu hlavy potkana. Dáta boli merané pomocou radiálnych trajektórií so zlatým uhlom (2.2) a na každej radiále bolo nameraných 128 vzoriek na štyroch cievkach rozmiestnených okolo hlavy. Rozmer rekonštruovaného obrazu bol nastavený na 128×128 pixelov a mapy citlivosti pre cievky boli určené

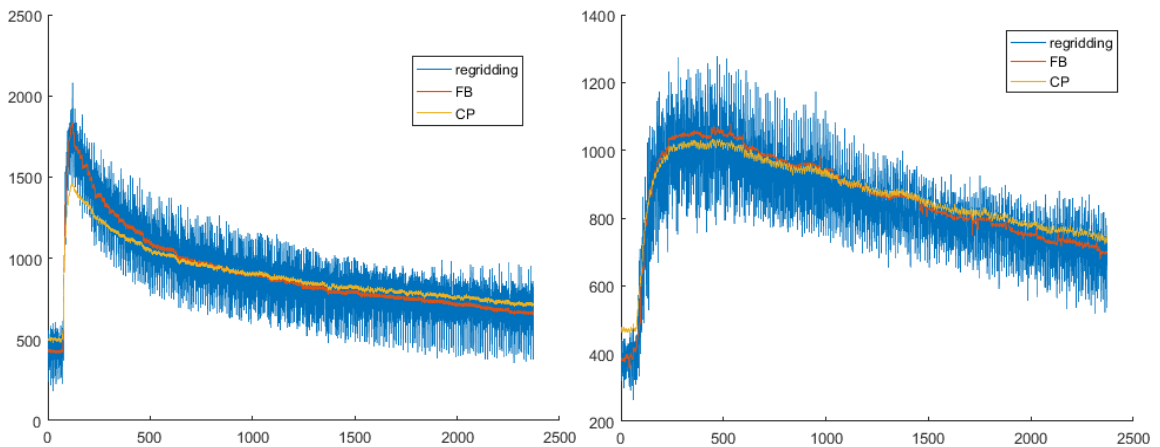
pomocou metódy ESPIRIT [32] z prekontrastných kartézskych meraní. Kompenzácie hustoty boli vypočítané pomocou Voroného diagramu.



Obr. 5.6: Ukážka rekonštruovaného snímku pomocou 21 radiál, pre jeden časový okamih, pomocou a) priamej aplikácie adjungovaného NUFFT operátora, a L+S modelu (5.4) riešeného 30 iteráciami algoritmu: b) Forward-backward ; c) Chambolle-Pock.

5.1.5 Výsledky

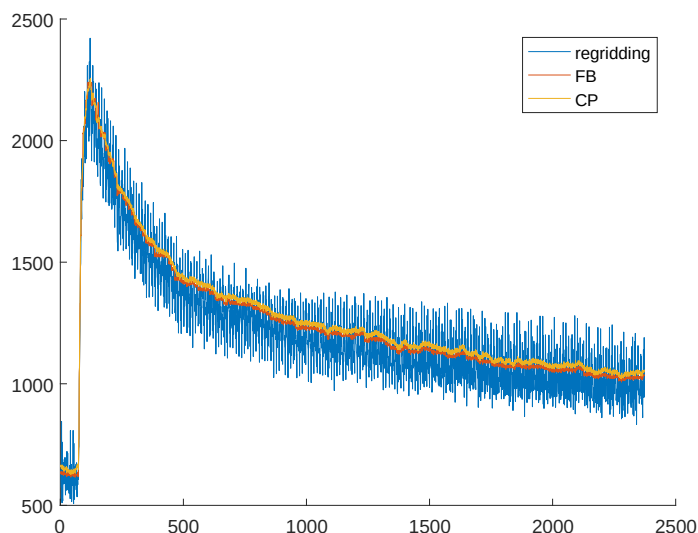
Parametre modelu boli nastavené ako v predchádzajúcom prípade na $\lambda_S = 0,1$ a $\lambda_L = 0,025 \cdot \sigma_1$. Na jeden časový okamih uvažujeme 21 radiál z celkového počtu 50 000, čo predstavuje 2373 časových snímok. Parameter FB algoritmu nastavíme ako $t = 1$ a parametre CP algoritmu na $\zeta = 0,9$, $\sigma = 0,13$ a $\theta = 1$. Ako v prípade fantómu, tak aj pre reálne dáta je L+S model schopný rekonštrukcie z podvzorovaných dát. Rozdiel medzi riešeniami FB a CP algoritmu nie je z jednotlivých časových snímok viditeľný (obr. 5.6).



Obr. 5.7: Perfúzne krivky pre FB a CP algoritmus po 15 iteráciach pre dva pixely z rekonštrukcie reálnych dát.

Pozícia perfúzných kriviek

Podobný efekt ako bolo vidieť pre dáta fantómu sa objavil aj pre reálne dáta. Na obr. 5.7 sú zobrazené perfúzne krivky po 15 iteráciách FB a CP algoritmov, z oblastí s výrazným prestupom kontrastnej látky. Pozícia perfúzných kriviek rekonštruovaných CP algoritmom nemá po 15 iteráciách správnu pozíciu (hlavne pri výrazných skokoch v čase nedosiahne maximálnu hodnotu). Tento nedostatok odstráni 30 iterácií algoritmu (viď obr. 5.8).



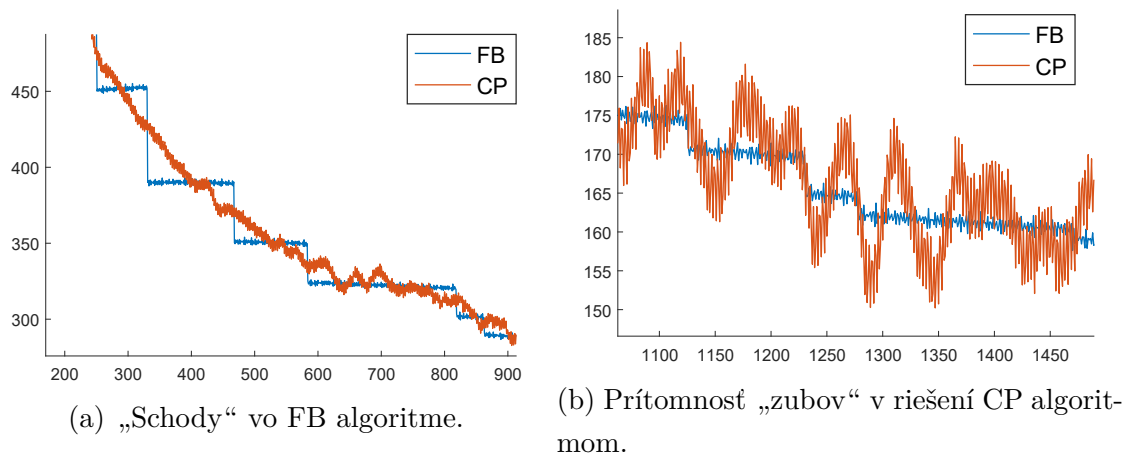
Obr. 5.8: Perfúzne krivky po 30 iteráciách FB a CP algoritmu L+S modelu. Modrou je značená krivka rekonštruovaná pomocou regriddingu, červenou pomocou FB algoritmu a oranžovou pomocou CP algoritmu.

Skokové zmeny

Skokové zmeny v perfúzných krivkách rekonštruovaných FB algoritmom sú prítomné aj pre reálne dáta (obr. 5.9a). V krivkách rekonštruovaných pomocou CP sa objavujú odchýlky od strednej hodnoty vo forme „zubov“ (obr. 5.9b), čo má, hlavne pre perfúzne krivky s konštantným priebehom negatívny vplyv. Tieto kmity majú výraznú periódu a vysvetlením by mohlo byť dýchanie resp. iný periodický pohyb myši pri snímaní, ktorý FB model vyrovnal, zatiaľ čo v riešení Chambolle-Pock algoritmom ostal prítomný. Tieto javy sa v riešení vyskytujú nezávisle na počte iterácií.

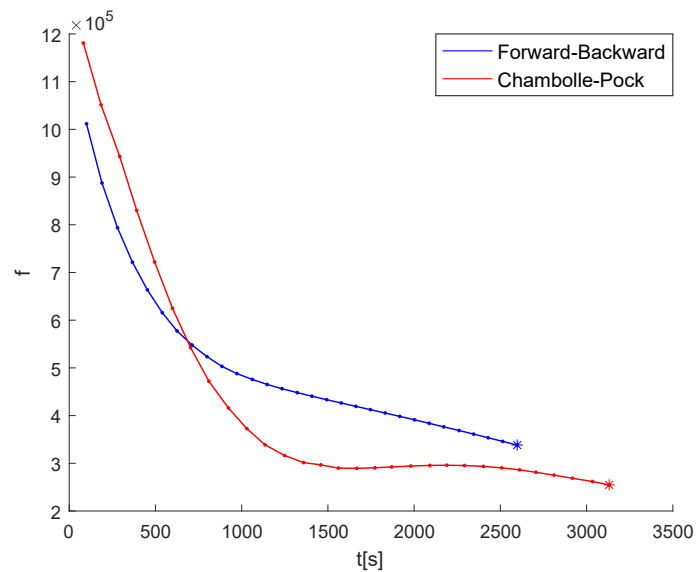
Konvergenca

Konvergenca algoritmov je podobná ako v prípade simulovaných dát, rýchlejší pokles javí CP algoritmus, ktorý sa po 7 iteráciách dostane na hodnotu nižšiu ako FB



Obr. 5.9: Úseky perfúzných kriviek pre dva odlišné pixely, ilustrujúce správanie riešení L+S modelu pomocou 30 iterácií algoritmu FB–modrá a CP–červená.

algoritmus. Výsledná hodnota účelovej funkcie je nižšia pre CP algoritmus, ktorý ale dlhšie trvá (5.10). Pomalší chod CP algoritmu môže byť spôsobený väčším počtom dát (pätnásobne viac ako pre fantóm). Javí sa, že CP algoritmus je numericky náchylnejší pre zväčšovanie rozmeru signálu ako FB algoritmus.



Obr. 5.10: Konvergenčné profily FB a CP algoritmu pre L+S model s 30 iteráciami. Horizontálna os vyjadruje čas potrebný pre algoritmus a vertikálna os vyjadruje hodnotu účelovej funkcie.

5.1.6 L+S model s obmedzenými diferenciami

Jedná sa o L+S model navrhnutý v práci [23], ktorý predpokladá o L nízku hodnotu a o S jej obmedzenie časovej diferencie. Túto požiadavku na S možno vyjadriť pomocou indikátorovej funkcie na množine $\mathcal{N} = \{S : \|\nabla_t S\|_\infty \leq \lambda_S\}$, ktorá obsahuje všetky signály, ktoré majú maximálnu diferenciu menšiu ako zvolený prah λ_S . Motiváciou tohoto prístupu bol „schodovitý“ priebeh perfúzných kriviek L+S modelu s reguláciou pomocou TV riešeného algoritmom Forward-Backward. Model s obmedzenými diferenciami limituje veľkosť skokov v časovom smere zložky S pomocou indikátorovej funkcie, a tým sleduje odstránenie väčších skokov v perfúzných krivkách sledovaných pixelov. Navrhnutý model je tvaru:

$$\hat{L}, \hat{S} = \arg \min_{L, S} \left\{ \frac{1}{2} \|d - \mathcal{RC}(L + S)\|_2^2 + \lambda_L \cdot \|L\|_* + \iota_{\{\diamond: \|\nabla_t \diamond\|_\infty \leq \lambda_S\}}(S) \right\}. \quad (5.16)$$

Pri riešení tohoto modelu pomocou Chambolle-Pock algoritmu (tvaru 5.10) dôjde ku zmene výlučne vo vyjadrení funkcie f_2 ; operátor $\mathcal{K}$ a funkcia f_1 ostávajú rovnaké. Výhodou CP algoritmu oproti FB je fakt, že totálna variácia ∇_t sa nachádza vo vnútri operátora $\mathcal{K}$ a vďaka tomu vo funkcii f_2 nevystupuje. To umožní explicitný výpočet proximálneho operátora indikátorovej funkcie, ktorý pre implementáciu pomocou FB algoritmu nie je možný. Funkcia f_2 má tvar

$$f_2 \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \|d - u\|_2^2 + \iota_{\{v: \|v\|_\infty \leq \lambda_S\}}. \quad (5.17)$$

Táto zmena sa prejaví iba vo vyjadrení proximálneho operátora

$$\text{prox}_{\sigma f_2^*}(v) = \text{prox}_{\iota_{\{\diamond: \|\nabla_t \diamond\|_\infty \leq \lambda_S\}}^*}(v). \quad (5.18)$$

Platí, že proximálny operátor indikátorovej funkcie na množine $\mathcal{N}$ prejde na projekčný operátor na túto množinu (4.5).

Pre výpočet (5.18) použijeme Moreauovu identitu 4.8), explicitné vyjadrenie projekčného operátora–klipovaciu funkciu (odvodenú v časti 4.1.3) a vzťah medzi soft a clip operátormi (4.14).

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\sigma f_2^*}(v) &= v - \sigma \max \left(\min \left(\frac{v}{\sigma}, \frac{\lambda_S}{\sigma} \right), -\frac{\lambda_S}{\sigma} \right) = \\ &= v - \max(\min(v, \lambda_S), -\lambda_S) = \text{soft}(v, \lambda_S). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pre parametre ζ, σ platí rovnaký vzťah (5.15); algoritmus 4 zostane rovnaký, až na spomenutý proximálny operátor, ktorý prejde z clip(u_S, λ_S) na soft(u_S, λ_S).

Výsledky

Model bol overený na rovnakých reálnych dátach zo snímania hlavy potkana ako v predošlej časti. Parameter $\lambda_L = 0,025 \cdot \sigma_1$ bol nastavený rovnako, zatiaľ čo parameter λ_S bolo nutné znížiť na hodnotu blízku nule ($\lambda_S = 0,001$ alebo menej). Tu sa ukázal úzky súvis medzi predchádzajúcim modelom a modelom s obmedzenými diferenciami riešenými CP algoritmom. Parameter λ_S vystupuje v algoritme 4 iba v proximálnom operátore pri výpočte $q_s^{(n+1)}$. Pre L+S model s TV regularizáciou je vo forme $\text{clip}(u_s, \lambda_S)$, zatiaľ čo pre model s obmedzenými diferenciami tvaru $\text{soft}(u_s, \lambda_S)$. Ukazuje sa že hodnoty matice u_s sú prevažne menšie ako zvolený prah, v prípade TV regularizácie $\lambda_S = 0,1$, a až pre vysoký počet iterácií funkcia clip obmedzí rast koeficientov v tejto matici. Platí, že pre vysoké³ λ_S sa klipovacia funkcia, pre menší počet iterácií (napr. 30), spáva ako identita. Vysoká hodnota parametru v prípade TV môže byť interpretovaná, ako zosilnenie požiadavky na nízku variáciu matice S.

V prípade modelu s obmedzenými diferenciami vystupuje parameter λ_S ako hranica prípustnej totálnej variácie matice S. Preto ekvivalent ku zväčšenej hodnote parametru pre TV reguláciu, bude v prípade tohto modelu nízka hodnota λ_S ⁴, ktorá spôsobí, že model bude konvergovať k riešeniu s obmedzenou (nízkou) časovou diferenciou. Pre výpočet $q_s^{(n+1)}$ to znamená, že operátor $\text{soft}(u_s, \lambda_S)$, ktorý tu vystupuje, bude aj v tomto prípade blízko identite, a preto sú riešenia modelu s TV (pre $\lambda_S = 0,1$) a modelu s obmedzenými diferenciami (pre $\lambda_S = 0,001$) pre 30 iterácií CP algoritmu veľmi podobné.

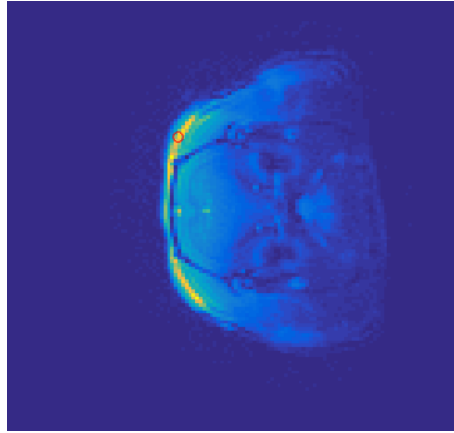
Záver

Ukázalo sa, že skoky v perfúzných krivkách získaných z L+S modelu s regularizáciou pomocou TV riešeného FB algoritmom možno odstrániť už za použitia iného algoritmu na riešenie rovnakého modelu (Chambolle-Pock algoritmus). Navyše navrhnutý model s obmedzenými diferenciami neponúka výrazné zlepšenie pre nízky počet iterácií pri riešení pomocou CP algoritmu. Na obr. 5.11 je zobrazený posledný rekonštruovaný snímok a na obr.5.12 perfúzne krivky pre vyznačený pixel získané pomocou L+S modelu s regularizáciou pomocou TV (červenou) a obmedzení diferencií (oranžovou). Rekonštrukcia po 30 iteráciách CP algoritmu dopadla skoro identicky. Parametre:

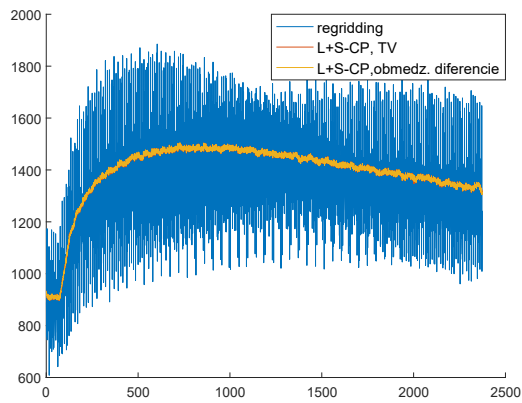
- **L+S–TV:** $\lambda_L = 0,025 \cdot \sigma_1$, $\lambda_S = 0,1$
- **L+S–obmedzené diferencie:** $\lambda_L = 0,025 \cdot \sigma_1$, $\lambda_S = 0,001$

³Vysokou hodnotou možno rozumieť už hodnoty $\lambda_S > 0,2$.

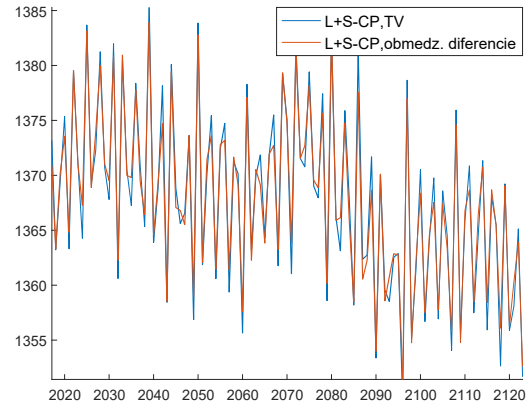
⁴Za nízku hodnotu možno považovať $\lambda_S < 0,01$.



Obr. 5.11: Posledný rekonštruovaný snímok L+S s obmedzenými diferenciami, pomocou 30 iterácií CP algoritmu.



(a) Perfúzne krivky z vyznačeného pixelu.



(b) Priblíženie

Obr. 5.12: Vľavo sú skoro identické perfúzne krivky pre L+S model s TV (5.4) a obmedzenými diferenciami (5.16) riešenými CP algoritmom. Vpravo je priblíženie, na ktorom vidno malý rozdiel v riešeníach.

6 2D- Sparsity-assisted signal smoothing

SASS je metóda na nelineárnu 1D filtráciu signálu, vychádzajúca z článku [31], ktorá bola zovšeobecnená v práci [24] na 2D obraz zo statickej magnetickej rezonancie.

V tejto práci bude snahou upraviť model SASS tak, aby bol sme dosiahli zlepšenie kvality za cenu komplikovanejšej rekonštrukcie. Najprv je uvedený pôvodný model a spôsob akým SASS funguje. Následne budú odvodené dva upravené modely, ktorých snaha bude potlačiť artefakty spôsobené silným podvzorkovaním a v závere bude porovnanie týchto troch modelov.

Sparsity-assisted signal smoothing, ako už napovedá názov, využíva princíp riedkosti v optimalizácií v kombinácii s konvenčnou LTI filtráciou (lineárna, invariantná voči času). Nameraný signál v modeluje, ako súčet low-pass signálu f a komponenty s riedkou diferenciou K -teho rádu g . V nameranom signáli uvažujeme aj prítomnosť bieleho gaussovského šumu e , ktorý sa metóda snaží potlačiť [31]. Signál je tvaru:

$$v = f + g + e. \quad (6.1)$$

V našom prípade, pri použití na MRI snímku, vezmeme $K = 1$ t.j. riedku diferenciáciu prvého rádu pre člen g , ktorá vynúti aby bola zložka g po častiach konštantná. Pre metódu je nutné určiť tiež vhodný typ LTI filtru. My budeme uvažovať Butterworthov filter¹.

Predpoklady: L označíme low-pass (filter typu dolný priepust) Butterworthov filter a $H = I - L$ odpovedajúci high-pass filter² (filter typu horný priepust). Zjednodušene budeme predpokladať, že low-pass filter odstráni všetok prítomný šum, teda $L(e) \approx 0$ a po odčítaní g od signálu v je možné vyjadriť $\hat{f} = L(f + e) = L(v - g)$. Z toho vyplýva, že ak dostaneme odhad $\hat{g}$ tak sme schopný vyjadriť i $\hat{f}$ a tým dostaneme hľadaný obraz bez šumu $\hat{u} = \hat{f} + \hat{g}$.

Po aplikácii high-pass filtru H na (6.1) dostaneme³

$$H(v - \hat{g}) \approx e. \quad (6.2)$$

Pri formulácii odhadu g ako riešenia lineárneho inverzného problému (6.2) je teda možné uvažovať vernostný člen určený k minimalizácii ako $\|H(v - g)\|_2^2$. Keďže g má riedke prvé diferencie, jedná sa o po častiach konštantný obraz a ako ideálna regularizácia sa javí TV norma. Pre dáta platí, že sú namerané v spektre a teda $v = \mathcal{R}^*d$, kde $\mathcal{R}^*$ je adjungovaný NUFFT operátor. Tento prístup bol využitý v práci

¹Viac k Butterworthovmu filtru možno nájsť napr. v práci [24]

²resp. H a L vyjadrujú operátory ktoré prevádzajú filtráciu.

³Predpokladáme, že $H(f) = 0$.

[24]. Výsledný model má teda tvar:

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|\mathcal{H}(\mathcal{R}^*d - g)\|_2^2 + \tau \text{TV}(g). \quad (6.3)$$

6.1 Upravený model SASS2D

Ukázalo sa, že pôvodný model (6.3) nie je vhodný na výrazne podvzorkované dáta z dôvodu, že nie je schopný dostatočne potlačiť artefakty. Preto nie je použitie modelu pre rekonštrukciu dynamických dát, príliš vhodné. Výhodou pôvodného modelu je, že v priebehu iterácií FB algoritmu sa neaplikuje NUFFT operátor $\mathcal{R}$, čo má pozitívny vplyv na jeho rýchlosť. Myšlienkou pri úprave modelu je prehodiť operátor $\mathcal{R}$ vo vernostnom člene, čím sa výpočet spomalí, ale v každej iterácii v FB algoritme bude použitý NUFFT operátor ktorý môže potenciálne zlepšiť výsledok. Schéma modelu je:

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|\mathcal{H}(d - \mathcal{R}g)\|_2^2 + \tau \text{TV}(g). \quad (6.4)$$

Konštanta τ predstavuje nový regularizačný parameter a $\mathcal{H}$ vyjadruje nový operátor ktorý nemôže byť rovnaký ako operátor filtrácie typu horný priepust v modeli (6.3). Je to z dôvodu prehodenia operátora $\mathcal{R}$ ktorý spôsobí, že výraz v zátvorke bude v neuniformnom spektre a nie v obrazovej doméne. Tento operátor by ale mal vyjadrovať „novú“ filtráciu typu horný priepust.

Riešenie SASS pomocou FB algoritmu pre paralelné snímanie

Ako bude ukázané v ďalšej časti textu, všetky uvažované SASS modely možno previesť do tvaru vhodného pre FB algoritmus:

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|Ag - w\|_2^2 + \tau \text{TV}(g) \quad (6.5)$$

a pre prípad viacerých cievok na tvar :

$$\hat{g} = \arg \min_g \sum_{k=1}^{N_c} \left(\frac{1}{2} \|A_k g - w_k\|_2^2 \right) + \tau \text{TV}(g). \quad (6.6)$$

Hľadané g je nezávislé na k , pretože platí, že jednotlivé obrazy rekonštruované pomocou k -tej cievky vyjadríme ako $g_k = \mathcal{C}_k g$. Gradient potrebný pre FB algoritmus bude mať tvar:

$$\nabla G(g) = \sum_{k=1}^{n_c} A_k^* (A_k g - w_k).$$

Taktiež je potrebné odvodiť lipschitzovskú konštantu β pre výpočet kroku t :

$$\begin{aligned} \|\nabla G(g) - \nabla G(h)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{N_c} A_k^* (A_k g - w_k) - \sum_{k=1}^{N_c} A_k^* (A_k h - w_k) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{N_c} [A_k^* A_k (g - h)] \right\| \leq \sum_{k=1}^{N_c} \|A_k^* A_k (g - h)\| \leq \sum_{k=1}^{N_c} \|A_k\|^2 \|g - h\| = \beta \|g - h\| \end{aligned} \quad (6.7)$$

V odvodení bola využitá trojuholníková nerovnosť pre normu a fakt, že operátor A_k je spojitý a lineárny. Z toho vyplýva že $\beta = \sum_k^{n_c} \|A_k\|^2$. Teraz máme všetko potrebné pre výpočet g pomocou FB algoritmu z dát snímaných k cievkami pre všeobecný problém 6.6.

Získanie výsledného obrazu

Po nájdení odhadu $\hat{g}$ môžeme vyjadriť jednotlivé obrazy pre cievku $k = 1, \dots, N_c$ ako

$$\hat{u}_k = \hat{f}_k + \hat{g}_k = \mathbf{L}(\mathcal{R}^* d_k - \mathcal{C}_k \hat{g}) + \mathcal{C}_k \hat{g} = \mathbf{L}(\mathcal{R}^* d_k) + \mathbf{H}(\mathcal{C}_k \hat{g}). \quad (6.8)$$

Nakoniec zložíme výsledný obraz pomocou SoS metódy (3.6):

$$u = \sqrt{\sum_k |u_k|^2} \quad (6.9)$$

6.1.1 Upravený model SASS2D-1

Pôvodný filter $\mathbf{H}$ filtroval priamo obrazovú maticu; ale v našom prípade je člen $(d - \mathcal{R}g)$ v neuniformnej frekvenčnej oblasti, a preto tomu musíme prispôbiť aj filter. Bežne pri aplikácii filtru postupujeme tak, že prevedieme Fourierovou transformáciou signál do jeho spektra, vynásobíme ho frekvenčnou charakteristikou filtru a spätne transformujeme pomocou inverznej Fourierovej transformácie. Preto sa v našom prípade naskytá možnosť uvažovať časť operátora $\mathcal{H}$, z modelu (6.2), priamo ako frekvenčnú charakteristiku Butterworthovho filtru s parametrami f_0 a n . Tento upravený filter (ozn. $\mathcal{H}_1$), by ale musel byť vyhodnotený v neuniformných bodoch spektra, z dôvodu nerovnomerného merania k-priestoru (obr. 6.1). Aby sme sa po filtrácii vrátili späť do obrazovej domény, môžeme použiť operátor adjungovanej NUFFT $\mathcal{R}^*$. V tomto prípade by bol filtračný operátor tvaru: $\mathcal{H} = \mathcal{R}^* \mathcal{H}_1$ a teda vernostný člen optimalizácie by mal tvar:

$$\|\mathcal{R}^*(\mathcal{H}_1(d - \mathcal{R}g))\|.$$

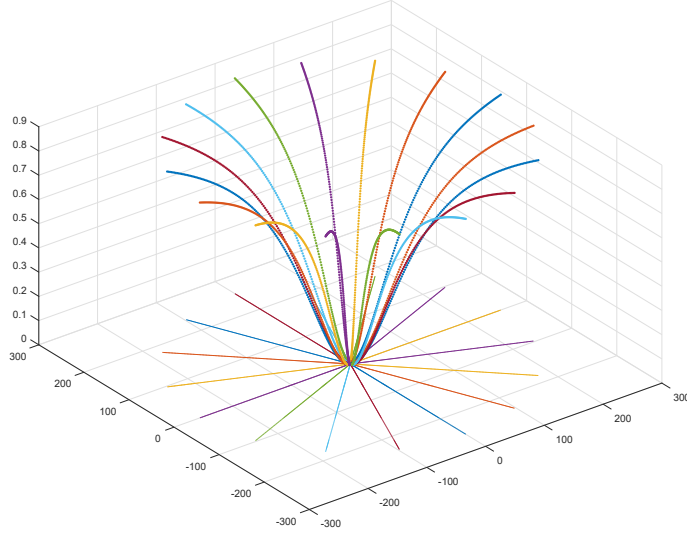
Platí ale:

$$\|\mathcal{R}^*(\mathcal{H}_1(d - \mathcal{R}g))\| \leq \|\mathcal{R}^*\| \|(\mathcal{H}_1(d - \mathcal{R}g))\| < \|(\mathcal{H}_1(d - \mathcal{R}g))\|, \quad (6.10)$$

preto stačí minimalizovať výraz bez $\mathcal{R}^*$. Takto získaný model označíme SASS2D-1:

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|\mathcal{H}_1 d - \mathcal{H}_1 \mathcal{R}g\|_2^2 + \tau \text{TV}(g). \quad (6.11)$$

Tento model, rozšírený o snímanie pomocou viacerých cievok, možno jednoducho previesť do tvaru (6.6), kde $A_k = \mathcal{H}_1 \mathcal{R} \mathcal{C}_k$ a $w_k = \mathcal{H}_1 d_k$.



Obr. 6.1: Ukážka frekvenčnej charakteristiky filtru $\mathcal{H}_1$ v súradniciach určených pomocou 16 radiál.

Gradient $\nabla G(g)$ má tvar:

$$\nabla G(g) = \sum_{k=1}^{N_c} \mathcal{C}_k^* \mathcal{R}^* \mathcal{H}_1^* (\mathcal{H}_1 \mathcal{R} \mathcal{C}_k g - \mathcal{H}_1 d). \quad (6.12)$$

Na vyjadrenie časového kroku t , potrebujeme vypočítať $\beta = \sum_k^{n_c} \|A_k\|^2$. Keďže $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{C}_k$ vyjadruje násobenie po zložkách, jedná sa o diagonálne operátory a platí:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_k^{n_c} \|\mathcal{H}_1 \mathcal{R} \mathcal{C}_k\|^2 \leq \sum_k^{n_c} (\|\mathcal{H}_1\| \|\mathcal{R}\| \|\mathcal{C}_k\|)^2 \leq \sum_k^{n_c} (\max(|\mathcal{H}_1|) \|\mathcal{R}\| \max(|\mathcal{C}_k|))^2 = \\ &= \max(|\mathcal{H}_1|)^2 \|\mathcal{R}\|^2 \sum_k^{n_c} \max(|\mathcal{C}_k|)^2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Pre normu NUFFT operátora platí odhad $\|\mathcal{R}\| < 1$ (viď 2.30). Pre $t < 2/\beta$ algoritmus konverguje k riešeniu (6.2).

6.1.2 Upravený model SASS2D-2

Ďalšia možnosť výpočtu modelu s prehodeným NUFFT operátorom je dodatočná spätná transformácia pomocou $\mathcal{R}^*$ pred aplikáciou filtru. V tomto prípade by transformovaný filter vyjadroval

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \mathcal{R}^*, \quad (6.14)$$

kde $\mathcal{H}$ je pôvodný Butterworthov filter aplikovaný na obraz. Tento model budeme značiť ako SASS2D-2:

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|\mathcal{H}(\mathcal{R}^* d - \mathcal{R}^* \mathcal{R} g)\|_2^2 + \tau \text{TV}(g). \quad (6.15)$$

Rozdiel oproti pôvodnému modelu je iba v prítomnosti operátora $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$, ktorý sa pre plné vzorkovanie blíži identite. Ak nedôjde k podvzorkovaniu, SASS2D-2 splýva s pôvodným modelom. Keďže ale skúmame použitie pre dynamické dáta, je v nich prítomné relatívne silné podvzorkovanie a to spôsobí, že sa upravený model bude líšiť od pôvodného. Pre upravenie do tvaru vhodného pre FB algoritmus (6.5) musíme previesť úpravu vernostného členu.

Odvodenie: Podobne ako v [24] upravíme:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(\mathcal{R}^*d - \mathcal{R}^*\mathcal{R}g)\|_2^2 &= \|h * (\mathcal{R}^*d - \mathcal{R}^*\mathcal{R}g)\|_2^2 = \|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}h\mathcal{F}(\mathcal{R}^*d - \mathcal{R}^*\mathcal{R}g))\|_2^2 = \\ &= \|\mathcal{F}h\mathcal{F}(\mathcal{R}^*d - \mathcal{R}^*\mathcal{R}g)\|_2^2 = \|\mathcal{H}(\mathcal{F}\mathcal{R}^*\mathcal{R}g - \mathcal{F}\mathcal{R}^*d)\|_2^2 = \|\mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*\mathcal{R}g - \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*d\|_2^2 = \\ &= \|Ag - w\|_2^2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

V druhom kroku odvodenia ignorujeme spätnú Fourierovu transformáciu pretože sa jedná o unitárny operátor. Operátor $A = \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*\mathcal{R}$, kde $\mathcal{H} = \mathcal{F}h$ je frekvenčná charakteristika filtru. Konštanta $w = \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*d$. Pri použití paralelného snímania, dostaneme tvar SASS2D-2

$$\hat{g} = \arg \min_g \sum_{k=1}^{N_c} \left(\frac{1}{2} \|\mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*\mathcal{R}\mathcal{C}_k g - \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*d_k\|_2^2 \right) + \tau \text{TV}(g). \quad (6.17)$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade odvodíme gradient $\nabla G(g)$ a hodnotu β :

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_k^{n_c} \|\mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*\mathcal{R}\mathcal{C}_k\|^2 \leq \sum_k^{n_c} (\|\mathcal{H}\| \|\mathcal{F}\| \|\mathcal{R}\|^2 \|\mathcal{C}_k\|)^2 \leq \sum_k^{n_c} (\max(|\mathcal{H}|) \|\mathcal{R}\|^2 \max(|\mathcal{C}_k|))^2 = \\ &= \max(|\mathcal{H}|)^2 \|\mathcal{R}\|^4 \sum_k^{n_c} \max(|\mathcal{C}_k|)^2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.1.3 Overenie na statických reálnych dátach

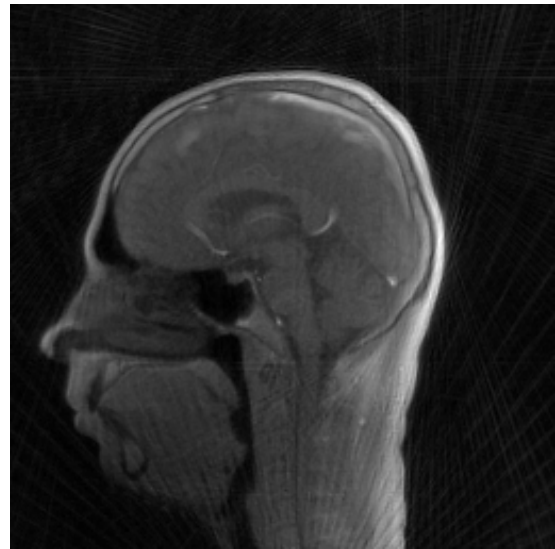
Proximálny operátor v FB algoritme bude v prípade SASS vyjadrovať proximálny operátor totálnej 2D variácie ($\text{prox}_{\lambda TV_{2D}(\cdot)}(g)$) spomenutý v časti 4.1.4, a bude implementovaný pomocou iteračného algoritmu. Ostáva určiť parametre Butterworthovho filtru a regularizačný parameter τ . Ten môže závisieť na charaktere snímanej oblasti, v tejto práci je použitie SASS na snímanie rezu hlavy pre ktoré sa ako vhodné javí zvoliť $\tau = 0,0001$. Parametre filtru boli nastavené na $f_0 = 128$ a $n = 1$. Tým pádom máme všetko potrebné na zistenie $\hat{g}$ pomocou FB algoritmu (alg. 1), pre oba upravené modely. Na rekonštrukciu použijeme 100 radiál po 195 vzoriek, čo vedie ku viac ako pätnásobnému podvzorkovaniu pre rekonštruovaný obraz rozmeru 256×256 pixelov. Na obr. 6.2 je vidieť výsledky rekonštrukcie po 300 iteráciách FB algoritmu pre všetky metódy. Je na nich viditeľné mierne potlačenie „streakingu“, avšak nie

jeho úplné odstránenie. Pri porovnaní navrhnutých modelov SASS2D-1 a SASS2D-2 s pôvodným modelom SASS, nie je viditeľné výrazné zlepšenie. Vyplýva z toho, že zvýšená náročnosť a predĺženie výpočtu navrhnutých modelov neprináša skvalitnenie rekonštrukcie oproti pôvodnému modelu SASS. Náš cieľ, zlepšiť rekonštrukciu pri podvzorkovaní tak, aby bola metóda vhodnejšia na dynamické dáta, sa nepodarilo dosiahnuť. Jedná sa o modely použiteľné pri redukcii šumu a mierneho podvzorkovania, avšak pre účel dynamickej rekonštrukcie nie sú príliš vhodné.

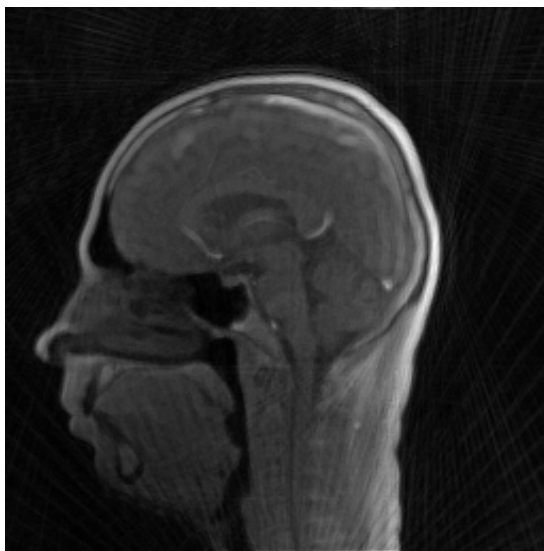
Ako vysvetlenie toho prečo nedošlo k lepšiemu potlačeniu artefaktov sa ponúka fakt, že finálne zloženie riešenia pre k -tu cievku $\hat{u}_k$ (6.8) pozostáva zo súčtu optimalizovaného čelnu $\mathbf{H}(\mathcal{C}_k \hat{g})$ a časti $\mathbf{L}(\mathcal{R}^* d_k)$, ktorá je na výpočte $\hat{g}$ nezávislá. Preto ak uvažujeme výrazné podvzorkovanie, low-pass filter neodstráni artefakty z regriddingu, a preto sa budú v riešení vyskytovať nezávisle na rekonštrukcii $\hat{g}$. Ďalším faktorom je nízka intenzita optimalizovaného $\hat{g}$ oproti výslednému obrazu (obr. 6.3). To spôsobí, že zmena v optimalizácii $\hat{g}$ sa neprejaví dostatočne na toľko, aby bol výsledný obraz podstatne kvalitnejší. Je preto možné, že pre viditeľne odlišné zložky $\hat{g}$ dostaneme podobný výsledok (obr. 6.3).



(a) SoS+regridding



(b) SASS2D

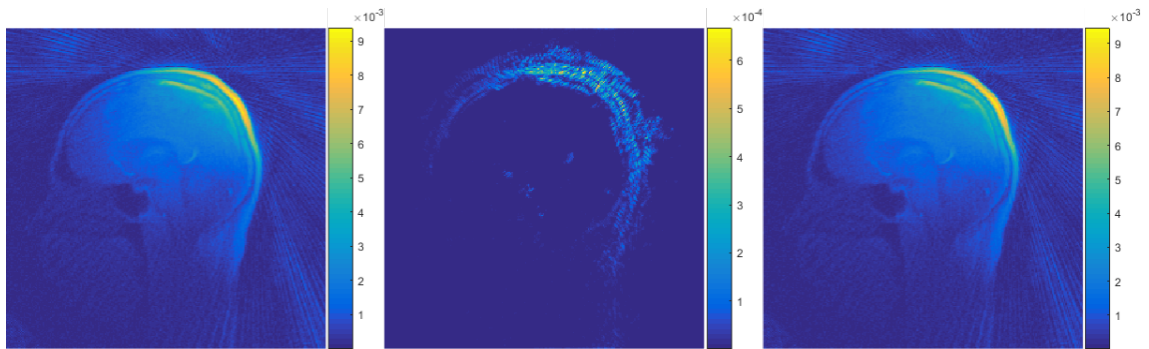


(c) SASS2D-1

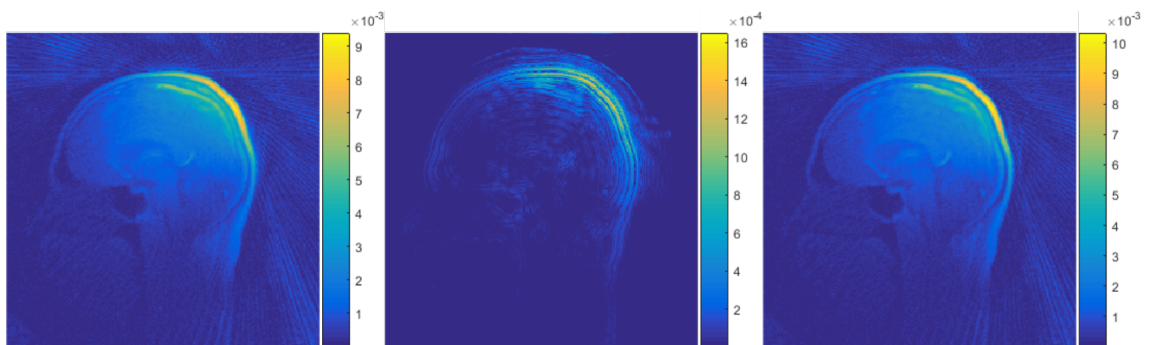


(d) SASS2D-2

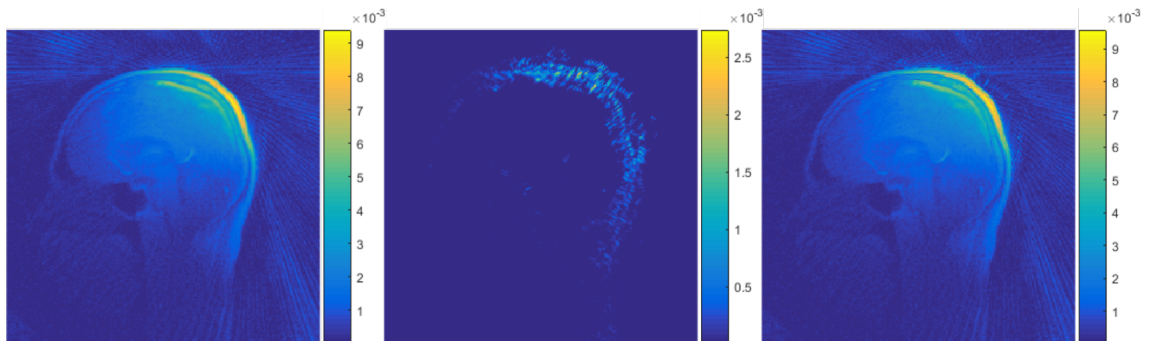
Obr. 6.2: Porovnanie rekonštrukcie pomocou základnej SoS metódy a navrhnutých SASS modelov. Je vidieť, že modely sú schopné do istej miery potlačiť artefakty a šum oproti regriddingu. Platí ale, že navrhnuté modely SASS2D-1 ani SASS2D-2 neponúkajú výrazné zlepšenie kvality oproti pôvodnému modelu.



(a) Pôvodný SASS model



(b) SASS2D-1



(c) SASS2D-2

Obr. 6.3: Ukážka výsledných zložiek obrazu (zlava do prava) $L(\mathcal{R}^*d_{20})$, $H(C_{20}\hat{g})$ a $\hat{u}_{20} = L(\mathcal{R}^*d_{20}) + H(C_{20}\hat{g})$, pre cievkou č.20 (jedná sa o cievkou pre ktorú je výsledné g_k relatívne výrazné). Tu sa ukazuje, že zložka rekonštruovaná pomocou $\hat{g}$ má oveľa nižšie hodnoty (4–14 násobne), a preto vo výslednom súčte nie je až taká významná.

7 Záver

Perfúzna analýza slúži ako nástroj na určenie charakteristiky tkaniva, avšak aby sme boli schopní správne vyhodnotiť perfúzne krivky, potrebujeme dostatočne hladko zachytiť ich priebeh. Kvôli časovej náročnosti merania pomocou MRI, sa môže javiť dosiahnutie tohto časového rozlíšenia ako problém, avšak existujú viaceré metódy, umožňujúce rekonštruovať signál z menšieho počtu vzoriek, ako napr. použité komprimované snímanie.

V práci je na začiatok uvedené ako funguje záznam pomocou MRI a je v nej rozobratá teória ku spracovaniu tohto signálu. Ďalej sú v hlavnej časti práce prezentované rôzne modely na riešenie rekonštrukcie snímok z dynamickej MRI. Jedným z modelov je L+S model s regularizáciou pomocou časovej TV, prevzatý z práce [23]. Tento model (pôvodne riešený FB algoritmom), je riešený pomocou Chambolle-Pock (CP) algoritmu. Rekonštruované perfúzne krivky sa líšia; riešenie CP algoritmom odstraňuje skoky v perfúzných krivkách získaných FB algoritmom, čo zlepšuje ich kvalitu. Následne je uvedený model L+S s regularizáciou pomocou obmedzenia časových diferencií. Oba modely boli overené na simulovaných aj reálnych dátach. L+S model s obmedzením diferencií, riešený pomocou CP algoritmu vykazoval prakticky rovnaké výsledky ako model s regularizáciou pomocou TV, pre 30 iterácií.

V poslednej časti bol skúmaný model SASS z práce [24] a boli ponúknuté dve úpravy pôvodného modelu so snahou dosiahnuť väčšiu odolnosť voči podvzorkovaniu. Žiaľ vyplynulo, že navrhnuté modely nedosahujú významné zlepšenie kvality rekonštrukcie ani za cenu zvýšenia ich výpočtovej náročnosti.

Literatúra

- [1] Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J.: *Linear programming and network flows*, John Wiley & Sons, 1977, ISBN 0-471-06015-1.
- [2] Beck, A.; TEBOULLE, M.: Fast Gradient-Based Algorithms for Constrained Total Variation Image Denoising and Deblurring Problems. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2009, 18(11), 2419-2434. DOI: 10.1109/TIP.2009.2028250. ISSN 1057-7149. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5173518/>
- [3] Brigham E.O.: *The fast Fourier transform and its applications*. Prantice hall: New Jersey, 1988. ISBN 0-13-307505-2
- [4] Bruckstein, A. M.; Donoho, D. L.; Elad, M.: *From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images*. SIAM Review, ročník 51, č. 1, 2009: s. 34–81, ISSN 0036-1445.
- [5] Bushong, S.C.; Clarke, G.; *Magnetic Resonance Imaging: Physical and Biological Principles*. 4. vyd. Elsevier Health Sciences, 2015. ISBN 978-0-323-07354-7
- [6] Candes, E. J.; Wakin, M. B.: An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, ročník 25, č. 2, 2008: s. 21–30, ISSN 1053-5888.
- [7] Combettes, P.; Pesquet, J.: Proximal splitting methods in signal processing. *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011: s. 185–212, doi:10.1007/978-1-4419-9569-8_10.
- [8] Condat, L.: A Direct Algorithm for 1-D Total Variation Denoising. *IEEE Signal Processing Letters*, ročník 20, č. 11, Nov 2013: s. 1054–1057, ISSN 1070-9908, doi:10.1109/LSP.2013.2278339.
- [9] Condat, L.: A Generic Proximal Algorithm for Convex Optimization—Application to Total Variation Minimization. *IEEE Signal Processing Letters*, ročník 21, č. 8, Aug 2014: s. 985–989, ISSN 1070-9908, doi:10.1109/LSP.2014.2322123.
- [10] Daňková, M. *Komprimované snímání v perfuzním zobrazování pomocí magnetické rezonance*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 56 s.
- [11] Fessler, J. A.; Sutton, B. P.: Nonuniform fast Fourier transforms using minmax interpolation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, ročník 51, č. 2, 2003: s. 560–574, doi:10.1109/TSP.2002.807005.

- [12] fMRI Brno - výzkumná skupina při LF MU Brno: Princip MRI. [online], 12 2013, [cit. 2014- 03-21]. URL <http://fmri.mchmi.com/main_index.php?strana=13>
- [13] Folland, G. B.: *Fourier analysis and its applications*. Brooks/Cole Publishing Company, 1992, ISBN 0-534-17094-3
- [14] Foucard, S.; Rauhut. H.: *A mathematical introduction to compressive sensing*. New York: Birkhauser, 2013, ISBN 978-0-8176-4947-0
- [15] Hendee W.R.; Morgan C.J.: *Magnetic resonance Imaging. Part I-Physical principles [Medical Progress]*. West J Med 1984 Oct; 141:491-500
- [16] Hrbáček, R.; Rajmic, P.; Veselý, V.; Špiřík, J.: Řídké reprezentace signálů: komprimované snímání. *Elektrorevue* [online]. Brno, 2011, 2011/67(6), 1-8 [cit. 2018-05-19]. ISSN 1213-1539. Dostupné z: <<http://elektrorevue.cz/cz/download/ridke-reprezentace-signalu%20%20komprimovanesnimani/>>
- [17] Chambolle, A.; Pock, T.: A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. 2010. (hal-00490826f), Dostupné z: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00490826>>
- [18] Jackson, A.; Buckley, D.L.; Parker, G.J.M.; ai.: *Dynamic Contrast-Enhanced Magnetic Resonance Imaging in Oncology*. Springer Berlin, 2005, ISBN 3-540-42322-2.
- [19] Klíč, A.;Volka, K.; Dubcová, M.: *Fourierova transformace*. [elektronické skriptum], 2002. Dostupné z: <<http://old.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/students/ft/skripta/Four.pdf>>
- [20] Larsson, E. G., Erdogmus D., YAN R., ai.: SNR-optimality of sum-of-squares reconstruction for phased-array magnetic resonance imaging. *Journal of Magnetic Resonance* [online]. 2003, 163(1), s. 121-123 [cit. 2018-04-23]. DOI: 10.1016/S1090-7807(03)00132-0. ISSN 10907807. Dostupné z: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1090780703001320>>
- [21] Lingala, S.; Hu, Y.; DiBella, E.; ai.: Accelerated Dynamic MRI Exploiting Sparsity and Low-Rank Structure: k-t SLR. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, ročník 30, č. 5, Máj 2011: s. 1042–1054, ISSN 0278-0062, doi:10.1109/TMI.2010.2100850.
- [22] Lustig, M.; Donoho, D.; Santos, J.; ai.: Compressed Sensing MRI. *IEEE Signal Processing Magazine*, ročník 25, č. 2, 2008: s. 72-82, ISSN 1053-5888

- [23] Mangová, M. *Zvýšení rozlišení perfúzního zobrazování magnetickou rezonancí pomocí komprimovaného snímání*. Brno, 2018, 104s. Dizertačná práce. Vysoké učení technické v Brně.
- [24] Onderlička T. *Rekonstrukce snímků z magnetické rezonance pomocí optimalizačních metod*. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, 2018
- [25] Otazo, R.; Candes, E.; Sodickson, D. K.: Low-rank plus sparse matrix decomposition for accelerated dynamic MRI with separation of background and dynamic components. *Magnetic Resonance in Medicine*, ročník 73, č. 3, 2015: s. 1125–1136, ISSN 1522-2594, doi:10.1002/mrm.25240. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mrm.25240>
- [26] Parikh, N.; Boyd, S.: *Proximal Algorithms*. Now Foundations and Trends, 2014, ISBN 9781601987167. Dostupné z: <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=8187362>
- [27] Perraudin, N.; Kalofolias V.; Shuman D.: UNLocBoX A matlab convex optimization toolbox using proximal splitting methods. *ArXiv e-prints* [online]. 2014 [cit. 2018-03-27].
- [28] Rajmic, P.: *Brief introduction into the MR acquisition and reconstruction, with a particular focus on L+S modelling in DCE-MRI* [online], Máj 2020. Dostupné z: http://www.utko.feec.vutbr.cz/~rajmic/papers/2018-MRI_text-updated.pdf.
- [29] Rajmic, P.: *Řídké a nízkohodnostní reprezentace signálů s aplikacemi*. Habilitační práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací, 2014.
- [30] Rajmic, P.; Schimmel, J.: *Moderní počítačová grafika*. [elektronické skriptum]. Brno, Vysoké učení technické v Brně, 2013, ISBN 978-80-214-4906-0
- [31] Selesnick, I.W.: Sparsity-Assisted Signal Smoothing. *Excursions in Harmonic Analysis, volume 4*. Birkhäuser Basel, 2015, s. 149-176. Dostupné z: <http://eeweb.poly.edu/iselesni/sass/>
- [32] Uecker, M.; Lai, P.; Murphy, M. J.; ai.: ESPIRiT – an eigenvalue approach to autocalibrating parallel MRI: Where SENSE meets GRAPPA. *Magnetic Resonance in Medicine*, ročník 71, č. 3, 2014: s. 990–1001, ISSN 1522-2594, doi:10.1002/mrm.24751. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1002/mrm.24751>.

- [33] Veselý, V.; Rajmic P.: *Funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů* [online]. Vysoké učení technické v Brně, 2015, 1-164 [cit. 2018-03-11]. ISBN 978-80-214-5186-5. Dostupné z: <<http://hdl.handle.net/11012/61758>>
- [34] Wang, H.; Cheng, J.; Jia, S.; ai.: Accelerating MR Imaging via Deep Chambolle-Pock Network*. 2019 41st Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), Berlin, Nemecko , 2019: s. 6818-6821. Dostupné z <<https://arxiv.org/abs/1905.09525>>.
- [35] Winkelmann, S.; Schaeffter, T.; Koehler, T.; ai.: An Optimal Radial Profile Order Based on the Golden Ratio for Time-Resolved MRI. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, ročník 26, č. 1, 2007: s. 68–76
- [36] Yankeelov, T. E.; Gore, J. C.: Dynamic Contrast Enhanced Magnetic Resonance Imaging in Oncology: Theory, Data Acquisition, Analysis, and Examples. *Current medical imaging reviews*, ročník 3, č. 2, 2009: s. 91–107, doi: 10.2174/157340507780619179.

Zoznam symbolov, veličín a skratiek

Zoznam skratiek

RF	rádio-frekvenčný
FID	signál nameraný cievkou (free induction decay)
T1,T2,T2*	relaxačný čas
TR	čas opakovania pulznej sekvencie (time of repetition)
CA	kontrastná látka (contrast agent)
DCE-MRI	perfúzne zobrazovanie pomocou magnetickej rezonancie (dynamic contrast-enhanced MRI)
FT	Fourierova transformácia
DFT	diskrétna Fourierova transformácia
FFT	zrýchlená diskretná Fourierova transformácia (fast Fourier transformation)
NUFFT	nerovnomerná FFT (non-uniform fast Fourier transformation)
TV	totálna variácia
SVD	rozklad na singulárne čísla (singular value decomposition)
FB	Forward-Backward algoritmus
CP	Chambolle-Pock algoritmus
SASS	sparsity-assisted signal smoothing

Zoznam symbolov

B_0	externé magnetické pole
f_0	Larmorova frekvencia precesie atómov
$\mathcal{F}$	operátor spojitej Fourierovej transformácie
$\mathcal{R}$	operátor NUFFT
$\mathcal{C}$	operátor násobenia máp citlivosti
∇_t	prvá diferenciácia v časovej osi
prox_f	proximálny operátor funkcie f
H	Butterworthov filter s parametrami f_0 a n
$\mathcal{H}$	frekvenčná charakteristika Butterworthovho filtra

Zoznam príloh

A	Odvozenie proximálnych operátorov v Chambolle Pock algoritme	72
B	Obsah prílohy	73

A Odvodenie proximálnych operátorov v Chambolle Pock algoritme

Najprv odvodíme obecný proximálny operátor pre funkciu $f(x) = \frac{\tau}{2}\|d - x\|_2^2$.

$$\text{prox}_{\frac{\tau}{2}\|d-\cdot\|_2^2}(u) = \arg \min_{y \in \mathbb{C}^N} \left\{ \frac{\tau}{2}\|d - y\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u - y\|_2^2 \right\} = \quad (\text{A.1})$$

$$= \arg \min_y \left\{ \underbrace{\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^N (d_i - y_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (u_i - y_i)^2}_{g(y)} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Kedže sa jedná o minimalizáciu súčtu dvoch striktne konvexných funkcií, minimum existuje a je jednoznačné. Minimum budeme hľadať pomocou parciálnej derivácie pre i -tu zložku y_i :

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y_i} = -\tau(d_i - y_i) - (u_i - y_i) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Funkcia g nadobudne minimum pre

$$y_i = \frac{u_i + \tau d_i}{1 + \tau} \quad \text{pre } i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.4})$$

Nasleduje vyjadrenie proximálneho operátora pre konjugovanú funkciu f_2^* . Z Moreauovej identity (4.8) je operátor v CP algoritme rovný

$$\text{prox}_{\sigma f_2^*} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u - \sigma \text{prox}_{\frac{1}{2\sigma}\|d-\cdot\|_2^2}(u/\sigma) \\ v - \sigma \text{prox}_{\frac{\lambda_S}{\sigma}\|\cdot\|_1}(v/\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \sigma \text{prox}_{\frac{1}{2\sigma}\|d-\cdot\|_2^2}(u/\sigma) \\ v - \sigma \text{soft}(v/\sigma, \lambda_S/\sigma) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Prvú zložku možno upraviť pomocou predošle vyjadreného operátora (A.1) ako

$$u - \sigma \text{prox}_{\frac{1}{2\sigma}\|d-\cdot\|_2^2}(u/\sigma) = u - \frac{u + d}{1 + \frac{1}{\sigma}} = \frac{u - \sigma d}{\sigma + 1} \quad (\text{A.6})$$

Pri úprave druhej zložky použijeme vyjadrenie proximálneho operátora l_1 normy (4.11) a vzťah medzi operátormi soft a clip (4.14).

$$v - \sigma \text{prox}_{\frac{\lambda_S}{\sigma}\|\cdot\|_1} \left(\frac{v}{\sigma} \right) = v - \sigma \text{soft} \left(\frac{v}{\sigma}, \frac{\lambda_S}{\sigma} \right) = v - \text{soft}(v, \lambda_S) = \text{clip}(v, \lambda_S) \quad (\text{A.7})$$

B Obsah prílohy

Príloha obsahuje nasledujúce súbory:

- priloha
 - L+S** ... Priečinok obsahujúci skripty na riešenie L+S modelu.
 - CS ... Obsahuje rekonštrukciu pomocou komprimovaného snímání pre TV model a model s obmedzenými diferenciami pomocou FB a CP algoritmu.
 - Data** ... Obsahuje reálne a simulované dynamické dáta a mapy citlivostí.
 - pomocné skripty ... Pomocné výpočty ako načítanie dát a citlivostí.
 - Sensitivity ... Skripty na výpočet citlivostných máp pre fantóm.
 - toolboxy** ... Obsahuje prevzaté skripty na výpočet NUFFT, metódu ESPIRiT apod.
 - vypocet_citlivosti_fantom.m* ... Výpočet citlivostí pomocou metódy ESPIRiT.
 - run_dynamika_realne.m* ... Spustenie L+S modelu pre reálne dáta.
 - run_dynamika_fantom.m* ... Spustenie L+S modelu pre fantóm.
 - SASS** ... Priečinok obsahujúci upravené SASS modely.
 - Data** ... Obsahuje dáta a mapy citlivostí pozdĺžneho rezu hlavy.
 - Obrazky
 - proxTV ... Prevzaté algoritmy na výpočet proximálnych operátorov.
 - SASS ... Obsahuje skripty na výpočet g pomocou SASS s Butterworthovým filtrom.
 - Sensitivity ... Skripty na výpočet citlivostí cievok, kompenzácie hustoty a pod.
 - SASS_Hlava.m* ... Pôvodný model od Ing. T. Onderličku.
 - SASS_Hlava_1.m* ... Upravený model SASS2D-1.
 - SASS_Hlava_2.m* ... Upravený model SASS2D-2.

Červenou sú zvýraznené adresáre ktoré z dôvodu veľkosti nie sú obsiahnuté v prílohe. Kompletne súbory možno stiahnuť z VUT Disku na adrese:

<https://www.vutbr.cz/www_base/vutdisk.php?i=221321ae6c>.

Heslo: MRI