VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

ŘEŠENÍ VÝVOJE NESTABILIT KAPALNÉHO FILMU S NÁSLEDNÝM ODTRŽENÍM KAPEK

MODELING OF LIQUID FILM INSTABILITIES WITH SUBSEQUENT ENTRAINMENT OF DROPLETS

DIZERTAČNÍ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE | Ing. STANISLAV KNOTEK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE | prof. Ing. MIROSLAV JÍCHA, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2013

Abstrakt

Dizertační práce se věnuje studiu nestabilit tenkých kapalných filmů až do fáze odtržení kapek. Dle typu struktur a dějů na povrchu filmu byly na základě literární rešerše klasifikovány čtyři typy nestabilit: dvoudimenzionální pomalé vlny, dvoudimenzionální rychlé vlny, třídimenzionální vlny, solitární vlny a fáze odtrhávání kapek z povrchu filmu. Práce analyzuje fyzikální principy vzniku nestabilit a zabývá se matematickou formulací problému. Jako příčina nestabilit jsou identifikovány smykové napětí a tlak působící na povrch filmu. Matematické modely predikce nestabilit jsou demonstrovány pomocí přístupů založených na řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice a pomocí řešení pohybových rovnic v integrálním tvaru. Dále jsou uvedeny modely fluktuací smykového napětí a tlaku působících na povrch filmu a vybrané modely tloušťky filmu. Těžiště práce je zaměřeno na predikci iniciace dvoudimenzionálních vln pomocí integrálního přístupu. Charakteristiky fluktuací smykového napětí a tlaku na hladině filmu byly modelovány pomocí simulací proudění vzduchu nad pevným povrchem. V závěru práce jsou uvedena kritéria odtržení kapek v závislosti na rychlosti proudění vzduchu a tloušťce filmu.

Abstract

This dissertation deals with instabilities of thin liquid films up to entrainment of drops. Four types of instabilities have been classified depending on the type of structure and process on the liquid film surface: two-dimensional slow waves, two-dimensional fast waves, three-dimensional waves, solitary waves and entrainment of drops from the film surface. This thesis analyzes the physical principles of instabilities and deals with the mathematical formulation of the problem. Shear and pressure forces acting on the surface of the liquid film are identified as the cause of instabilities. Mathematical models for predicting instabilities are demonstrated using approaches based on solving the Orr-Sommerfeld equation and the equations of motion in integral form. Models of shear and pressure forces acting on the surface of the film and selected models of film thickness are presented. The work is focused on the prediction of the initiation of two-dimensional waves using the integral approach. Shear stress and pressure forces acting on the liquid film surface have been modeled using the simulation of air flow over a solid surface. Finally, criteria for drop entrainment are presented with their dependence on air velocity and film thickness.

Klíčová slova

kapalný film, hydrodynamická nestabilita, Orrova-Sommerfeldova rovnice, zvlněný povrch, smykové napětí, odtržení kapek

Keywords

liquid film, hydrodynamic instability, Orr-Sommerfeld equation, wavy surface, wall shear stress, drops entrainment

Bibliografická citace

KNOTEK, S. *Řešení vývoje nestabilit kapalného filmu s následným odtržením kapek.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 106 s. Vedoucí dizertační práce prof. Ing. Miroslav Jícha, CSc.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem dizertační práci *Řešení vývoje nestabilit kapalného filmu s následným odtržením kapek* vypracoval samostatně pod vedením školitele prof. Ing. Miroslava Jíchy, CSc., s pomocí materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Brně dne 25. června 2013

....

Ing. Stanislav Knotek

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří se podíleli na vzniku předkládané dizertační práce. Jmenovitě děkuji především svému školiteli prof. Ing. Miroslavu Jíchovi, CSc., za nabídku absolvování doktorského studia na Odboru termomechaniky a techniky prostředí, dále za odborné vedení, náměty a vytyčení směru při práci na tématu a rovněž za podporu v kritických chvílích studia.

Za spolupráci při řešení dílčích problémů dizertace děkuji kolegům Ing. Janu Fišerovi, Ph.D., a Ing. Jaroslavu Volavému. Dr. Fišerovi děkuji zejména za náměty a diskuse při rešerši problému a rovněž za podporu v problematických fázích doktorského studia. Ing. Volavému zvláště děkuji za pomoc při tvorbě maker v jazyce Java pro konstrukci geometrie kanálu se zvlněným povrchem a za mnohé diskuse při analýze problematiky mezních vrstev a turbulentního proudění. Oběma pak děkuji za četnou pomoc při práci v CFD softwaru StarCCM+.

Dále bych rád poděkoval Ing. Matěji Formanovi, Ph.D., za mnohé konzultace v problematice turbulentního proudění, zejména za návrh aplikace modelu k-ϵ V2F, a v neposlední řadě rovněž Ing. Vladimíru Krejčímu, Ph.D., za četné konzultace v řadě partií dynamiky tekutin a zvláště pak za pomoc při ladění procedury na řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice v programu Matlab.

Obsah

Úvod **3**

Vymezení a cíle dizertační práce **4**

1 Vybrané poznatky teorie hydrodynamické stability **5**
1.1 Princip lineární analýzy stability . . . 5
1.2 Kelvinova-Helmholtzova nestabilita . . . 7
1.2.1 Kritéria Kelvinovy-Helmholtzovy nestability . . . 9
1.3 Nestabilita paralelního viskózního proudění . . . 10
1.3.1 Orrova-Sommerfeldova rovnice . . . 11
1.3.2 Aplikace Orrovy-Sommerfeldovy rovnice při řešení nestabilit paralelního proudění . . . 13

2 Vybrané poznatky mechanického vlnění kapalin **20**
2.1 Základní parametry vln . . . 20
2.2 Vlny na povrchu kapalin . . . 21
2.2.1 Vliv povrchového napětí . . . 22
2.2.2 Vlny na mělké vodě - Kortewegova-de Vriesova rovnice . . . 23

3 Problematika nestabilit na tenkých kapalných filmech **24**
3.1 Experimentální poznatky a typy nestabilit . . . 24
3.2 Aplikace lineární analýzy stability . . . 27
3.3 Fyzikální principy vzniku nestabilit . . . 28
3.3.1 Silová působení v kapalném filmu . . . 29
3.3.2 Silová působení plynného proudu . . . 30
3.4 Formulace problému . . . 31
3.4.1 Výchozí rovnice a předpoklady pro odvození matematické formulace . . . 31
3.4.2 Rychlostní profil v plynné vrstvě . . . 32
3.4.3 Rychlostní profil v kapalném filmu . . . 35

4 Přístupy k řešení **36**
4.1 Integrální metody . . . 37
4.2 Metody Orrovy-Sommerfeldovy rovnice . . . 39
4.3 Nelineární přístupy a modely solitárních vln . . . 40
4.4 Modely tlakových a smykových sil působících na povrch filmu . . . 41
4.4.1 Model pro krátké vlny . . . 41
4.4.2 Model pro dlouhé vlny . . . 44
4.4.3 Modely smykových koeficientů . . . 45
4.5 Modely tloušťky filmu . . . 48

5 CFD simulace turbulentního proudění nad zvlněným povrchem **49**
5.1 Popis výpočtové geometrie 49
5.2 Metoda výpočtu 50
5.2.1 Výběr turbulentního modelu a jeho verifikace 50
5.2.2 Nastavení a specifikace simulací 52
5.3 Výsledky 55
5.3.1 Fluktuace tlaku 58
5.3.2 Fluktuace smykového napětí 61
5.4 Diskuse a validace výsledků 61
5.4.1 Validace simulací a modelů smykového napětí 64
5.4.2 Validace simulací a modelů tlaku 66
5.5 Shrnutí 67

6 Model iniciace nestabilit **69**
6.1 Vedoucí rovnice 69
6.2 Pomocné modely 70
6.2.1 Rychlost filmu na hladině 70
6.2.2 Modely smykových a tlakových sil 71
6.3 Řešení a diskuse 72
6.4 Shrnutí 75

7 Atomizace stěnového kapalného filmu **76**
7.1 Experimentální poznatky 76
7.2 Fyzikální mechanismus atomizace 78
7.3 Kritéria primární atomizace stěnového kapalného filmu 79
7.3.1 Závislost na vlnové délce 79
7.3.2 Závislost na tloušťce filmu 81
7.4 Shrnutí 82

Závěr **84**

Seznam použitých zdrojů **86**

Publikace autora **95**

Seznam použitých symbolů a zkratek **96**

Seznam obrázků **100**

Seznam tabulek **101**

Seznam příloh **101**

Příloha A: Pohybové rovnice **102**

Příloha B: Mapy režimů nestabilit **103**

Příloha C: Dodatky CFD simulací **104**

Příloha D: Model k-ϵ V2F **106**

Úvod

Dizertační práce se věnuje úvodu do problematiky matematického modelování nestabilit stěnových kapalných filmů. Kapalné filmy se uplatňují při odvádění tepla z pevných povrchů, ovlivňují kvalitu nátěru v technologii povlakových vrstev [90], objevují se jako průvodní jev kondenzace vodní páry, případně jsou užívány jako lubrikant v ropných potrubích [126]. Nestabilita kapalných filmů je studována v souvislosti s prouděním na křídlech letadel [137], tvorbou aerosolových lékových forem nebo atomizací paliva spalovacích motorů [59]. Jako nežádoucí fenomén se objevuje například v přívodním potrubí turbínových strojů [81]. S ohledem na právě uvedené aplikace je v technické praxi z konstrukčního i technologického hlediska žádoucí porozumění příčinám iniciace nestabilit na mikroskopické úrovni i podmínkám vývoje nestabilit k makroskopickému projevu ve formě různých typů vln a struktur až do atomizační fáze, tj. odtržení fragmentů kapaliny z povrchu filmu.

Snaha o sestavení uceleného úvodu do problematiky včetně návrhu matematických modelů umožňujících predikovat iniciaci i vývoj nestabilit motivovala postup prací i strukturu dizertace.

V první kapitole je uveden základní aparát analýzy obecné hydrodynamické nestability, která představuje vnější teoretický rámec studovaného fenoménu. Kapitola rovněž uvádí ukázku řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice, která je využívána jako základní matematický popis nestability mezních vrstev i ve většině přístupů k modelování nestability kapalných filmů, zejména v počátečních fázích rozvoje nestabilit.

Druhá kapitola prezentuje vybrané poznatky mechanického vlnění tekutin jakožto makroskopického projevu hydrodynamické nestability na povrchu kapalných filmů.

Třetí kapitola na základě literární rešerše shrnuje experimentální poznatky, fyzikální principy a základní charakteristiky nestabilit. Zejména je uvedena klasifikace nestabilit a výčet modelů rychlostních profilů plynné vrstvy i kapalného filmu.

Ve čtvrté kapitole jsou nastíněny základní přístupy k matematickému modelování nestabilit. Je představena metoda integrace pohybových rovnic a formulace problému pomocí soustavy dvou Orrových-Sommerfeldových rovnic. Kapitola rovněž uvádí rešerši modelů tlakových a smykových sil působících na povrch filmu a výčet modelů tloušťky filmu v závislosti na Reynoldsově čísle.

Pátá kapitola prezentuje výsledky CFD simulací turbulentního proudění nad zvlněným povrchem. Na základě získaných dat jsou sestaveny modely amplitud fluktuací smykových a tlakových sil působících na hladinu kapalného filmu.

Šestá kapitola uvádí ukázku modelu iniciace nestabilit s využitím modelů smykového napětí a tlaků sestavených v kapitole 5. Získané výsledky jsou porovnány s experimentálním měřením i modely publikovanými v literatuře.

Sedmá kapitola pojednává o problematice atomizace kapaliny z povrchu filmu. Na základě experimentálních pozorování a literární rešerše je diskutován fyzikální mechanismus atomizace poukazující na spojitost s mechanismem vzniku solitárních vln. V závislosti na poměru destabilizujících sil jsou porovnána kritéria atomizace pro modely smykových napětí uvedené v kapitole 4.

V závěru práce jsou uvedeny hlavní poznatky a východiska práce a je shrnut její přínos ke studiu problematiky.

Vymezení a cíle dizertační práce

S ohledem na aplikace zmíněné v úvodu bylo účelem práce přispět k návrhu matematicko-fyzikálních modelů predikujících vznik a vývoj nestabilit kapalných filmů až do atomizační fáze. Vzhledem k rozmanitosti nestabilit a skutečnosti, že každý typ nestability vyžaduje speciální model, bylo středisko zájmu orientováno na sestavení algoritmu pro vyšetření podmínek iniciace infinitezimálních hydrodynamických nestabilit v mezních vrstvách tekutin, na predikci dvoudimenzionálních vln na hladině filmu a konečně na konstrukci kritérií pro určení kritických rychlostí vedoucích při daných podmínkách k odtržení kapek z povrchu filmu. S přihlédnutím k uvedenému zaměření, významu smykových a tlakových sil působících na hladinu filmu v důsledku proudícího plynu a celé řadě možných konfigurací problému je dizertační práce obsahově vymezena následující osnovou a předpoklady.

Dílčí cíle:

- Rešerše základních poznatků hydrodynamické nestability a mechanického vlnění kapalin; kapitoly 1 a 2.
- Rešerše experimentálních pozorování a teoretických přístupů k predikci nestabilit stěnového kapalného filmu; kapitoly 3 a 4.
- Numerické řešení smykových napětí a tlakových polí na rozhraní kapalného filmu a proudícího plynu; kapitoly 4 a 5.
- Matematický model iniciace dvoudimenzionálních vln a jejich parametrů; kapitola 6.
- Rešerše semiempirických přístupů k predikci atomizace; kapitola 7.
- Validace modelů pomocí experimentálních dat získaných z literatury; kapitoly 3, 6 a 7.

Předpoklady a vymezení problému:

- Kapalný film se nachází na pevné stěně a je vystaven proudění plynu.
- Proudění plynu je primární příčinou vzniku nestabilit.
- Zakřivení stěny a odtoková hrana nejsou uvažovány.
- Fyzikální vlastnosti tekutin jsou blízké dvojici voda–vzduch.

Poznamenejme, že uvedené uspořádání odpovídá časté aplikaci v rámci potrubních systémů, kdy lze zakřivení stěny vzhledem ke tloušťce filmu zanedbat, a materiálové vymezení usnadňuje porovnání výsledků modelů s experimenty. V případě tekutin s obdobným poměrem hustot jako dvojice voda–vzduch lze v počítačových modelech jednoduše upravit příslušné konstanty, v případě tekutin s fyzikálně více odlišnými vlastnostmi je třeba posoudit aplikovatelnost tzv. kvazi-statického přístupu viz kapitolu 4. Problematice vzniku vln na nakloněné rovině bez vlivu proudícího vzduchu se věnuje například dizertační práce [29]. Model odtržení kapek na odtokové hraně uvádí například Maroteaux a kol. [95].

KAPITOLA 1

Vybrané poznatky teorie hydrodynamické stability

Pojem hydrodynamické nestability zahrnuje několik druhů fyzikálních fenoménů, jejichž společným jmenovatelem je proces transformace původního typu proudění. Ačkoliv nový režim proudění může mít laminární charakter a vznik nestabilit je možné vysvětlit zákony dynamiky (např. Bernoulliho rovnice v případě Kelvinovy-Helmholtzovy nestability), ve většině případů jsou hydrodynamické nestability spojeny s přechodem do turbulentního režimu proudění. Dle současné teorie přechodu je prvotní příčinou tohoto jevu nestabilita rovnováhy sil v laminární smykové oblasti[1] [133]. Tato vnitřní silová nestabilita následně zesiluje i původně nepatrné poruchy (*perturbace*) ideálního laminárního proudění, které jsou inherentní součástí reálné proudící tekutiny, ať již v důsledku tepelné fluktuace (Brownův pohyb), akustických vlivů nebo turbulence vnějšího prostředí [133].

Matematický popis umožňující teoreticky zkoumat vývoj těchto počátečních nestabilit v čase a prostoru byl sestaven právě na základě snahy o vysvětlení přechodu laminárního proudění do turbulentního režimu na přelomu 19. a 20. století, lze jej však dobře použít i k predikci nestabilit kapalného filmu, jak uvidíme v dalším textu. Příslušný aparát je nazýván *lineární analýza stability*.

1.1 Princip lineární analýzy stability

Obecná analýza hydrodynamické stability je založena na predikci vývoje drobných poruch rychlostního pole laminárního základního proudu. Uvedený přístup objevil lord Rayleigh (1842-1919) na základě předpokladu, že v případě malých amplitud výchylek se systém chová lineárně, a lze tedy dle Fourierova principu superpozice nahradit obecnou poruchu superpozicí sinusoidálních oscilací (poruchových vln) základního proudění. Princip řešení pak spočívá ve sledování tendence růstu amplitud poruchových vln šířících se ve směru základního proudění.

Z matematického hlediska vychází analýza stability z tzv. Reynoldsova rozkladu[2] rychlosti $\mathbf{v}$ a tlaku p:

$$\mathbf{v}(x,y,z,t) = \mathbf{V}(x,y,z) + \mathbf{v}'(x,y,z,t), \tag{1.1}$$
$$p(x,y,z,t) = P(x,y,z) + p'(x,y,z,t)'. \tag{1.2}$$

[1] Oblast s velkým gradientem rychlosti ve směru příčném na směr proudění.

[2] Dle konvence budeme dále v textu okamžité hodnoty složek rychlosti značit malými písmeny, jejich časově průměrné hodnoty velkými písmeny a fluktuační složky malými písmeny s apostrofem. Přitom písmeno u resp. U je vyhrazeno pro okamžitou resp. časově průměrnou složku rychlosti ve směru osy x a písmeno v resp. V pro okamžitou resp. časově průměrnou složku rychlosti ve směru osy y.

Časově průměrné hodnoty rychlosti a tlaku, $\mathbf{V}$ a P, definují stacionární *základní proud* a veličiny v_i' a p' odpovídají časově proměnlivým *fluktuacím*. S ohledem na aplikace lze pro jednoduchost obecný případ daný rovnicemi (1.1) a (1.2) omezit na tzv. *paralelní proudění*, kde základní proud splňuje

$$\mathbf{V} = [U(y), 0, 0]\,. \tag{1.3}$$

Lineární teorie stability se zabývá analýzou vývoje perturbací, speciálně rychlostních fluktuací $\mathbf{v}'$, za předpokladu, že tyto fluktuace jsou malé v porovnání se základním proudem. Dle výše zmíněného Fourierova sumačního principu lze následně rychlostní poruchy v případě paralelního proudění reprezentovat ve formě vlny šířící se v rovině (x,z) s amplitudou závisející na y. Pro popis fluktuačních složek se tak s výhodou zavádí předpis

$$\mathbf{v}' = \widehat{\mathbf{v}}(y) \exp[\mathrm{i}(\alpha x + \beta z - \alpha c t)], \tag{1.4}$$

kde $\widehat{\mathbf{v}} = [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}]$ je vektor komplexních amplitudových funkcí, α je vlnové číslo ve směru osy x, β vlnové číslo ve směru osy z a c je komplexní rychlost vlny, kterou lze zapsat ve tvaru

$$c = c_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}c_{\mathrm{I}}\,. \tag{1.5}$$

Dosazením (1.5) do (1.4) dostáváme

$$\mathbf{v}' = \widehat{\mathbf{v}}(y) \exp(\alpha c_{\mathrm{I}} t) \exp[\mathrm{i}(\alpha x + \beta z - \alpha c_{\mathrm{R}} t)], \tag{1.6}$$

odkud je evidentní fyzikální význam komponent c_{R} a c_{I}. Fluktuace ve fixním bodě osciluje s frekvencí $\omega = \alpha c_{\mathrm{R}}$, přičemž amplituda oscilací v daném směru je dána součinem příslušné amplitudové funkce a výrazu $\exp(\alpha c_{\mathrm{I}} t)$. Z jiného pohledu představuje c_{R} fázovou rychlost fluktuační vlny, jejíž amplituda roste exponenciálně v čase s exponentem αc_{I}.

Proudění považujeme za stabilní resp. nestabilní, jestliže fluktuační složka rychlosti klesá resp. roste. Ze vztahu (1.6) a výše uvedeného lze tedy lehce nahlédnout, že pro otázku stability je zásadní signum komponenty c_{I}. Platí:

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{I}} &< 0 \quad \text{proudění je stabilní,} \\ c_{\mathrm{I}} &> 0 \quad \text{proudění je nestabilní,} \\ c_{\mathrm{I}} &= 0 \quad \text{proudění je neutrálně stabilní.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Analýza stability uvažující komplexní rychlost c a reálná vlnová čísla α a β se nazývá *analýza časové stability.* Zvolíme-li reálnou rychlost c a komplexní vlnové číslo α, pak rychlostní fluktuace nabývají tvar

$$\mathbf{v}' = \widehat{\mathbf{v}}(y) \exp[\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{R}} x + \beta z - \alpha_{\mathrm{R}} c t)] exp(\alpha_{\mathrm{I}} c x), \tag{1.8}$$

rostou v závislosti na souřadnici x a odpovídající analýza pak definuje *problém prostorové stability.* Dle práce [58] jsou však oba přístupy ekvivalentní v matematickém smyslu.

Příslušné rovnice pro výpočet rychlostí c_{R} a c_{I} získáme dosazením vztahů (1.1) a (1.2) s rychlostními fluktuacemi ve tvaru (1.6) resp. (1.8) do pohybových rovnic. V případě lineární teorie přitom zanedbáváme kvadratické členy fluktuačních rychlostí v_i' a obdržíme tak lineární systém.

Na závěr odstavce poznamenejme, že experimentální ověření teorie rozvoje infinitezimálních poruch laminárního smykového proudění modelovaných obecně předpisem (1.4) provedli roku 1943 Schubauer a Skramstad [122]. Tyto poruchy dnes nazýváme *Tollmienovy-Schlichtingovy vlny.*

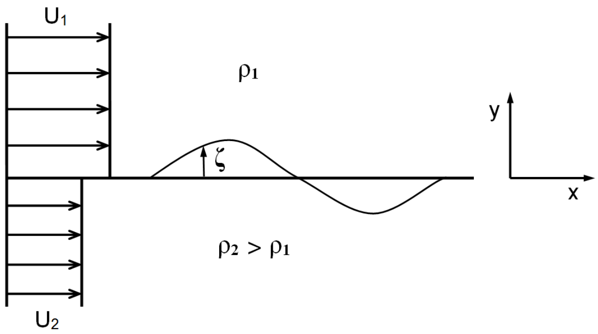
V dalším textu se budeme věnovat analýze stability dvou speciálních případů paralelního proudění, které mají přímou souvislost s tématem dizertační práce. Jedná se o tvz. Kelvinovu-Helmholtzovu nestabilitu a problém nestability mezních vrstev.

Obrázek 1.1: Struktura oblak formovaných mechanismem Kelvinovy-Helmholtzovy nestability.

1.2 Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Kniha [84] definuje Kelvinovu-Helmholtzovu (dále K-H) nestabilitu jako nestabilitu vznikající na rozhraní dvou paralelních horizontálních proudů s rozdílnými rychlostmi a hustotami, přičemž tekutina s větší hustotou se nachází vespod, viz obr. 1.2.

Předpokládáme-li, že rozhraní mezi tekutinami je slabě zvlněné, pak se rychlosti proudění tekutin na konvexní resp. konkávní straně rozhraní zvyšují resp. snižují vůči původním hodnotám. Aplikací Bernoulliho rovnice dochází k tlakovým výchylkám, které indukují urychlování tekutin na rozhraní, a původně zvlněný povrch se tak stále více rozrušuje až dochází k charakteristické struktuře K-H nestability, viz obr. 1.1.



Obrázek 1.2: Výchozí stav pro K-H nestabilitu.

Uveďme v dalším odvození základního kritéria K-H nestability s pomocí principu lineární analýzy stability uvedené v podkapitole 1.1.

Předpokládáme-li nevířivost proudění v obou vrstvách, pak dle Kelvinovy věty bude nevířivé i případně rozrušené proudění na rozhraní a pro matematický popis problému je možno užít teorii rychlostních potenciálů. Z jejich definice v kombinaci s rovnicí kontinuity obdržíme rovnice

$$\nabla^2\Phi_1 = 0\,, \qquad \nabla^2\Phi_2 = 0\,, \tag{1.9}$$

s podmínkami

$$\Phi_1 \to 0 \quad \text{pro} \quad y \to \infty\,, \tag{1.10}$$

$$\Phi_2 \to 0 \quad \text{pro} \quad y \to -\infty\,. \tag{1.11}$$

Na rozhraní je třeba splnit kinematickou a dynamickou okrajovou podmínku. *Kinematická podmínka* říká, že částice na rozhraní se musí pohybovat současně s tímto rozhraním. *Dynamická podmínka* vyžaduje spojitost tlaku na rozhraní v případě, že povrchové napětí je zanedbáno.

Předpokládáme-li dále veličiny Φ_1, Φ_2 a ζ ve tvaru

$$(\Phi_1, \Phi_2, \zeta) = (\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\zeta})e^{\mathrm{i}\alpha(x-ct)},$$

pak lze dle [84] linearizací problému aproximací

$$y = \zeta \longrightarrow y = 0\,, \tag{1.12}$$

zanedbáním nelineárních členů a aplikací Bernoulliovy rovnice odvodit podmínku pro růst nestability ve tvaru

$$g(\rho_2^2 - \rho_1^2) < \alpha\rho_1\rho_2(U_1 - U_2)^2, \tag{1.13}$$

kde α je vlnové číslo a g tíhové zrychlení. Ze vztahu je patrné, že nestabilita proudění je podmíněna dvěma variabilními veličinami. Kromě rozdílu rychlostí závisí rovněž na vlnové délce uvažovaných apriorních rozruchů na rozhraní. Vztah lze tedy posuzovat z více hledisek:

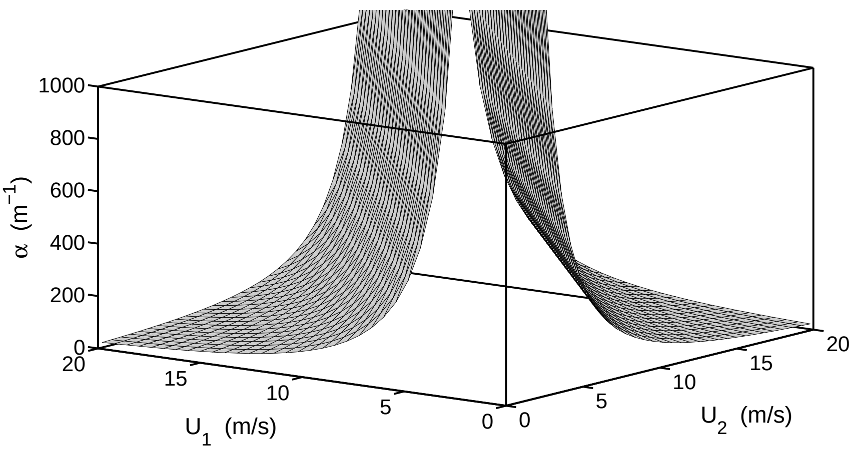
1. Pro konstantní vlnovou délku obdržíme podmínku

$$|U_1 - U_2| > \sqrt{\frac{g(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{\alpha\rho_1\rho_2}} \tag{1.14}$$

   vyjadřující hraniční rozdíl rychlostí U_1 a U_2 pro nestabilní režim proudění.

2. Druhé hledisko představuje případ s konstantní rychlostí U_2. Vztah (1.13) je pak implicitní funkcí rychlosti U_1 a vlnového čísla α.

3. V nejobecnějším pohledu je kritérium (1.13) závislé na rychlostech U_1, U_2 a vlnovém čísle α. Odpovídající implicitní funkce je zachycena na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Podmínky K-H nestability dle kritéria (1.13).

Grafy k případům 1. a 2. pak obdržíme vhodnými řezy grafu pro obecný případ.

Ze vztahu (1.13) je zřejmé, že kritérium nezávisí na viskozitách tekutin ani povrchovém napětí a uvažuje vrstvy nekonečné tloušťky. Vzhledem k tomu byla odvozena celá řada jiných kritérií s různou mírou empirie a univerzality. Zaměřme se v dalším na kritéria K-H nestability na rozhraní kapalina–plyn, speciálně voda–vzduch.

1.2.1. Kritéria Kelvinovy-Helmholtzovy nestability

Taitel a Dukler [131] formulují klasické kritérium pro rozvoj vln s infinitezimální amplitudou na rozhraní voda–vzduch mezi dvěma horizontálně umístěnými paralelními stěnami podmínkou

$$U_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{L}} \geq \left[\frac{\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{G}}} g h_{\mathrm{G}}\right]^{0,5}, \tag{1.15}$$

kde h_{G} je vzdálenost mezi horní stěnou a hladinou v rovnovážném stavu. Ansari a Shokri [11] uvádějí zobecnění tohoto kritéria vztahem

$$U_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{L}} \geq K \left[\frac{\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{G}}} g h_{\mathrm{G}}\right]^{0,5} \tag{1.16}$$

a s pomocí literatury specifikují hodnoty pro K :

- $K = 1$ pro původní klasické kritérium (1.15),
- $K = 0,5$ pro úpravu klasického kritéria na základě experimentálních dat,
- $K = \left[\frac{2}{\frac{h_{\mathrm{G}}}{h'_{\mathrm{G}}}} \left(\frac{h_{\mathrm{G}}}{h'_{\mathrm{G}}} + 1\right)\right]$ pro případ vln konečné velikosti, kde h'_{G} je vzdálenost vlny od horní desky a h_G je vzdálenost horní desky od rovnovážné hladiny. Toto kritérium přechází pro infinitezimální amplitudy, tj.$h_{\mathrm{G}} = h'_{\mathrm{G}}$, v kritérium (1.15).

Příkladem kritéria uvažujícího viskozitu kapaliny je za předpokladu $U_{\mathrm{G}} \ll U_{\mathrm{L}}$ a aproximace $U_{\mathrm{L}} \cong c_{\mathrm{R}}$ podmínka, kterou Taitel a Dukler [132] odvodili na základě hypotézy dle Jeffreyse [75], blíže viz podkapitolu 3.3,

$$U_{\mathrm{G}} \geq \left[\frac{4\nu_{\mathrm{L}}(\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}})g}{C_s \rho_{\mathrm{G}} U_{\mathrm{L}}}\right]^{0,5}, \tag{1.17}$$

kde C_s je empirický koeficient. Podmínka predikuje vznik pravidelných dvoudimenzionálních vln, což omezuje její použití na kapaliny s viskozitou do 20 cP [9].

Jako poslední uveďme neviskózní kritérium pro nestabilitu na rozhraní voda–vzduch v potrubí, které Andritsos a Hanratty [9] formulují nerovností

$$(U_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{L}})^2 \geq [\alpha^2\sigma + (\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}})g] \frac{H_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{G}}} \left[\frac{\tanh(\alpha H_{\mathrm{G}})}{\alpha H_{\mathrm{G}}} + \frac{\rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{L}}} \frac{\tanh(\alpha H_{\mathrm{L}})}{\alpha H_{\mathrm{G}}}\right], \tag{1.18}$$

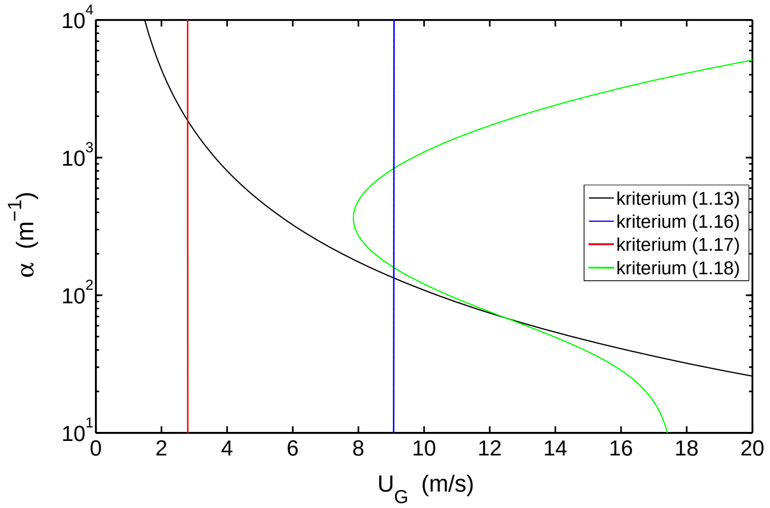
kde H_{L} resp. H_{G} je tloušťka kapalné resp. plynné vrstvy a σ je povrchové napětí.

Srovnání kritérií (1.18), (1.17), (1.16) a (1.13) uvádí obrázek 1.4 pro hodnoty: K = 0,5; $U_{\mathrm{L}} = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$, $H_{\mathrm{L}} = 5\,\mathrm{mm}$, $H_{\mathrm{G}} = 3\,\mathrm{cm}$, $\rho_{\mathrm{L}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{\mathrm{G}} = 1\,\mathrm{kg/m^3}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $C_s = 0{,}01$; $\sigma = 0{,}074\,\mathrm{N/m}$ a $\nu_{\mathrm{L}} = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$.

Z obrázku 1.4 lze nahlédnout, že křivky neutrální stability se pro jednotlivá kritéria značně liší. Příčinou jsou různé konstrukční předpoklady a hydrodynamické parametry odpovídající konkrétním řešeným problémům. Původní kritérium (1.13) neuvažuje viskozitu, povrchové napětí ani tloušťky vrstev. S ohledem na tuto skutečnost se jeví jeho použití vhodné zejména na vyšetřování nestabilit například v atmosférických vrstvách. Omezení kritérií (1.16) a (1.17) spočívají v absenci údaje o vlnové délce apriorních vln a použití empirických koeficientů.

Pro účely nestability vodní vrstvy se tak z uvedených vztahů založených na teorii neviskózní Kelvinovy-Helmholtzovy nestability jeví nejvhodnější kritérium (1.18), které lze pro případ voda–vzduch zjednodušit na tvar

$$(U_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{L}})^2 \geq \left[\frac{\alpha\sigma}{\rho_{\mathrm{G}}} + \frac{\rho_{\mathrm{L}} g}{\rho_{\mathrm{G}}\alpha}\right] \tanh(\alpha H_{\mathrm{G}}) \,. \tag{1.19}$$



Obrázek 1.4: Kritéria Kelvinovy-Helmholtzovy nestability.

Graf křivky neutrální stability dle tohoto kritéria na obrázku 1.4 dokládá, že existuje takové vlnové číslo α_m, pro něž je interval rychlosti vzduchu způsobující nestabilitu nejširší. Článek [9] definuje tuto mez vztahem

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{L}} g}{\sigma}}\,. \tag{1.20}$$

Pro parametry vody tomuto vlnovému číslu odpovídá vlnová délka 1,73 cm, která koresponduje s vlnovou délkou pro minimální fázovou rychlost vlny viz (2.14).

Na závěr odstavce poznamenejme, že kritérium (1.18), resp. (1.19), zohledňuje velmi málo, resp. vůbec, vliv tloušťky vodní vrstvy. Obě kritéria jsou zkonstruována a testována pro případ nestability vodní hladiny v potrubí s vyrovnanými poměry kapalné a plynné fáze. Výsledky pozorování z podkapitoly 3.1, zejména obrázky 3.2 a 3.3, přitom ukazují kvalitativně významnou souvislost mezi pozorovanými vlnami a tloušťkou filmu. Dalším nedostatkem uvedených kritérií a obecně teorie K-H nestability je zanedbání efektů plynoucích z rozdílných poměrů mezi viskozitami tekutin, které jsou pro rozhraní voda–vzduch značné. Teorie tak dostatečně nepostihuje vliv smykových sil vznikajících na rozhraní mezi tekutinami.

Z dosud uvedeného vyplývá, že uvedená kritéria nejsou dostatečně vhodná pro popis nestability kapalného stěnového filmu. K-H nestabilita tak představuje pouze výchozí teoretický rámec studovaného fenoménu a její kritéria lze užít jen pro přibližné určení oblastí nestability, případně srovnání se sofistikovanějšími výpočetními přístupy, jejichž základním principům je věnován následující odstavec.

1.3 Nestabilita paralelního viskózního proudění

Uvažujme nestlačitelné paralelní proudění tekutiny s viskozitou ν. Squire v práci z roku 1933 vhodnou transformací ukázal, že ke každé třídimenzionální fluktuaci existuje taková dvoudimenzionální porucha, která vykazuje větší nestabilitu, blíže viz např. [112]. S odkazem na tento výsledek se v dalším budeme zabývat pouze dvoudimenzionálním problémem stability paralelního proudění, tj. rychlostní a tlakové pole uvažujeme ve tvaru

$$[u, v] = [U(y) + u'(x, y, t), v'(x, y, t)], \tag{1.21}$$
$$p = P(x, y) + p'(x, y, t), \tag{1.22}$$

Dosadíme-li veličiny u, v a p s vlastnostmi (1.21) a (1.22) do Navierových-Stokesových rovnic a do rovnice kontinuity pro dvoudimenzionální nestacionární a nestlačitelné proudění (A.1)–(A.3), pak linearizací rovnic, blíže viz příloha A, obdržíme systém:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = \nu\Delta u', \tag{1.23}$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = \nu\Delta v', \tag{1.24}$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \tag{1.25}$$

S ohledem na teorii lineární analýzy viz odstavec 1.1 definujme nyní fluktuační složky u', v' a p' analogicky k (1.6) pro dvourozměrný případ vztahy

$$u' = \widehat{u}(y)\exp(\alpha c_{\mathrm{I}}t)\exp[\mathrm{i}(\alpha x - \alpha c_{\mathrm{R}}t)], \tag{1.26}$$
$$v' = \widehat{v}(y)\exp(\alpha c_{\mathrm{I}}t)\exp[\mathrm{i}(\alpha x - \alpha c_{\mathrm{R}}t)], \tag{1.27}$$
$$p' = \widehat{p}(y)\exp(\alpha c_{\mathrm{I}}t)\exp[\mathrm{i}(\alpha x - \alpha c_{\mathrm{R}}t)]. \tag{1.28}$$

Dosazením (1.28) a (1.28) do pohybových rovnic (1.23)–(1.25) obdržíme

$$\mathrm{i}\alpha(U-c)\widehat{u} + \widehat{v}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = -\mathrm{i}\alpha\widehat{p} + \nu\left(\frac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}y^2} - \alpha^2\widehat{u}\right), \tag{1.29}$$
$$\mathrm{i}\alpha(U-c)\widehat{v} = -\frac{\mathrm{d}\widehat{p}}{\mathrm{d}y} + \nu\left(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}y^2} - \alpha^2\widehat{v}\right), \tag{1.30}$$
$$\mathrm{i}\alpha\widehat{u} + \frac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}y} = 0\,. \tag{1.31}$$

Rovnice (1.29)–(1.31) definují problém stability dvourozměrného paralelního proudění s předepsaným rychlostním profilem $U(y)$ pro vybrané vlnové číslo α. V praxi se však používá elegantnější přístup založený na vhodné definici proudové funkce, viz následující odstavec.

1.3.1. Orrova-Sommerfeldova rovnice

Rovnice kontinuity (1.25) pro fluktuační složky u' a v' nás opravňuje k zavedení proudové funkce Ψ, kterou s ohledem na řešený problém, blíže viz např. [28] str. 577, definujeme ve tvaru

$$\Psi = \phi(y)\exp[\mathrm{i}\alpha(x-ct)]. \tag{1.32}$$

Rychlostní fluktuace pak obdržíme z definice proudové funkce jejími derivacemi

$$u' = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y}\exp[\mathrm{i}\alpha(x-ct)], \tag{1.33}$$
$$v' = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\mathrm{i}\alpha\phi(y)\exp[\mathrm{i}\alpha(x-ct)]. \tag{1.34}$$

V předpisu (1.32) značí $\phi(y)$ komplexní *amplitudovou funkci*, α reálné vlnové číslo a c komplexní rychlost vlny v souladu s odstavcem 1.1.

Dosazením vztahů (1.33) a (1.34) do rovnic (1.23) a (1.24) a eliminací tlakového členu obdržíme tzv. *Orrovu-Sommerfeldovu rovnici*[3]

$$(U-c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - U''\phi = \frac{\nu}{\mathrm{i}\alpha}(\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi), \tag{1.35}$$

[3]Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici, a tudíž ϕ', U' zde a dále v textu značí derivace dle nezávisle proměnné y. Podobně také funkce F' v rovnici (1.52) a R'_{ij} v rovnici (4.41) v odstavci 4.4.1.

kterou lze vhodnou transformací veličin, blíže viz [84], převést na bezrozměrný tvar

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi=\frac{1}{\mathrm{i}\alpha Re}(\phi''''-2\alpha^2\phi''+\alpha^4\phi), \tag{1.36}$$

kde $Re = U_0 D/\nu$ definuje Reynoldsovo číslo hlavního proudu s charakteristickým rozměrem D a charakteristickou rychlostí U_0. V případě mezních vrstev vycházejí okrajové podmínky z předpokladu, že fluktuace rychlostí u' a v' musí být nulové na stěně ($y=0$) a ve volném proudu (proudění je laminární), tj. ve velké vzdálenosti od stěny ($y\to\infty$). Okrajové podmínky mají tudíž tvar

$$\phi=\phi'=0 \quad \text{v } y=0\,, \tag{1.37}$$

$$\phi=\phi'=0 \quad \text{pro } y\to\infty\,. \tag{1.38}$$

Analýza stability laminárního proudění je nyní převedena na problém vlastních čísel Orrovy-Sommerfeldovy rovnice. Pro daný základní tok definovaný profilem $U(y)$ rovnice obsahuje parametry Re, α, c_R a c_I, z nichž za dané považujeme Re základního toku a parametr α prostřednictvím vlnové délky poruch $\lambda=2\pi/\alpha$. Pro každou dvojici parametrů Re, α tedy řešením rovnice s okrajovými podmínkami obdržíme komplexní funkci ϕ a komplexní vlnovou rychlost c jako vlastní hodnoty rovnice.

Stejně jako v případě fluktuací definovaných ve tvaru (1.4) v odstavci 1.1 je stabilita určena znaménkem parametru c_I. Tato skutečnost motivuje sestrojení křivky, na níž platí $c_\mathrm{I}=0$ v prostoru parametrů Re a α pro daný rychlostní profil $U(y)$. Explicitně řečeno, křivka pro daná Reynoldsova čísla definuje vlnové délky fluktuačních vln, které nejsou ani zesilovány ani zeslabovány, a hovoříme proto o tzv. *křivce (mezi) neutrální stability*.

Rayleighova rovnice

Vzhledem k tomu, že dle experimentálních pozorování se meze neutrální stability vyskytují v oblasti vysokých Reynoldsových čísel ($1/Re\to 0$) [120], lze uvažovat zanedbání viskózních členů na pravé straně rovnice (1.36).[4] Výsledná diferenciální rovnice se označuje jako *rovnice neviskózní stability* nebo také *Rayleighova rovnice*

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi=0. \tag{1.39}$$

Je-li řešením rovnice nestabilní proudění ($c_\mathrm{I}<0$) pak hovoříme o *neviskózní nestabilitě* v protikladu k *viskózní nestabilitě* určené řešením původní Orrovy-Sommerfeldovy rovnice. Zřejmě je-li proudění neviskózně nestabilní, pak je i viskózně nestabilní. Proudění neviskózně stabilní může být viskózně nestabilní, viz obr. 1.9.

Diskusí Rayleighovy rovnice byly odvozeny následující teorémy, blíže viz např. [84], [112], [120], specifikující souvislosti mezi rychlostním profilem a stabilitou proudění:

- *Reyleighovo kritérium inflexního bodu* říká, že nutnou podmínkou neviskózní nestability je, aby profil měl inflexní bod. Tudíž profil bez inflexního bodu je neviskózně stabilní. Z praktického hlediska je v této souvislosti významná spojitost inflexního bodu s tlakovým gradientem ve směru proudění. Dle teorie mezních vrstev, např. [120], je proudění ve směru klesajícího tlaku definované rychlostním profilem bez inflexního bodu a naopak rychlostní profil obsahuje inflexní bod při proudění s nepříznivým tlakovým spádem. Teorém inflexního bodu lze tedy alternativně reprodukovat tezí: Příznivý resp. nepříznivý tlakový spád proudění stabilizuje resp. destabilizuje.

[4] Pravá strana Orrovy-Sommerfeldovy rovnice obsahuje derivace vyšších řádů, proto v oblastech, kde se hodnoty ϕ rychle mění v závislosti na y (např. v blízkosti stěny), nelze viskózní členy eliminovat. Navíc v oblasti kritické vrstvy, viz dále v textu, kde $U\to c$, jsou členy na levé straně O-S rovnice malé, a tedy viskózní členy na pravé straně nelze zanedbat z numerických důvodů [154].

- Silnější kritérium dává tzv. *Fjortoftův teorém*: Nechť rychlostní profil U má v bodě y_I inflexní bod. Nechť $U_I = U(y_I)$. Nutnou podmínkou neviskózní nestability je, aby někde v proudu platila nerovnost
$$U''(U - U_I) < 0. \tag{1.40}$$
- Reyleighův druhý teorém říká, že rychlost šíření neutrálních perturbací v mezní vrstvě je menší než maximální rychlost základního proudu, tj. $c_{\mathrm{R}} < U_{\max}$. Indukují-li se v proudící tekutině vlny neutrálních perturbací, pak v mezní vrstvě nutně existuje tzv. *kritická vrstva* definovaná jako okolí bodů $y_c(x)$ splňujících podmínku
$$U(y_c) = c = c_{\mathrm{R}}. \tag{1.41}$$

Z dosud uvedené teorie stability a odvození Orrovy-Sommerfeldovy rovnice vyplývá, že její význam spočívá zejména ve vyšetřování podmínek vedoucích k nástupu turbulentního režimu proudění. Rovnice pro daný rychlostní profil a Reynoldsovo číslo hlavního proudu predikuje v závislosti na vlnovém čísle vývoj rychlostních fluktuací u', v', které korespondují se vznikem Tollmienových-Schlichtingových vln. Omezení rovnice vycházející z linearizace a předpokladu paralelního proudění vymezují oblast její použitelnosti především na počáteční fáze rozvoje nestabilit. I přes toto vymezení je však princip Orrovy-Sommerfeldovy rovnice součástí mnohých přístupů k řešení nestability tenkého filmu, jak uvidíme v dalším textu.

Z povahy rovnice vycházejí numerické metody jejího řešení. Jedná se především o metodu aproximace řešení Čebyševovými polynomy. Konkrétně v rámci Čebyševovy spektrální tau metody nebo Čebyševovy spektrální kolokační metody. Dnes již tradiční aplikaci první metody publikoval Orszag [111]. Jejími modifikacemi se zabývají například práce [41], [56], [128]. Druhou metodu aplikují kupříkladu publikace [37], [105], [134] a [144].

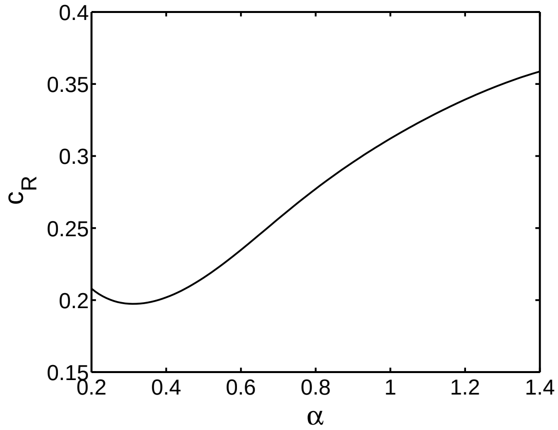
Aplikaci Orrovy Sommerfeldovy rovnice při řešení nestabilit paralelního proudění pomocí Čebyševovy kolokační metody demonstruje podrobněji následující odstavec. Uvedená metoda řešení byla autorem dizertace publikována v [A8].

1.3.2. Aplikace Orrovy-Sommerfeldovy rovnice při řešení nestabilit paralelního proudění

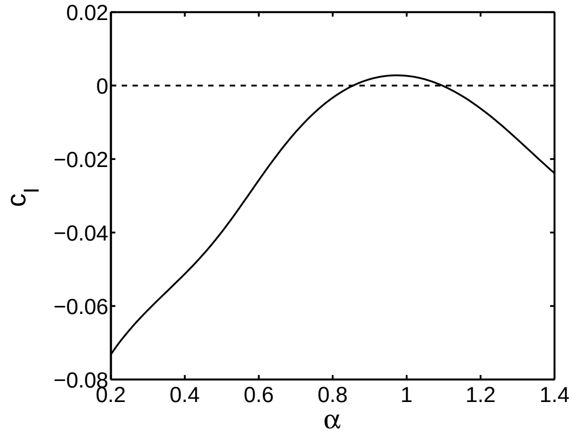
Stabilita Poisseuilleova proudění

Rychlostní profil Poisseuilleova proudění v kanále je v bezrozměrných souřadnicích dán ve tvaru $U(y) = 1 - y^2$. Řešení problému stability Orrovou-Sommerfeldovou (O-S) rovnicí vyžaduje doplnění rovnice okrajovými podmínkami. V tomto případě volíme
$$\phi = 0 \quad \text{v } y = \pm 1\,, \tag{1.42}$$
$$\phi' = 0 \quad \text{v } y = \pm 1\,. \tag{1.43}$$
Podmínky reprezentují jednak útlum rozruchů na stěnách kanálu a jednak podmínku ulpívání.

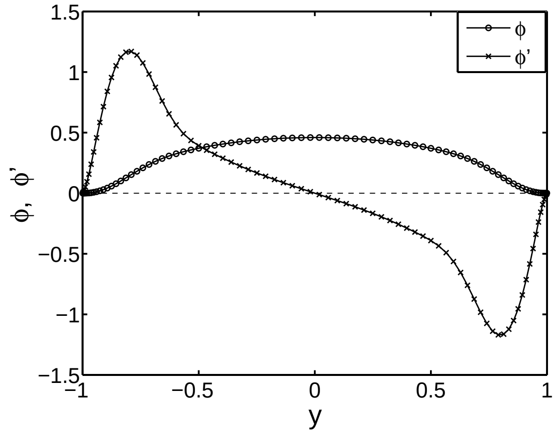
Rozřešení rovnice podává informaci o fázové rychlosti c_{R} a tendenci růstu nestabilit pomocí rychlosti c_{I} v závislosti na vlnovém čísle poruchových vln α (obrázky 1.6 a 1.5) a dále informaci o velikosti amplitud rychlostních fluktuací pomocí amplitudové funkce ϕ v závislosti na vzdálenosti od stěn potrubí y (obrázek 1.7). Vzhledem k tomu, že amplitudy fluktuací jsou infinitezimálně malé, spočívá význam řešení rovnice ponejvíce ve znaménku parametru c_{I} v závislosti na Reynoldsově čísle základního proudění a vlnové délce poruch. *Křivka neutrální stability*, na níž rychlost c_{I} nabývá nulové hodnoty, rozděluje prostor charakteristik (Re, α) na oblast stability a nestability (obrázek 1.8) a hovoříme tedy také o *mezi stability*. Minimální Reynoldsovo číslo, pro něž existuje nestabilní frekvence, označujeme jako kritické a v případě Poiseuilleova proudění nabývá hodnoty $Re_{\mathrm{krit}} = 5772$ pro $\alpha_{\mathrm{krit}} = 1{,}02$. Uvedené obrázky byly získány pomocí Čebyševovy kolokační metody uvedené v článku [105] a implementované v jazyce Matlab.



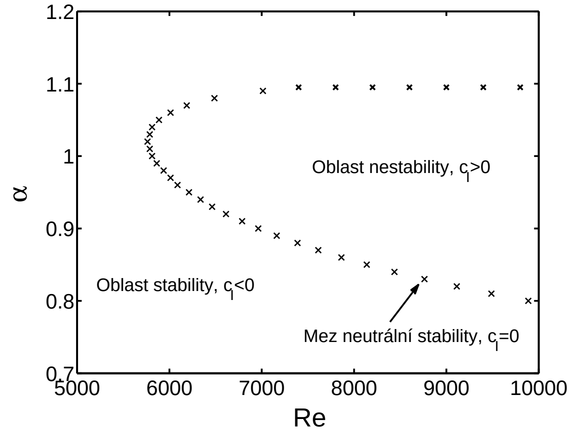
Obrázek 1.5: Závislost rychlosti c_{R} na vlnovém čísle α. Poisseuilleovo proudění; Re=2000.



Obrázek 1.6: Závislost rychlosti c_{I} na vlnovém čísle α. Poisseuilleovo proudění; Re=8000.



Obrázek 1.7: Amplitudová funkce. Poisseuilleovo proudění, α=1,32; Re=1000.



Obrázek 1.8: Oblast nestability Poisseuilleova proudění.

Stabilita mezních vrstev

Problematika řešení hydrodynamické nestability mezních vrstev pomocí O-S rovnice se v porovnání s Poisseuilleovým prouděním vyznačuje okrajovými podmínkami

$$\phi = \phi' = 0 \quad \text{v } y = 0\,, \tag{1.44}$$

$$\phi = \phi' = 0 \quad \text{pro } y \to \infty\,, \tag{1.45}$$

které vyžadují specifické matematické přístupy.

Pokud proudovou funkci definujeme ve tvaru

$$\Psi = \int_0^y U(y)\mathrm{d}y + \phi(y)\exp[\mathrm{i}\alpha(x - ct)]\,, \tag{1.46}$$

pak dle [135] mají okrajové podmínky (1.44) tvar

$$\phi(0) = 0\,, \tag{1.47}$$

$$\phi'(0) = -U'(0)\,, \tag{1.48}$$

který byl užit v našem numerickém řešení na straně 18.

Vzhledem k fundamentálnímu řešení O-S rovnice $\phi = \mathrm{e}^{\pm\alpha y}$ pro $y \to \infty$, viz [120], nabízí se ošetření okrajové podmínky (1.45) předpisem

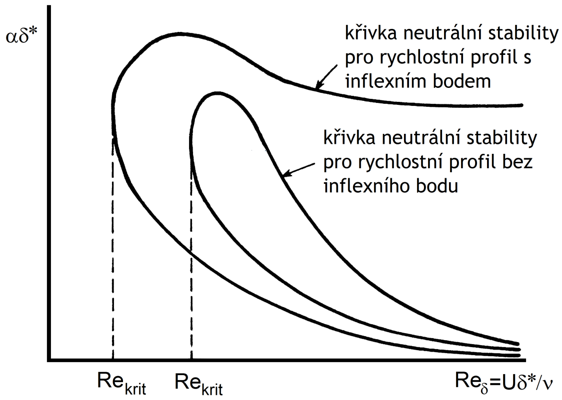
$$\phi'(y^*) = -\alpha\phi(y^*), \tag{1.49}$$
$$\phi''(y^*) = -\alpha\phi'(y^*), \tag{1.50}$$

kde y^* je vhodné číslo. V našem numerickém řešení za y^* dosazujeme krajní bod výpočetní oblasti odpovídající hodnotě bezrozměrné veličiny $y = 1$.

Literatura [120] uvádí, že stabilita mezních vrstev je zásadně ovlivňována průběhem druhé derivace rychlostního profilu resp. přítomností inflexního bodu. S ohledem na vztah mezi tlakovým gradientem a křivostí profilu U

$$\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.51}$$

je zřejmá přímá souvislost mezi existencí inflexního bodu v rychlostním profilu a znaménkem tlakového gradientu. Zřejmě rychlostní profil má inflexní bod, je-li tlakový gradient kladný (hovoříme o tzv. nepříznivém tlakovém gradientu) a naopak, blíže viz např. [120]. Vliv inflexního bodu na oblast stability reprezentuje obrázek 1.9, kde Re_δ je Reynoldsovo číslo příslušné tzv. posunovací tloušťce δ^*. Z obrázku je zřejmé, že inflexní bod jednak snižuje kritické Reynoldsovo číslo a jednak pro velká Reynoldsova čísla rozšiřuje oblast nestability, která naopak pro proudění s příznivým tlakovým gradientem (bez inflexního bodu) mizí.



Obrázek 1.9: Křivky neutrální stability mezních vrstev. Převzato z [84], upraveno.

S ohledem na uvedené skutečnosti uveďme v dalším výsledky řešení O-S rovnice pro Blasiův a Pohlhausenův rychlostní profil s uvážením tlakových gradientů.

Blasiův profil

Zopakujme, že Blasiovým rychlostním profilem rozumíme řešení Prandtlovy rovnice mezní vrstvy bez tlakového gradientu. S ohledem na význam druhé derivace rychlostního profilu pro výpočet nestability je zcela nepostačující použití metody prosté např. polynomiální aproximace proložením bodů uváděných v tabulkách, nýbrž kýžený profil je třeba získat přímým výpočtem z Blasiovy rovnice (odvození viz např. [84], [120], [154])

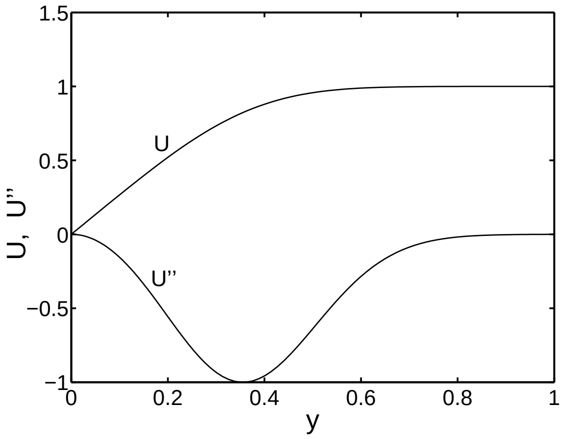
$$2F''' + FF'' = 0 \tag{1.52}$$

s okrajovými podmínkami

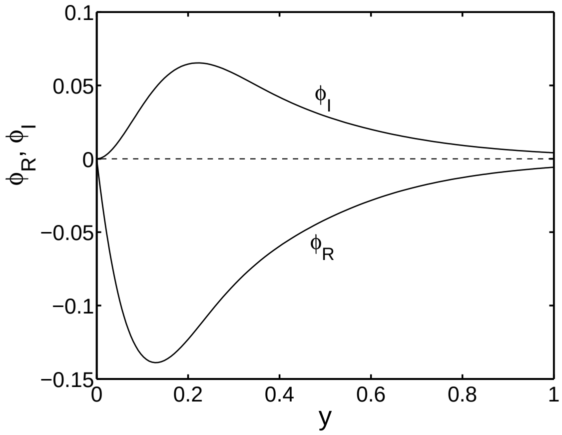
$$F(0) = F'(0) = 0\,, \tag{1.53}$$
$$F'(\infty) = 1\,. \tag{1.54}$$

Pro naše účely byl pro výpočet Blasiova profilu použit kód numerického řešení *blasius.m*, dostupný online [66]. Rychlostní profil včetně průběhu jeho normalizované druhé derivace je uveden na obrázku 1.10. Z obrázku lze nahlédnout, že inflexní bod se nachází na stěně, což koresponduje s rovnicí (1.51) a deklaruje, že Blasiův rychlostní profil představuje hraniční profil z hlediska existence inflexního bodu.

Aplikací Čebyševovy kolokační metody s ošetřením okrajových podmínek dle [67] obdržíme pro $\alpha = 2$ a $Re = 50$ amplitudovou funkci, jejíž reálná a imaginární složka je zachycena na obrázku 1.11.

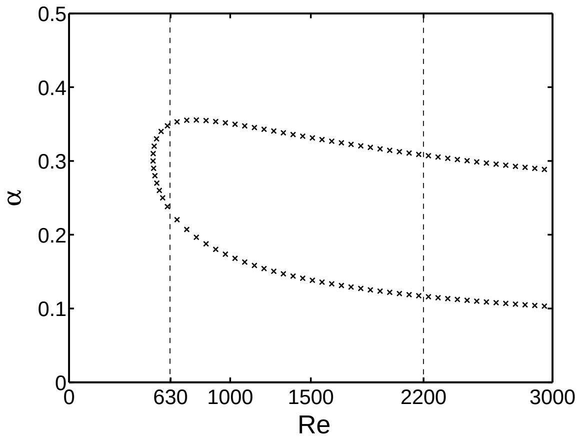


Obrázek 1.10: Blasiův rychlostní profil a jeho druhá derivace $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2$.

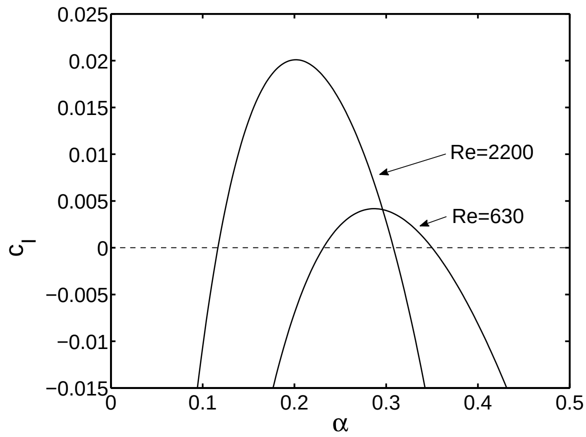


Obrázek 1.11: Reálná a imaginární složka amplitudové funkce pro Blasiův profil mezní vrstvy. α=2, Re=50.

Oblast nestability a rychlost c_I pro $Re = 630$ a $Re = 2200$ dokumentují obrázky 1.12 a 1.13. Lze nahlédnout, že pro $Re = 2200$ dojde k posunutí nestabilního pásma směrem k nižším vlnovým číslům, avšak současně naroste maximální hodnota c_I. Pro vyhodnocení změny rychlosti růstu fluktuací je třeba určit součin αc_I.



Obrázek 1.12: Oblast nestability pro Blasiův profil mezní vrstvy.



Obrázek 1.13: Závislost rychlosti c_I na vlnovém čísle α pro Re=630 a Re=2200.

Pohlhausenův profil

Pohlhausenovými rychlostními profily chápeme rodinu profilů definovanou polynomem čtvrtého stupně

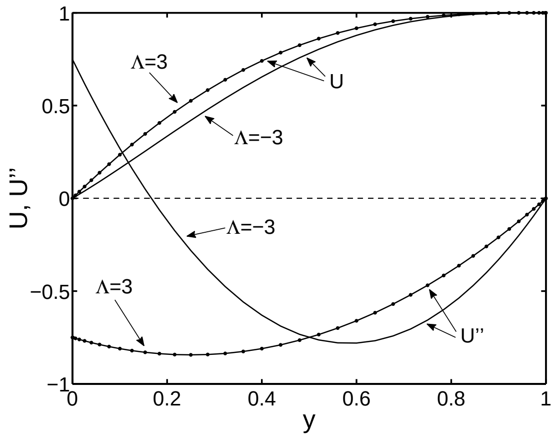
$$\frac{U(y)}{U_e} = \begin{cases} 2y - 2y^2 + y^4 + \frac{\Lambda}{6} y(1-y)^3 & \text{pro } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{pro } \quad y \geq 1 \end{cases} \tag{1.55}$$

kde U_e je rychlost vnějšího proudu a

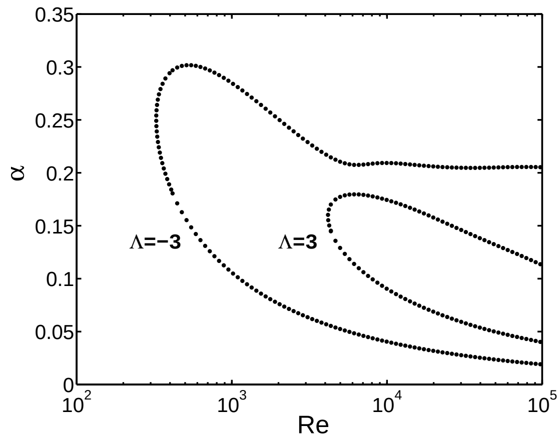
$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} \tag{1.56}$$

je tvarový parametr nabývající hodnot $\Lambda \in [-12; 12]$, přičemž pro $\Lambda < 0$ má rychlostní profil inflexní bod [120].

Rychlostní profily včetně jejich druhých derivací pro $\Lambda = \{3; -3\}$ uvádí obrázek 1.14. Vliv inflexního bodu profilu na oblast nestability je zachycen na obrázku 1.15.

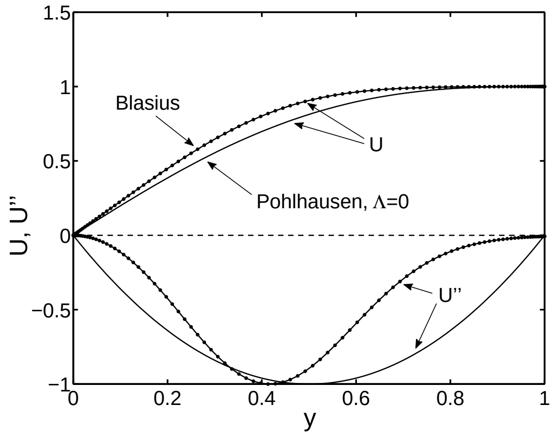


Obrázek 1.14: Pohlhausenovy rychlostní profily a jejich druhé derivace $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2$.

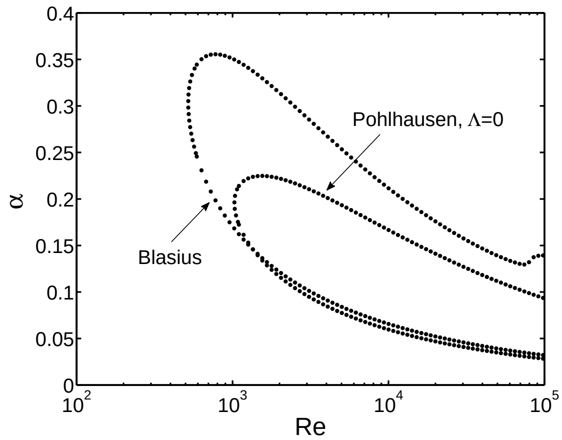


Obrázek 1.15: Oblasti nestability pro Pohlhausenovy profily mezní vrstvy.

Pohlhausenův profil pro $\Lambda = 0$ odpovídá profilu bez tlakového gradientu, a tudíž kvalitativně koresponduje s profilem Blasiovým. Porovnání obou rychlostních profilů a oblastí nestabilit v logaritmických souřadnicích reprezentují obrázky 1.16 a 1.17.



Obrázek 1.16: Porovnání Blasiova a Pohlhausenova rychlostního profilu a jejich druhé derivace $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2$.



Obrázek 1.17: Srovnání oblasti nestability Blasiova a Pohlhausenova rychlostního profilu.

Metoda řešení

Základem výpočetního přístupu je Čebyševova spektrální kolokační metoda, jejíž aplikace je uvedena například v [105]. Principem metody je aproximace řešení řadou Čebyševových polynomů

$$\phi(y_j) \cong \widetilde{\phi}(y_j) = \sum_{k=0}^{N} \widetilde{\phi}_k T_k(y_j), \quad j = 0, 1, \ldots, N \tag{1.57}$$

v kolokačních bodech definovaných Gaussovou-Lobatovou formulí

$$y_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \ldots, N\,. \tag{1.58}$$

Čebyševovy polynomy $T_k(y)$ jsou definovány na intervalu $[-1, 1]$ předpisem

$$T_k(y) = \cos(k \arccos y). \tag{1.59}$$

Výhodou Čebyševovy metody je aproximace derivací funkce $\widetilde{\phi}$ pomocí derivačních matic $\mathbf{D}^i$:

$$\frac{\mathrm{d}^i \widetilde{\phi}}{\mathrm{d}y^i}(y_j) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{D}^i_{jk} \widetilde{\phi}_k\,, \quad i = 1, \ldots, 4\,. \tag{1.60}$$

Protože Čebyševovy polynomy jsou definovány na intervalu $[-1; 1]$, je třeba provést transformaci

$$\phi(y) \to \phi(\frac{z+1}{2})\,, \tag{1.61}$$

$$y : [0; 1] \to z : [-1; 1]\,. \tag{1.62}$$

Ze vztahů pro derivaci složené funkce obdržíme

$$\mathbf{D}^i = \frac{1}{2^i} \widetilde{\mathbf{D}}^i\,, \tag{1.63}$$

kde $\widetilde{\mathbf{D}}^i$ jsou „derivační matice“ získané pomocí kódu *chebdif.m*, který publikovali Weideman a Reddy [144] a zprostředkovali online [145].

Substitucí vztahu (1.60) do O-S rovnice (1.36) obdržíme zobecněný problém vlastních čísel

$$(\mathbf{A} - c\mathbf{B})\Phi = 0\,, \tag{1.64}$$

kde

$$\mathbf{A} = \frac{\mathrm{i}}{\alpha Re}(\mathbf{D}^4 - 2\alpha \mathbf{D}^2 + \alpha^4 \mathbf{I}) + \mathbf{U}(\mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbf{I}) - \mathbf{U}''\,, \tag{1.65}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbf{I}\,. \tag{1.66}$$

Zde $\mathbf{I}$ je jednotková matice, $\mathbf{U}$=diag $U(y_j)$ a $\mathbf{U}''$=diag $U''(y_j)$ jsou diagonální matice a konečně $\Phi = [\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1, \ldots, \widetilde{\phi}_N]^T$ je vektor koeficientů Čebyševovy řady (1.57).

Okrajové podmínky (1.47)–(1.50) mohou být zapsány pomocí derivačních matic ve tvaru

$$\mathbf{C}\Phi = \mathbf{b}\,, \tag{1.67}$$

kde užitím syntaxe $\mathbf{I}(i, :)$ pro i-tý řádek jednotkové matice $\mathbf{I}$ je

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(N, :) \\ \mathbf{D}(N, :) \\ \mathbf{D}(1, :) + \alpha \mathbf{I}(1, :) \\ \mathbf{D}^2(1, :) + \alpha \mathbf{D}(1, :) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U'(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

Implementace okrajových podmínek (1.67) do problému vlastních čísel (1.64) byla provedena dle postupu vyloženého v [67]. Výsledný problém vlastních čísel byl řešen v Matlabu pomocí funkce *eig*.

N	$c_R + ic_I$ (Motsa)	$c_R + ic_I$
30	0,23739952 + 0,00375098 i	0,23739952 + 0,00375098 i
40	0,23751460 + 0,00374111 i	0,23751460 + 0,00374111 i
50	0,23752612 + 0,00373920 i	0,23752612 + 0,00373920 i
60	0,23752650 + 0,00373967 i	0,23752650 + 0,00373966 i
64	0,23752649 + 0,00373967 i	0,23752649 + 0,00373967 i

Tabulka 1.1: Vlastní hodnoty O-S rovnice formulované v problému stability Poisseuilleova proudění v porovnání s řešením [105]. $\alpha = 1$, $Re = 10\,000$.

Zhodnocení výsledků

Uvedený výpočetní postup použitý k řešení nestability mezních vrstev lze v prvé řadě validovat řešením nestability Poisseuilleova proudění a porovnáním výsledných hodnot například s řešením dle článku [105]. Referenčními hodnotami v tomto případě mohou být jednak vlastní hodnoty O-S rovnice, tj. rychlosti c_R a c_I, a jednak kritické Reynoldsovo číslo. V prvém případě obdržíme posloupnost hodnot v závislosti na počtu Čebyševových polynomů použitých v řešení, viz tab. 1.1. Kritické parametry nestabilního režimu jsou dle literatury, viz např. [111], dány hodnotami $Re_{\mathrm{krit}} = 5772{,}2$ a $\alpha_{\mathrm{krit}} = 1{,}021$. Těchto hodnot dosahuje zvolený přístup pro $N = 50$.

Výpočet oblastí nestabilit mezních vrstev je v porovnání s problémem nestability Poisseuilleova proudění náročnější na ošetření okrajových podmínek v nevlastním bodě. V případě Blasiova profilu pro vhodnou tloušťku mezní vrstvy obdržíme oblast nestability zachycenou na obrázku 1.12. Kritické Reynoldsovo číslo $Re_{\mathrm{krit}} = 520$ pro $\alpha_{\mathrm{krit}} = 0{,}3$ včetně grafů rychlostí c_I z obrázku 1.13 pro zvolená Reynoldsova čísla odpovídají výsledkům uvedeným v [133].

Výsledné grafy na obrázcích 1.15 a 1.17 deklarují kvalitativní shodu s teorií vlivu inflexního bodu rychlostního profilu na oblast nestability, viz obrázek 1.9. Použijeme-li jako kvantitativní charakteristiku validace řešení hodnotu Re_{krit}, pak v případě Pohlhausenova profilu obdržíme hodnoty, které jsou v porovnání s výsledky uváděnými v literatuře, například v [120], v závislosti na parametru Λ v různé míře nadhodnoceny.

Shrnutí

Předcházející text odstavce 1.3.2 představuje úvodní příspěvek k problematice nestability laminárního proudění řešené pomocí teorie Orrovy-Sommerfeldovy rovnice. Na základě Čebyševovy kolokační metody pro řešení diferenciálních rovnic byla sestavena programová procedura v jazyce Matlab a její pomocí byl řešen okrajový problém Orrovy-Sommerfeldovy rovnice pro různé typy rychlostních profilů. Výsledná řešení kvalitativně odpovídají výsledkům uváděným v literatuře. V případě Poisseuilleova proudění procedura dosahuje obdobné přesnosti jako v případě referenčního postupu z článku [105]. Oblast nestability Blasiova rychlostního profilu vykazuje shodu s výsledky uvedenými v [120] i [133]. Hodnoty kritických Reynoldsových čísel pro Pohlhausenův profil mezních vrstev jsou však v porovnání s hodnotami uváděnými v [120] nadhodnoceny. Tato diference je zřejmě způsobena aplikací univerzálního ošetření okrajových podmínek, viz [67]. Přesto lze dosažené výsledky zejména z kvalitativního hlediska považovat za dostatečně reprezentativní dokumentaci vlivu rychlostních profilů na oblast nestability laminárního proudění. Zvolený postup navíc prezentuje poměrně jednoduchou metodu řešení problému vlastních hodnot diferenciální rovnice s nehomogenními okrajovými podmínkami, jehož exaktní rozřešení je v případě Orrovy-Sommerfeldovy rovnice dosud tématem vědeckých publikací.

KAPITOLA 2

Vybrané poznatky mechanického vlnění kapalin

Předcházející kapitola se zabývala teoretickým úvodem do problematiky obecné hydrodynamické stability. Uvedené principy a přístupy se věnovaly především definici podmínek vzniku nestabilit pomocí dějů probíhajících nejprve na mikroskopické úrovni. Následující kapitola bude pojednávat o makroskopickému projevu hydrodynamické nestability, kterým jsou především různé typy vln na hladině kapalin.

Principiálním atributem mechanických postupných vln je přenos energie a informace ve formě amplitudy a fáze pomocí uspořádaného pohybu částic kontinua v důsledku působení setrvačných a stabilizačních sil. Na volném povrchu kapalin v tíhovém poli vznikají tzv. *povrchové vlny*. Je-li hlavní stabilizační silou zemská tíže, hovoříme speciálně o *gravitačních vlnách* (angl. *surface gravity waves*) [28]. Uveďme v dalším s použitím zdroje [84] několik poznámek k matematickému popisu těchto vln majících přímou souvislost se studovanou tématikou.

2.1 Základní parametry vln

Ačkoliv charakter postupných vln v kontinuu může mít několikerý průběh, lze za předpokladu malých amplitud poruch považovat daný systém za lineární, a tudíž dle aplikace Fourierova principu superpozice lze libovolný rozruch získat superpozicí sinusoidálních vln ve tvaru

$$\eta = a \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right], \tag{2.1}$$

kde a se nazývá *amplituda*, argument funkce sin *fáze vlny*, λ *vlnová délka*, c[1] *fázová rychlost* a x, t jsou souřadnice časoprostoru. Definováním *vlnového čísla*

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.2}$$

můžeme vztah (2.1) zapsat v obvyklejším tvaru

$$\eta = a \sin \alpha(x - ct). \tag{2.3}$$

Dále zaveďme *periodu* vlny

$$T = \frac{\lambda}{c}, \tag{2.4}$$

a *úhlovou rychlost (frekvenci)*

$$\omega = \alpha c. \tag{2.5}$$

[1] Vzhledem k analogii s vlnovou rychlostí perturbací v kapitole 1 zachováváme zde i dále v textu totéž značení c pro vlnovou rychlost. Z kontextu lze snadno rozlišit, zda se jedná o vlnovou rychlost fluktuací, obecných mechanických vln nebo vln na rozhraní fází.

2.2 Vlny na povrchu kapalin

Základními charakteristikami pro klasifikaci i kvalifikaci vln na hladině jsou údaje o hloubce kapaliny h, vlnové délce λ, amplitudě a a jejich vzájemných poměrech. Kritériem, jehož splnění nás ospravedlňuje považovat problematiku vln za lineární, je *předpoklad malých amplitud vln* ve smyslu podmínek

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1, \qquad \frac{a}{h} \ll 1. \tag{2.6}$$

Podmínka a/λ implikuje plochý profil vlny a podmínka a/h omezuje rozdíl mezi hloubkou zvlněného a hladkého povrchu kapaliny v ustáleném stavu. Formalizovaná teorie zdroje [84] mezi zjednodušujícími předpoklady dále uvádí nízkou viskozitu kapaliny (vliv vazkosti tekutin je omezen na oblast mezních vrstev), zanedbatelný vliv rotace Země a povrchového napětí a rovnoměrnou hustotu kapaliny.

S ohledem na nevířivost proudění lze zavést rychlostní potenciál $\Phi(x, y, t)$ vztahy

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{2.7}$$

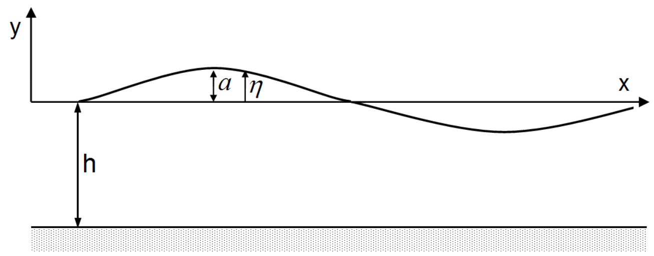
Za výše uvedených zjednodušení a předpokladů, kinematické a dynamické podmínky z odstavce 1.2 lze substitucí (2.7) do rovnice kontinuity sestavit okrajový problém:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.8}$$

s podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0 && \text{pro } y = -h, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} && \text{pro } y = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -g\eta && \text{pro } y = 0, \end{aligned}$$

kde x, y značí prostorové souřadnice, t čas, g tíhové zrychlení a η výchylku vlny od rovnovážné hladiny, viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Náčrt vlny na povrchu kapalné vrstvy a souřadnicový systém.

Předpokládáme-li výchylku η ve tvaru (2.3), pak lze dle [84] z uvedeného okrajového problému odvodit vztah pro fázovou rychlost vlny:

$$c = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \tanh \alpha h} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}\,. \tag{2.9}$$

Vztah (2.9) říká, že rychlost šíření vlny závisí na vlnové délce a tloušťce vrstvy. Poznamenejme, že v případě splnění *podmínky mělké vody*

$$h/\lambda \ll 1 \tag{2.10}$$

lze užít aproximační vztah

$$c = \sqrt{gh}\,,$$

který říká, že rychlost vzrůstá s tloušťkou vrstvy a nezávisí na vlnové délce. Vztah nabývá přesnosti 3 % pokud $h < 0,07\lambda$. Za stejného předpokladu lze z výše uvedeného okrajového problému odvodit zjednodušené vztahy pro komponenty rychlostního pole kapalné vrstvy

$$u = \frac{a\omega}{\alpha h}\cos(\alpha x - \omega t), \tag{2.11}$$

$$v = a\omega\left(1 + \frac{y}{h}\right)\sin(\alpha x - \omega t), \tag{2.12}$$

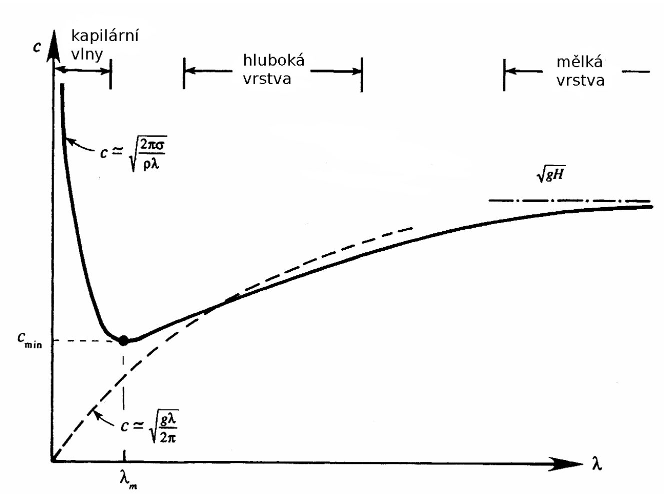
které za uvedené podmínky mělké vody ukazují, že vertikální komponenta rychlosti v je mnohem menší než horizontální komponenta u.

2.2.1. Vliv povrchového napětí

S uvážením vlivu povrchového napětí lze dle [84] odvodit vztah pro fázovou rychlost ve tvaru

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{\alpha} + \frac{\sigma\alpha}{\rho}\right)\tanh \alpha h} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)\tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}. \tag{2.13}$$

Graf závislosti rychlosti c na vlnové délce λ, včetně aproximačních čar a vztahů pro případ hluboké a mělké vody, je vykreslen na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Závislost fázové rychlosti na vlnové délce. Převzato z [84].

Z grafu je zřejmé, že existuje vlnová délka λ_{min}, pro niž fázová rychlost nabývá minima a pod kterou nabývá na významu povrchové napětí. S uvážením aproximace pro hlubokou vodu, tj. $\tanh(2\pi h/\lambda) \approx 1$ (v případě $h > 0,28\lambda$), lze obdržet vztahy

$$c_{\mathrm{min}} = \left[\frac{4g\sigma}{\rho}\right]^{1/4}, \qquad \lambda_{\mathrm{min}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\,. \tag{2.14}$$

Pro rozhraní voda–vzduch při teplotě 20 °C je povrchové napětí $\sigma = 0{,}074\,\mathrm{N/m}$, což dává hodnoty

$$c_{\min} = 23{,}2\,\mathrm{cm/s}\,, \qquad \lambda_{\min} = 1{,}73\,\mathrm{cm}\,.$$

Je ovšem třeba připomenout, že funkční závislost na obrázku 2.2 je vykreslena pro takové hodnoty fyzikálních charakteristik, které v uvedeném případě odpovídají několikacentimetrové tloušťce kapalné vrstvy. Pro výrazně rozdílné tloušťky h nebude graf s odvozenými hodnotami zcela relevantní.

Z uvedeného je zřejmé, že vliv povrchového napětí narůstá se zmenšující se vlnovou délkou. Vlny, u kterých je dominantní stabilizační silou síla tíhová a vliv povrchového již nelze zanedbat ($\lambda < 7\,\mathrm{cm}$ pro rozhraní voda–vzduch), se nazývají gravitačně–kapilární (angl. *gravity–capillary waves)*. Vlny s ještě kratší vlnovou délkou ($\lambda < 4\,\mathrm{mm}$) již nejsou významně ovlivňovány gravitačním působením a rozhodujícím stabilizačním faktorem je tak povrchové napětí. Tyto vlnky se označují jako *kapilární vlny* (angl. *capillary waves* případně *ripples*) [84].

Význam povrchového napětí v poměru ke gravitaci zohledňuje Bondovo číslo

$$Bo = \frac{\sigma\alpha^2}{\rho g}. \tag{2.15}$$

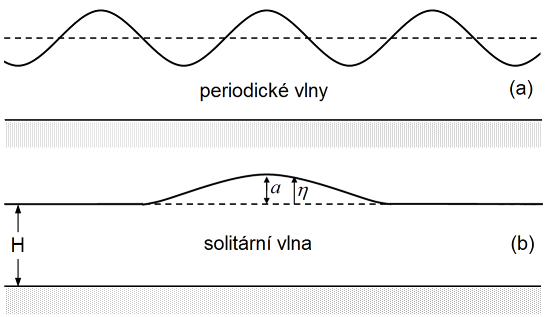
Dle článku [136] mají vodní vlny gravitačně-kapilární charakter pro Bo v rozsahu od $Bo = 0{,}03$ ($\lambda = 10\,\mathrm{cm}$) do $Bo = 1$ ($\lambda = 1{,}73\,\mathrm{cm}$).

2.2.2. Vlny na mělké vodě - Kortewegova-de Vriesova rovnice

Uvažujme vlny charakterizované poměrem $\lambda/h = 10-20$. Korteweg a de Vries v roce 1895 ukázali, že tyto vlny přibližně splňují rovnici

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3}{8}c_0\frac{\eta}{h}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{1}{6}c_0 h^2\frac{\partial^3\eta}{\partial^3 x} = 0,$$

kde $c_0 = \sqrt{gh}$. Rovnice je mimo jiné známa jako příklad nelineární parciální diferenciální rovnice, jejíž řešení lze nalézt analyticky. Analýza rovnice dává do souvislosti její nelineární a tzv. disperzní člen. Aproximací jejich poměru obdržíme výraz $a\lambda^2/h^3$, na jehož základě lze usuzovat o režimu vlnění. V případě, že je tento poměr menší než 16, analýza rovnice ukazuje, že jsou možné dva typy jejího řešení. Jednak v podobě periodických vln a jednak řešení ve formě solitární vlny, viz případy a) a b) na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Periodické a solitární vlny jako řešení Kortewegovy-de Vriesovy rovnice.

Rychlost šíření solitární vlny je dána vztahem

$$c = c_0\left(1 + \frac{a}{2h}\right), \tag{2.16}$$

který říká, že rychlost roste s amplitudou a naopak klesá s tloušťkou vrstvy.

KAPITOLA 3

Problematika nestabilit na tenkých kapalných filmech

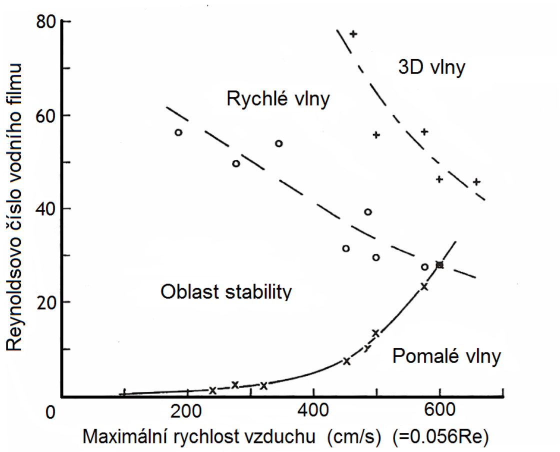
3.1 Experimentální poznatky a typy nestabilit

Charakter vln na tenkých filmech je primárně podmíněn hodnotami Reynoldsových čísel vlastního filmu Re_{L} a doprovodného plynného proudu Re_{G}. Reynoldsovo číslo kapaliny

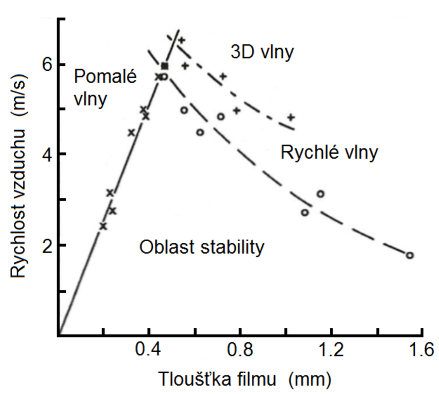
$$Re_{\mathrm{L}} = \frac{Q}{\nu}$$

je dáno poměrem objemového toku kapaliny na jednotku délky v příčném směru Q ku kinematické viskozitě ν a udává tedy informaci o tloušťce filmu a rychlosti proudící tekutiny.

Jednu z prvních prací, která se teoreticky i experimentálně zabývá studiem nestabilit tenkého filmu na rovné desce, publikoval Craik [36]. Kromě matematické analýzy nestabilit obsahuje rovněž experimentální vyhodnocení typů vln v závislosti na Reynoldsových číslech, viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Mapa režimu vln na tenkém filmu. Převzato z [36], upraveno.



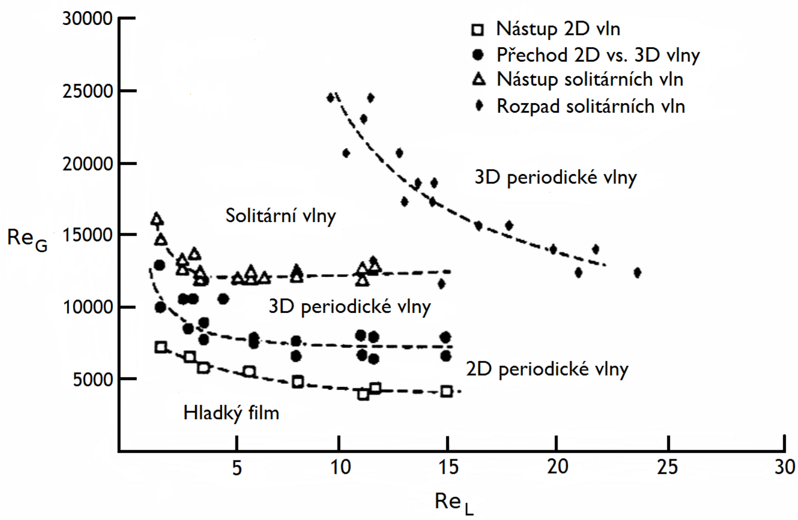
Obrázek 3.2: Mapa režimu vln na tenkém filmu. Převzato z [36], upraveno.

V daném experimentu bylo při konstantní rychlosti proudícího vzduchu Reynoldsovo číslo kapaliny řízeno velikostí jejího průtoku, který se projevuje různou tloušťkou filmu. Pro velmi nízká Reynoldsova čísla resp. tloušťku filmu byl objeven dosud nepozorovaný typ neharmonických vln s příkrou přední a dlouhou zadní částí. Vzhledem k tomu, že pozorovaná rychlost šíření vln byla menší než rychlost povrchu filmu, Craik v [36] hovoří o tzv. *pomalých vlnách*. Hřebeny těchto vln jsou od sebe vzdáleny nejméně 10 cm, jejich amplituda roste se snižující se tloušťkou filmu.

Název pomalé vlny dává Craik do protikladu s označením tzv. *rychlých vln*, které se objevují při větších Re_{L}. Tyto jsou periodické, s vlnovou délkou $1-2$ cm a šíří se rychleji než povrch filmu.

Z obrázku 3.1 je zřejmé, že existuje takové Reynoldsovo číslo, pro něž je oblast stability mezi oblastmi rychlých a pomalých vln nejrozlehlejší. V daném experimentu toto Reynoldsovo číslo odpovídalo tloušťce 0,46 mm, viz obr. 3.2.

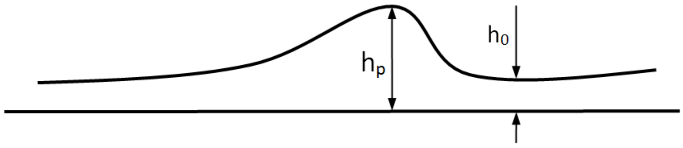
Vyšetřováním vln na hladině kapalné vrstvy s o řád větší tloušťkou ($h < 6$ mm) se zabývali Jurman a McCready ve studiích [77] a [113]. Z jejich výsledků mimo jiné vyplývá, že Reynoldsova čísla nejsou postačující pro identifikaci typu nestability resp. vln. Na základě experimentu v kanálu o průřezu $30\times2{,}54$ cm a délce 9 m získali celkem 4 různé typy chování kapalného filmu, které zakreslili v závislosti na Reynoldsových číslech do map pro různé viskozity tekutin. Obrázek 3.3 zachycuje tuto tzv. *mapu režimů*[1] (angl. *regime map*) pro viskozitu $\mu_{\mathrm{L}}=0{,}030$ Pa·s. Experimenty ukazují, že při vrůstající rychlosti plynu původně hladký film přechází ve dvoudimenzionální sinusoidální vlny, tyto se následně rozrušují za vzniku periodických vln s třídimenzionálním charakterem a konečně z vln s dostatečně velkým poměrem amplitudy ku tloušťce kapalné vrstvy ($a/h \sim 1$) a vlnovou délkou blízkou spektrálnímu píku a strmostí $a/\lambda = 0{,}1-0{,}15$ vznikají působením smykových sil asymetrické *solitární vlny* s příkrou přední a sestupnou zadní částí, tj. s geometrickým průběhem analogickým pomalým vlnám viz obr. 3.4. Autoři usuzují, že kritický poměr a/h omezuje vznik solitárních vln jen pro dostatečně malé tloušťky kapalné vrstvy (např. $Re_{\mathrm{L}}<15$ pro $\mu_{\mathrm{L}}=0{,}030$ Pa·s viz obr. 3.3) zřejmě vlivem disperzního efektu.



Obrázek 3.3: Mapa režimu vln pro $\mu_{\mathrm{L}} = 30$ cP. Převzato z [113].

Poloha přechodů mezi jednotlivými typy režimů se liší v závislosti na viskozitě kapaliny. Z map režimů v článku [113], viz také obr. B.1 a B.2 str. 103, vyplývá, že s rostoucí viskozitou dochází k ustavení solitárních vln při nižších Re_{G}, přičemž oblast výskytu třídimenzionálních vln se zmenšuje. Nástup solitárních vln u tenkých filmů v závislosti na viskozitě kapaliny studoval podrobněji Andreussi [8]. Při nízkých viskozitách kapaliny se solitární vlny objevují nepravidelně mezi dosud rozrušeným rozhraním třídimenzionálních vln, zatímco pro vyšší hodnoty viskozity se s rostoucí rychlostí plynu vlnové délky nyní stabilnějších dvoudimenzionálních vln postupně prodlužují a solitární vlny se tak jeví být jejich důsledkem. Obdobný mechanismus vzniku kapilárních vln potvrzuje současně analýza stability [12].

[1] Mapu režimů kapalné vrstvy pro široký rozsah podmínek uvádí např. přehledová kapitola [25], pro proudění v horizontální trubici články [9], [93].



Obrázek 3.4: Charakteristický tvar tzv. pomalé resp. solitární vlny.

Jurman a McCready [77] usuzují, že pozorované solitární vlny jsou v podstatě téhož typu jako tzv. *roll waves*, viz například Hanratty a Hershman [62], pro nízké hodnoty Re_{L}, kdy nedochází k „rolovacímu efektu“ v důsledku rychlejšího pohybu hřebenu vůči údolí vlny.

Dalším typem nestabilit jsou *kapilární vlny* (angl. *capillary-gravity waves* nebo *capillary ripples*) vyskytující se při velkých rychlostech proudícího plynu ($> 20\,\mathrm{m/s}$) na velmi tenkých kapalných filmech např. v případě anulárních toků v potrubí. Pro tyto vlny s malými vlnovými délkami v řádech milimetrů jsou důležité kapilární jevy a povrchové napětí. Naopak často lze zanedbat vliv gravitačního působení. Vlny vykazují tentýž geometrický průběh jako pomalé vlny, které pozoroval Craik [36]. Vzhledem k velmi rozdílným fyzikálním podmínkám, za kterých se oba typy nestabilit vyskytují, však Asali a Hanratty [12] usuzují, že nejsou tytéž podstaty.

Z předchozího odstavce, zejména obrázků 3.2 a 3.3, lze pozorovat konzistenci mezi experimenty s přihlédnutím ke skutečnosti, že pozorované typy vln jsou závislé na tloušťce filmu. Výsledky výše uvedených studií lze shrnout v poznatku, že kapalné filmy vykazují v závislosti na tloušťce kapalné vrstvy a rychlosti proudícího plynu následující režimy nestabilit :

- tzv. **pomalé vlny** v případě velmi tenkých filmů (do 0,5 mm) šířící se rychlostí menší než povrch kapaliny a zanikající pro nadkritické hodnoty tloušťky filmu. Na hladkém povrchu se pak při větších rychlostech plynu začnou tvořit

- **dvoudimenzionální periodické vlny** s fázovou rychlostí větší než rychlost povrchu kapaliny. Tyto pro velmi tenké filmy mohou koexistovat s předchozím typem pomalých vln, pro větší tloušťky filmu však při větších rychlostech plynu přecházejí ve

- **vlny s třídimenzionálním charakterem**, které se při dostatečně nízkých hodnotách Reynoldsova čísla kapalné vrstvy redukují na

- **solitární vlny** velkých amplitud s geometrickým charakterem podobným pomalým vlnám, tj. příkrou přední a sestupnou zadní částí, případně na

- **kapilární vlny** (angl. **ripples**) vznikající z dvoudimenzionálních periodických vln pro velmi tenké filmy a vysoké rychlosti plynu, přičemž pro nadkritické rychlosti plynu může u těchto, případně předchozích solitárních vln, nastávat

- tzv. **atomizace**, tj. odtržení fragmentů kapaliny z vrcholů vln za vzniku kapek procesem sekundární atomizace.

Z experimentálních poznatků a uvedeného výčtu je zřejmé, že problematika vln na tenkých filmech vykazuje značnou různorodost. Nekodifikované názvosloví a absence některých charakteristik vyšetřovaného typu nestabilit pak znesnadňuje vzájemné srovnávání jednotlivých analýz a modelů. Zejména se jeví nedostatečné uvádět pouze Reynoldsovo číslo kapalného filmu resp. plynné vrstvy namísto údaje o uvažované tloušťce filmu resp. rychlosti proudění plynu a rozměrech kanálu. V dalším výkladu se proto nebudeme omezovat pouze na bezrozměrná podobnostní kritéria, nýbrž budeme uvažovat i reálné charakteristiky nestabilit a parametry problému.

3.2 Aplikace lineární analýzy stability

S ohledem na výše uvedený výčet nestabilit je zřejmé, že využití lineární analýzy definované v podkapitole 1.1 je omezené především na počáteční fáze nestabilit, tj. na predikci dvoudimenzionálních, případně třídimenzionálních vln.

Aplikaci lineární analýzy na problém nestabilit kapalného filmu v uzavřeném kanále vyložil v přehledovém článku Hanratty [60]. Rozklad výšky hladiny po délce vlny na její průměrnou a fluktuační složku je definován součtem

$$h = \overline{h} + h', \tag{3.1}$$

kde pro libovolné x_0 a t_0 platí

$$\overline{h}(x, t_0) = \frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x_0+\lambda} h(x, t_0)\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.2}$$

Analogicky k odstavci 1.1 definujeme komplexní funkci

$$h' = a \exp \mathrm{i}\alpha(x - ct), \tag{3.3}$$

jejíž reálná složka

$$\Re[h'] = a \exp(\alpha c_{\mathrm{I}} t) \cos \alpha(x - c_{\mathrm{R}} t) \tag{3.4}$$

popisuje výchylku rozhraní od rovnovážné polohy $\overline{h}$ pomocí funkční závislosti na vlnovém čísle $\alpha = 2\pi/\lambda$, souřadnici ve směru proudění x, komplexní vlnové rychlosti $c = c_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}c_{\mathrm{I}}$ a čase t. Vlny na rozhraní jsou doprovázeny výchylkami rychlostního pole kapalné i plynné vrstvy indukovanými, jak ukazuje následující podkapitola 3.3, výchylkami tlaku a smykového napětí na rozhraní. S ohledem na předpoklad malých výchylek veličin, předpokládané typy nestabilit a poznatky uvedené v části 1.3 je adekvátní zjednodušení problému na dvoudimenzionální paralelní proudění, přičemž uvažujeme rychlostní pole zvlášť pro plynnou a zvlášť pro kapalnou vrstvu. Užitím obvyklého Reynoldsova rozkladu na průměrnou a fluktuační[2] složku těchto veličin obdržíme pro rychlostní pole kapalné resp. plynné vrstvy ($j \equiv \mathrm{L}$ resp. $j \equiv \mathrm{G}$) a tlakové a smykové napětí působící na rozhraní po řadě vztahy

$$\begin{aligned}
[U_j, V_j] &= [\overline{U}_j(y) + U_j', V_j'], && (3.5)\\
P_{\mathrm{w}} &= \overline{P}_{\mathrm{w}} + P_{\mathrm{w}}', && (3.6)\\
\tau_{\mathrm{w}} &= \overline{\tau}_{\mathrm{w}} + \tau_{\mathrm{w}}'\,. && (3.7)
\end{aligned}$$

Předpokladem lineární analýzy je požadavek, aby amplituda a výchylky h' byla dostatečně malá pro splnění linearity ve smyslu vztahů

$$\frac{U_j'}{\widehat{U}_j(y)} = \frac{V_j'}{\widehat{V}_j(y)} = \frac{P_{\mathrm{w}}'}{\widehat{P}_{\mathrm{w}}} = \frac{\tau_{\mathrm{w}}'}{\widehat{\tau}_{\mathrm{w}}} = a \exp \mathrm{i}\alpha(x - ct)\,, \tag{3.8}$$

kde amplitudové složky $\widehat{U}_j(y)$, $\widehat{V}_j(y)$, $\widehat{P}_{\mathrm{w}}$ a $\hat{\tau}_{\mathrm{w}}$ jsou komplexní, tj. zejména definujeme

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_{\mathrm{w}} &= P_{\mathrm{WR}} + \mathrm{i}P_{\mathrm{WI}}, && (3.9)\\
\widehat{\tau}_{\mathrm{w}} &= \tau_{\mathrm{WR}} + \mathrm{i}\tau_{\mathrm{WI}}. && (3.10)
\end{aligned}$$

Separací reálných složek fluktuací P_{w}', τ_{w}' definovaných předpisy (3.8)–(3.10) obdržíme vztahy

$$\begin{aligned}
\Re[P_{\mathrm{w}}'] &= a \exp(\alpha c_{\mathrm{I}} t)[P_{\mathrm{WR}} \cos \alpha(x - c_{\mathrm{R}} t) - P_{\mathrm{WI}} \sin \alpha(x - c_{\mathrm{R}} t)], && (3.11)\\
\Re[\tau_{\mathrm{w}}'] &= a \exp(\alpha c_{\mathrm{I}} t)[\tau_{\mathrm{WR}} \cos \alpha(x - c_{\mathrm{R}} t) - \tau_{\mathrm{WI}} \sin \alpha(x - c_{\mathrm{R}} t)]. && (3.12)
\end{aligned}$$

[2] Jedná se o odchylky od rovnovážných hodnot v důsledku zvlněného povrchu.

Analogicky k obecnému úvodu v podkapitole 1.1 je principem lineární analýzy stability dosazení veličin definovaných vztahy (3.3)–(3.10) do pohybových rovnic a vyšetření jejich průběhu v závislosti na geometrických a fyzikálních parametrech definovaných okrajovými podmínkami. Cílem analýzy je zejména určení rychlosti c_{I} pro predikci trendu růstu nestabilit v závislosti na vlnovém čísle α, rychlosti vnějšího proudu U a tloušťce kapalné vrstvy h. Ze vztahu (3.4) přitom plyne, že podmínka $c_{\mathrm{I}} = 0$ resp. $c_{\mathrm{I}} > 0$ definuje přechod ze stabilního režimu v nestabilní resp. růst vln. Nejrychleji rostoucí vlny jsou takové, pro něž je součin αc_{I} maximální.

Konkrétní tvar příslušných pohybových rovnic je odvozen z Navierových-Stokesových rovnic za předpokladu zjednodušení v důsledku případných geometrických specifik a s využitím adekvátních modelů rychlostních profilů a tlakových resp. smykových účinků P_{w} resp. τ_{w}, zejména jejich amplitudových složek P_{WR}, P_{WI} resp. τ_{WR}, τ_{WI}.

3.3 Fyzikální principy vzniku nestabilit

Klasická teorie hydrodynamické nestability, viz např. [84], vysvětluje destabilizaci kapalných vrstev teorií Kelvinovy-Helmholtzovy nestability, tj. změnou hustot a rychlostí tekutin na rozhraní a aplikací fenoménu popsaného Bernoulliho rovnicí. Jak bylo uvedeno v podkapitole 1.2 nemůže být tato teorie použita k dostatečnému popisu pozorovaných nestabilit tenkých kapalných filmů. Uveďme proto v dalším chronologický výčet principů pokoušejících se vysvětlit vznik nestabilit z fyzikálního hlediska.

Jednu z prvních fyzikálních teorií osvětlujících vznik vln na vodní hladině v důsledku proudícího vzduchu uvedl Jeffreys v článku [75]. Pro navržený mechanismus se v angloamerické literatuře ujalo označení *sheltering hypothesis*. Dle této hypotézy dochází na závětrné straně vlny k separaci mezní vrstvy a k jejímu opětovnému přilnutí na straně návětrné. Důsledkem této separace je tlaková asymetrie vzhledem ke hřebenu vlny vedoucí k následnému růstu vlny. Dřívější měření nad pevnými zvlněnými povrchy [106], [127] poukazovala ovšem na skutečnost, že vznikající tlakové síly jsou jednak příliš malé pro efektivitu navrženého mechanismu a navíc v případě skutečných vln se tyto pohybují rychleji než proud vzduchu, a tudíž by mělo k separaci docházet spíše na návětrné straně[3], jak poukázal Ursell [138]. Tentýž autor však současně upozornil na inkonzistenci tehdejších měření a zpochybnil tak jejich význam ve vztahu k potvrzení nebo vyvrácení Jeffreyseho hypotézy. Pozdější autoři nicméne interpretují zmíněné poznatky spíše v neprospěch hypotézy a navrhují jiné mechanismy, viz zejména Phillips [114], Miles [98], a Lighthill [87]. Smykové koeficitenty vycházející z původní hypotézy se však nadále objevují i v některých pozdějších přístupech k modelování nestabilit kapalných filmů, viz např. [80].

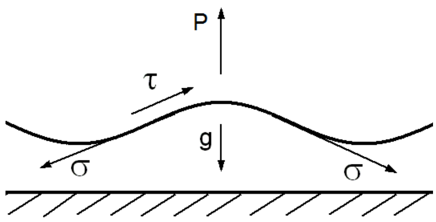
Phillips [114], [115] navrhnul tzv. *rezonanční mechanizmus*. Rychlostní fluktuace turbulentního proudění nad hladinou indukují fluktuace napětí v tangenciálním i normálovém směru vzhledem k rozhraní. Tlakové fluktuace působí jako budící člen v oscilátoru. Jestliže frekvence fluktuací vystihuje rezonanční frekvenci gravitačně-kapilárních vln, dochází k jejich růstu.

Miles v článku [98] na základě řešení Rayleighovy rovnice (1.39) odvodil, že rychlost přenosu energie z plynného proudu je úměrná křivosti profilu v kritické vrstvě definované rovností (1.41), kde c_{R} značí v tomto případě fázovou rychost povrchových vln. V dalších článcích [99]–[101] vymezil uplatnění navrženého *mechanizmu kritické vrstvy* na základě polohy kritické vrstvy. Perturbace získávají energii z hlavního proudu kapalného filmu resp. z plynné vrstvy, pokud vlnová rychlost je menší resp. větší než rychlost filmu na rozhraní. Zřejmě v prvním případě je kritická vrstva v kapalném filmu, ve druhém případě v plynném proudu. Kim v dizertační práci [81] v této souvislosti hovoří o *mechanismu „Tollmienovy-Schlichtingovy nestability“*. Uvedený mechanismus v úvodu článku [97] shrnul Miesen a fyzikálně precizoval Lighthill [87].

[3] Diskusi podmínek vedoucích k separaci vzdušného proudu nad pohybujícím se vodním povrchem se věnuje Banner [17]. Práce poukazuje na souvislost separace se zlomem vlny (angl. *wave break*) na závětrné straně.

Iniciaci nestability jako důsledek skokové změny viskozit tekutin (tzv. *viskózní mechanismus* dle [109]) na rozhraní uvádí Yih [153].

Cohen a Hanratty ve studii [33] pozorovali vždy větší vlnovou rychlost než rychlost filmu, z čehož vyvozují, že v případě vln na povrchu kapalných filmů není energie transmitována z hlavního proudu reprezentovaného průměrným rychlostním profilem a zpochybňují tak Milesův mechanismus Tollmienovy-Schlichtingovy nestability. Infinitezimální Tollmienovy-Schlichtingovy vlny, které jsou základem vzniku turbulence, viz např. [120], [133], mohou být tedy zodpovědné pouze za apriorní poruchy povrchu filmu. Podobně autoři usuzují, že vlny nejsou důsledkem turbulence vzduchové vrstvy nad filmem, neboť hladký film byl pozorován i v případech turbulentního proudu plynu, ani Phillipsova rezonančního mechanismu, protože vlnové rychlosti jsou mnohem menší než průměrná rychlost plynu. Konečnou hypotézou autorů je tvrzení, že vlny získávají energii z proudu plynu skrze fluktuace tlaku a smykového napětí způsobené nerovnostmi na povrchu filmu. Ke vzniku nestabilit tedy obecně dochází pokud vliv destabilizačních sil setrvačných, smykových a tlakových převáží nad účinky stabilizačních sil tíhových a povrchového napětí, viz schéma na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Schéma silového působení při vzniku nestabilit.

3.3.1. Silová působení v kapalném filmu

Detailnější popis mechanismu nestability v tenkém kapalném filmu podává Smith [126] na základě rozboru silových působení. Autor na základě dvou okrajových podmínek na rozhraní příslušných dvěma modelovým problémům rozlišuje dvojí mechanismus vzniku nestabilit:

- **Iniciační mechanismus** asociovaný s „*podmínkou tangenciálního napětí* τ_{s} *na rozhraní*“ indukující dominantní pohyb kapaliny; příslušný modelový problém představuje stékání kapalného filmu na nakloněné rovinné stěně. Rychlostní profil v bezrozměrných proměnných, blíže viz [126], je předepsán ve tvaru

$$U(y) = (1 + \tau_{\mathrm{s}})y - \frac{1}{2}y^2. \tag{3.13}$$

  Při zvlněném rozhraní se na hladině filmu indukuje smykové napětí tak, že celkové třecí síly v místech nerozrušeného povrchu zůstávají konstantní a smykové napětí ve vychýlených bodech je úměrné součinu křivosti rychlostního profilu základního proudu a výchylky rozhraní. Výchylky smykového napětí jsou tedy maximální na vrcholech zvlněného rozhraní a nulové v jeho uzlových bodech. Tyto fluktuace ovlivňují rozruchy proudu v podélném směru a představují hlavní energetický zdroj růstu nestabilit.

- **Růstový mechanismus** spojený s „*podmínkou tangenciální rychlosti* U_{s} *na rozhraní*“ indukující nestabilní pohyb hladiny; příslušný modelový problém je rozšířením předchozího o působení pohybující se stěny, která přiléhá na kapalný film shora. Rychlostní profil je předepsán ve tvaru

$$U(y) = \frac{1}{2}(y - y^2) + U_{\mathrm{s}}y. \tag{3.14}$$

V případě růstového mechanismu jsou při poruše rozhraní tangenciální rychlosti rozloženy tak, že jejich celková velikost zůstává konstantní v uzlových bodech. Amplituda výchylek rychlostí je úměrná gradientu rychlostního profilu základního proudu na rozhraní. Výchylky rychlostí ovlivňují rozruchy proudu v podélném směru a představují tak hlavní energetický zdroj růstu nestabilit.

V důsledku působících sil dochází v kapalném filmu obecně ke generování tří smykových napětí:

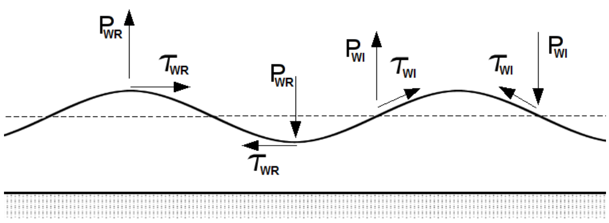
- První je odezvou kapaliny na dodatečný hydrostatický tlak v důsledku kapaliny nad průměrnou čárou hladiny. Svou podstatou výsledné gravitační síly působí na tekutinu ve směrech od vrcholu vlny a mají tak stabilizační charakter.
- Druhé napětí je důsledkem advekce hlavního proudu vůči perturbacím v podélném směru. Za předpokladu, že fázová rychlost perturbací je v celé tloušťce kapalného filmu větší než rychlost libovolné částice v podélném směru, je výsledný efekt destabilizační povahy.
- Třetí napětí je důsledkem advekce perturbací v normálovém směru. Výsledný účinek je závislý na příslušné okrajové podmínce podmiňující rychlostní profil.

V případě diskutovaného problému nestability stěnového filmu se uplatňují oba mechanismy. V důsledku rozdílných hustot obou vrstev (kapalná vrstva filmu a plynná vrstva vzduchu) dochází ke skokové změně geometrie rychlostního profilu na rozhraní a tudíž k uplatnění iniciačního mechanismu. Obdobně v důsledku rozdílných viskozit tekutin dochází ke skokové změně gradientu rychlosti na rozhraní a uplatnění růstového mechanismu, blíže viz Smith [126].

3.3.2. Silová působení plynného proudu

Z dosud uvedeného vyplývá, že stěžejním problémem predikce nestability kapalného filmu je určení tlakových a smykových sil působících na rozhraní volbou vhodného modelu. Ze vztahů (3.9) a (3.10) plyne, že v případě aplikace lineární analýzy stability jsou tyto veličiny modelovány harmonickou funkcí fázově posunutou vůči povrchu vlny, jejíž geometrie je dle předpisu (3.4) předpokládána rovněž harmonická. Adekvátnost těchto modelů diskutuje podrobněji kapitola 5. Prozatím pojednejme pouze o fyzikálním významu amplitudových funkcí P_{WR}, P_{WI}, τ_{WR} a τ_{WI}.

Ze vztahů (3.9) a (3.10) plyne, že reálné komponenty veličin $P'_{\mathrm{w}}, \tau'_{\mathrm{w}}$, tj. veličiny P_{WR} a τ_{WR}, jsou ve fázi s amplitudou vln a imaginární komponenty P_{WI} a τ_{WI} jsou ve fázi s „nulovými body“ vlny, viz obrázek 3.6. Fázová posunutí teoreticky harmonických průběhů výchylek P'_{w}, τ'_{w} vůči povrchu filmu tedy závisejí na poměrech mezi jejich reálnými a imaginárními amplitudami.



Obrázek 3.6: Fyzikální význam veličin $P_{\mathrm{WR}}, P_{\mathrm{WI}}, \tau_{\mathrm{WR}}, \tau_{\mathrm{WI}}$.

Fyzikální význam jednotlivých komponent podává Hanratty v přehledové práci [60]. Z analýzy vyplývá, že vliv tlakových sil je dle principu Bernoulliho rovnice zásadní pro vlny s velkou amplitudou, význam smykových sil pak vzrůstá pro rostoucí rychlosti proudícího plynu. S odkazem na [60] uveďme v dalším posouzení vlivu jednotlivých komponent tlakových a smykových sil ve vztahu ke konkrétním typům nestabilit, jejichž výčet byl uveden v předchozí části.

Dvoudimenzionální vlny jsou podporovány tlakovými silami, které působí ve fázi s náběhovou částí vlny. Této situaci odpovídá kladná hodnota P_{WI} a přenos energie z plynné fáze do kapalné díky rychlostním fluktuacím ve směru normálovém k rozhraní. Pokud přenos této energie překračuje její disipaci v kapalině, dochází k růstu nestabilit.

Druhým způsobem přenosu energie ze vzduchu do kapalinového filmu je působení smykového napětí ve fázi s vrcholy vln, ke kterému dochází díky rychlostním fluktuacím v tangenciálním směru. Tomuto způsobu přenosu odpovídá kladná hodnota τ_{WR}.

Protože je ovšem amplituda smykového napětí v porovnání s amplitudou tlakových sil malá, je význam τ_{w} obvykle druhotný. V případě velmi tenkých filmů ($\tanh \alpha\bar{h} \rightarrow 0$) jsou však rychlostní fluktuace v tangenciálním směru mnohem větší než ve směru normálovém. Pak je význam smykového napětí rovněž významný a za hraničních konstelací může dokonce dominovat. Vlny vznikající tímto mechanismem jsou kapilární případně pomalé solitární vlny.

Ačkoliv smykové síly ve fázi s náběhovou částí vlny τ_{WI} mají obecně destabilizační charakter, Andreussi a kol. [8] uvádějí, že pro velké vlnové délky mohou mít naopak stabilizační účinek.

Pro silnější vrstvy kapaliny se pro vysoké rychlosti vzduchu stávají dominantním destabilizačním faktorem tlakové fluktuace ve fázi s vrcholem vln reprezentované amplitudou P_{WR}. V případě velmi vysokých rychlostí mohou destabilizační účinky P_{WR} převážit nad stabilizační funkcí povrchového napětí. Za těchto okolností dochází k odtržení menších vlnek z vrcholu solitární vlny - atomizaci - viz kapitolu 7.

3.4 Formulace problému

Silové účinky v kapalné vrstvě a na hladině filmu jsou matematicky popsány pomocí pohybových rovnic a příslušný okrajový problém je uzavřen okrajovými podmínkami na stěně kanálu a na fázovém rozhraní. Ačkoliv rychlostní profily obou vrstev lze pro stacionární proudění teoreticky odvodit z pohybových rovnic, při praktickém přístupu k řešení, viz kapitolu 4, se obvykle matematická formulace doplňuje vztahy pro rychlostní profily vycházející z konkrétní konfigurace problému. V dalších odstavcích uvedeme základní poznatky právě uvedené problematiky.

3.4.1. Výchozí rovnice a předpoklady pro odvození matematické formulace

Matematické modely diskutovaného problému vycházejí z klasických Navierových-Stokesových rovnic (A.1), (A.2) pro viskózní nestlačitelné proudění a rovnice kontinuity (A.3), viz příloha. Kromě předpokladu malých amplitud (2.6) a podmínky mělké vody (2.10) vychází odvození příslušných modelových rovnic dále ze zjednodušení pohybových rovnic s ohledem na:

- stacionární proudění, tj.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{3.15}$$
- vlastnosti mezních vrstev (změny rychlostí podél mezní vrstvy probíhají výrazně pomaleji než změny napříč vrstvou), tj.
$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{3.16}$$
- paralelní proudění, tj.
$$v \ll u\,. \tag{3.17}$$

Okrajovou podmínku na stěnách kanálu reprezentuje tzv. *podmínka ulpívání*, tj.
$$u = 0, \quad v = 0. \tag{3.18}$$
Okrajové podmínky na hladině filmu zabezpečují jednak spojitost rychlostí a jednak rovnováhu normálového a tečného napětí na rozhraní.

3.4.2. Rychlostní profil v plynné vrstvě

Určení rychlostního profilu plynného proudu nad kapalinným povrchem je podmíněno v prvé řadě zodpovězením otázek:

- Uvažujeme stacionární proudění?
- Jedná se o proudění nad volným povrchem, v kanále nebo trubici?
- Je proudění plně vyvinuté?
- Je příslušná mezní vrstva laminární nebo turbulentní?
- Je obtékaný povrch rovný nebo zvlněný?
- Jak zvlněnost povrchu ovlivňuje rychlostní profil?
- Uvažujeme pevný nebo pohyblivý obtékaný povrch?

Ačkoliv v reálných aplikacích je třeba uvážit vliv příslušné konfigurace na zodpovězení uvedených otázek, jsou modely nestabilit kapalného filmu běžně omezeny na případ stacionárního plně vyvinutého turbulentního proudění. Vzhledem k tomu, že profily plně vyvinutého turbulentního proudění v kanále, trubici a nad rovným povrchem lze vyjádřit v zásadě stejnými formulemi, blíže viz [120], nebudeme v dalším až na výjimky tuto specifikaci rozlišovat.

Poznamenejme, že rychlostní profily budeme v dalším zapisovat pomocí standardních bezrozměrných veličin. Výšku nad obtékaným povrchem reprezentuje veličina

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \tag{3.19}$$

kde ν je kinematická viskozita a u_τ tzv. *třecí rychlost* (angl. *friction velocity*) definovaná vztahem

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\mathrm{w}}{\rho}}\,. \tag{3.20}$$

Ustálený turbulentní profil pro hydraulicky hladký povrch formuluje Young [154] obecně předpisem

$$\frac{U(y)}{u_\tau} = y^+, \tag{3.21}$$

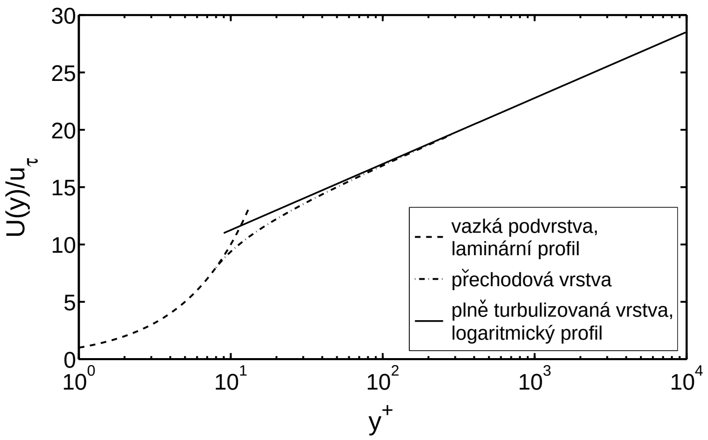
$$= \frac{1}{\kappa}\ln\left[(y^+ - y_0^+) + \frac{1}{\kappa}\right] + K, \tag{3.22}$$

$$= \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + K, \tag{3.23}$$

kde κ je tvz. von Kármánova konstanta[4], která spolu s hodnotami K a y_0^+ definuje rozhraní mezi tzv. *vazkou podvrstvou* (angl. *viscous sublayer* případně *laminar sublayer*) s laminárním prouděním[5] (3.21), přechodovou vrstvou (angl. *buffer layer*) s profilem (3.22) a plně turbulizovanou vrstvou s logaritmickým profilem (3.23), viz obr. 3.7. Pro konstanty uvádí Young [154] hodnoty $\kappa = 0{,}4$; $y_0^+ = 7{,}8$; $K = 5{,}5$ nebo $\kappa = 0{,}41$; $y_0^+ = 7{,}2$; $K = 5{,}0$; pro proudění v kanále precizuje Schlichting [120] $\kappa = 0{,}39$; $K = 5{,}56$; Zilker [156] uvádí $\kappa = 0{,}41$; $K = 5{,}1$. Přechodová vrstva se nachází přibližně v rozmezí od $y^+ = 10$ do $y^+ = 30$ [154]. Z hlediska vlivu na smykové napětí Schlichting [120] uvádí mezní hodnoty $y^+ = 5$ a $y^+ = 70$.

[4] Diskusi hodnot von Kármánovy konstanty a problematice turbulentních mezních vrstev se věnují skripta [133].

[5] Přenos hybnosti a odpovídající Reynoldsova napětí mají nepatrný vliv ve srovnání s účinky viskozity; proudění není ryze laminární. Blíže viz [133] str. 150.



Obrázek 3.7: Rychlostní profily turbulentní mezní vrstvy (3.21)-(3.23).

Vzhledem k tomu, že perturbovaný povrch filmu nelze považovat za hydraulicky hladký, vycházejí někteří autoři, např. [46], [92], [98], při modelování reálných profilů nad filmem z teorie profilů nad drsnými povrchy ve tvaru

$$\frac{U(y)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + K, \tag{3.24}$$

kde k_s je velikost zrna (angl. *sand roughness*) dle Nikuradseho definující tzv. relativní *pískovou drsnost*, blíže viz např. [120]. Malamatenios a kol. [92] kladou rovnost mezi k_s a amplitudou výchylky filmu. Ačkoliv jedna z prvních aplikací profilu ve tvaru (3.24) poukazuje na rozdíly mezi profilem nad zvlněným povrchem filmu a profily navrženými pro drsné povrchy [34], validaci formule pro hodnotu $\kappa = 0{,}40$ provedli Dattatri a kol. [39] měřením profilu nad vzduchem buzenými vlnami v kanálu.

Obdobou (3.24) je profil ve tvaru, který uvádí Miles [98],

$$\frac{U(y)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau (y+a)}{\nu} + K, \tag{3.25}$$

kde a je amplituda vlny. Tentýž autor později [101] navrhuje profil ve tvaru

$$\frac{U(y)}{u_\tau} = \begin{cases} y^+ & 0 \le y^+ \le \delta_s^+ \\ \delta_s^+ + \frac{1}{\kappa}\left(\gamma - \tanh \frac{\gamma}{2}\right) & \delta_s^+ \le y^+ \end{cases} \tag{3.26}$$

kde δ_s^+ je tloušťka vazké podvrstvy (autor uvádí hodnoty 5–8) a parametr γ definuje formule

$$\sinh \gamma = 2\kappa \left(y^+ - \delta_s^+\right). \tag{3.27}$$

Profil (3.26) aplikují např. Boomkamp a kol. [22], Miesen a Boersma [97].

Mocninný rychlostní profil ve tvaru

$$\frac{U(y)}{u_\tau} = 8,74 \left(y^+\right)^{\frac{1}{7}} \tag{3.28}$$

využívá Craik v článku [36] pro výpočet smykového napětí na hladině filmu. Odvození formule na základě empirické Blasiovy rovnice třecího odporu uvádí např. Schlichting [120].

Empirický rychlostní profil turbulentní mezní vrstvy v trubici publikoval Reichardt [117] ve tvaru

$$\frac{U(y)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(1 + \kappa y^+\right) + 7{,}8 \left(1 - \mathrm{e}^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} \mathrm{e}^{-y^+/3}\right). \tag{3.29}$$

Akylas [3] s odkazem na monografii [65] používá modifikovaný Reichardtův profil ve tvaru

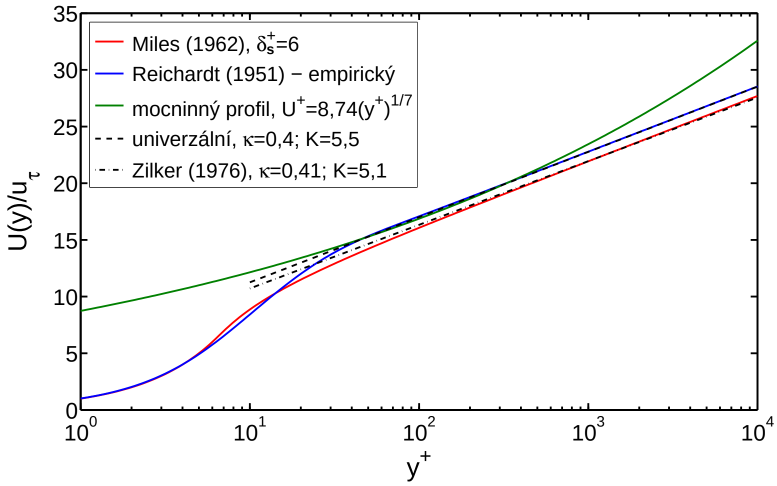
$$\frac{U(y)}{u_\tau} = \frac{U_\mathrm{s}}{u_\tau} + \frac{1}{\kappa}\ln\left(1+\kappa y^+\right) + 7{,}4\left(1 - \mathrm{e}^{-y^+/\delta_s^+} - \frac{y^+}{\delta_s^+}\mathrm{e}^{-0{,}33y^+}\right), \tag{3.30}$$

kde U_s je rychlost filmu na rozhraní.

Van Driestův turbulentní profil zavedený v [42] předpisem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^+}\left(\frac{U(y)}{u_\tau}\right) = \frac{2}{1+\sqrt{1+4\kappa^2 {y^+}^2\left[1-\exp(-y^+/26)\right]^2}} \tag{3.31}$$

aplikuje Abrams [1] při modelování proudění nad zvlněným povrchem, viz odstavec 4.4.1.



Obrázek 3.8: Rychlostní profily (3.26) pro $\delta_s^+ = 6$, (3.29), (3.28) a (3.23).

Ze vztahu pro vírovou (turbulentní) viskozitu ν_t ve tvaru

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa^2(y^+ + \delta y_0^+)^2\left(1 - \mathrm{e}^{-y^+/A^+}\right)^2\left|\frac{\partial u^+}{\partial y^+}\right| \tag{3.32}$$

vychází Ebner a kol. [46] při odvození diferenciálního tvaru rychlostního profilu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^+}\left(\frac{U(y)}{u_\tau}\right) = \frac{1}{2\kappa^2\left(y^+ + y_0^+\right)^2 {D_f}^2}\left(\sqrt{1+4\kappa^2\left(y^+ + y_0^+\right)^2 {D_f}^2\left(1+p^+y^+\right)} - 1\right), \tag{3.33}$$

kde funkce

$$D_f = 1 - \mathrm{e}^{-y^+/A^+} \tag{3.34}$$

a parametry A^+ a y_0^+ determinují přechod mezi turbulentním jádrem a vazkou podvrstvou. Jejich specifikace je uvedena v článku [46] pomocí Reynoldsova čísla definovaného ve tvaru

$$Re_{ks} = \frac{u_\tau k_s}{\nu}, \tag{3.35}$$

kde parametr

$$k_s = 2h\Psi_s \tag{3.36}$$

je úměrný tloušťce filmu a tvarovému parametru Ψ_s získanému empiricky v závislosti na Ohnesorgovu a Weberovu číslu.

Porovnání rychlostních profilů (3.26) pro $\delta_s^+ = 6$, (3.29), (3.28) a (3.23) pro $\kappa = 0{,}40$; $K = 5{,}5$ a $\kappa = 0{,}41$; $K = 5{,}1$ je uvedeno na obrázku 3.8. Z porovnání vyplývá, že mocninný profil velmi dobře aproximuje klasický logaritmický profil v rozmezí od $y^+ = 40$ do $y^+ = 400$.

Jak lze nahlédnout zejména z posledního profilu definovaného předpisem (3.33) a jak poznamenávají Náraigh a kol. [109], úskalím výše uvedených profilů při aplikaci na problém zvlněného kapalného filmu je obecně stanovení řady parametrů obsažených ať už explicitně v samotném předpisu nebo implicitně v třecí rychlosti u_τ. Autoři práce [109] proto navrhují komplexní postup, ve kterém je třecí rychlost i samotný rychlostní profil pouze funkcí Reynoldsova čísla a geometrických a fyzikálních parametrů.

Na závěr odstavce poznamenejme, že uvedené profily byly konstruovány ve snaze postihnout rychlostní profil základního proudu bez přihlédnutí k deformacím profilu v závislosti na poloze ve směru proudění v důsledku zvlněného povrchu filmu. V těchto případech dochází v závislosti na poměru vlnové délky ku amplitudě vlny a Reynoldsově čísle plynného proudu k různě velkým odchylkám od základního profilu, v krajních případech až k separaci mezní vrstvy v údolí vlny a zpětnému proudění. Této problematice je blíže věnována kapitola 5. Zatím předešleme, že měřením rychlostních profilů nad pevným zvlněným povrchem se zabývají práce [52], [156] (bez separace mezní vrstvy), [31], [86], [157] (včetně separace mezní vrstvy), výsledky měření profilů nad zvlněnou vodní hladinou uvádějí práce [17], [39], [149].

3.4.3. Rychlostní profil v kapalném filmu

Vzhledem k nízkým tloušťkám kapalného filmu, tj. nízkým příslušným Reynoldsovým číslům, je nerozrušený kapalný film obvykle považován za laminární [97]. Klasické zjednodušení problému iniciace nestabilit na obtékaném kapalném filmu tak předpokládá lineární [100],[36], případně parabolický [85], [88], [97] rychlostní profil, přičemž konkrétní formule je závislá na geometrickém uspořádání (vodorovná nebo nakloněná rovina, proudění nad volným povrchem, v kanále nebo trubici) a okrajových podmínkách na rozhraní.

Při větších rychlostech plynu, případně vyšších Reynoldsových číslech filmu, lze v závislosti na typu nestability kapalného filmu rozlišovat čistě laminární režim proudění, laminární režim se zvlněným povrchem filmu nebo plně turbulizovaný film pro krajní nestability. Některé studie rovněž uvažují pomalejší souvislou vrstvu kapaliny, nad kterou se pohybují solitární vlny [108].

Turbulentní profil zvlášť pro souvislou a zvlněnou část kapalinné vrstvy uvádějí Malamatenios a kol. [92] s odkazem na publikaci [40] pro případ anulárního proudění.

Při modelování solitárních vln aplikují Andreussi a kol. [8] a Miya a kol. [108] turbulentní van Driestův profil (3.31) pro $\kappa = 0{,}6$. Autoři v článku [108] poukazují na *Carpenterovu-Colburnovu hypotézu*, viz [32], která předpokládá, že rychlostní profil kapalného filmu je obdobný profilu v přístěnné oblasti v případě turbulentního proudění jedné fáze. To znamená, že profil je laminární, pokud tloušťka filmu je menší než korespondující laminární podvrstva profilu jedné fáze.

Experimentálním pozorováním charakteristik zvlněného filmu s laminárním režimem proudění na vertikální stěně se zabývají Moran a kol. [104].

KAPITOLA 4

Přístupy k řešení

Klasické přístupy aplikované autory v počátečních pokusech o řešení [19], [33], [36], [60] vycházejí z předpokladu, že pro velké poměry hustot a viskozit uvažovaných fází lze rozhraní považovat za pevné [61] a tudíž lze použít tzv. *kvazi-statický přístup* (angl. *quasi static approximation* [97] nebo *divided attack* [19]) sestávající ze dvou kroků:

1. Výpočet smykových resp. tlakových sil působících na hladinu pomocí proudění nad zvlněným pevným povrchem definovaným poměrem λ/a.

2. Aplikace lineární analýzy nestabilit na příslušné pohybové rovnice.

Vypočtené smykové a tlakové účinky jsou zahrnuty v okrajových podmínkách pohybových rovnic, případně jako jejich parametry. V pozdějších etapách vývoje modelů nestabilit byl vyvinut alternativní přístup spočívající v *simultánním řešení* (angl. *coupled*) obou fází.

Příslušné vedoucí rovnice jsou v případě obou přístupů odvozeny převážně na základě

- *metody integrace pohybových rovnic* ve směru kolmém na průměrný povrch kapalného filmu [6], [8], [12], [26], [30], [62], [60], [77], [89], [92], [108] nebo pomocí

- *analýzy Orrovy-Sommerfeldovy rovnice* [22], [33], [36], [57], [85], [88], [90], [97], [100], [109], [125], [136], [140].

Porovnání výsledků obou těchto převažujících přístupů se věnují články [76], [83]. Jiné metody řešení obvykle využívají souvisejících teoretických východisek např. teorie rychlostních potenciálů [9], [95], analýzy pohybové rovnice formulované s využitím proudové funkce [27], [43] nebo Rayleighovy rovnice [3]. Použití některých metod je omezeno na případ kapalného filmu stékajícího po nakloněném povrchu bez vlivu plynné fáze viz např. *fluid sheet method* [48].

S rozvojem CFD metod se objevují přístupy založené na *coupled* CFD řešení kapalné a plynné fáze. Principy řešení při modelování tvorby filmu pomocí sprejů uvádí např. Bai v dizertační práci [16]. Nicméně se zdá, že submodely těchto přístupů při aplikaci na nestabilitu kapalného filmu jsou závislé na řadě empirických parametrů [46], [64], [121], případně obsahují zjednodušené analytické modely, jejichž univerzalita je nejasná [139]. Spíše ojedinělé jsou DNS simulace proudění nad idealizovaným vodním povrchem aplikované navíc vzhledem k časové náročnosti jejich řešení pouze na vybrané konfigurace geometrických a fyzikálních parametrů [119], [129]. V poslední době se objevují rovněž simulace založené na metodě VOF [54], [55], [102]. Klasické analytické metody mají však stále svůj význam, používají se jako referenční řešení moderních metod [21], [54] a vycházejí z nich i nejnovější pokusy o řešení [4], [7], [109].

Volba konkrétního přístupu ke konstrukci vedoucích rovnic, jakožto k výpočtu silových účinků působících na rozhraní v případě aplikace kvazi-statického přístupu, je podmíněna geometrií apriorních vln a parametry kapalného filmu. Práce [30], [60] navrhují v případě krátkých vln aplikaci O-S rovnice a za předpokladu dlouhých vln metodu integrace pohybových rovnic mezních vrstev. Principy obou metod uvádějí následující dva odstavce.

4.1 Integrální metody

Aplikaci integrálních metod v analýze stability kapalných filmů demonstruje Hanratty [60]. Uveďme v dalším nástin metody pro případ tenkého filmu s plochými vlnami, tj. za předpokladu $\alpha\bar{h} \to 0$. Definujeme-li průměrnou rychlost kapalného filmu integrálem

$$u_a = \frac{1}{h}\int_0^h U_{\mathrm{L}}(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{4.1}$$

pak integrální forma rovnice kontinuity má tvar

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h u_a)}{\partial x} = 0\,. \tag{4.2}$$

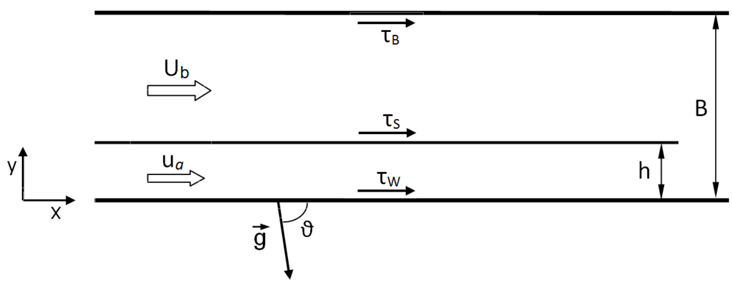
Integrální formu pohybové rovnice ve směru osy x lze zapsat

$$\frac{\partial (h u_a)}{\partial t} + \frac{\partial (h\Gamma {u_a}^2)}{\partial x} = -\frac{h}{\rho_L}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho_L}(\tau_{\mathrm{s}} - \tau_{\mathrm{w}}) + gh\cos\vartheta\,, \tag{4.3}$$

kde τ_{s} zde značí smykové napětí na rozhraní fází, τ_{w} smykové napětí na pevné stěně, ϑ úhel odklonu stěny od vektoru tíhového zrychlení a

$$\Gamma = \frac{1}{h{u_a}^2}\int_0^h {U_{\mathrm{L}}}^2(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.4}$$

je tvarový parametr rychlostního profilu. Pro $U(y)=y$ zřejmě $\Gamma=4/3$. Bruno a McCready [30] udávají typické hodnoty Γ od 1,2 do 1,6.



Obrázek 4.1: Schéma problému při řešení integrální metodou.

Za předpokladu malých amplitud a velkých vlnových délek lze zanedbat vliv povrchového napětí a tlak P pak dle Lin & Hanratty [89] vyjadřuje formule

$$P = P_{\mathrm{s}} + (h-y)\rho_L g\sin\vartheta\,. \tag{4.5}$$

Preciznější vztah pro tlak v kapalném filmu se zahrnutím vlivu povrchového napětí za předpokladu ($\alpha\bar{h} \to 0$) uvádí Hanratty [60] ve tvaru

$$P = P_{\mathrm{s}} + (h-y)\rho_L g\sin\vartheta - \sigma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\mu_L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\mathrm{s}} - 2\tau_{\mathrm{s}}\frac{\partial h}{\partial x}\,, \tag{4.6}$$

kde P_{s} je tlak plynné vrstvy na rozhraní.

Dosazením (4.6) do (4.3), podělením rovnice výškou filmu h a zjednodušením s ohledem na předpoklady obdržíme pohybovou rovnici pro kapalný film ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_a}{\partial t} + (2\Gamma-1)u_a\frac{\partial u_a}{\partial x} + (\Gamma-1)\frac{{u_a}^2}{h}\frac{\partial h}{\partial x} + {u_a}^2\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \\ -\frac{1}{\rho_L}\frac{\partial P_\mathrm{s}}{\partial x} - g\sin\vartheta\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho_L}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{h\rho_L}(\tau_\mathrm{s}-\tau_\mathrm{w}) + g\cos\vartheta\,.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Obdobně lze dle [89] za předpokladu $\lambda \gg (B-h)$ odvodit integrální formy rovnice kontinuity a hybnosti plynné vrstvy

$$-\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\left[(B-h)U_a\right]}{\partial x} = 0, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left[(B-h)U_a\right]}{\partial t} + \frac{\partial\left[(B-h)\Gamma_\mathrm{G}{U_a}^2\right]}{\partial x} = \\ -\frac{B-h}{\rho_\mathrm{G}}\left(\frac{\partial P_\mathrm{s}}{\partial x} + \rho_\mathrm{G} g\sin\theta\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\tau_\mathrm{s}-\tau_\mathrm{B}}{\rho_\mathrm{G}} + g(B-h)\cos\theta,\end{aligned} \tag{4.9}$$

kde U_b a Γ_G jsou definovány analogicky k u_a a Γ, tj.

$$U_b = \frac{1}{B-h}\int_h^B U_\mathrm{G}(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.10}$$

$$\Gamma_\mathrm{G} = \frac{1}{(B-h){U_b}^2}\int_h^B {U_\mathrm{G}}^2(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.11}$$

Aplikací teorie lineární analýzy stability ve smyslu vztahů (3.3)–(3.10) na veličiny vystupující v rovnici (4.7) a (4.9) lze definovat

$$\frac{u'_a}{\widehat{u}_a} = \frac{U'_b}{\widehat{U}_b} = \frac{\Gamma'}{\widehat{\Gamma}} = \frac{\Gamma'_\mathrm{G}}{\widehat{\Gamma}_\mathrm{G}} = \frac{P'_\mathrm{w}}{\widehat{P}_\mathrm{w}} = \frac{\tau'_\mathrm{w}}{\widehat{\tau}_\mathrm{w}} = \frac{\tau'_\mathrm{s}}{\widehat{\tau}_\mathrm{s}} = \frac{\tau'_\mathrm{B}}{\widehat{\tau}_\mathrm{B}} = a\exp\mathrm{i}\alpha(x-ct) = h'\,. \tag{4.12}$$

Dosazením (4.12) do (4.2) a (4.7) obdržíme po úpravě rovnici kontinuity ve tvaru

$$\overline{h}\widehat{u}_a = c - \overline{u}_a \tag{4.13}$$

a pohybovou rovnici (4.7) eliminací $\widehat{u}_a$ pomocí (4.13) ve tvaru

$$\begin{aligned}c^2 - 2\overline{u}_a\overline{\Gamma}c + {\overline{u}_a}^2\overline{\Gamma} - \overline{h}{\overline{u}_a}^2\widehat{\Gamma} = \\ -\frac{\mathrm{i}}{\alpha\rho_L}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{P}_\mathrm{s}}{\mathrm{d}x} - \rho_L g\cos\vartheta\right) + \overline{h}\frac{\widehat{P}_\mathrm{s}}{\rho_L} + g\overline{h}\sin\vartheta + \frac{\sigma}{\rho_L}\alpha^2\overline{h} + \frac{\mathrm{i}}{\alpha\rho_L}(\widehat{\tau}_\mathrm{s} - \widehat{\tau}_\mathrm{w})\,,\end{aligned} \tag{4.14}$$

kde lze aproximovat

$$\frac{\mathrm{d}\overline{P}_\mathrm{s}}{\mathrm{d}x} - \rho_L g\cos\vartheta = \frac{\overline{\tau}_\mathrm{s} - \overline{\tau}_\mathrm{w}}{h}. \tag{4.15}$$

Kýžené hodnoty komplexní rychlosti c v závislosti na vlnovém čísle α a parametrech rychlostního profilu $\overline{u}_a$ a $\overline{\Gamma}$ lze obdržet komplexním řešičem rovnic nebo ve tvaru $c = c_\mathrm{R} + \mathrm{i}c_\mathrm{I}$ pomocí separace rovnice (4.14) na reálnou a imaginární část po dodefinování reálných proměnných $\overline{\tau}_\mathrm{s}$, $\overline{\tau}_\mathrm{w}$ a komplexních proměnných $\widehat{\tau}_\mathrm{s}$, $\widehat{\tau}_\mathrm{w}$, $\widehat{P}_\mathrm{s}$ a $\widehat{\Gamma}$. Určení parametrů $\overline{\Gamma}$ a $\widehat{\Gamma}$ se kromě přehledové práce [60] blíže věnuje článek [30]. Přístupy k modelování silových účinků smykového napětí a tlaku pro dlouhé vlny jsou uvedeny v odstavci 4.4.2.

4.2 Metody Orrovy-Sommerfeldovy rovnice

Počáteční řešení využívající analýzu O-S rovnice aplikovala převážně kvazistatický přístup [33], [36], tj. O-S rovnice je formulována pro kapalný film a silové účinky plynného proudu vstupovaly do řešení prostřednictvím okrajových podmínek. V pozdějších přístupech se používá rovněž simultánní řešení [15], [85], [136], [140]. S ohledem na přehlednost je v dalším textu čerpáno převážně z formulace simultánního řešení dle Boomkamp a kol. [22].

Proudové funkce a rychlostní fluktuace kapalné a plynné fáze lze definovat analogicky ke vztahům (1.32)–(1.34) ve tvaru

$$\Psi_j(x,y,t) = \phi_j(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x-ct)}, \tag{4.16}$$

$$u_j' = \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\phi_j(y)}{\mathrm{d}y}\exp[\mathrm{i}\alpha(x-ct)], \tag{4.17}$$

$$v_j' = -\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} = -\mathrm{i}\alpha\phi_j(y)\exp[\mathrm{i}\alpha(x-ct)]. \tag{4.18}$$

S použitím škálovacích měřítek h pro délku, $U_\tau = \tau d_1/\nu_1$ pro rychlost, h/U_τ pro čas a $\rho_\mathrm{L} U_\tau^2$ pro tlak je bezrozměrná Orrova-Sommerfeldova rovnice pro film dána ve tvaru

$$\phi_\mathrm{L}^{(4)} - 2\alpha^2\phi_\mathrm{L}'' + \alpha^4\phi_\mathrm{L} = \mathrm{i}\alpha Re\left[(U_\mathrm{L}-c)(\phi_\mathrm{L}''-\alpha^2\phi_\mathrm{L}) - U_\mathrm{L}''\phi_\mathrm{L}\right], \qquad (-1<y<0)\,, \tag{4.19}$$

a rovnice pro shora neohraničenou plynnou vrstvu ve tvaru

$$\phi_\mathrm{G}^{(4)} - 2\alpha^2\phi_\mathrm{G}'' + \alpha^4\phi_\mathrm{G} = \mathrm{i}\alpha Re\frac{r}{m}\left[(U_\mathrm{G}-c)(\phi_\mathrm{G}''-\alpha^2\phi_\mathrm{G}) - U_\mathrm{G}''\phi_\mathrm{G}\right], \qquad (0<y<\infty)\,, \tag{4.20}$$

kde $Re = \rho_\mathrm{L} U_\tau h/\nu_\mathrm{L}$ je Reynoldsovo číslo kapalného filmu s charakteristickou rychlostí U_τ a dále $r = \rho_\mathrm{G}/\rho_\mathrm{L}$ resp. $m = \nu_\mathrm{G}/\nu_\mathrm{L}$ je poměr hustot resp. kinematických viskozit.

Okrajové podmínky pro proudové funkce předepisují podmínku ulpívání na stěně

$$\phi_\mathrm{L} = \phi_\mathrm{L}' = 0 \qquad \text{v } y=-1\,, \tag{4.21}$$

útlum rozruchů v dostatečné vzdálenosti od rozhraní

$$\phi_\mathrm{G} = \phi_\mathrm{G}' = 0 \qquad \text{pro } y\to\infty \tag{4.22}$$

a rovnost rychlostních a smykových výchylek v normálovém a tangenciálním směru na rozhraní

$$\phi_\mathrm{L} = \phi_\mathrm{G} \qquad \text{v } y=0\,, \tag{4.23}$$

$$\phi_\mathrm{L}' + U_1'\phi_\mathrm{L}/c = \phi_\mathrm{G}' + U_\mathrm{G}'\phi_\mathrm{G}/c \qquad \text{v } y=0\,, \tag{4.24}$$

$$\phi_\mathrm{L}'' + \alpha^2\phi_\mathrm{L} + U_\mathrm{L}''\phi_\mathrm{L}/c = m(\phi_\mathrm{L}'' + \alpha^2\phi_\mathrm{G} + U_\mathrm{G}''\phi_\mathrm{G}/c) \qquad \text{v } y=0\,, \tag{4.25}$$

$$(\phi_\mathrm{L}''' - 3\alpha^2\phi_\mathrm{L}') + i\alpha R(c\phi_\mathrm{L}' + U_\mathrm{L}'\phi_\mathrm{L}) - m(\phi_\mathrm{G}'' - 3\alpha^2\phi_\mathrm{G}') - ir\alpha R(Fr + \alpha^2 S)\phi_\mathrm{G}/c = 0 \qquad \text{v } y=0\,, \tag{4.26}$$

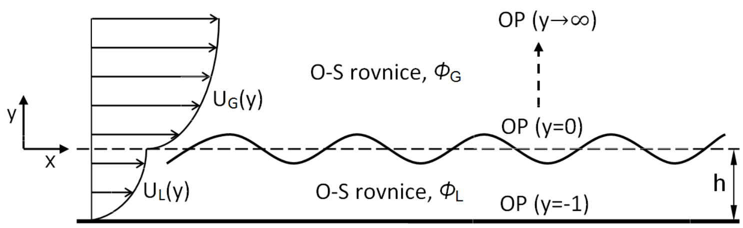
kde

$$We = \frac{\sigma}{\rho_\mathrm{L} U_\tau^2 d_\mathrm{L}} \tag{4.27}$$

je inverzní bezrozměrné Weberovo číslo zohledňující význam povrchového napětí kapaliny σ vůči setrvačným silám a

$$Fr = \frac{g(\rho_\mathrm{L}-\rho_\mathrm{G})d_\mathrm{L}}{\rho_\mathrm{L} U_\tau^2} \tag{4.28}$$

je inverzní bezrozměrné Freudeho číslo zohledňující poměr setrvačných a tíhových sil.



Obrázek 4.2: Schéma problému při řešení pomocí Orrovy-Sommerfeldovy rovnice.

Rovnice (4.19) a (4.20) s okrajovými podmínkami (4.21)–(4.26) definují zobecněný problém vlastních čísel, tj. v tomto případě komplexních rychlostí

$$c = c(\alpha, Re, m, r, We, Fr). \tag{4.29}$$

Citovaný zdroj [22] právě uvedené formulace se zabývá problémem nestability filmu především z hlediska zvoleného numerického přístupu. Za tímto účelem je silový účinek τ proudícího vzduchu substituován konstantní hodnotou pro daný typ struktury rozhraní. Je tedy zřejmé, že uvedený okrajový problém, stejně jako další obdobné formulace, viz např. [85], [97], není uzavřen vzhledem k parametrům a jakkoliv je tento přístup elegantní z matematického hlediska, jeho praktická úspěšnost je podmíněna sestavením adekvátních modelů smykového napětí a rychlostních profilů. Z teoretického hlediska je problém simultánních O-S rovnic vyjádřen otázkou, nakolik lze O-S rovnice odvozené pro laminární proudění aplikovat na problém nestability kapalného filmu s turbulentní vzdušnou vrstvou [136].

4.3 Nelineární přístupy a modely solitárních vln

Dosud uvedené přístupy byly založeny na lineární analýze stability načrtnuté v podkapitolách 1.1 a 3.2. Příslušné vedoucí rovnice jsou jednak lineární vzhledem k amplitudě výchylek a jednak jsou sestaveny za předpokladu harmonického profilu vln i smykových a tlakových sil působících na zvlněnou hladinu filmu. S ohledem na speciální tvar solitárních vln velkých amplitud je zřejmé, že harmonické modely nestabilit i působících sil nemohou být zcela adekvátní a současně linearita modelu neumožňuje predikovat amplitudu vln. Dosud uvedené modely jsou proto omezeny na modelování vývoje počátečních nestabilit.

Uvedená omezení motivovala vývoj nelineárních modelů nestabilit. Rané modely se věnují především nestabilitám vertikálních stěnových filmů [71], [72] a filmů na nakloněné rovině [5], [116]. Chang v článku [71] ukázal, že v případě malého vlivu vnějšího proudu je odvozená nelineární rovnice stability adekvátní tzv. *Kuramotově-Sivashinského rovnici*. Vzhledem k tomu, že implementace smykových a tlakových sil použitá v uvedeném článku není zcela adekvátní případu, kdy nestability jsou důsledkem sil vnějšího proudu, nepovažují Jurman a McCready [76] naznačený přístup za vhodný pro nestabilitu filmů na horizontální stěně.

Návrhem nelineární rovnice včetně srovnání s výsledky lineárního přístupu a experimentálním pozorováním pro horizontální kanál s uvážením proudícího vzduchu se Jurman a McCready zabývají v článcích [76], [77], [113]. Při odvození vycházejí z integrálního tvaru pohybových rovnic. Autoři nicméně upozorňují že publikovaná nelineární rovnice je adekvátní jen pro nestability druhého řádu a není proto vhodná pro úplný popis solitárních vln.

Studiu přirozených solitárních vln na nakloněné rovině se věnuje v dizertační práci Brock [29]. Podmínkami vzniku proudícím plynem buzených solitárních vln v horizontálním kanálu se zabývají např. články [30], [62], [108].

4.4 Modely tlakových a smykových sil působících na povrch filmu

Z dosud uvedeného vyplývá, že modely nestabilit kapalného filmu jsou podmíněny rozřešením průběhu tlaku a smykového napětí působících na hladinu filmu. Klasický výpočet silových účinků v případě kvazi-statického přístupu využívá s ohledem na fyzikální konstanty vody a vzduchu předpoklad, že zvlněné rozhraní lze považovat za pevné [61]. Kýžené silové charakteristiky jsou tedy spočteny pomocí úlohy proudění plynu nad pevným zvlněným povrchem, přičemž rychlost proudění je snížena o fázovou rychlost vln. Z DNS simulací proudění nad pevným pohybujícím se povrchem, viz [119], vyplývá, že celková odporová síla působící na vlnu ve směru proudění je významně ovlivněna fázovou rychlostí c_{R} pro $c_{\mathrm{R}}/U_b > 0{,}2$. Jak uvidíme dále v kapitole 6, pro iniciaci nestabilit je charakteristický poměr přibližně $c_{\mathrm{R}}/U_b \approx 0{,}1$. Kvazistatický přístup lze tedy považovat za adekvátní.

Výpočetní přístupy lze rozčlenit dle vlivu turbulentního režimu proudění vzduchové vrstvy, případně dle vlivu horní stěny kanálu na rychlostní fluktuace vzdušného proudu. Základním kritériem k tomuto účelu se dle [76] jeví být poměr λ/H, kde H je mocnost vzduchové vrstvy nad filmem.

4.4.1. Model pro krátké vlny

Výpočtem smykových a tlakových sil působících na zvlněný pevný povrch s uvážením turbulence za předpokladu $\lambda < 2\pi H$ se zabývá v dizertační práci Abrams [1]. Za předpokladu malých amplitud vln v porovnání s délkou vln a tloušťkou mezní vrstvy vychází řešení z časově zprůměrovaného tvaru Navierových-Stokesových rovnic (RANS). Časově zprůměrované veličiny[1] vystupující v rovnicích lze rozložit na průměrnou a fluktuační složku vzhledem k délce vlny:

$$U = \overline{U}(y) + a\widehat{U}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,, \tag{4.30}$$

$$V = a\widehat{V}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,, \tag{4.31}$$

$$-\langle u_i' u_j' \rangle = R_{ij} = \overline{R}_{ij}(y) + a\widehat{R}_{ij}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + a\mathrm{i}\alpha\widehat{P}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + a\frac{\mathrm{d}\widehat{P}(y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,. \tag{4.34}$$

S ohledem na proudovou funkci (1.46) uvažme její stacionární tvar

$$\Psi = \int_0^y U(y)\mathrm{d}y + a\phi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}. \tag{4.35}$$

Pak rychlosti U, V jsou dány vztahy

$$U = \frac{1}{l_y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \tag{4.36}$$

$$V = \frac{-1}{l_x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{4.37}$$

kde l_x, l_y jsou metrické funkce definované ve tvaru

$$l_x = 1, \tag{4.38}$$

$$l_y = 1 + a\alpha^2 y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}. \tag{4.39}$$

[1] Časově průměrnou hodnotu veličiny χ značíme $\langle\chi\rangle$. Všechny veličiny v odstavci 4.4.1 jsou přepočteny na bezrozměrný tvar pomocí u_τ pro rychlosti, ν/u_τ pro délky a $\rho {u_\tau}^2$ pro napěťové veličiny, tlak a turbulentní kinetickou energii k.

Dosazením vztahů (4.30)–(4.33) do rovnice kontinuity a rovnic RANS a vhodnými úpravami, blíže viz [1], obdržíme rovnice pro komplexní funkci ϕ ve tvaru

$$\overline{U}''' + \overline{R}''_{xy} = 0\,, \tag{4.40}$$

$$i\alpha[\overline{U}(\phi'' - \alpha^2\phi) - \overline{U}''\phi + \alpha^2\overline{U}^2] = \phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi + 2\alpha^2\overline{U}'' - \alpha^4\overline{U} + \mathcal{R}\,, \tag{4.41}$$

kde

$$\mathcal{R} = i\alpha^3\overline{R}_{xx} + 3\alpha^2\overline{R}'_{xy} + i\alpha(\widehat{R}'_{xx} - \widehat{R}'_{yy}) + \alpha^2\widehat{R}_{xy} + \widehat{R}''_{xy} - i\alpha^3\overline{R}_{yy}\,. \tag{4.42}$$

Rovnice (4.41) je obdobou Orrovy-Sommerfeldovy rovnice (1.35) ovšem s přihlédnutím ke členům v důsledku užití křivočarých souřadnic, členu $\mathcal{R}$ zohledňujícím Reynoldsova napětí R_{ij} a zejména k tomu, že v rovnici je jedinou neznámou funkce ϕ a nejedná se tedy o problém vlastních hodnot, jak je tomu v případě rovnice (1.35).

Uvážením okrajových podmínek

$$\phi = 0\,, \quad \phi' = 0 \qquad \text{pro } y = 0, \tag{4.43}$$

$$\phi = \overline{U}\,, \quad \phi' = \overline{U}' \qquad \text{pro } y \to \infty, \tag{4.44}$$

lze pro smykové napětí na povrchu, tj. pro $y=0$, odvodit předpis

$$\tau_{\mathrm{w}} = \overline{\tau}(0) + a\widehat{\tau}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} = \overline{U}'(0) + a\phi''(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} \tag{4.45}$$

a pro amplitudu tlakových fluktuací vztah

$$\widehat{P}(0) = \frac{-\mathrm{i}}{\alpha}[\phi'''(0) + \alpha^2\overline{U}'(0)]\,. \tag{4.46}$$

Předpokládáme-li znalost rychlostního profilu $\overline{U}$, pak výpočet kýžených charakteristik definovaných vztahy (4.45) a (4.46) spočívá ve vyřešení rovnice (4.41) pro neznámou funkci ϕ, což vyžaduje dodefinování Reynoldsových napětí ve členu $\mathcal{R}$ vhodným modelem turbulence. Tzv. *kvazi-laminární předpoklad* [60] používaný v počátečních přístupech [19], [33] de facto klade $\mathcal{R} = 0$, tj. vliv turbulence je modelován pouze prostřednictvím rychlostního profilu. Experimentální měření však poukazují na skutečnost, že tento přístup je adekvátní pouze pro velké hodnoty bezrozměrného vlnového čísla $\alpha^+ = \alpha\nu_{\mathrm{G}}/u_\tau$ [60]. Další výzkum ve specifikaci Reynodsových napětí vyústil v konstrukci modelu označeného jako D* [1], který již poměrně dobře vyhovuje experimentálním měřením při proudění nad zvlněným povrchem [1], [2] a je proto užíván řešiteli problému nestability kapalných vrstev kvazi-statickým přístupem [9], [12].

Model D*

Reynoldsova napětí R_{ij} v (4.42) lze vyjádřit předpisem

$$R_{ij} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \frac{\nu_t}{\nu}2S_{ij}\,, \tag{4.47}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta, k turbulentní kinetická energie, ν_t turbulentní viskozita a S_{ij} složky tenzoru rychlosti deformace.

Model D* patří mezi tzv. *bezrovnicové modely turbulence* (angl. *zero equation models*), založené na tzv. Prandtlově směšovací délce l_0, tj. turbulentní viskozita je dána ve tvaru

$$\nu_t = {l_0}^2|2S_{xy}|\,. \tag{4.48}$$

V blízkosti pevné stěny, kde je významný vliv vazkosti tekutiny, je používán van Driestův model směšovací délky ve tvaru

$$l_0 = \kappa y\,[1 - \exp(-D_m)]\,, \tag{4.49}$$

kde D_m je tlumící funkce (angl. *dumping function*), která reprezentuje vliv viskozity na přenos turbulence (vírová měřítka) v blízkosti stěny. Původní van Driestovu formuli pro D_m ve tvaru

$$D_m = \frac{y}{A}\sqrt{\tau_{\mathrm{w}}}\,, \tag{4.50}$$

kde $A = \overline{A} = 26$ pro rovný povrch, nepovažuje Abrams [1] za vhodnou z důvodu velké změny smykového napětí se vzdáleností od stěny v případě zvlněného povrchu a navrhuje zaměnit smykové napětí na stěně za lokální napětí $\tau(y)$ dané součtem vazkých a turbulentních napětí:

$$\tau = 2S_{xy} + \frac{\nu_t}{\nu}2S_{xy}\,. \tag{4.51}$$

Za předpokladu vln malých amplitud mohou být veličiny ν_t, l_0, S_{xy}, A a τ vyjádřeny součtem průměrné a fluktuační složky ve smyslu vztahů (4.30)–(4.34), kde průměrné hodnoty korespondují hodnotám pro rovný povrch. Pro fluktuační složky lze odvodit formule

$$\widehat{l}_0 = \kappa y \exp(-y/\overline{A})\frac{y}{\overline{A}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{2} - \frac{\widehat{A}}{\overline{A}}\right), \tag{4.52}$$

$$\frac{\widehat{\nu}_t}{\nu} = \frac{\overline{\nu}_t}{\nu}\left[\frac{\widehat{S}_{xy}}{\overline{S}_{xy}} + \frac{2\exp\left(-y/\overline{A}\right)}{1-\exp\left(-y/\overline{A}\right)}\frac{y}{\overline{A}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{2} - \frac{\widehat{A}}{\overline{A}}\right)\right], \tag{4.53}$$

$$\widehat{\tau}(y) = \frac{\left[\left(2\frac{\overline{\nu}_t}{\nu}+1\right)2\widehat{S}_{xy} - \frac{2\frac{\overline{\nu}_t}{\nu}\overline{U}'\exp(-y/\overline{A})}{[1-\exp(-y/\overline{A})]}\frac{y}{\overline{A}}\frac{\widehat{A}}{\overline{A}}\right]}{\left[1 - \frac{\frac{\overline{\nu}_t}{\nu}\overline{U}'\exp(-y/\overline{A})}{[1-\exp(-y/\overline{A})]}\frac{y}{\overline{A}}\right]}\,, \tag{4.54}$$

kde

$$\frac{\widehat{S}_{xy}}{\overline{S}_{xy}} = \frac{F'' + \alpha^2 F - \alpha^2\overline{U}}{\overline{U}'}\,. \tag{4.55}$$

V případech s rychle se měnícím tlakem je proudění u stěny popsáno tzv. efektivním tlakovým gradientem definovaným rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)_{ef} = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)_{ef}}{k_L}, \tag{4.56}$$

kde $k_L \approx 3000$ je relaxační konstanta. S využitím návrhu parametru A ve tvaru

$$A = \overline{A}\left[1 + k_1\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + k_2\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)^2\right], \tag{4.57}$$

kde k_1 a k_2 jsou vhodné konstanty a za $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x$ je dosazen efektivní gradient $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}x)_{ef}$, lze z rovnice (4.56) pomocí

$$\widehat{P}_{ef} = \frac{\widehat{P}}{1 + \mathrm{i}\alpha k_L} \tag{4.58}$$

odvodit

$$\widehat{A}_{ef} = \frac{\overline{A}\,k_1\mathrm{i}\alpha\widehat{P}}{1 + \mathrm{i}\alpha k_L}. \tag{4.59}$$

Model D* je definován vztahy (4.53), (4.54) a (4.59). Diskuse konstant k_1 a k_L, detaily a validace modelu viz [1], [2], [135].

4.4.2. Model pro dlouhé vlny

Předpokladem přístupu uvedeném v předchozím odstavci byl zanedbatelný vliv horní stěny uvažovaného kanálu na rozruchy proudícího vzduchu. V opačném případě, tj. pro $\lambda \gg H$, a za předpokladu dlouhých vln navrhuje Hanratty [60] modifikaci standardního vztahu pro třecí sílu ve tvaru

$$\tau = \frac{1}{2}\rho\, C_f U^2\,, \tag{4.60}$$

kde C_f je *smykový koeficient* případně *součinitel tření* (angl. *shear stress coefficient* případně *skin friction coefficient*). Smykové koeficienty na dolní a horní stěně kanálu a na rozhraní budeme po řadě označovat f_{w}, f_{B} a f_{s}.

Smykové napětí na dolní stěně a horní stěně kanálu je pak dáno po řadě vztahy

$$\tau_{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{L}} f_{\mathrm{w}} {u_a}^2\,, \tag{4.61}$$

$$\tau_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{G}} f_{\mathrm{B}} {U_b}^2\,. \tag{4.62}$$

Smykové napětí na rozhraní pohybujícím se rychlostí c_{R} je aproximováno vztahem

$$\tau_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{G}} f_{\mathrm{s}} (U_b - c_{\mathrm{R}})^2\,. \tag{4.63}$$

Modely smykových koeficientů diskutuje podrobněji odstavec 4.4.3.

Vztahy určující amplitudu smykových fluktuací uvádí Hanratty [60] ve tvaru

$$\widehat{\tau}_{\mathrm{WR}} = \overline{\tau}_{\mathrm{s}} \left(\frac{2}{B - \overline{h}} + \frac{1}{\overline{h}} \frac{c_{\mathrm{R}}}{u_a} \frac{\overline{Re}_{\mathrm{L}}}{\overline{f}_{\mathrm{s}}} \frac{\partial \overline{f}_{\mathrm{s}}}{\partial \overline{Re}_{\mathrm{L}}} \right), \tag{4.64}$$

$$\widehat{\tau}_{\mathrm{WI}} = 0\,, \tag{4.65}$$

kde

$$Re_{\mathrm{L}} = \frac{h u_a}{\nu_{\mathrm{L}}}\,. \tag{4.66}$$

Vztahy pro amplitudy tlakových výchylek $\widehat{P}_{\mathrm{SR}}$ a $\widehat{P}_{\mathrm{SI}}$ lze odvodit dosazením (4.12) do linearizované pohybové rovnice plynné vrstvy (4.9). Za předpokladu $\Gamma_{\mathrm{G}} = 1$ (pístový profil) uvádí [60] tyto veličiny ve tvaru

$$\widehat{P}_{\mathrm{WR}} = \frac{\rho_{\mathrm{G}}}{B - \overline{h}} \left[-(\overline{U}_b - c_{\mathrm{R}})^2 - \frac{1}{\alpha \rho_{\mathrm{G}}} (\widehat{\tau}_{\mathrm{WI}} + \widehat{\tau}_{\mathrm{BI}} \right], \tag{4.67}$$

$$\widehat{P}_{\mathrm{WI}} = \frac{1}{\alpha (B - \overline{h})} \left[(\widehat{\tau}_{\mathrm{WR}} + \widehat{\tau}_{\mathrm{BR}} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} \right], \tag{4.68}$$

kde

$$\widehat{\tau}_{\mathrm{BR}} = \overline{\tau}_{\mathrm{B}} \frac{2}{B - \overline{h}}\,, \tag{4.69}$$

$$\widehat{\tau}_{\mathrm{BI}} = 0 \tag{4.70}$$

určují amplitudu výchylek smykového účinku τ_{B} působícího na horní stěnu kanálu a definovaného vztahem (4.62). Nezjednodušené vztahy pro obecný profil uvádějí např. Lin a Hanratty [89].

V případě, kdy vzduch proudí velkou rychlostí nad velmi tenkým filmem, se může jednat o dlouhé vlny s ohledem na tloušťku filmu, tj. $\alpha \overline{h} \to 0$, avšak podmínka $\lambda \gg H$ již nemusí být splněna. V tomto případě používá Asali [12] při modelování kapilárních vln kombinaci integrálního přístupu k řešení pohybových rovnic a modelu silových účinků pro krátké vlny z odstavce 4.4.1. Vzhledem k nízké tloušťce filmu je uvažován laminární profil kapalného filmu, tj. pro rychlost filmu na hladině platí $u_\mathrm{s} = 2u_a$. Z klasického vztahu pro smykové napětí pak plyne

$$\tau_\mathrm{w} = \tau_\mathrm{s} = 2\mu_\mathrm{L}\frac{u_a}{h} = \frac{2\rho_\mathrm{L}{u_a}^2}{Re_\mathrm{L}}. \tag{4.71}$$

Amplitudy výchylek tlaku a smykového napětí pak pomocí výsledků modelu D* v rozsahu podmínek výskytu kapilárních vln aproximuje vztahy

$$\widehat{\tau}_\mathrm{WR} \cong \widehat{\tau}_\mathrm{WI} \cong 7\alpha\tau_\mathrm{s}\,, \tag{4.72}$$
$$\widehat{P}_\mathrm{WR} \cong -78\,\alpha\tau_\mathrm{s}\,, \tag{4.73}$$
$$\widehat{P}_\mathrm{WI} \cong +45\,\alpha\tau_\mathrm{s}\,. \tag{4.74}$$

Miya a kol. v [108] v modelu solitárních vln definují smykové napětí na stěně ve tvaru

$$\tau_\mathrm{w} = 2A_\mathrm{L}\mu_\mathrm{L}\frac{u_a}{h}, \tag{4.75}$$

kde parametr A_L je funkcí Re_L

$$A_\mathrm{L} = \frac{h_\mathrm{L}^+}{2Re_\mathrm{L}}\,, \tag{4.76}$$
$$h_\mathrm{L}^+ = \frac{hu_\tau}{\nu_\mathrm{L}}\,. \tag{4.77}$$

4.4.3. Modely smykových koeficientů

S ohledem na souvislost mezi hodnotami smykového napětí a rychlostními profily jsou příslušné smykové koeficienty ovlivněny geometrickými a fyzikálními podmínkami zmíněnými v úvodu odstavců 3.4.2 a 3.4.3. Zejména se jedná o:

- geometrii problému - proudění v trubici, kanále nebo nad volným povrchem, sklon stěny
- charakter proudění kapalné a plynné vrstvy - laminární nebo turbulentní
- charakter povrchu - hladká nebo drsná stěna, periodické nebo solitární vlny na rozhraní
- fyzikální vlastnosti tekutiny - speciálně kapalina nebo plyn

Smykové koeficienty na hladké stěně

Modely smykových koeficientů na stěnách lze odvodit z příslušných rychlostních profilů pro hydraulicky hladký povrch. Lin a Hanratty [89] používají v analýze stability s odkazem na Blasiovu rovnici a za předpokladu turbulentního proudění vztahy

$$f_\mathrm{B} = 0{,}0665{Re_\mathrm{G}}^{-1/4}, \tag{4.78}$$

$$f_\mathrm{w} = 0{,}0665{Re_\mathrm{L}}^{-1/4}. \tag{4.79}$$

Jiní autoři, např. [8], [10], [50], pro hladký povrch v protikladu k (4.78) předepisují

$$f_\mathrm{B} = 0{,}046{Re_\mathrm{G}}^{-1/5}. \tag{4.80}$$

Problematice smykových koeficientů na stěně se blíže věnuje např. Schlichting [120], přehled vztahů uvádí bakalářská práce [130].

Smykové koeficienty na rozhraní

Hodnota smykového koeficientu f_s je závislá na struktuře zvlněného povrchu a její určení v modelech nestabilit je vesměs založeno na úpravě tradičních vztahů na základě experimentálních dat, viz např. [8], [108]. Ačkoliv tento přístup umožňuje konstruovat poměrně úspěšné modely nestabilit v konkrétních aplikacích, je zřejmé, že není optimální z hlediska univerzality modelů.

V dalším uvedeme několik modelů smykového koeficientu, které jsou používány v případech vyšších rychlostí proudění plynu, např. při anulárním proudění, kdy se na rozhraní nacházejí solitární, případně kapilární vlny. Tento předpoklad vedl k myšlence zohlednit strukturu rozhraní pomocí pískové drsnosti k_s. Z příslušného rychlostního profilu (3.24) odvodil Schlichting [120] obecnou formuli pro smykový koeficient

$$C_f = \frac{1}{4}\left[1{,}74 + 2\log\left(\frac{D_h}{2k_s}\right)\right]^{-2}, \tag{4.81}$$

kde D_h je tzv. *hydraulický průměr* spočtený jako podíl čtyřnásobku vnitřního průřezu daného profilu potrubí ku jeho obvodu. Pro vertikální proudění v trubici navrhl Wallis [143] vztah pro smykový koeficient na rozhraní ve tvaru

$$f_\mathrm{s} = 0{,}005\left(1 + 300\frac{\overline{h}}{D_h}\right), \tag{4.82}$$

který koresponduje vtahu (4.81) za předpokladu $k_s = 4\,\overline{h}$ a $k_s/D_h < 0{,}03$, blíže viz [143].

Alternativu Wallisovy formule (4.82) publikoval Moeck [103]

$$f_\mathrm{s} = 0{,}005\left[1 + 1458\left(\frac{\overline{h}}{D_h}\right)^{1.42}\right]. \tag{4.83}$$

Původní Wallisovu formuli (4.82) později s ohledem na experimentální data pro velmi tenké filmy upravili Fore a kol. [50] vztahem

$$f_\mathrm{s} = 0{,}005\left[1 + 300\left(\frac{\overline{h}}{D_h} - 0,0015\right)\right], \tag{4.84}$$

který dále precizovali zahrnutím závislosti na Reynoldsově čísle plynného proudu

$$f_\mathrm{s} = 0{,}005\left\{1 + 300\left[\left(1 + \frac{17\,500}{Re_\mathrm{G}}\right)\frac{\overline{h}}{D_h} - 0,0015\right]\right\}, \tag{4.85}$$

kde Reynoldsovo číslo je spočteno pomocí hydraulického průměru, tj. $Re_\mathrm{G} = U_\mathrm{G} D_h/\nu_\mathrm{G}$.

Ze zobecnění Wallisovy formule (4.82) ve tvaru

$$f_\mathrm{s} = f_\mathrm{B}\left(1 + 300\frac{\overline{h}}{D_h}\right), \tag{4.86}$$

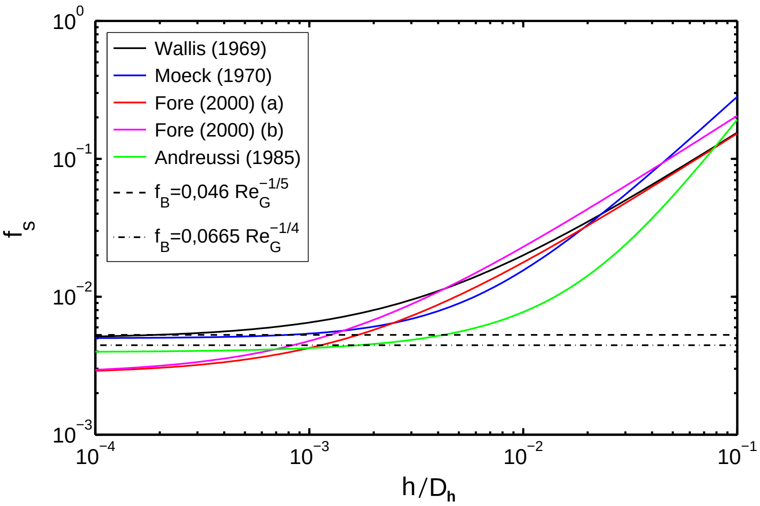
vycházejí Andreussi a kol. [8] a navrhují smykový koeficient

$$f_\mathrm{s} = f_\mathrm{B}\left(\delta_f + \beta_f h_\mathrm{G}^+\right), \tag{4.87}$$

kde β_f, δ_f jsou funkcí Re_G a kde

$$h_\mathrm{G}^+ = hU_\tau/\nu_\mathrm{G}\,, \tag{4.88}$$

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\mathrm{s}}{\rho_\mathrm{G}}}\,. \tag{4.89}$$



Obrázek 4.3: Modely smykových koeficientů na rozrušeném rozhraní (4.82), (4.83), (4.84), (4.85) a (4.87) pro $\beta_f = 0{,}023$ a $\delta_f = 0{,}75$ v porovnání s modely pro hladký povrch (4.78) a (4.80) pro $Re_\mathrm{G} = 50\,000$ ($D_h = 5\,\mathrm{cm}$, $U_b = 15\,\mathrm{m/s}$) v závislosti na poměru průměrné tloušťky filmu vůči průměru trubice.

Z naměřených hodnot pro $Re_\mathrm{G} > 24\,000$ Andreussi a kol. [8] kladou $\beta_f = 0{,}023$ a $\delta_f = 0{,}75$. Ačkoliv formule vystihuje dobře naměřená data v závislosti na parametru h_G^+, viz [8], porovnání s měřením [107] pro různá Reynoldsova čísla Re_G vykazuje jen hrubou shodu. Nepřesnost modelu (4.86), tj. použití koeficientu f_B pro hladký povrch závisejícím na Re_G v modelu f_s, zejména pro větší tloušťky filmu, poznamenávají Fore a kol. [50].

Modely smykového napětí na rozrušeném rozhraní (4.82), (4.83), (4.84), (4.85) a (4.87) jsou vykresleny na obrázku 4.3 v porovnání s modely pro hladký povrch (4.78) a (4.80) pro $Re_\mathrm{G} = 50\,000$ ($D_h = 5\,\mathrm{cm}$, $U_b = 15\,\mathrm{m/s}$). Andreussiho model (4.87) je vykreslen pro f_B dle (4.78) a pro $\beta_f = 0{,}023$ a $\delta_f = 0{,}75$ pomocí Newtonovy iterační metody. Z grafu lze nahlédnout, že smykové napětí narůstá s rostoucím podílem tloušťky filmu ku průměru trubice. Pro velmi tenké filmy (malé poměry h/D_h) jsou smykové koeficienty přibližně rovny součiniteli tření pro hladký povrch, přičemž asymptoticky splývá Wallisův model (4.82) s modelem (4.83) dle Moecka a obdobně oba Foreho modely (4.84) a (4.85) se sebou navzájem. Naopak pro velké tloušťky filmu přechází asymptoticky (4.84) v původní Wallisův model. Andreussiho model je závislý na Reynoldsově čísle. Pro Re_G menší než 50 000 predikuje výrazně nižší koeficienty než ostatní modely. Experimentální data v rozsahu $10^{-3} < h/D_h < 4 \cdot 10^{-2}$ pro různé geometrické konfigurace udávají např. Fore a kol. [50].

Měření a model koeficientu smykového napětí v případě solitární vlny uvádí Miya a kol. [108]. S ohledem na dřívější poznatky poukazují na vliv průtoku kapalného filmu na smykové koeficienty. Pomocí metody integrace pohybových rovnic odvodili vztahy pro smykový koeficient mimo hřeben solitárních vln

$$f_\mathrm{s} = \frac{4A_\mathrm{L}\nu u_\mathrm{s}\rho_\mathrm{L}(B-h_0)}{h_0 B\rho_\mathrm{G}(U_0-c)^2} - \frac{h_0 f_\mathrm{B}}{B} \tag{4.90}$$

a nad hřebenem solitární vlny

$$f_\mathrm{s} = \frac{4A_\mathrm{L}\nu\rho_\mathrm{L}(B-h_0)^3\left[c - \frac{h_0(c-u_\mathrm{s})}{h_p}\right]}{h_p B\rho_\mathrm{G}(U_0-c)^2(B-h_0)^2} - \frac{h_p f_\mathrm{B}}{B}\,, \tag{4.91}$$

kde h_0 je základní tloušťka filmu, h_p výška solitární vlny, viz obrázek 3.4, a U_0 je rychlost plynu odvozená z rovnice kontinuity ve tvaru

$$(B - h)(U_b - c) = (B - h_0)(U_0 - c). \tag{4.92}$$

Predikcí smykových koeficientů na rozhraní při vertikálním proudění se blíže zabývají např. články [18], [150], analýzu a návrhy empirických vztahů na základě měření v horizontální trubici dále uvádějí např. [10], [50], [141], [148], vliv pohybu rozhraní studují např. [78], [94].

4.5 Modely tloušťky filmu

Modely smykových napětí v předchozím odstavci jsou v řadě případů závislé na tloušťce filmu. V reálných aplikacích je však často znám pouze objemový tok kapaliny. Proto byly odvozeny modely výšky filmu v závislosti na Reynoldsově čísle.

Příslušné vztahy lze jednoduše odvodit z definice Reynoldsova čísla ve tvaru

$$Re_{\mathrm{L}} = \int_0^{h_{\mathrm{L}}^+} u^+(y^+)\mathrm{d}y^+. \tag{4.93}$$

Kosky [82] pro Reynoldsovo číslo $Re_{4\mathrm{L}} = 4Re_{\mathrm{L}}$ na základě lineárního profilu pro laminární podvrstvu $u^+ = y^+$ a mocninného profilu (3.28) odvodil předpis (4.94).

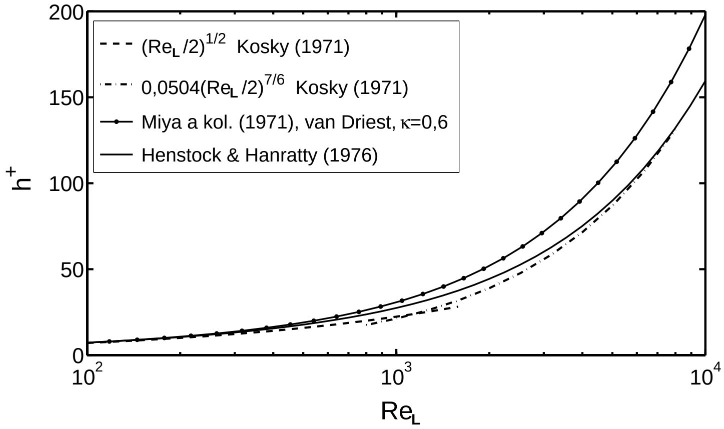
$$h_{\mathrm{L}}^+ = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} Re_{4\mathrm{L}}{}^{1/2} & \text{pro } h_{\mathrm{L}}^+ < 25 \\ 0{,}0504 Re_{4\mathrm{L}}{}^{7/8} & \text{pro } h_{\mathrm{L}}^+ > 25 \end{cases} \tag{4.94}$$

Miya a kol. [108] vycházejí z van Driestova rychlostního profilu (3.31) pro $\kappa = 0{,}6$.

Andreussi a kol. [8] s odkazem na článek [63] uvádějí korelaci

$$h_{\mathrm{L}}^+ = \left[\left(1,414 Re_{\mathrm{L}}{}^{0,5}\right)^{2,5} + \left(0,132 Re_{\mathrm{L}}{}^{0,9}\right)^{2,5} \right]^{0.4}. \tag{4.95}$$

Modely (4.94), (4.95) a model odvozený z (4.93) pro van Driestův rychlostní profil jsou zakresleny na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Modely tloušťky filmu.

Další korelace na základě měření tloušťky filmu při vertikálním anulárním proudění uvádějí např. Fukano a Furukawa [53], měření v závislosti na průtoky kapaliny i plynu podávají Wolf a kol. [147], analýzu tloušťky filmu v horizontálním anulárním proudění v závislosti na rychlosti proudění vzduchu experimentálně provedli Schubring a Shedd [123]. Měření i korelační vztah tloušťky filmu v nakloněném horizontálním kanále v závislosti na Reynoldsově, Weberově a Freudeho čísle publikovali Ebner a kol. [47].

KAPITOLA 5

CFD simulace turbulentního proudění nad zvlněným povrchem

Úspěchy výpočtové mechaniky tekutin (CFD) při modelování turbulentního proudění na straně jedné a složitost a různorodost modelů smykových napětí a tlaků na straně druhé vedly k myšlence využít metodu CFD simulací k sestavení algebraických vztahů, které by bylo možno implementovat v kvazistatických modelech nestability kapalného filmu.

Cílem CFD simulací popsaných v následující kapitole bylo tedy získat podklady pro sestavení modelů působení tlaku a smykového napětí na sinusoidální pevný povrch definovaný vlnovou délkou λ a amplitudou a v kanále o výšce H, jímž protéká tekutina (vzduch) předepsanou střední rychlostí U_b (angl. *bulk velocity*) definované ve tvaru

$$U_b = \frac{1}{H}\int_0^H U(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{5.1}$$

Protože výška kanálu i rychlost proudění ovlivňují sledované charakteristiky v různé míře, jsou v simulacích uvažovány zvláště hodnoty obou proměnných a Reynoldsovo číslo

$$Re = \frac{HU_b}{\nu} \tag{5.2}$$

je užíváno ponejvíce pro srovnání s externími studiemi.

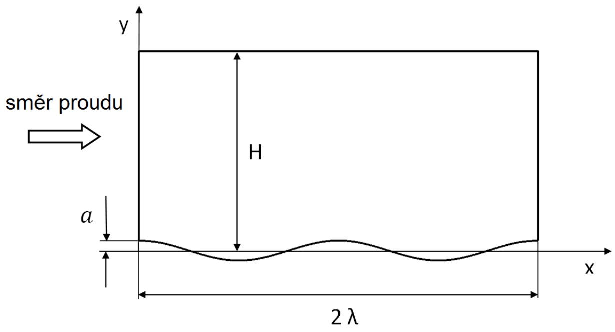
5.1 Popis výpočtové geometrie

Z důvodů níže uvedených byly kýžené hodnoty smykového napětí a tlaků získány simulacemi stacionárního turbulentního proudění ve dvoudimenzionální oblasti se sinusoidální dolní a rovnou horní stěnou, viz obr. 5.1.

Geometrie dolní zvlněné stěny je definována harmonickou funkcí

$$y = a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\,, \tag{5.3}$$

tudíž a značí amplitudu vlny a λ její délku. Horní stěna oblasti je vzdálena H od střední polohy dolní stěny. Rozměr oblasti ve směru proudění jsou dvě vlnové délky, přičemž ve všech simulacích byla vlnové délka dána konstantní hodnotou $\lambda = 0{,}05\,\mathrm{m}$. Zbylé rozměry byly voleny tak, aby poměr délky vlny ku její amplitudě λ/a ležel v rozmezí 20 až 200 a poměr výšky oblasti ku délce vlny H/λ byl roven 0,6 až 1,4. Rychlost proudění U_b byla nastavena v rozmezí od 2 do 20 m/s. Pro kinematickou viskozitu $\nu = 1{,}567\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/s$ nabývá tudíž Reynoldsovo číslo hodnot od $Re = 3830$ (pro $U_b = 2\,\mathrm{m/s}$ a $H = 0{,}03\,\mathrm{m}$) do $Re = 89\,400$ (pro $U_b = 20\,\mathrm{m/s}$ a $H = 0{,}07\,\mathrm{m}$).



Obrázek 5.1: Výpočtová oblast a souřadnicový systém.

5.2 Metoda výpočtu

Vývoj metod výpočtové mechaniky tekutin spolu s rozvojem výpočetní techniky v posledních dvou dekádách umožnil použití metody přímé numerické simulace (DNS) při simulaci turbulentního proudění rovněž v oblasti s výše nadefinovanou geometrií, tj. v kanálu s jednou zvlněnou stěnou [73], [91], [142]. Nadále velmi vysoká výpočetní náročnost DNS metod však dosud neumožňuje v rozumném čase provést řešení rozsáhlejší sady simulací, a proto byla provedena studie aplikovatelnosti přístupu pomocí časově zprůměrovaných Navierových-Stokesových rovnic (RANS). S ohledem na povahu problému byly vybrány tři turbulentní modely: standardní Wilcoxův k-ϵ model [146], k-ω SST model [96] a k-ϵ V2F model [38]. Jak bude uvedeno podrobněji dále, výsledky simulací provedených pomocí těchto modelů byly pro vybranou konfiguraci porovnány s DNS řešeními Maass a Schumann [91] a Yoon a kol. [142]. Poznamenejme, že výsledky výpočtu z článku [91] jsou přístupné on-line [49] a spolu s experimentálními měřeními publikovanými v disertační práci Hudson [69] jsou často používány jako referenční data.

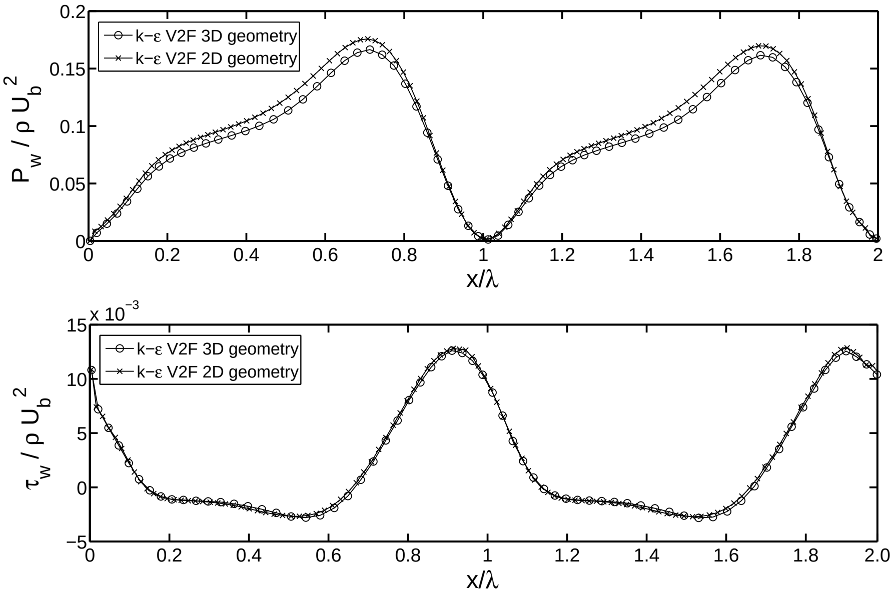
Protože proudění v kanále je považováno za homogenní v příčném směru, jsou při klasických DNS výpočtech aplikovány periodické okrajové podmínky na boční stěny výpočtové oblasti. Při porovnání odpovídajícího řešení metodou RANS s turbulentním modelem k-ϵ V2F pro 2D a 3D geometrii, viz obr. 5.2, bylo zjištěno, že odchylky obou řešení jsou zanedbatelné u smykového napětí a akceptovatelné u tlakových sil. V dalších simulacích byla proto použita výhradně 2D výpočetní oblast s parametry definovanými v předcházející podkapitole.

Vzhledem k tomu, že rozvoj mezní vrstvy po délce kanálu ovlivňuje hodnoty sledovaných veličin, byly ve směru proudění předepsány periodické okrajové podmínky s konstantním hmotnostním tokem spočteným z dané rychlosti proudění U_b. Na vstupu do domény byl přitom na počátku simulace nastaven pístový rychlostní profil, z něhož se po konvergenci simulace vyvinul profil reálného tvaru.

Poznamenejme, že vlastní simulace byly provedeny v komerčním CFD software STAR-CCM+ verze 6.04.016 firmy CD-adapco, přičemž výpočtová síť byla vyhotovena v modeláři programu ANSYS verze 13.0.

5.2.1. Výběr turbulentního modelu a jeho verifikace

Aplikovatelnost výše zmíněných turbulentních modelů na rozřešení tlaku a smykového napětí působících na zvlněný povrch byla ověřována pomocí simulací vycházejících z konfigurace DNS přístupu v práci [91]. Poměr vlnové délky ku amplitudě vlny byl nastaven na hodnotu $\lambda/a = 20$, výška kanálu $H = \lambda$ a Reynoldsovo číslo $Re = 6760$. Výpočetní síť byla definována $N_x = 114$ body v podélném směru a $N_y = 80$ body ve směru příčném na směr proudění. V podélném směru byla použita rovnoměrně dělená síť, zatímco v přístěnné oblasti byla užito zjemnění sítě v příčném směru za účelem dostatečně přesného rozřešení mezní vrstvy. Kvalita zjemnění byla posuzována



Obrázek 5.2: Průběh tlaku a smykového napětí na zvlněné stěně pro 2D a 3D geometrii. Při výpočtu byl použit k-ϵ V2F turbulentní model.

Přístup	Separace x_S/λ	Přilnutí x_R/λ
Experiment, Hudson (1996)	0,22	0,58
DNS, Maass & Schumann (1996)	0,14	0,60
DNS, Yoon a kol. (2009)	0,14	0,62
k-ϵ V2F	0,14	0,66
k-ω SST	0,13	0,71
k-ω Wilcox	0,13	0,71

Tabulka 5.1: Poloha bodů separace a přilnutí dle vybraných turbulentních modelů v porovnání s experimentálními daty viz Hudson (1996) [70] a DNS výsledky viz Maass & Schumann (1996) [91] a Yoon a kol. (2009) [142].

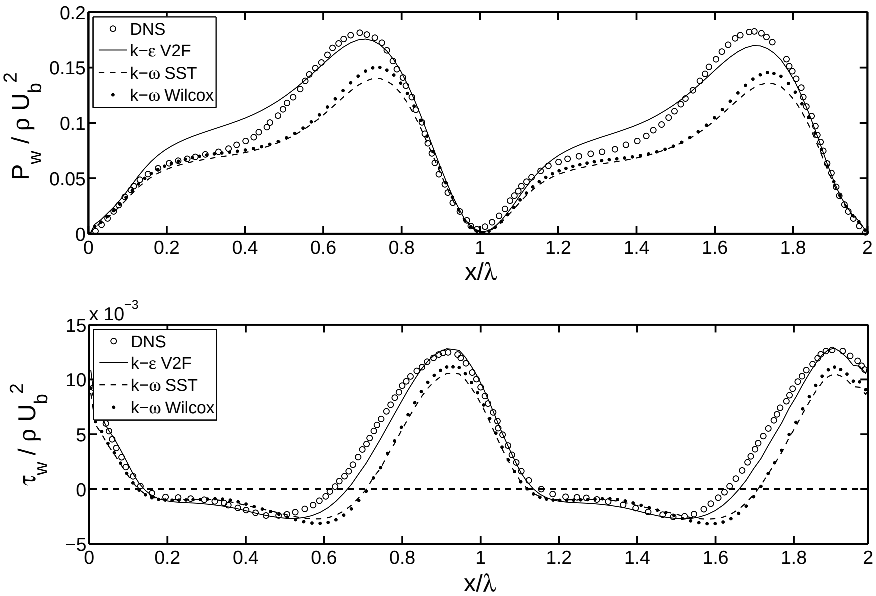
dle bezrozměrné charakteristiky y^+. V případě uvedené verifikační simulace byla hodnota y^+ menší než 0,2 po celé délce stěny.

Normalizované hodnoty tlaku[1] a smykového napětí na zvlněné stěně jsou zakresleny na obrázku 5.3. S uvážením definice tzv. *bodů separace* resp. *přilnutí* jakožto bodů, kde smykové napětí nabývá nulové hodnoty, jsou příslušné x-ové souřadnice těchto bodů rovny $x/\lambda = 0{,}14$ resp. $x/\lambda = 0{,}60$ dle DNS řešení [91] a $x/\lambda = 0{,}14$ resp. $x/\lambda = 0{,}62$ dle DNS řešení [142]. Z obrázku 5.3 a tabulky 5.1 lze nahlédnout, že bod separace je predikován poměrně přesně všemi použitými RANS modely. Na druhé straně bod přilnutí je ve všech případech nadhodnocen v porovnání s DNS daty i experimentálním měřením. Nejlepší výsledek v predikci bodu přilnutí dává k-ϵ V2F model. Polohy bodů separace a přilnutí spočtené pomocí diskutovaných turbulentních modelů pro různé poměry λ/a jsou v porovnání s DNS řešením [142] uvedeny rovněž na obrázku C.1 v příloze.

Model V2F dále poskytuje relativně dobré resp. velmi dobré výsledky při predikci extrémních hodnot tlaku resp. smykového napětí. Oba k-ω modely poskytují obdobné průběhy sledovaných veličin. Jejich odchylky se liší nejvíce při predikci maximálních hodnot tlaku i smykového napětí.

[1] Hodnoty tlaku byly upraveny odečtením lineární tlakové ztráty.

Relativní úspěšnost k-ϵ V2F modelu je v dobrém souladu s očekáváním, neboť tento model byl dle [139] navržen pro přesnější rozřešení turbulentních efektů v přístěnné oblasti, což je rozhodující fenomén pro predikci smykového napětí a separace proudu.



Obrázek 5.3: Průběhy tlaku a smykového napětí na zvlněné stěně normalizované hodnotou $\rho {U_b}^2$ a spočtené vybranými modely turbulence v porovnání s DNS řešením Yoon a kol. (2009) [142].

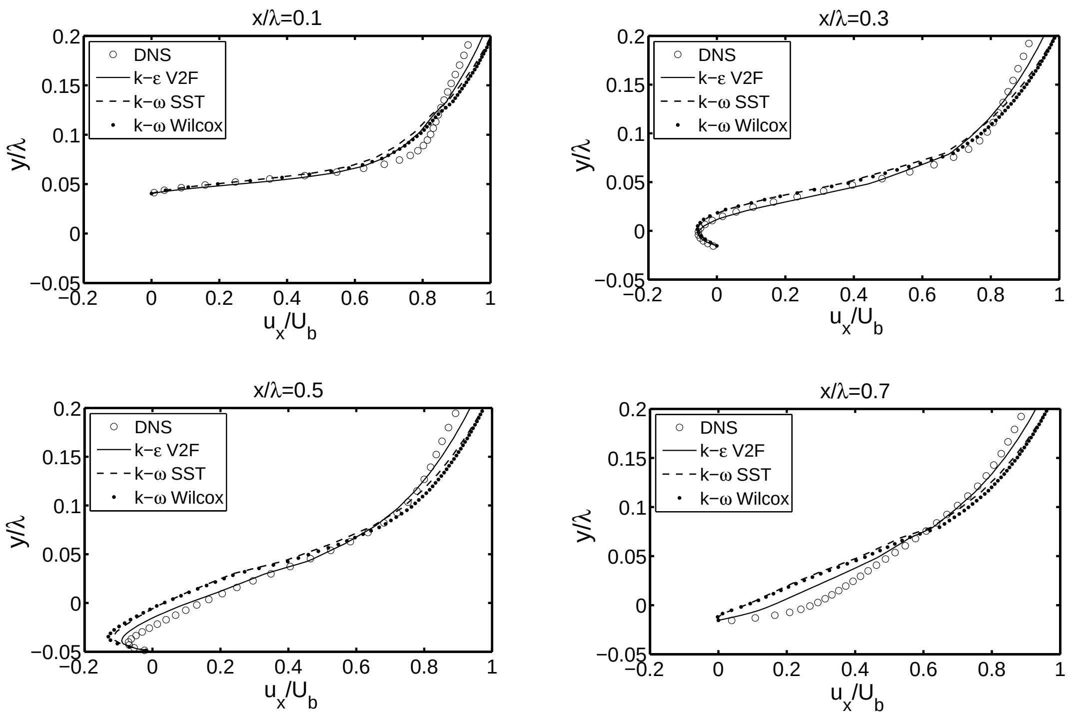
Normalizované rychlostní profily ve směru proudění v přístěnné oblasti získané diskutovanými modely turbulence jsou zachyceny na obrázku 5.4 pro x/λ=0,1; 0,3; 0,5 a 0,7. Z obrázku lze nahlédnout, že rychlostní profily v přístěnné oblasti spočtené pomocí vybraných RANS modelů vykazují obdobný průběh a jsou v dobré shodě s DNS daty pro $x/\lambda = 0{,}1$ a $x/\lambda = 0{,}3$. Nezachycují dobře pouze zlom DNS profilu ve výšce $y/\lambda = 0{,}08$ pro $x/\lambda = 0{,}1$. Větší odchylky jsou však patrné ve zbylých polohách $x/\lambda = 0{,}5$ a $x/\lambda = 0{,}7$. Oba k-ω modely dávají stále podobné průběhy, avšak tyto se již značně odchylují od DNS dat. Model k-ϵ V2F vykazuje stále dobrou shodu stejně jako v předcházejících polohách. Je zřejmé, že uvedené výsledky korespondují s oblastí separace, jejíž poloha je dobře pozorovatelná z obrázku 5.3.

Souvislost mezi oblastí separace a rychlostními profily je rovněž dobře patrná z obrázku 5.5, na kterém jsou zachyceny rychlostní profily u_y ve výše zmíněných x-ových polohách. Z obrázku lze nahlédnout, že největší odchylky mezi DNS daty a řešeními dle obou k-ω turbulentních modelů vykazují profily pro $x/\lambda = 0{,}7$, což dobře souhlasí s bodem přilnutí v blízkosti polohy $x/\lambda = 0{,}71$. Profily spočtené modelem k-ϵ V2F jsou opět v poměrně dobré shodě s DNS výsledky, ačkoliv v blízkosti bodu přilnutí jsou odchylky zřetelnější.

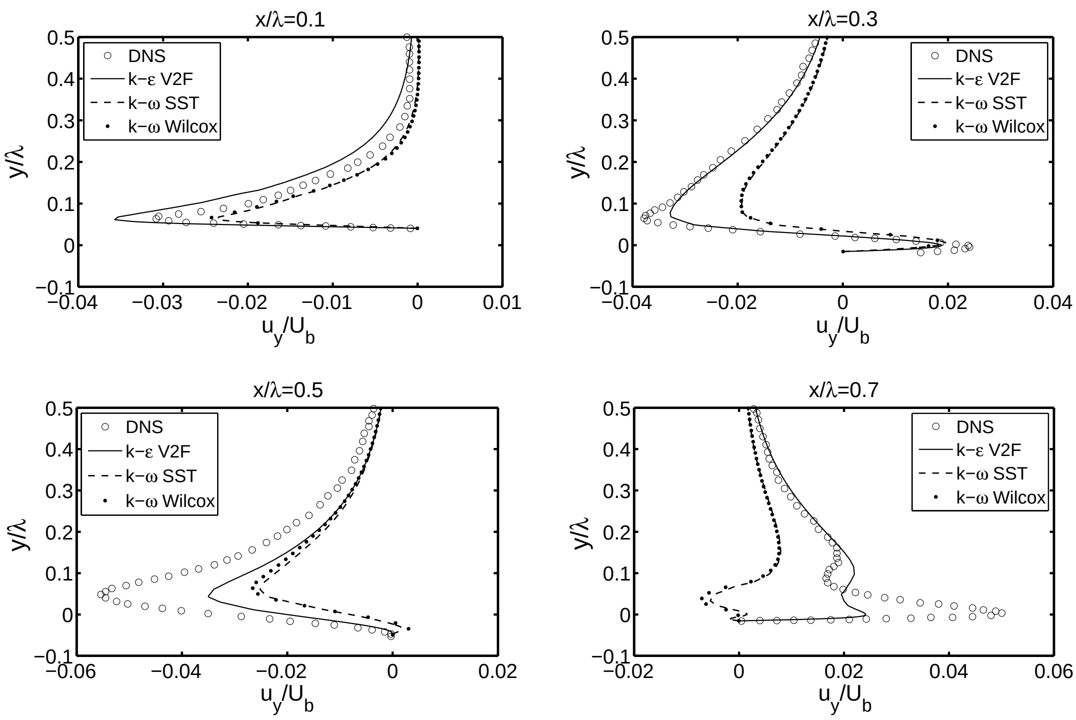
Z dosud uvedené analýzy, zejména vzhledem k poměrně přesné predikci smykového napětí a tlaku, viz. obr. 5.3, bylo usouzeno, že model k-ϵ V2F je s rozumnou mírou nepřesnosti aplikovatelný k predikci kýžených charakteristik v diskutovaném problému turbulentního proudění nad zvlněným povrchem.

5.2.2. Nastavení a specifikace simulací

Vybraný turbulentní model k-ϵ V2F, viz např. [38], [45], [74], původně odvozený v [44], je dvourovnicový model ve kterém jsou přenosové rovnice formulované pro turbulentní kinetickou energii k a rychlost disipace ϵ doplněny o rovnice pro turbulentní napětí v normálovém směru



Obrázek 5.4: Rychlostní profily ve směru proudu v přístěnné oblasti získané v x/λ=0,1; 0,3; 0,5 a 0,7 užitím vybraných RANS modelů turbulence v porovnání s DNS výsledky Maass & Schumann (1996) [91].



Obrázek 5.5: Rychlostní profily u_y získané v x/λ=0,1; 0,3; 0,5 a 0,7 užitím vybraných RANS modelů turbulence v porovnání s DNS výsledky Yoon a kol. (2009) [142].

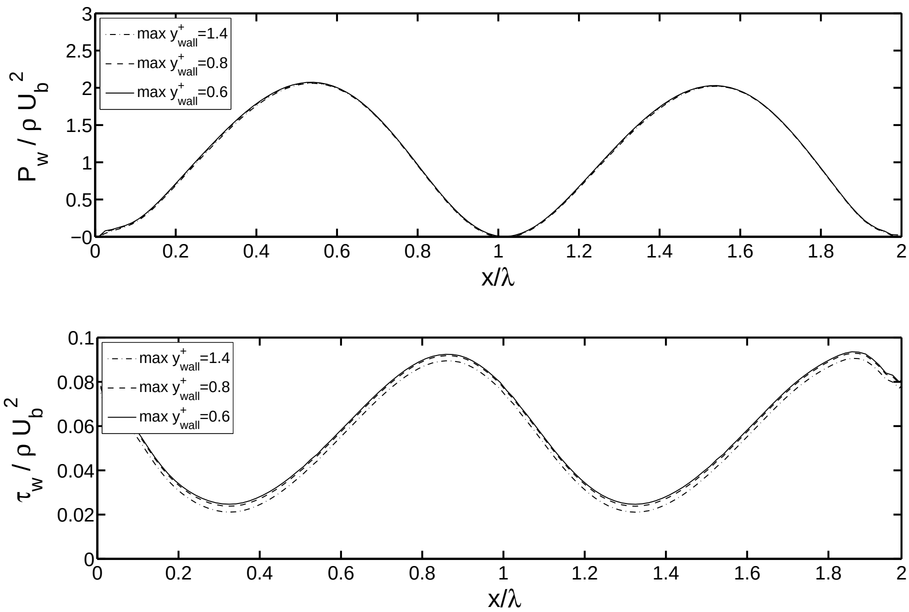
a jeho redistribuční funkci [139]. Model byl vytvořen za účelem přesnější predikce turbulentních jevů v přístěnné oblasti, což je klíčový faktor pro přenos tepla, povrchové tření a separaci mezní vrstvy. Model byl v simulacích použit s tzv. „*all* y^+“ ošetřením mezní vrstvy. Rovnice a konstanty modelu jsou uvedeny v příloze D, podrobnější specifikace modelu viz manuál [139].

Jak bylo zdůvodněno výše, byla užita dvoudimenzionální výpočetní oblast a proudění bylo simulováno jako stacionární. Za účelem analýzy vlivu výpočetní sítě na řešení bylo provedeno několik simulací, z nichž vyplynulo, že největší vliv na hodnoty sledovaných veličin má hodnota y^+ na zvlněné stěně označovaná dále y^+_{wall}.

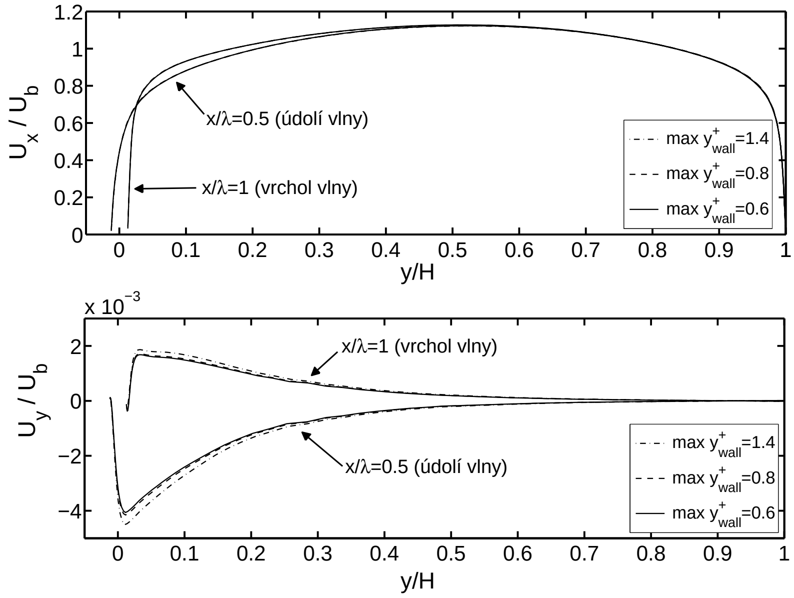
Pro detailnější posouzení vlivu y^+_{wall} na smykové napětí a tlakový profil byly provedeny simulace pro trojí hustotu sítě, viz tab. 5.2. Jako testovací případ byla užita výpočetní doména s geometrickou konfigurací definovanou rozměry $\lambda/a = 80$, $H = \lambda$ a proud vzduchu s Reynoldsovým číslem $Re = 31\,916$ ($H = 0{,}05$ m, $U_b = 10$ m/s). Výsledky uvedené v tabulce 5.2 a na obrázku 5.6 ukazují, že hodnoty tlaku se pro všechny zvolené sítě mění jen nepatrně (v rozmezí jednoho procenta) a hodnoty smykového napětí se liší méně než o jedno procento, pokud y^+_{wall} klesne z hodnoty 0,8 na 0,6. Podobně odpovídající rychlostní profily na obrázku 5.7 deklarují, že kvalita výpočtové sítě 3 z tabulky 5.2 by měla být dostačující pro získání reprezentativních dat. Výpočetní sítě použité ve vlastních simulacích byly vyhotoveny tak, aby hodnota y^+_{wall} byla vždy menší než 0,65 při rychlosti proudění $U_b = 10$ m/s. Výpočtová síť včetně detailu přístěnné oblasti je zachycena na obrázku C.2 v příloze.

Výpočtová síť	Počet buněk	max y^+_{wall}	max $P_w/\rho U_b^2$	max $\tau_w/\rho U_b^2$
1	120×80	1,4	2,0600 (99,30 %)	0,0895 (96,86 %)
2	120×88	0,8	2,0693 (99,74 %)	0,0918 (99,35 %)
3	120×92	0,6	2,0746 (100 %)	0,0924 (100 %)

Tabulka 5.2: Parametry a charakteristiky použité pro analýzu vlivu výpočtové sítě na řešení. H=λ, λ/a=80, Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).



Obrázek 5.6: Vliv hustoty výpočtové sítě na hodnoty tlaku a smykového napětí. Vykresleno pro H=λ, λ/a=80, Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).



Obrázek 5.7: Vliv hustoty výpočtové sítě na rychlostní profily v x/λ=0,5 (údolí vlny) a x/λ=1 (vrchol vlny). H=λ, λ/a=80, Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).

5.3 Výsledky

Vzhledem k tomu, že diskutované simulace byly řešeny jako stacionární, reprezentují všechny veličiny uvedené v této kapitole jejich časově průměrné hodnoty. Tlak a smykové napětí působící na zvlněný pevný povrch definujeme analogicky jako pro vodní hladinu v podkapitole 3.2 rozkladem na průměrnou a fluktuační část:

$$P_{\mathrm{w}} = \overline{P}_{\mathrm{w}} + P' = \overline{P}_{\mathrm{w}} + \Re\{\widehat{P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\}\,, \tag{5.4}$$

$$\tau_{\mathrm{w}} = \overline{\tau}_{\mathrm{w}} + \tau' = \overline{\tau}_{\mathrm{w}} + \Re\{\widehat{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\}\,. \tag{5.5}$$

Ze vztahů (5.4) resp. (5.5) plyne poměr mezi amplitudami $\widehat{P}_{\mathrm{w}}$ resp. $\widehat{\tau}_{\mathrm{w}}$, viz podkapitolu 3.2, uvažovanými nad vodní hladinou a amplitudami $\widehat{P}$ resp. $\widehat{\tau}$ nad pevným povrchem:

$$\widehat{P} = a\widehat{P}_{\mathrm{w}}, \tag{5.6}$$

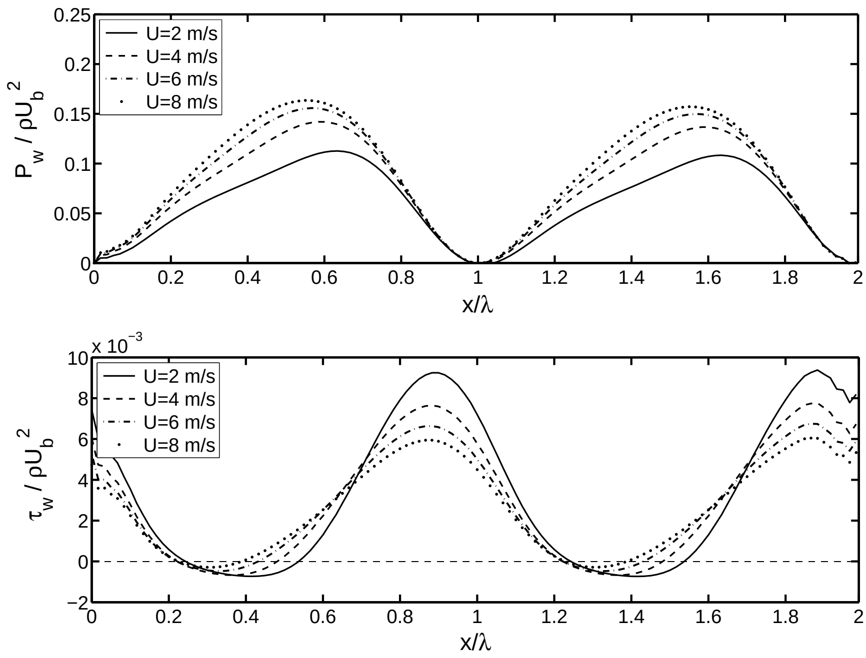
$$\widehat{\tau} = a\widehat{\tau}_{\mathrm{w}}. \tag{5.7}$$

Amplitudy $|\widehat{P}|$ resp. $|\widehat{\tau}|$ reálných fluktuací P' resp. τ' nyní v protikladu k předpisům (3.11) resp. (3.12) definují příslušné amplitudové složky P_{SR}, P_{SI}, τ_{SR} a τ_{SI} vztahy

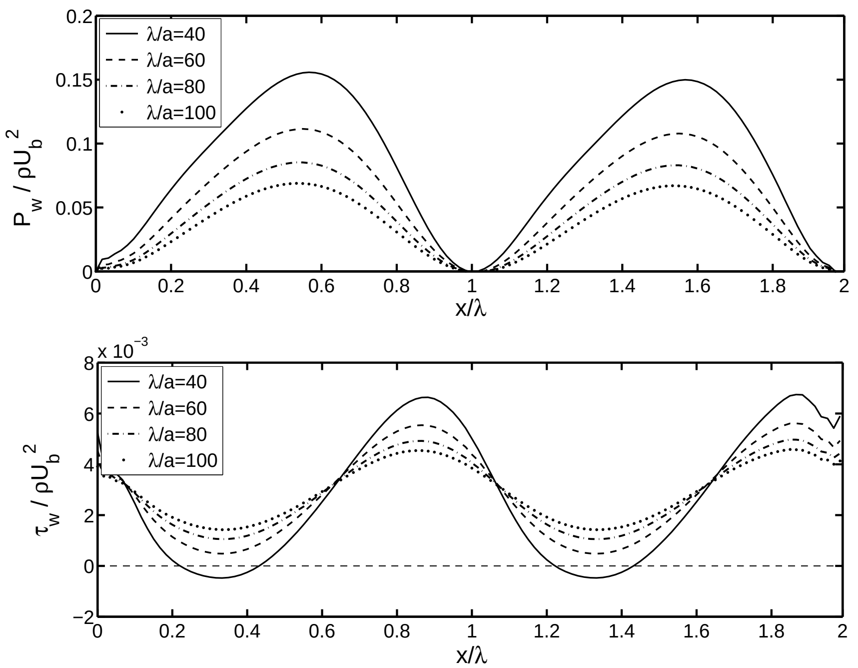
$$P' = P_{\mathrm{SR}}\cos\alpha x - P_{\mathrm{SI}}\sin\alpha x = |\widehat{P}|\cos(\alpha x + \theta_{\mathrm{P}})\,, \tag{5.8}$$

$$\tau' = \tau_{\mathrm{SR}}\cos\alpha x - \tau_{\mathrm{SI}}\sin\alpha x = |\widehat{\tau}|\cos(\alpha x + \theta_{\tau})\,. \tag{5.9}$$

Profily smykového napětí a tlaku působící na zvlněný povrch jsou zakresleny na obrázcích 5.8 resp. 5.9 v závislosti na rychlosti U_b resp. poměru λ/a. Z profilů na obou obrázcích plyne, že rychlost proudění plynu i poměr mezi vlnovou délkou a amplitudou vlny ovlivňují tvar profilu i amplitudy působících napětí. Z průběhu smykových napětí na obrázku 5.9 a polohy oblasti separace na obrázku C.1 v příloze je patrné, že k separaci proudění dochází pro $\lambda/a = 50$, což je v souladu s DNS simulací [142]. Z obrázků C.1 a C.3 v příloze při tom vyplývá, že tato hodnota se s rychlostí proudění příliš nemění. Z obrázku 5.8 lze ovšem nahlédnout, že oblast separace se s rostoucí rychlostí zkracuje.



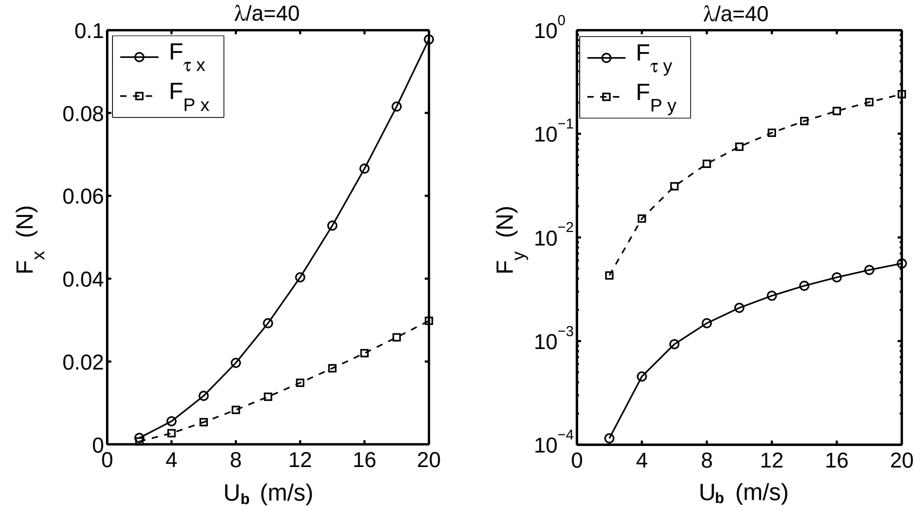
Obrázek 5.8: Vliv rychlosti U_b na profil tlaku a smykového napětí. Vykresleno pro $H{=}\lambda$, $\lambda/a = 40$.



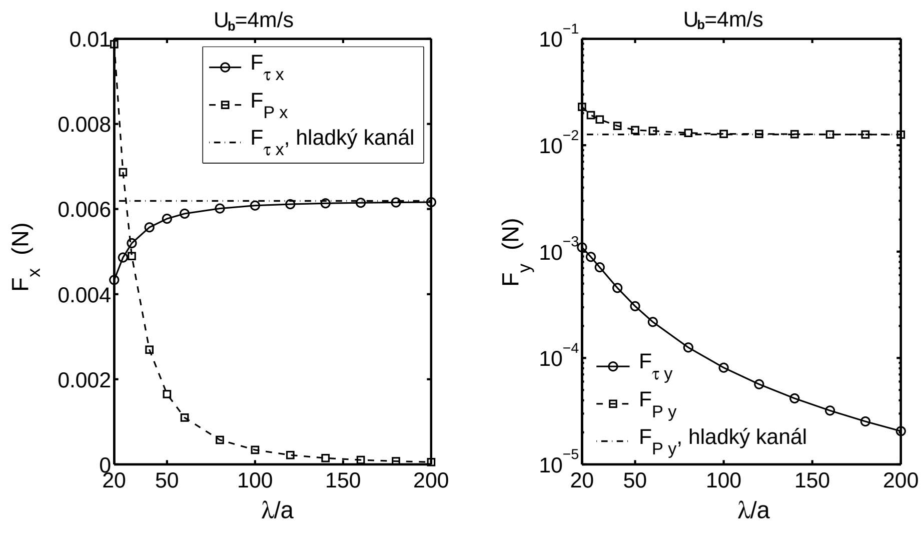
Obrázek 5.9: Vliv poměru na λ/a na profil tlaku a smykového napětí. Vykresleno pro $H{=}\lambda$, $Re{=}19\,145$ ($H{=}0{,}05\,\mathrm{m}$, $U_b{=}6\,\mathrm{m/s}$).

Složky sil působících na zvlněný povrch v důsledku smykového napětí a tlakového profilu jsou zakresleny na obrázcích 5.10 resp. 5.11 v závislosti na rychlosti U_b resp. λ/a. Síla působící v x-ovém směru v důsledku smykového napětí τ_w je značena $F_{\tau x}$, síla působící ve směru osy x v důsledku tlakového profilu P_w je značena F_{Px}. Analogicky pro složky v y-ovém směru. Z obrázku 5.10 je zřejmé, že obě působící síly rostou s rostoucí rychlostí proudění, přičemž složka $F_{\tau x}$ přibližně lineárně, složka F_{Px} přibližně kvadraticky. Růst silových složek v y-ovém směru je obdobný v obráceném sledu. Z obrázku 5.11 nicméně vyplývá, že zásadní vliv na velikost silových složek má tvar vlny, tj. poměr λ/a. S rostoucí plochostí vlny složky $F_{\tau y}$ a F_{Px} rychle klesají k nulovým hodnotám, kterých nabývají pro hladký kanál. Podobně se asymptoticky k hodnotám pro hladký povrch blíží hodnoty složek $F_{\tau x}$ a F_{Py}.

Z analýzy působících sil pro více vlnových délek lze učinit závěr, že pro vlny s poměrem λ/a větším než asi 25 až 30 v závislosti na rychlosti proudění je dominujícím faktorem pro silové působení v x-ovém směru smykové napětí, zatímco dominujícími silami působícími v y-ovém směru v případě všech vlnových délek jsou síly tlakové.



Obrázek 5.10: Závislost silových účinků tlaku a smykového napětí na rychlosti U_b. Vykresleno pro H=λ, λ/a=40 (H=0,05 m).



Obrázek 5.11: Závislost silových účinků tlakových a smykových sil na poměru λ/a. Vykresleno pro H=λ, Re=12 767 (H=0,05 m, U_b=4 m/s).

Ačkoliv působící síly mohou být významných faktorem například při tvorbě filmu, v modelech nestabilit kapalných filmů se vyskytují pouze amplitudové charakteristiky příslušných napětí, případně průměrné hodnoty smykového napětí. Vzhledem k tomu, že zvlněný povrch jen málo ovlivňuje průměrné hodnoty smykového napětí na stěně, jak dokládá obrázek 5.9, omezíme se dále na analýzu amplitudových složek fluktuací P' a τ' tj. veličin P_{SR}, P_{SI} a τ_{SR}, τ_{SI}.

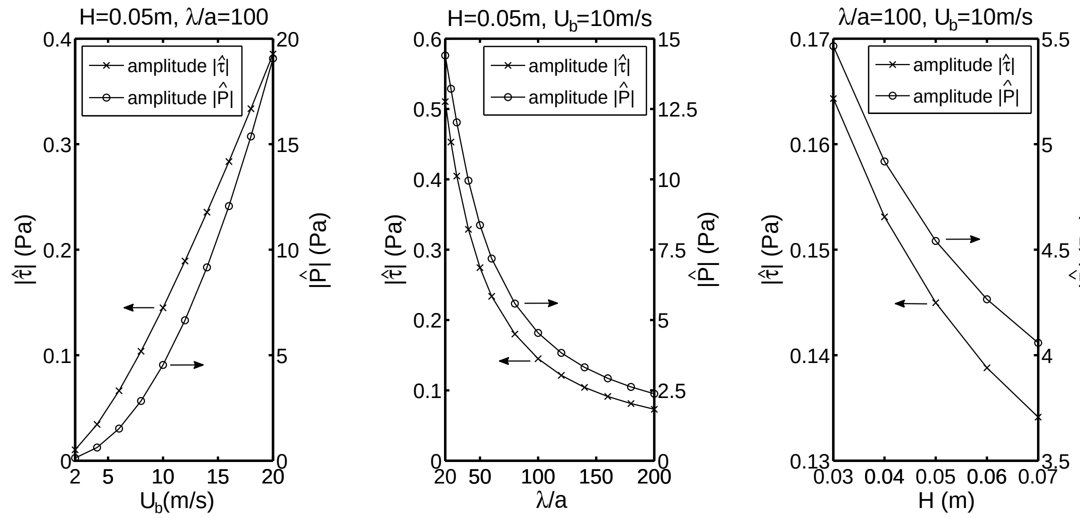
5.3.1. Fluktuace tlaku

Komponenty tlakových fluktuací P_{SR}, P_{SI} byly spočteny z amplitudy tlaku $|\widehat{P}|$ a fázového posunutí tlakového průběhu vůči povrchu vlny θ_{P} dle vztahů odvozených z rovnosti (5.8):

$$P_{\mathrm{SR}} = |\widehat{P}| \cos \theta_{\mathrm{P}}, \tag{5.10}$$

$$P_{\mathrm{SI}} = |\widehat{P}| \sin \theta_{\mathrm{P}}. \tag{5.11}$$

Amplituda tlakové fluktuace $|\widehat{P}|$ byla určena jako polovina rozdílu mezi maximální a minimální hodnotou tlaku působícího na povrch o jedné vlnové délce. Závislost této veličiny na výšce H, poměru λ/a a rychlosti U_b je zachycena na obrázku 5.12 v porovnání s amplitudou smykového napětí $|\widehat{\tau}|$. Z obrázku je patrné, že závislosti obou veličin jsou obdobné. Amplitudy rostou s rostoucí rychlostí U_b, klesajícím poměrem λ/a a výškou kanálu H.



Obrázek 5.12: Závislost amplitud fluktuací tlaku resp. smykového napětí, $|\widehat{P}|$ resp. $|\widehat{\tau}|$, na rychlosti U_b, poměru λ/a a výšce kanálu H. Vykresleno pro H=λ, λ/a=100 a Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).

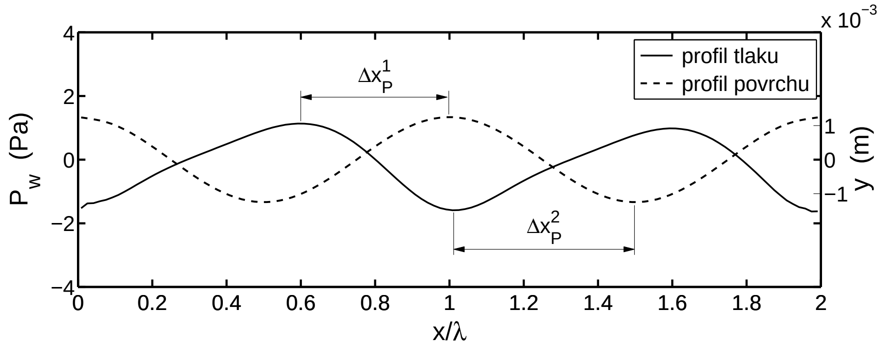
V porovnání s amplitudou není určení fázového posunutí θ_{P} tak jednoznačné s ohledem na deformaci tlakového průběhu zejména pro malé hodnoty rychlosti U_b a poměru λ/a, jak demonstrují obrázky 5.13 a 5.14. Fázové posunutí bylo stanoveno z posunutí maxima tlaku vůči povrchu vlny Δx_{P}^1 a z posunutí minima tlaku vůči údolí vlny Δx_{P}^2, jak ilustruje obrázek 5.13. Odpovídající úhly θ_{P}^1 a θ_{P}^2 byly spočteny pomocí vztahů

$$\theta_{\mathrm{P}}^1 = \frac{\Delta x_{\mathrm{P}}^1}{\lambda} \cdot 360^\circ\,, \tag{5.12}$$

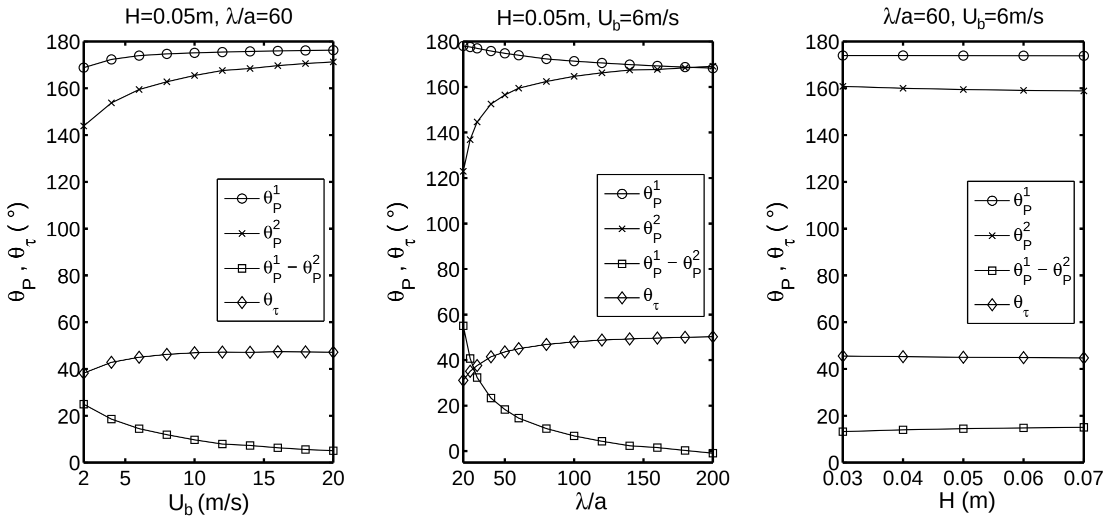
$$\theta_{\mathrm{P}}^2 = \frac{\Delta x_{\mathrm{P}}^2}{\lambda} \cdot 360^\circ\,. \tag{5.13}$$

Odpovídající amplitudové složky P_{SR}^1 resp. P_{SR}^2 spočtené užitím fází θ_{P}^1 resp. θ_{P}^2 jsou zachyceny na obrázku 5.15 v porovnání s příslušnými algebraickými modely. Ze závislosti na λ/a je patrné, že P_{SR}^1 a P_{SR}^2 se významně liší pro $\lambda/a < 50$.

Algebraické modely příslušných složek P_{SR}^1 a P_{SR}^2 byly odvozeny užitím lineární regrese a empirického „fitování“ simulačních dat. Z výsledných vztahů (5.15) a (5.16) jakožto z obrázku 5.15 lze nahlédnout, že rozdíly mezi modely P_{SR}^1 a P_{SR}^2 nejsou příliš významné. Oba modely jsou zakresleny na obrázku 5.15 v závislosti na uvažovaných proměnných v porovnání s modelem



Obrázek 5.13: Deformace tlakového průběhu a fázové posunutí vůči povrchu vlny. Vykresleno pro $H{=}\lambda$, $\lambda/a{=}40$ a $Re{=}12\,767$ ($H{=}0.05\,\mathrm{m}$, $U_b{=}4\,\mathrm{m/s}$).



Obrázek 5.14: Závislost fázového posunutí tlaku a smykového napětí θ_P a θ_τ na H, λ/a a U_b. Vykresleno pro $H{=}\lambda$, $\lambda/a{=}60$ a $Re{=}19\,150$ ($H{=}0.05\,\mathrm{m}$, $U_b{=}6\,\mathrm{m/s}$).

$P_{\mathrm{WR}}^{\mathrm{WH}}$ založeným na řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice, které použili Woodmansee a Hanratty [151]. Z obrázku je patrné, že oba odvozené algebraické modely výborně prokládají CFD data pro $\lambda/a > 40$ a shoda s modelem $P_{\mathrm{WR}}^{\mathrm{WH}}$ je velmi dobrá zejména v kvalitativním smyslu.

$$P_{\mathrm{WR}}^{\mathrm{WH}} = -0{,}131 a \rho_{\mathrm{G}} U_b{}^2 \alpha \left(\frac{\alpha H}{2}\right)^{-0{,}627} Re^{0{,}229} \tag{5.14}$$

$$P_{\mathrm{SR}}^{1} = -0{,}815 H^{-0{,}357} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-0{,}914} U_b{}^{2{,}100} \tag{5.15}$$

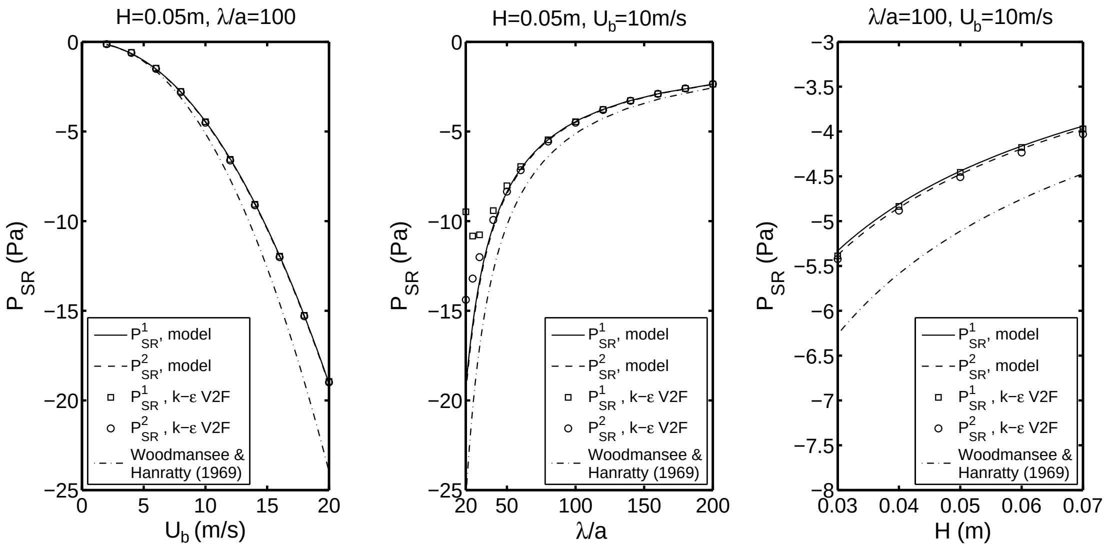
$$P_{\mathrm{SR}}^{2} = -0{,}849 H^{-0{,}359} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-0{,}919} U_b{}^{2{,}093} \tag{5.16}$$

Způsob určení fáze θ_P je mnohem významnější pro výpočet složek P_{SI} než v případě složek P_{SR}, jak dokládá obrázek 5.16. Hodnoty P_{SI} jsou v porovnání se složkami P_{SR} obecně poměrně malé kromě případů, kdy zvlnění je výrazné (λ/a malé). Odpovídající algebraické modely jsou definovány formulemi (5.17) a (5.18) a vykresleny rovněž na obrázku 5.16. Lze nahlédnout, že hodnoty P_{SI} v případě závislosti na rychlosti U_b jsou vystiženy velmi dobře zejména pro rychlosti $U_b > 10\,\mathrm{m/s}$. Pro klesající rychlosti relativní chyba mezi CFD daty a modelem složek P_{SI}^1

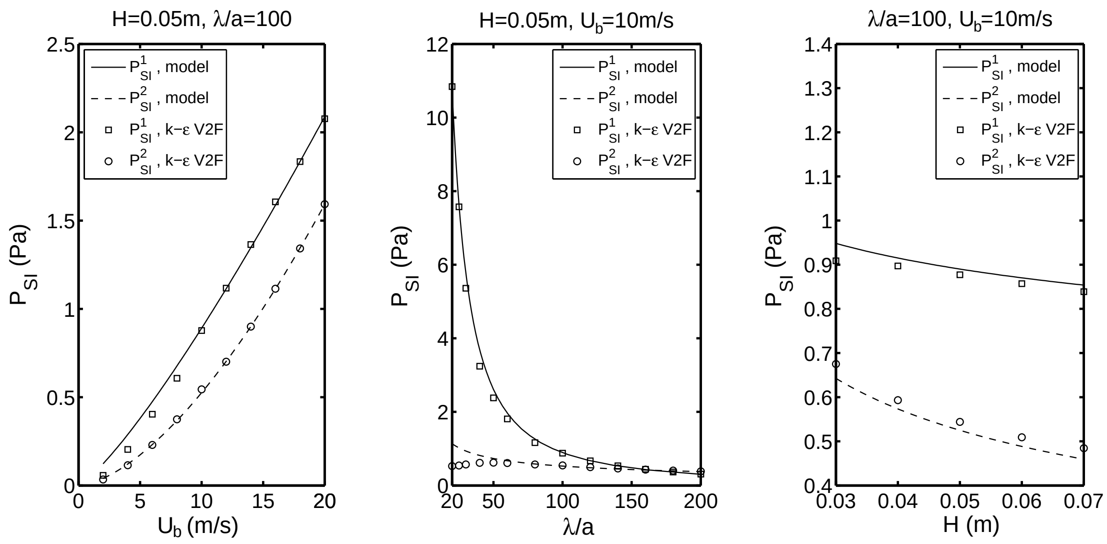
významně narůstá. Model složek P^2_{SI} se odlišuje převážně pouze pro $\lambda/a < 60$. Predikce obou složek v závislosti na výšce kanálu je velmi dobrá.

$$P^1_{\mathrm{SI}} = 45{,}936 H^{-0{,}124} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-1{,}552} {U_b}^{1{,}230} \tag{5.17}$$

$$P^2_{\mathrm{SI}} = 0{,}0369 H^{-0{,}396} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-0{,}481} {U_b}^{1{,}600} \tag{5.18}$$



Obrázek 5.15: Závislost amplitudové složky P_{SR} na výšce kanálu H, poměru λ/a a rychlosti U_b v porovnání s analytickým modelem viz Woodmansee a Hanratty [151]. Vykresleno pro H=λ, λ/a=100 a Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).



Obrázek 5.16: Závislost amplitudové složky P_{SI} na výšce kanálu H, poměru λ/a a rychlosti U_b. Vykresleno pro H=λ, λ/a=100 a Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).

5.3.2. Fluktuace smykového napětí

Amplitudové složky výchylek smykového napětí τ_{SR} a τ_{SI} byly určeny obdobným způsobem jako v případě tlakových fluktuací, tj. pomocí vztahů

$$\tau_{\mathrm{SR}} = |\widehat{\tau}| \cos\theta_\tau , \tag{5.19}$$

$$\tau_{\mathrm{SI}} = |\widehat{\tau}| \sin\theta_\tau . \tag{5.20}$$

Amplituda fluktuace smykového napětí $|\widehat{\tau}|$ byla stanovena jako průměr maximální a minimální hodnoty. Fáze θ_τ byla určena z posunutí maxima smykového napětí vůči povrchu vlny, tj. pomocí vztahu analogickému k formuli (5.12). Výsledné hodnoty složek τ_{SR} a τ_{SI} jsou zachyceny na obrázku 5.17 spolu s odpovídajícími algebraickými modely definovanými vztahy (5.21) a (5.22).

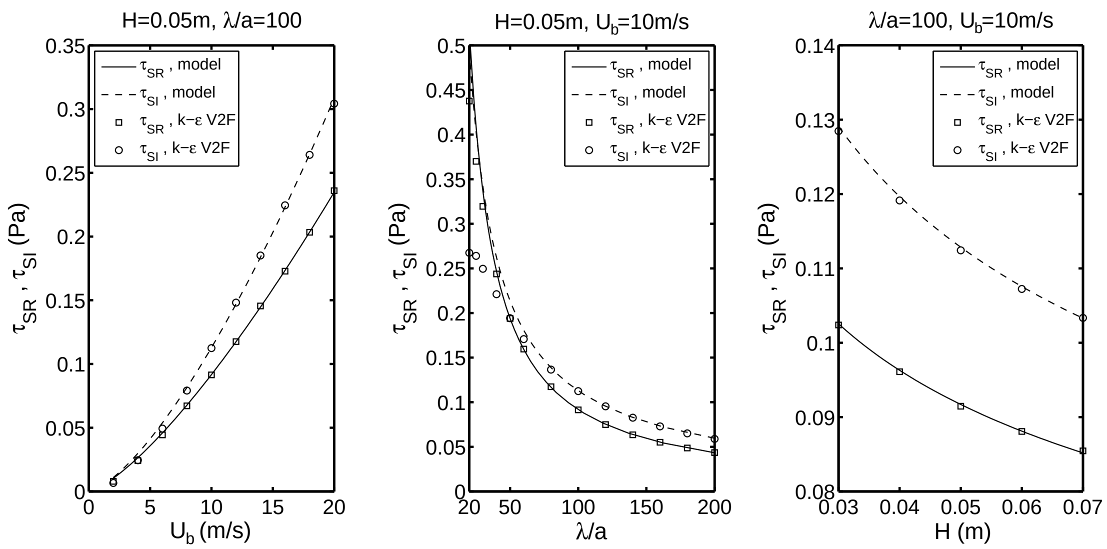
$$\tau_{\mathrm{SR}} = 0{,}303 H^{-0{,}219} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-1{,}080} {U_b}^{1{,}356} \tag{5.21}$$

$$\tau_{\mathrm{SI}} = 0{,}126 H^{-0{,}263} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-0{,}920} {U_b}^{1{,}450} \tag{5.22}$$

Omezení modelů pro reprezentaci CFD dat je obdobné jako v případě tlakových složek, viz předchozí odstavec. Odchylky jsou významné ponejvíce pro nízké hodnoty λ/a, zejména při predikci hodnot složky τ_{SI}.

Model průměrných hodnot smykového napětí byl na základě CFD dat odvozen ve tvaru

$$\overline{\tau}_{\mathrm{w}} = 2{,}857 \cdot 10^{-3} H^{-0{,}224} U_b^{1{,}746} . \tag{5.23}$$



Obrázek 5.17: Závislost složek τ_{SR} a τ_{SI} na výšce kanálu H, poměru λ/a a rychlosti U_b. Vykresleno pro $H{=}\lambda$, $\lambda/a{=}100$ a $Re{=}31\,916$ ($H{=}0{,}05\,\mathrm{m}$, $U_b{=}10\,\mathrm{m/s}$).

5.4 Diskuse a validace výsledků

Charakter fluktuací tlaku a smykového napětí je přehledně dokumentován na obrázcích 5.12 a 5.14 pomocí závislostí na výšce kanálu H, poměru délky ku amplitudě vlny λ/a a rychlosti U_b. Vyhodnocení široké sady konfigurací řídících proměnných studovaného problému potvrzuje výše uvedené tendence a závislosti:

- Amplitudy obou fluktuací se významně zvětšují s rostoucí rychlostí proudění a s rostoucí amplitudou povrchových vln a mírně se zmenšují s rostoucí výškou kanálu.
- V závislosti na rychlosti U_b jsou amplitudy fluktuací smykového napětí $|\widehat{\tau}|$ přibližně 10× (pro $U_b = 2\,\mathrm{m/s}$) až 50× (pro $U_b = 20\,\mathrm{m/s}$) menší než amplitudy tlakových fluktuací $|\widehat{P}|$ a tento poměr se přibližně zachovává, i když se zbývající proměnné λ/a a H mění.
- Posunutí maxima tlaku vůči vrcholu vlny se zvětšují s rostoucí rychlostí proudění a zmenšují s klesajícím poměrem λ/a. Vliv výšky kanálu není v tomto případě příliš významný. Odpovídající fázová posunutí θ^1_P spočtená dle formule (5.12) se pro $H = \lambda$ mění od 159° (pro $U_b = 2\,\mathrm{m/s}$ a $\lambda/a = 200$) do 178° (pro $U_b = 20\,\mathrm{m/s}$ a $\lambda/a = 20$).
- Posunutí minima tlaku vůči údolí vlny se zmenšují s rostoucí rychlostí U_b a poměrem λ/a a jen velmi slabě s rostoucí výškou kanálu H. Korespondující fázová posunutí θ^2_P se mění od 103° (pro $U_b = 2\,\mathrm{m/s}$ a $\lambda/a = 20$) do 175° (pro $U_b = 20\,\mathrm{m/s}$ a $\lambda/a = 200$).
- Posunutí maxima smykového napětí vůči vrcholu vlny se zvětšují s rostoucí rychlostí proudění U_b a poměrem λ/a. Vliv výšky kanálu není opět významný podobně jako v případě posunu maxima tlaku. Fázové posunutí θ_τ se mění od 29° (pro $U_b = 2\,\mathrm{m/s}$ a $\lambda/a = 20$) do 57° (pro $U_b = 20\,\mathrm{m/s}$ a $\lambda/a = 200$).
- Komponenta P_SR je záporná, zatímco všechny ostatní jsou kladné. Kladná hodnota P_SI posouvá minimum tlaku směrem proti proudu vůči vrcholu vlny. Kladné hodnoty τ_SR a τ_SI posouvají maximum smykového napětí proti proudu vůči povrchu vlny.

Z fyzikálních principů nestabilit kapalného filmu diskutovaných v podkapitole 3.3 vyplývá přednostní význam minim tlakového působení a maxim smykového napětí. S ohledem na tuto skutečnost se jeví, že amplitudové složky P^2_SR a P^2_SI spočtené pomocí posunutí Δx^2_P by mohly být vhodnější pro účely příslušných modelů nestabilit, neboť lépe aproximují polohu minima tlakových sil, zatímco použití složek P^1_SR a P^1_SI vede k lepší aproximaci maxima, jak je patrné z obrázku 5.18.

Detailnější vyšetření přesnosti jednotlivých modelů bylo provedeno užitím relativních odchylek spočtených vztahy

$$\Delta|\widehat{P}^j| = \frac{|\widehat{P}^j| - |\widehat{P}^{CFD}|}{|\widehat{P}^{CFD}|}\,, \tag{5.24}$$

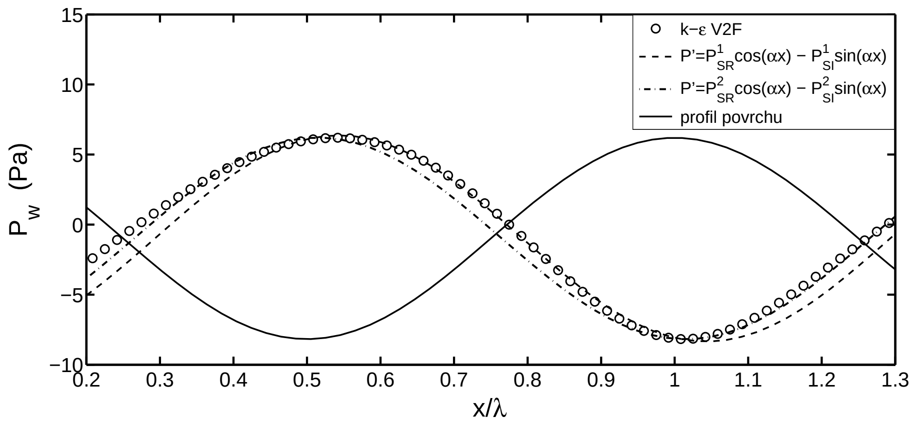
$$\Delta|\widehat{\tau}| = \frac{|\widehat{\tau}| - |\widehat{\tau}^{CFD}|}{|\widehat{\tau}^{CFD}|}\,, \tag{5.25}$$

kde $|\widehat{P}^j|$ a $|\widehat{\tau}|$ jsou s ohledem na vztahy (5.8) a (5.9) dány formulemi

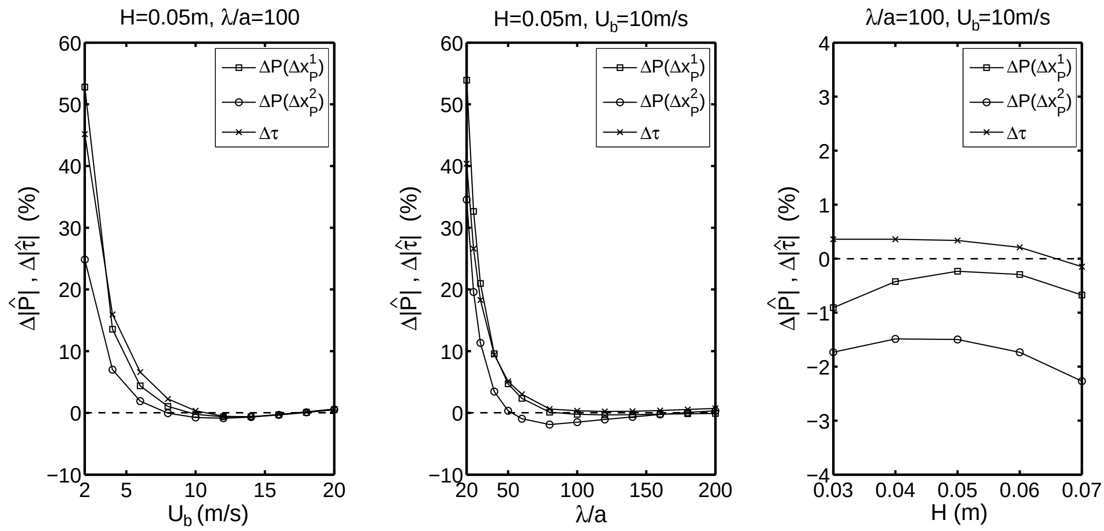
$$|\widehat{P}^j| = \sqrt{\left(P^j_\mathrm{SR}\right)^2 + \left(P^j_\mathrm{SI}\right)^2}\,, \tag{5.26}$$

$$|\widehat{\tau}| = \sqrt{(\tau_\mathrm{SR})^2 + (\tau_\mathrm{SI})^2}\,. \tag{5.27}$$

Výsledné závislosti relativních odchylek na parametrech proudění, viz obr. 5.19, ukazují, že příslušné algebraické modely nejsou adekvátní pro popis CFD dat nejen pro nízké hodnoty λ/a, ale také pro nízké rychlosti proudění. Nicméně relativní odchylky od CFD dat jsou menší než asi 10 % pro libovolnou výšku kanálu, jestliže rychlost U_b je větší než 6 m/s a poměr λ/a větší než 50.



Obrázek 5.18: Porovnání tlakového průběhu spočteného dle modelu založeného na $\Delta x_{\mathrm{P}}^{1}$ (P_{SR}^{1}, P_{SI}^{1}) a $\Delta x_{\mathrm{P}}^{2}$ (P_{SR}^{2}, P_{SI}^{2}). Vykresleno pro H=λ, λ/a=60 a Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).



Obrázek 5.19: Relativní odchylky amplitud výchylek tlaku a smykového napětí od CFD výsledků. Vykresleno pro H=λ, λ/a=100 a Re=31 916 (H=0,05 m, U_b=10 m/s).

Pro validaci modelů je třeba v prvé řadě ověřit splnění předpokladu linearity a adekvátnost použití harmonických funkcí při modelování fluktuací a dále pak vyšetřit vlastní přesnost predikce amplitud a fázových posunutí sledovaných veličin. Zilker a kol. [156] provedli měření smykového napětí pro různé amplitudy vln a vymezili lineární závislost pro $\lambda/a > 60$ a $a^{+} < 27$, kde

$$a^{+} = a\frac{u_\tau}{\nu} \tag{5.28}$$

je bezrozměrná amplituda přepočtená pomocí kinematické viskozity ν a třecí rychlosti u_τ spočtené dle (3.20), kde τ_{w} je získané z řešení pro rovnou stěnu.

Abrams v dizertační práci [1] s odkazem na článek [135] uvádí, že pro mezní vrstvy o velké tloušťce je fázové posunutí smykového napětí θ_τ prostou funkcí bezrozměrného vlnového čísla

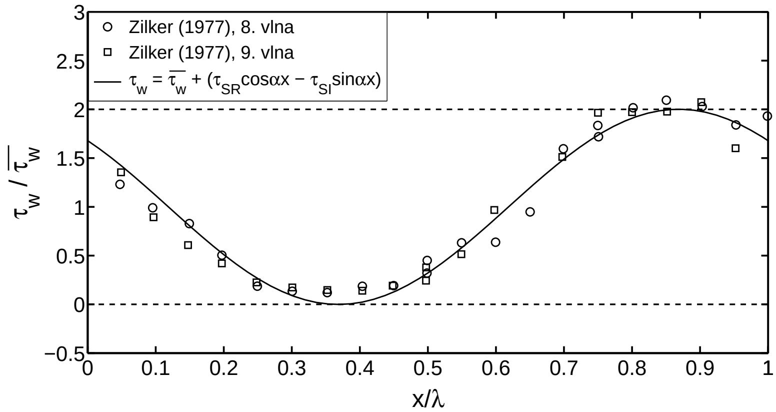
$$\alpha^{+} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\nu}{u_\tau}, \tag{5.29}$$

amplituda smykového napětí $|\widehat{\tau}|$ je lineární funkcí a^{+} a poměr bezrozměrné ku reálné amplitudě a^{+}/a je prostou funkcí α^{+}. S ohledem na tyto poznatky a související analýzy v literatuře budeme validaci modelů dále vyšetřovat s užitím právě uvedených bezrozměrných proměnných.

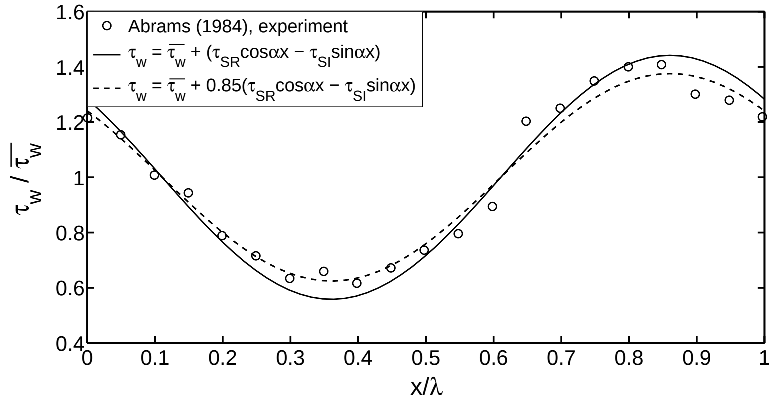
5.4.1. Validace simulací a modelů smykového napětí

Linearita a amplitudy

Oprávněnost použití harmonické funkce při modelování fluktuací smykového napětí demonstruje příslušný model v porovnání s měřením [156] na obrázku 5.20 pro $\lambda/a = 64$ a $a^+ = 12$. Z grafu je patrná velmi dobrá shoda harmonického modelu s experimentálními daty až na hodnoty smykového napětí v údolí vlny, přesněji od $x/\lambda = 0{,}25$ do $x/\lambda = 0{,}45$, v důsledku poněkud plochého průběhu naměřených hodnot. Poznamenejme pro zajímavost, že za podmínek definovaných blíže v popisku obrázku je amplituda smykového napětí právě rovna jeho průměrné hodnotě, jak dokládá čárkovaná čára v grafu.



Obrázek 5.20: Srovnání modelu smykového napětí s měřením Zilker (1977) [156]. Vykresleno pro $H{=}\lambda/2$, $\lambda/a{=}64$, $Re{=}6400$, $\alpha^+{=}0{,}0079$ a $a^+{=}12$.



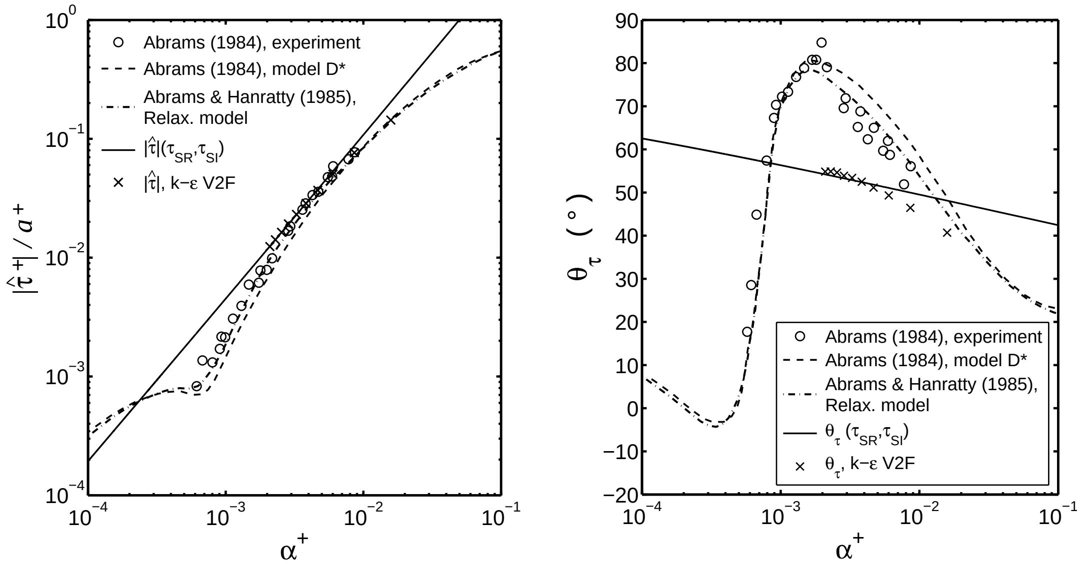
Obrázek 5.21: Srovnání modelu smykového napětí s měřením Abrams (1984) [1]. Vykresleno pro $H{=}\lambda$, $\lambda/a{=}142{,}86$, $Re{=}13\,360$, $\alpha^+{=}0{,}0082$ a $a^+{=}5$.

Průběh smykového napětí na obrázku 5.21 pro plošší zvlnění povrchu ($\lambda/a = 142{,}86$) a menší rychlost proudění ($a^+ = 5$), potvrzuje harmonický průběh fluktuací i deklarované odchylky modelu od CFD dat. Jak plyne z analýzy na základě obrázku 5.19, amplitudy fluktuací smykového napětí jsou nadhodnoceny asi o 15 % vůči CFD výsledkům pro odpovídající podmínky. Jestliže je tedy amplituda výchylky na obrázku 5.21 vynásobena konstantou 0,85, je predikce měření sestaveným algebraickým modelem velmi přesná. Pro validaci výchylek smykového napětí a tlaků byly sestaveny bezrozměrné veličiny definované vztahy (5.30) a (5.31).

$$|\widehat{\tau}^+| = \frac{|\widehat{\tau}|}{\rho {u_\tau}^2} = \frac{|\widehat{\tau}|}{\tau_\mathrm{w}} \tag{5.30}$$

$$|\widehat{P}^{+}| = \frac{|\widehat{P}|}{\rho {u_\tau}^2} = \frac{|\widehat{P}|}{\tau_{\mathrm{w}}} \tag{5.31}$$

Bezrozměrné amplitudy výchylek smykového napětí normalizované bezrozměrnou amplitudou a^+ a příslušná fázová posunutí θ_τ v závislosti na bezrozměrném vlnovém čísle α^+ jsou zachyceny na obrázku 5.22 v porovnání s měřením a dvěma komplexními modely publikovanými v dizertační práci [1]. Příslušné experimenty byly provedeny pro $H=\lambda$ a $\lambda/a=142{,}86$. Jak lze nahlédnout z obrázku, náš model dává velmi dobrou shodu s experimentálními daty v rozmezí od $\alpha^+=0{,}0086$ do $\alpha^+=0{,}0023$. Pro uvedenou geometrickou konfiguraci tyto hodnoty odpovídají Reynoldsovým číslům od $Re=13\,000$ ($H=0{,}05\,\mathrm{m}$, $U_b=4\,\mathrm{m/s}$) do $Re=58\,000$ ($H=0{,}05\,\mathrm{m}$, $U_b=18\,\mathrm{m/s}$), které dobře reprezentují příslušné podmínky, za kterých byly provedeny simulace a konstrukce modelů. Predikce modelu v uvedeném intervalu se zdá být dokonce přesnější než predikce modelu D* resp. tzv. relaxačního modelu dle Abramse viz [1] resp. [2], které poněkud podhodnocují experimentální data. Je však třeba poznamenat, že náš model silně nadhodnocuje data mimo tento interval. V případě nízkých rychlostí ($\alpha^+>0{,}0086$) je tento výsledek konzistentní s obrázkem 5.19, který demonstruje nadhodnocení modelu vůči CFD řešení. Z obrázků 5.19 a 5.22 je zřejmé, že tento nesoulad je důsledkem konstrukce modelu z hlediska nejlepší shody s výsledky CFD simulací v okolí střední hodnoty Reynoldsových čísel simulovaného proudění. Obrázek 5.21 stejně jako shoda CFD výsledku pro nejvyšší hodnotu α^+ s modely Abramse, viz obr. 5.22, potvrzuje vysokou přesnost turbulentního modelu k-ϵ V2F při predikci amplitud fluktuací smykového napětí pro nízká Reynoldsova čísla (vysoké hodnoty α^+). Na druhé straně odvozený algebraický model stejně jako k-ϵ V2F nadhodnocuje naměřená data pro velké rychlosti proudění ($\alpha^+<0{,}0086$).



Obrázek 5.22: Porovnání modelů fluktuací smykového napětí (5.21) a (5.22) s měřením a modely viz Abrams (1984) [1] a Abrams & Hanratty (1985) [2]. Vykresleno pro $H=\lambda$, $\lambda/a=142{,}86$.

Fázová posunutí

Z grafu na pravé straně obrázku 5.22 vyplývá, že model k-ϵ V2F a tudíž také odvozený algebraický model selhávají při predikci fázového posunutí smykového napětí vůči povrchu vlny. Pík fázového posunutí se nachází v blízkosti $\alpha^+=0{,}002$, což je hodnota blízká hodnotě experimentálně zjištěné, ovšem fázová posunutí jsou silně podhodnocena na celém intervalu α^+.

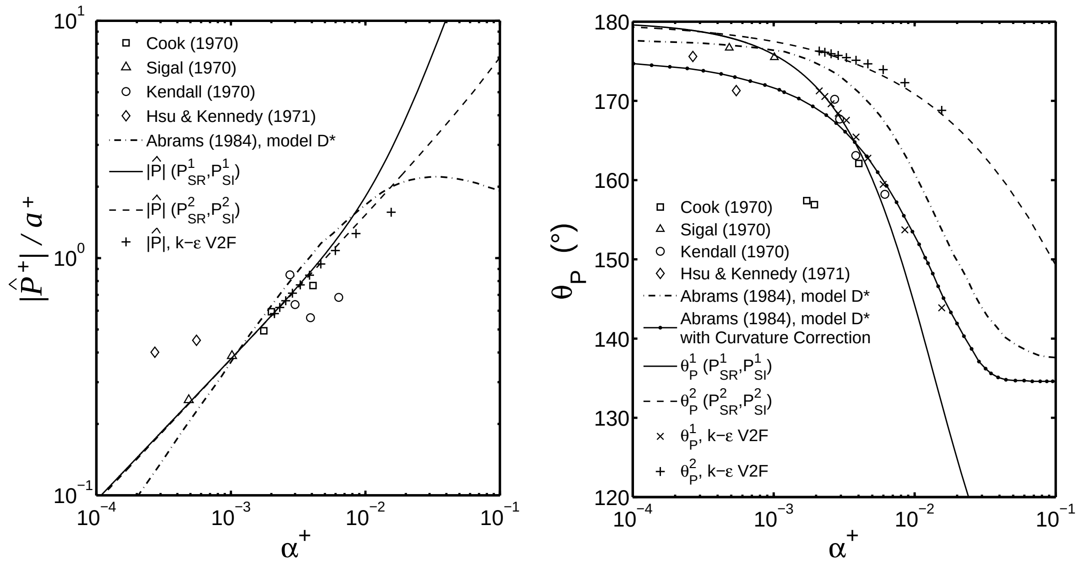
5.4.2. Validace simulací a modelů tlaku

Linearita a amplitudy

Tlakové profily studoval Zilker a kol. [156] pomocí experimentů pro $\lambda/a = 40$ a Reynoldsova čísla od 5650 do 30 000, neboť předchozí měření dokládala lineární závislost pro $\lambda/a > 40$. Výsledky experimentů potvrdily, že všechny naměřené profily mohou být aproximovány harmonickou funkcí. Tento závěr je konzistentní s výsledky CFD simulací, jak je demonstrováno výraznými odchylkami složek P_{SR} a P_{SI} harmonického modelu od hodnot získaných simulacemi pro $\lambda/a < 40$.

Bezrozměrné amplitudy tlakových fluktuací $|\widehat{P}^{+}|$ normalizované amplitudou a^{+} a korespondující fázová posunutí θ_{P} v závislosti na bezrozměrném vlnovém čísle α^{+} jsou zachyceny na obrázku 5.23 v porovnání s modelem D* [1] a měřeními pro $\lambda/a = 32$ viz [79], $\lambda/a = 36$ viz [124], $\lambda/a = 45$ a $\lambda/a = 90$ viz [68] a pro $\lambda/a = 10$ až $\lambda/a = 64$ viz [35]. V případě posledních dvou zdrojů jsou však bohužel neznámé použité konkrétní poměry λ/a příslušné k naměřeným hodnotám na obrázku a stejně tak není známa přesná konfigurace, pro kterou jsou vykresleny průběhy tlaku dle uvedeného modelu D*. S ohledem na převažující hodnoty λ/a byly naše výsledky vykresleny pro $H = \lambda$ a $\lambda/a = 60$.

Vzhledem k tomu, že měření Kendall [79] nejsou zcela konzistentní, zdá se být významnou výborná shoda našeho modelu s experimenty Sigal [124] a Cook [35]. Naše predikce naměřených hodnot je dokonce lepší než výstupy modelu D*. Měření autorů Hsu a Kennedy [68] byla prováděna na stěně trubky na rozdíl od ostatních experimentů, čímž lze vysvětlit jejich nekonzistenci se zbylými daty.



Obrázek 5.23: Porovnání modelů fluktuací tlaku (5.15)–(5.18) s modely typu D* viz Abrams (1984) [1] a měřeními viz Kendall [79], Sigal [124], Hsu & Kennedy [68] a Cook [35].

Z obrázku vyplývá, že modely tlakových fluktuací $\widehat{P}(P^{1}_{\mathrm{SR}}, P^{1}_{\mathrm{SI}})$ resp. $\widehat{P}(P^{2}_{\mathrm{SR}}, P^{2}_{\mathrm{SI}})$ jsou dobře použitelné pro podmínky odpovídající hodnotám $\alpha^{+} < 0{,}006$ resp. $\alpha^{+} < 0{,}01$. Pro vyšší α^{+} rozdíly mezi modely a CFD daty narůstají z důvodů uvedených výše v případě smykového napětí, tj. konstrukce modelu s ohledem na střední hodnotu příslušných Reynoldsových čísel.

Fázová posunutí

Modely fázových posunutí tlaku založené na P^{1}_{SR} a P^{1}_{SI} dobře souhlasí s měřeními [79], [124] a částečně [35], kteréžto nejsou konzistentní v tomto případě. Měření [68] jsou opět poněkud vychýlená. Modely založené na P_{SR}^2 a P_{SI}^2 nevystihují naměřená data příliš úspěšně, což však není relevantní vzhledem ke specifickému určení fázového posunutí, který jistě nebyl použit autory uvedených experimentů. Vzhledem k tomu, že model D* nadhodnocuje měření až na výsledky [124], provedl Abrams korekturu modelu specifikovanou blíže v dizertační práci [1]. Nicméně zdá se, že tento nový model predikuje lépe spíše konfigurace s vyšším α^+, jak dokládají odchylky od měření [124] a k-ϵ V2F výsledků. Zatímco model θ_{P}^2 dobře koresponduje s CFD daty v celém rozsahu α^+, model θ_{P}^1 vystihuje CFD výsledky pro $\alpha^+ < 0{,}006$, což je v souladu s charakterem modelu amplitud uvedeným výše.

5.5 Shrnutí

- Uvedené algebraické modely byly založeny na interpolaci výsledků stacionárních numerických simulací spočtených pro výše specifikované konfigurace výšky kanálu H, poměru délky ku amplitudě vlny λ/a a střední rychlosti U_b.

- Z porovnání průběhů tlaků a smykového napětí jakožto rychlostních profilů spočtených pro vybrané turbulentní modely s DNS výsledky byla ověřena použitelnost nadále používaného modelu k-ϵ V2F. Výpočtová síť byla vytvořena s ohledem na poznatek, že hodnoty pozorovaných veličin se liší velmi málo, pokud maximální hodnota y^+_{wall} je nižší než 0,8.

- Z analýzy sil působících na zvlněný povrch v důsledku proudícího plynu vyplývá, že celkové smykové napětí i tlak působící na vlnu rostou s rychlostí proudění a amplitudou vlny. Pro vlny s poměrem λ/a větším než 25 až 30 (v závislosti na rychlosti proudění) je pro působení v x-ovém směru dominující smykové napětí. V y-ovém směru jsou dominujícími síly tlakové pro všechny vlnové délky. S ohledem na význam fluktuací působících napětí pro nestabilitu kapalného filmu byly dále studovány modely amplitud příslušných napětí v závislosti na geometrických parametrech a rychlosti proudění vzduchu.

- Algebraické modely fluktuací smykového napětí a tlaku byly sestaveny pomocí lineární regrese a empirického fitování amplitudových složek P_{SR}, P_{SI}, τ_{SR} a τ_{SI} získaných z numerických simulací. Z porovnání výsledných modelů s původními CFD daty vyplývá, že navržené multiplikativní modely hledaných veličin jsou dobře použitelné v definovaných intervalech geometrických a fyzikálních parametrů.

- Relativní odchylky modelů od CFD dat jsou menší než 10 % pro libovolnou výšku kanálu v daném rozmezí, jestliže rychlost U_b je větší než 6 m/s a poměr λ/a vyšší než 50.

- Neshoda navržených modelů s experimentálními daty pro nízké rychlosti je způsobena konstrukcí modelu s ohledem na aproximaci CFD dat v okolí střední hodnoty Reynoldsových čísel. Modely zkonstruované pro nízké rychlosti jsou uvedeny v následující kapitole. Jejich porovnání s měřeními a jinými modely jsou zachycena na obrázcích C.4 a C.5 v příloze.

- S ohledem na deformace tlakového průběhu pozorované při nízkých Reynoldsových číslech a poměrech λ/a, bylo definováno fázové posunutí θ_{P}^1 jako fázové posunutí maxima tlaku vůči vrcholu vlny a fázové posunutí θ_{P}^2 jako fázové posunutí minima tlaku vůči údolí vlny. Rozdíl $\theta_{\mathrm{P}}^1 - \theta_{\mathrm{P}}^2$ klesá s rostoucí rychlostí U_b a klesajícím poměrem λ/a.

- Amplitudy fluktuací tlaku a smykového napětí rostou se zvyšující se rychlostí U_b a klesají přibližně nepřímo úměrně s rostoucím poměrem λ/a a slabě s rostoucí výškou kanálu H.

- V závislosti na U_b, je amplituda smykového napětí $|\widehat{\tau}|$ asi 10krát (pro $U_b = 2$ m/s) až 50krát (pro $U_b = 20$ m/s) menší než amplituda tlakové fluktuace $|\widehat{P}|$.

- Modely byly validovány z hlediska předpokladu harmonického průběhu a z hlediska přesnosti predikce amplitud a fázového posunutí sledovaných veličin. Harmonický průběh byl potvrzen na základě experimentů pro $\lambda/a > 60$ a $a^+ < 27$ v případě smykového napětí a pro $\lambda/a > 40$ v případě tlakového průběhu [156].

- Průběh naměřeného smykového napětí, viz [1] a [156], je velmi dobře aproximován harmonickým modelem pro nízké amplitudy a^+. Model amplitud smykového napětí vykazuje výbornou shodu s experimentálními daty v rozmezí od $\alpha^+ = 0{,}0023$ do $\alpha^+ = 0{,}0086$.

- Výsledky použitého turbulentního modelu k-ϵ V2F vykazují pouze kvalitativní shodu s experimentálně zjištěným fázovým posunutím θ_τ smykového napětí vůči povrchu vlny. Odvozený algebraický model tudíž podhodnocuje fázová posunutí v celém rozsahu α^+.

- Predikce amplitud i fázového posunutí tlakových fluktuací je v souladu s experimenty pro $\alpha^+ < 0{,}006$. V tomto intervalu se zdají být dosažené výsledky dokonce v lepší shodě s měřeními než analytické modely publikované v [1], ačkoliv značný rozptyl a nedostatek experimentálních dat neumožňují průkazné srovnání.

Poznatky předcházející kapitoly lze shrnout konstatováním, že k-ϵ V2F turbulentní model dává velmi dobré výsledky při predikci tlakového průběhu nad zvlněným povrchem v širokém rozmezí podmínek, avšak predikce fázového posunutí smykového napětí je dobře predikována pouze v kvalitativním smyslu a model amplitud smykového napětí je omezen rychlostí proudění. S ohledem na velký poměr mezi amplitudou tlaku a smykového napětí lze nicméně predikci výsledných napětí působících na zvlněný povrch v daném rozmezí podmínek považovat za velmi dobrou. Odvozené algebraické modely tak mohou s výhodou jejich jednoduché implementace v numerických modelech nestabilit kapalného filmu představovat možnou alternativu k dosud publikovaným poměrně složitým přístupům.

KAPITOLA 6

Model iniciace nestabilit

V nadcházející kapitole uvedeme ukázku konkrétního modelu nestabilit kapalného filmu. S ohledem na náročnost matematického řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice zejména v simultánní formulaci byl zvolen přístup založený na metodě integrace pohybových rovnic. Odpovídající vedoucí rovnice odvozené pro analýzu iniciace počáteční nestability, tj. dvoudimenzionálních vln, budeme čerpat z [60]. Příslušné amplitudy fluktuací tlaku a smykového napětí budou modelovány pomocí algebraických modelů odvozených v předcházející kapitole.

6.1 Vedoucí rovnice

Aplikace lineární analýzy na pohybové rovnice v integrálním tvaru vede v případě filmů o větších tloušťkách, tj. jestliže $(\alpha\overline{h})(\overline{h}c_{\mathrm{R}}/\nu_{\mathrm{L}})$ je velké číslo, a za dalších předpokladů, blíže viz [60], na soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\alpha(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c)\coth(\alpha\overline{h}) - \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c) = G \\ + \frac{\mathrm{i}\widehat{\tau}_{\mathrm{w}}}{\rho_{\mathrm{L}}}\left[\coth(\alpha\overline{h}) - \frac{1}{\alpha(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c)}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}\right] \\ - (\alpha\overline{h})^{1/2}\left(-\mathrm{i}\frac{\overline{h}c}{\nu_{\mathrm{L}}}\right)\alpha(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c)^2[1-\coth^2(\alpha\overline{h})] \\ + 4\mathrm{i}\alpha\overline{h}\left[\frac{\overline{h}(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c)}{\nu_{\mathrm{L}}}\right]^{-1}\alpha(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c)^2\left[\coth(\alpha\overline{h}) - \frac{1}{\alpha(\overline{u}_{\mathrm{s}}-c)}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}\right],\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$G = \frac{\widehat{P}_{\mathrm{w}}}{\rho_{\mathrm{L}}} + \frac{\sigma\alpha^2}{\rho_{\mathrm{L}}} + g\,. \tag{6.2}$$

Rovnice pro fázovou rychlost c_{R} a rychlost růstu fluktuací c_{I} lze obdržet separací reálné a imaginární části rovnic (6.1) a (6.2) a zanedbáním výrazů vyšších řádů vzhledem ke členu $(\overline{h}c_{\mathrm{R}}/\nu_{\mathrm{L}})$. Výsledné rovnice mají dle [60] tvar

$$\begin{aligned}0 = (c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})^2 + \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})\frac{\tanh(\alpha\overline{h})}{\alpha} - \left(\frac{P_{\mathrm{WR}}}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}} + \frac{\alpha\sigma}{\rho_{\mathrm{L}}} + \frac{g}{\alpha}\right)\tanh(\alpha\overline{h}) + \frac{\tau_{\mathrm{WI}}}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}} \\ - {c_{\mathrm{I}}}^2 + \frac{\tanh(\alpha\overline{h})}{\alpha}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}\frac{\tau_{\mathrm{WI}}}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}}\left[\frac{c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}}}{(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})^2+{c_{\mathrm{I}}}^2} - \frac{\tau_{\mathrm{WR}}}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}}\frac{c_{\mathrm{I}}}{(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})^2+{c_{\mathrm{I}}}^2}\right],\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_{\mathrm{WI}}}{\rho_{\mathrm{L}}}+\frac{\tau_{\mathrm{WR}}}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}}\left[\alpha\coth(\alpha\overline{h})+\frac{c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}}}{(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})^2+c_{\mathrm{I}}^2}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}\right]+\frac{\tau_{\mathrm{WI}}}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}}\frac{c_{\mathrm{I}}}{(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})^2+c_{\mathrm{I}}^2}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}= \\
&\quad 4\alpha^2\nu_{\mathrm{L}}(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})\coth(\alpha\overline{h})+4\alpha\nu_{\mathrm{L}}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}+2(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})c_{\mathrm{I}}\alpha\coth(\alpha\overline{h})+c_{\mathrm{I}}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h} \\
&\quad +\frac{{\nu_{\mathrm{L}}}^{1/2}\alpha^{3/2}(\coth(\alpha\overline{h})-1){c_{\mathrm{R}}}^{1/2}}{[2({c_{\mathrm{R}}}^2+{c_{\mathrm{I}}}^2)]^{1/2}}\Big\{\left[(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})^2-{c_{\mathrm{I}}}^2\right](\cos\theta-\sin\theta) \\
&\quad +(c_{\mathrm{R}}-\overline{u}_{\mathrm{s}})2c_{\mathrm{I}}(\cos\theta+\sin\theta)\Big\},
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

$$
\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{c_{\mathrm{I}}}{c_{\mathrm{R}}}\,. \tag{6.5}
$$

6.2 Pomocné modely

Vyřešení rovnic (6.3)–(6.5) vyžaduje doplnění adekvátním modelem rychlosti filmu na hladině $\overline{u}_{\mathrm{s}}$, derivace rychlostního profilu $\mathrm{d}U/\mathrm{d}y|_{y=h}$ a modely fluktuací tlaku a smykového napětí P_{WR}, P_{WI}, τ_{WR} a τ_{WI}.

6.2.1. Rychlost filmu na hladině

Za předpokladu lineárního profilu kapalného filmu je derivace rychlosti rovna podílu $\overline{u}_{\mathrm{s}}/\overline{h}$ a smykové napětí na rozhraní lze aproximovat vztahem

$$
\tau_{\mathrm{s}}=\mu_{\mathrm{L}}\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}\cong\frac{\overline{u}_{\mathrm{s}}}{\overline{h}}\,. \tag{6.6}
$$

S uvážením mocninného rychlostního profilu (3.28) a za předpokladu symetrie profilu vzhledem k ose kanálu je maximální rychlost vzduchu v kanále dle [36] přibližně dána vztahem

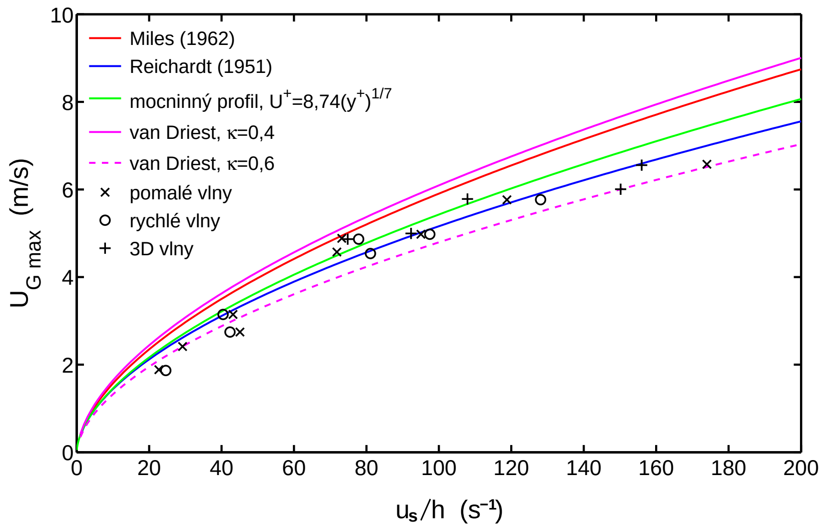
$$
\frac{U_{\mathrm{Gmax}}}{u_\tau}=8{,}74\left(\frac{Hu_\tau}{2\nu_{\mathrm{G}}}\right)^{1/7}. \tag{6.7}
$$

Substitucí (6.7) pro třecí rychlost $u_\tau=\sqrt{\tau_{\mathrm{s}}/\rho_{\mathrm{G}}}$ do (6.6) lze vyjádřit závislost povrchové rychlosti filmu na maximální rychlosti plynu a tloušťce filmu ve tvaru

$$
\overline{u}_{\mathrm{s}}=\left(\frac{U}{8{,}74}\right)^{7/4}\left(\frac{2\nu_{\mathrm{G}}}{H}\right)^{1/4}\frac{\overline{h}\rho_{\mathrm{G}}}{\mu_{\mathrm{L}}}\,. \tag{6.8}
$$

Predikce rychlosti filmu na hladině v závislosti na tloušťce filmu a maximální rychlosti proudění vzduchu odvozené pro Milesův rychlostní profil (3.26) pro δ_s^+=6, Reichardtův profil (3.29), mocninný profil (3.28) a van Driestův profil (3.31) pro κ=0,4 a κ=0,6 v porovnání s měřením v kanále o výšce 2,54 cm viz [36] je zachycena na obrázku 6.1 pro $\rho_{\mathrm{L}}=1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu_{\mathrm{L}}=0{,}001\,\mathrm{Pa\cdot s}$, $\rho_{\mathrm{G}}=1{,}25\,\mathrm{kg/m^3}$ a $\nu_{\mathrm{G}}=1{,}46\cdot10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$. Maximální rychlost vzduchu byla pro účely obrázku předpokládána ve středu kanálu ($y=B/2$) bez ohledu na výšku filmu. Značení vln na obrázku koresponduje přechodům mezi typy nestabilit na obrázcích 3.1 a 3.2 na straně 24. Z obrázku lze nahlédnout, že van Driestův profil pro uvedené konstanty κ ohraničuje predikci pomocí ostatních profilů. Van Driestův profil pro κ=0,6 nejlépe vystihuje naměřená data pro nízké hodnoty poměru u_{s}/h, avšak odchyluje se výrazněji pro poměry vyšší. Nejlepší shody s experimentem je dosaženo pro mocninný a Reichardtův rychlostní profil zejména kolem střední hodnoty u_{s}/h.

Z analýzy dokumentované obrázkem 6.1 plyne, že vzhledem ke specifickému poklesu maximální rychlosti plynu pro nízké a vyšší hodnoty korespondujícího poměru u_s/h, nelze za předpokladu lineárního profilu kapalného filmu žádným modelem založeným na logaritmickém rychlostním profilu plynné vrstvy precizně popsat závislost rychlosti filmu na hladině na maximální rychlosti plynu v širokém rozsahu poměrů u_s/h. Tato skutečnost je zřejmě zapřičiněná buď asymetrií rychlostního profilu plynu vzhledem k ose vzdušného proudu nebo neadekvátností předpokladu linearity rychlostního profilu kapalného filmu. Vzhledem k rozptylu naměřených hodnot a podobnému průběhu sledované závislosti pro různé typy vln lze však naznačený přístup považovat za dobře použitelný. Poznamenejme dále, že hodnoty y^+ korespondující problému simulovanému na obrázku 6.1 jsou v případě vzdušné vrstvy omezeny shora přibližně hodnotou $y^+ = 300$. Vzhledem k tomu, že odchylky mocninného a logaritmického profilu jsou významné až pro $y^+ > 400$, viz odstavec 3.4.2, budeme v dalším rychlost filmu na hladině modelovat vztahem (6.8).



Obrázek 6.1: Predikce rychlosti filmu na hladině v závislosti na tloušťce filmu a maximální rychlosti proudění vzduchu odvozené pro rychlostní profily (3.26) pro δ_s^+=6, (3.29), (3.28) a (3.31) pro κ=0,4 a κ=0,6 v porovnání s měřením v kanále o výšce 2,54 cm viz [36].

6.2.2. Modely smykových a tlakových sil

Použití příslušných modelů smykových a tlakových fluktuací volí Hanratty [60] dle vlivu horní stěny kanálu a vlnové délky předpokládaných nestabilit. Pro krátké vlny navrhuje model D*, viz odstavec 4.4.1, a pro dlouhé vlny aplikaci vztahů založených na smykovém koeficientu, viz odstavec 4.4.2. S ohledem na uvažovanou testovací konfiguraci problému stojící na pomezí mezi oběma typy vln, budeme s výhodou aplikovat algebraické modely odvozené na základě CFD simulací diskutovaných v kapitole 5. Příslušné modely smykových a tlakových fluktuací je však třeba konstruovat s přihlédnutím k rozsahu předpokládaných kritických rychlostí. Pomocí postupů uvedených v předcházející kapitole byly sestaveny níže uvedené modely (6.9)–(6.12) fluktuací smykového napětí a tlaku pro nízké rychlosti proudění vzduchu. Porovnání modelů s experimenty a modely uváděnými v literatuře je zachyceno na obrázcích C.4 a C.5 v příloze C.

$$\tau_\mathrm{SR} = 0{,}214 H^{-0{,}219} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-1{,}080} {U_b}^{1{,}530} \tag{6.9}$$

$$\tau_\mathrm{SI} = 0{,}070 H^{-0{,}263} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-0{,}920} {U_b}^{1{,}720} \tag{6.10}$$

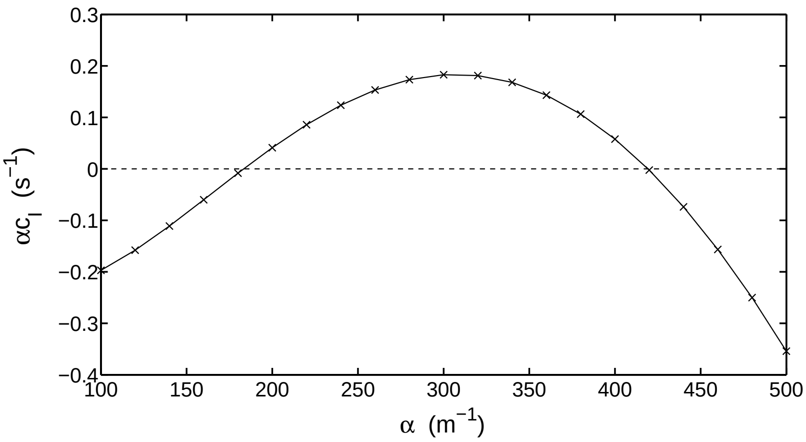
$$P_{\mathrm{SR}} = -0{,}594 H^{-0{,}357} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-0{,}914} U_b{}^{2{,}240} \tag{6.11}$$

$$P_{\mathrm{SI}} = 21{,}532 H^{-0{,}124} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-1{,}552} U_b{}^{1{,}550} \tag{6.12}$$

6.3 Řešení a diskuse

Řešení rovnic (6.3)–(6.5) definuje rychlost růstu vln v závislosti na vlnovém čísle α, tloušťce filmu h, výšce plynné vrstvy H, rychlosti plynu U_b a fyzikálních parametrech kapaliny a plynu.

Model definovaný uvedenými rovnicemi bohužel není uzavřený, neboť vyčíslení silových účinků plynu, tj. amplitud P_{WR}, P_{WI}, τ_{WR} a τ_{WI}, pomocí modelů (6.11)–(6.10) vyžaduje určení amplitudy vln. Dle práce [113] je poměr $a/\overline{h}$ menší než 0,5 pro $Re_{\mathrm{G}} < 10^4$ a tento poměr se s klesajícím Reynoldsových číslem snižuje. Pro určení oblasti nestability bylo proto nastaveno $a/\overline{h} = 1/3$.

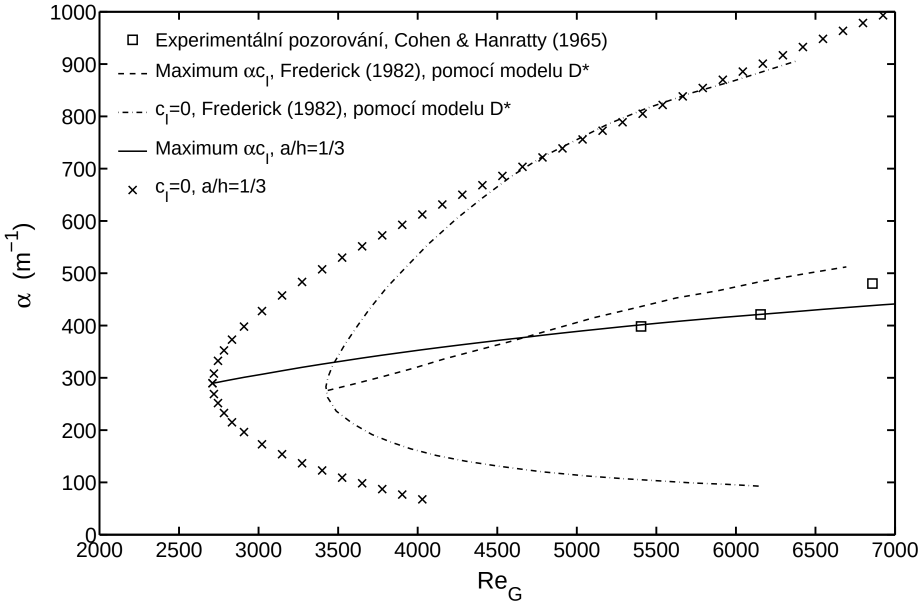


Obrázek 6.2: Závislost rychlosti růstu fluktuací na vlnovém čísle. Vykresleno pro B=25,4 mm, $\overline{h}$=4,5 mm, Re_{G}=3000, μ_{L}=3,9 mPa·s, ν_{G}=1,66·10^5 m^{2}s^{-1}.

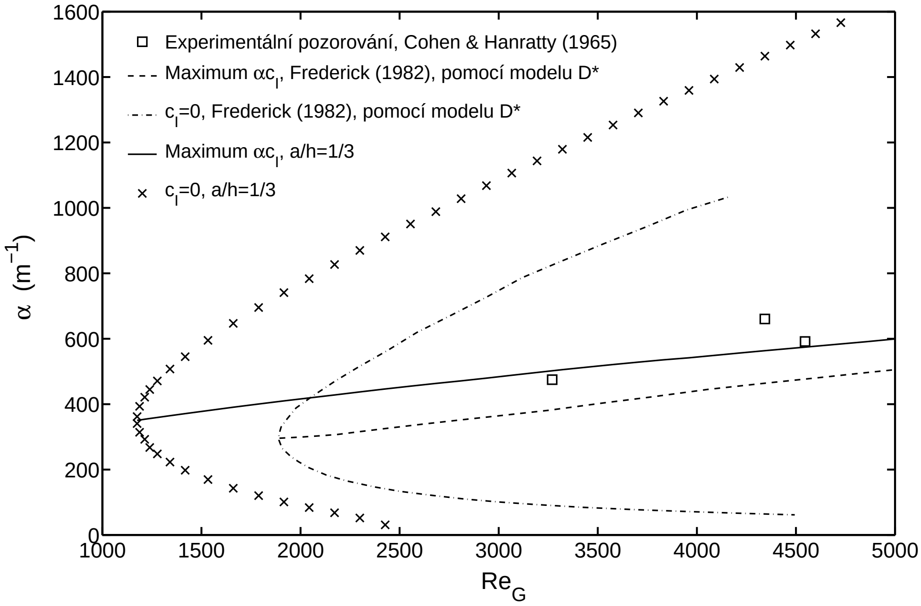
Ze závislosti rychlosti růstu fluktuací na vlnovém čísle, viz obr. 6.2, lze jednoduše určit vlnovou délku indukující nejrychleji rostoucí perturbace. Jak lze nahlédnout z obrázků 6.3 a 6.4, tato vlnová délka je přibližně rovna vlnovým délkám reálných vln pozorovaných experimentálně.

Z porovnání čar vlnových čísel s maximální rychlostí růstu nestabilit, které spočetl Frederick [51] pomocí modelu D* [1], s výsledky našeho modelu vyplývá, že pro zvolený poměr $\alpha/\overline{h}$ sestavený model lépe vystihuje měření Cohen a Hanratty [33] pro obě konfigurace specifikované podrobněji pod obrázky. Z obrázku je ovšem rovněž patrné, že oblasti nestability definované podmínkou $\alpha c_{\mathrm{I}} > 0$ jsou výrazně rozlehlejší a kritická Reynoldsova čísla resp. kritické rychlosti plynu jsou v obou případech podhodnoceny. Tato skutečnost může být vysvětlena předpokladem, že pro tak nízká Reynoldsova čísla, kdy dochází k iniciaci nestabilit, není amplituda vlny zdaleka rovna předepsané hodnotě $\overline{h}/3$. Vzhledem k tomu, že s rostoucí rychlostí plynu dochází k růstu amplitud i změně poměru $a/\overline{h}$, nelze zřejmě očekávat současně dobrou predikci kritického Reynoldsova čísla i vlnových délek pozorovaných vln pro konstantní hodnotu $a/\overline{h}$.

S ohledem na právě uvedený předpoklad byl výpočet kritických rychlostí proveden pro více konfigurací poměru amplitudy ku tloušťce filmu. Velmi dobré shody s naměřenými hodnotami publikovanými v [33] bylo dosaženo pro hodnotu $a/\overline{h} = 1/8$, jak dokumentuje obrázek 6.5.



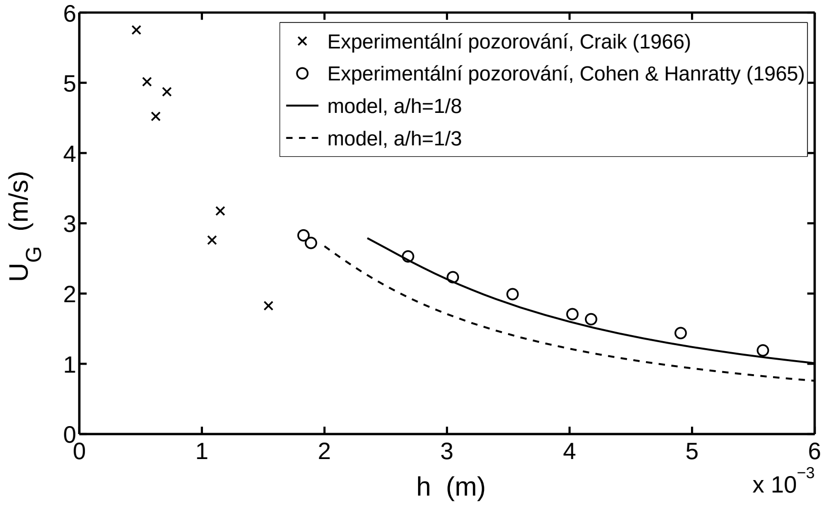
Obrázek 6.3: Porovnání oblasti stability a vlnových délek maximálního růstu s řešením viz Frederick (1982) [51] založeném na modelu D* [1] a měřením viz Cohen & Hanratty [33]. Vykresleno pro B=25,4 mm, $\overline{h}$=4,5 mm, Re_{G}=3000, μ_{L}=3,9 mPa·s a ν_{G}=1,66·10^5 m^{2}s^{-1}.



Obrázek 6.4: Porovnání oblasti stability a vlnových délek maximálního růstu s řešením viz Frederick (1982) [51] založeném na modelu D* [1] a měřením viz Cohen & Hanratty [33]. Vykresleno pro B=25,4 mm, $\overline{h}$=4,9 mm, Re_{G}=3000, μ_{L}=0,9 mPa·s a ν_{G}=1,60·10^5 m^{2}s^{-1}.

Poznamenejme, že sestavený model je pro konfiguraci specifikovanou pod obrázkem použitelný pouze pro tloušťky filmu větší než přibližně 2,3 mm z důvodu předpokladů pro odvození vedoucích rovnic.

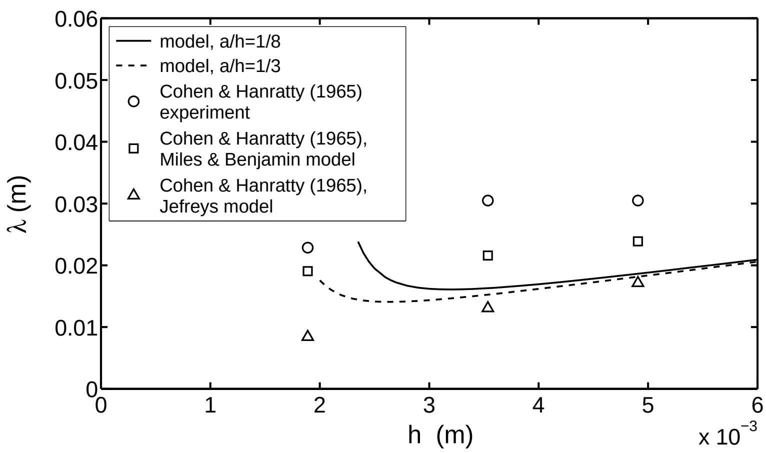
Z obrázku 6.5 lze dále nahlédnout, že hodnoty kritických rychlostí pro iniciaci dvoudimenzionálních vln naměřených autory Cohen a Hanratty [33] jsou poněkud nekonzistentní s podmínkami vzniku tzv. rychlých vln, které pozoroval Craik [36], viz obrázky (3.1) a (3.2), ačkoliv oba experimenty byly provedeny v kanále o stejném průřezu i materiálu povrchových stěn.



Obrázek 6.5: Predikce kritických rychlostí pro iniciaci nestabilit v porovnání s experimentálním měřením viz Cohen & Hanratty (1695) [33] a Craik (1966) [36]. B=25,4 mm, ρ_{L}=1000 kg/m^3, μ_{L}=0,92 mPa·s, ρ_{G}=1,14 kg/m^3, ν_{G}=1,60·10^5 m^{2}s^{-1}.

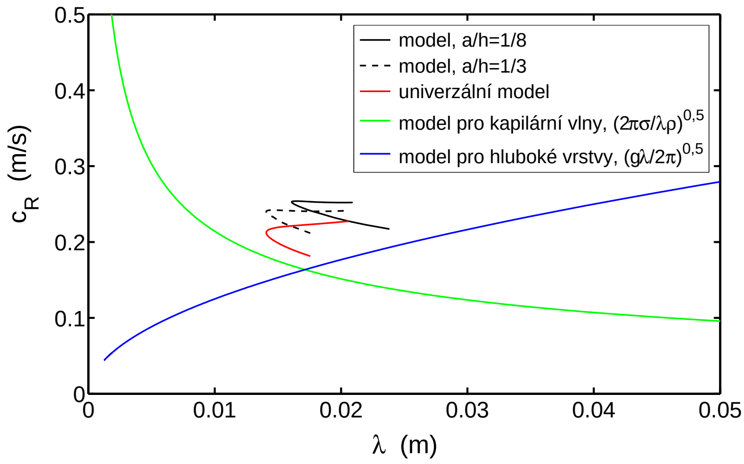
Rozpor mezi výsledky je navíc významnější vzhledem k faktu, že Craik měřil maximální rychlosti dosažené v kanále, zatímco Cohen a Hanratty uvádějí rychlost U_b. Možným vysvětlením zůstává vliv subjektu při identifikaci nástupu dvoudimenzionálních vln malých amplitud.

Vlnové délky korespondující kritickým podmínkám na obrázku 6.5 jsou zachyceny v grafu 6.6. Nabývají hodnot od 1,7 do 2,4 cm, což je přibližně v souladu s pozorováním i modely pro smykové a tlakové síly spočtené na základě Milesovy-Benjaminovy [19], [98] a Jeffresovy hypotézy [75], viz Cohen a Hanratty [33]. Nárůst hodnot s klesající tloušťkou filmu pozorovatelný na obrázku je však v rozporu s vlnovými délkami 1–2 cm které u tenkých filmů ($\overline{h} < 1{,}6$ mm) pozoroval Craik a model proto není vodný pro určení vlnových délek počátečních nestabilit tenkých filmů, což je ovšem v souladu s výše uvedeným omezením. Vlnové délky 1–2 cm dvoudimenzionálních vln pro větší rychlosti plynu nicméně souhlasí s naměřenými hodnotami na obrázcích 6.3 a 6.4. Z uvedeného vyplývá, že validace predikce vlnových délek je obtížná, neboť dochází k jejich zkracování s rostoucím Re_{G} a není zřejmé, ve které fázi vývoje vln dochází k odečtu hodnot. Preciznější validaci rovněž omezuje obtížné určení přesných hodnot při vlastním měření.



Obrázek 6.6: Závislost vlnových délek počátečních nestabilit na tloušťce filmu v porovnání s experimenty a modely viz Cohen & Hanratty (1965) [33].

Fázová rychlost je zachycena na obrázku 6.7 v porovnání s analytickými modely diskutovanými v odstavci 2.2.1. Fázová rychlost je přibližně rovna 0,25 m/s, což je v dobré shodě s univerzálním analytickým modelem (2.13) zahrnujícím vliv povrchového napětí i hodnotou 0,3 m/s pozorovanou experimentálně [33].



Obrázek 6.7: Závislost fázové rychlosti na vlnové délce v porovnání s analytickým vztahem (2.13). Vykresleno pro ρ_L=1000 kg/m^3, σ=0,73.

6.4 Shrnutí

- Vedoucí rovnice modelu iniciace nestabilit vycházejí z integrálního tvaru pohybových rovnic za předpokladu lineárního profilu kapalného filmu.
- Mocninný rychlostní profil byl použit pro určení rychlosti kapaliny na hladině filmu.
- Smykové a tlakové účinky proudícího plynu byly odvozeny na základě výsledků numerických simulací pro adekvátní rychlosti proudění.
- S ohledem na omezení vyplývající z předpokladů pro odvození rovnic, je výsledný model použitelný pouze pro filmy s tloušťkou přesahující asi 2 mm.
- V závislosti na tloušťce filmu, výšce kanálu a fyzikálních vlastnostech tekutin lze pomocí modelu predikovat kritickou rychlost, vlnovou délku a fázovou rychlost počátečních nestabilit, které při dalším růstu rychlosti plynu vedou ke vzniku dvoudimenzionálních vln.
- Pro určení silových účinků je třeba specifikovat poměr amplitudy ku tloušťce filmu.
- Vlnové délky spočtené za předpokladu $a/\overline{h} = 1/3$ jsou ve velmi dobré shodě s pozorováním dvoudimenzionálních vln.
- Kritické rychlosti plynu vedoucí k iniciaci počátečních nestabilit vykazují výbornou shodu s měřením pro $a/\overline{h} = 1/8$.
- Fázové rychlosti vln odpovídají analytickému vztahu i experimentálnímu pozorování.

KAPITOLA 7

Atomizace stěnového kapalného filmu

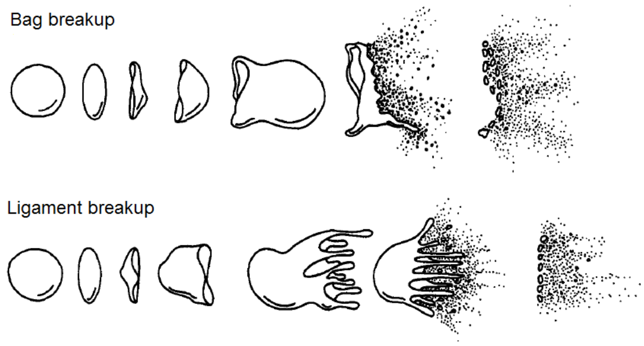
Atomizace kapalin představuje komplexní problém vyskytující se jako přírodní jev i v celé řadě technických aplikací. Lze jej pozorovat například při rozrušování vln na mořské hladině, je významnou součástí procesu přípravy paliva ve spalovacích motorech [46] nebo aerosolových lékových forem. Jako nežádoucí jev se vyskytuje například v potrubních systémech turbínových strojů [81].

Atomizace kapaliny z povrchu stěnového filmu představuje závěrečný typ nestability pozorovaný pro dostatečně velké rychlosti vnějšího plynného proudu ve dvou základních geometrických konfiguracích. V případě potrubí malého průřezu může být atomizace příčinou případně součástí anulárního typu proudění [9]. Při experimentech nestabilit filmu v kanálu byla atomizace pozorována v souvislosti se vznikem solitárních vln, které se realizují pro dostatečně nízké tloušťky filmu [113]. V souladu s předchozí částí disertační práce bude v této kapitole diskutována zejména atomizace stěnového kapalného filmu na rovném povrchu. Toto vymezení umožňuje při řešení vycházet ze standardních postupů studovaných v předchozím textu v souvislosti s predikcí hydrodynamické nestability předcházející atomizaci, ale současně také odpovídá aplikacím, ve kterých lze zakřivení stěny s ohledem na nízkou tloušťku filmu zanedbat.

7.1 Experimentální poznatky

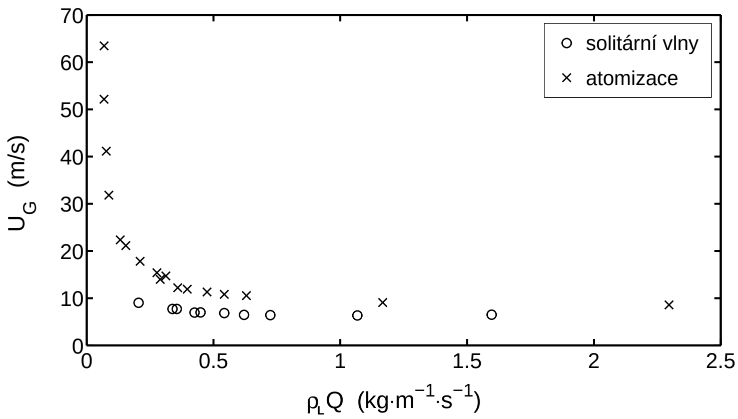
Jedny z prvních vizuálních poznatků týkající se atomizace tenkého filmu na rovné desce na základě experimentů podávají van Rossum [118] a Woodmansee a Hanratty [151]. Hodnoty průtoku kapalného filmu a rychlosti vzduchu při pozorování solitárních vln a atomizace v horizontálním kanále jsou uvedeny na obrázku 7.2. Zaznamenané průběhy rychlostí naznačují souvislost mezi ustavením solitárních vln a atomizací při takových průtocích kapalného filmu, kdy může dojít ke vzniku solitárních vln, jak bylo diskutováno v podkapitole 3.1. Tato souvislost je potvrzena vizuálním pozorováním dějů na solitární vlně [151]. Jak bylo již předesláno v 3.1, při větších rychlostech plynu, než které jsou nutné ke vzniku solitárních vln, dochází na jejím vrcholu k tvorbě sekundárních vlnek (angl. ripples). Tyto vlnky jsou orientovány kolmo k ose kanálu, tj. směru šíření solitárních vln, jejich hřebeny jsou delší než vlnové délky. Při nadkritické rychlosti vnějšího proudu dochází k akceleraci vlnky a odtržení její střední části z povrchu filmu - *primární atomizaci* - za vzniku fragmentu tekutiny, který se následně v důsledku sil povrchového napětí zformuje v kapku nebo dále rozpadne procesem *sekundární atomizace*.

Dle Azzopardiho [14] s odkazem na dřívější pozorování ve vertikální trubici, viz [13], nastává při nižších průtocích obou fází tzv. *bag breakup*, kdy se kapka důsledkem proudu plynu deformuje a přetváří v plochý disk se silným okrajem. Další deformací se protahuje prostřední část disku až do rozpadu celého fragmentu. Z prostřední tenké části se atomizuje velké množství malých kapiček, zatímco ze silnějšího okraje méně větších kapek. Při vyšších rychlostech se fragment tekutiny odtržený ve formě tenkého provazce vzniklého z kapilární vlnky na povrchu solitární vlny nestačí zformovat a k sekundární atomizaci de facto dochází ještě před odtržením okrajových částí provazce z povrchu solitární vlny. S ohledem na tvar fragmentu se v tomto případě používá pojem *ligament breakup*. Model vymezení hranice mezi oběma jevy v závislosti na výšce vlny navrhnul Azzopardi [13]. Fotografický záznam jevů podávají např. články [24], [59], [155]. Schéma obou typů sekundární atomizace v případě kapky je uvedeno na obrázku 7.1.



Obrázek 7.1: Schéma sekundární atomizace kapky. Převzato z [14].

Z pozorování autorů v [59] vyplývá, že bag breakup mechanizmus se může realizovat přímo z povrchu filmu a nikoliv pouze jako proces sekundární atomizace z odtržené kapky, jak bylo uvedeno výše. Atomizace kapalného filmu je tedy poněkud složitější než modelové přiblížení předpokládající odtržení části harmonické vlny, viz např. Maroteaux a kol. [95].



Obrázek 7.2: Experimentální pozorování solitárních vln a atomizace v závislosti na rychlosti vzduchu a průtoku kapalného filmu. Měřeno v horizontálním kanále o výšce 2,54 cm viz [151].

Z mapy režimu vln na obrázku 3.3 vyplývá, že pro velká Reynoldsova čísla kapalného filmu jsou kritické rychlosti způsobující vznik solitárních vln jen málo závislé na změně výšky hladiny nebo průtoku. Graf na obrázku 7.2 dokládá, že totéž platí rovněž pro atomizaci filmu. Autoři v [151] uvádějí pro velké tloušťky filmu asymptoticky cca $U_{\mathrm{krit}} = 10{,}7$ m/s, tj. $Re_{\mathrm{G}} = 18\,000$ pro $B = 2{,}54$ cm. Srovnání s měřením [118] ($U_{\mathrm{krit}} = 18{,}0$ m/s, tj. $Re_{\mathrm{G}} = 180\,000$ pro $B = 14{,}99$ cm) poukazuje na skutečnost, že Reynoldsovo číslo plynného proudu není dostačující parametr pro kritické podmínky vzniku atomizace. Kritické rychlosti při atomizaci jsou ovlivněny poměrem tloušťky filmu vůči výšce kanálu, ačkoliv pro velmi tenké filmy tento poměr není již příliš podstatný [81]. Kritické rychlosti narůstají s povrchovým napětím, avšak na rozdíl od solitárních vln, viz podkapitolu 3.1, závislost na viskozitě kapalin nebyla pozorována [118].

Obdobně jako v případě solitárních vln kritické rychlosti narůstají s klesající tloušťkou filmu. Pro velmi tenké filmy (v experimentu Woodmansee a Hanratty [151] pro $\rho_L Q < 0{,}2$ kg/m s) již nedochází ke vzniku klasických solitárních vln a film se atomizuje současně se vznikem kapilárních vln. Kritická rychlost přitom dramaticky narůstá. Při průtoku nižším než 0,06 – 0,08 kg/m s nebylo již v daném experimentu dosaženo odtržení kapaliny z filmu.

7.2 Fyzikální mechanismus atomizace

Z uvedených experimentálních poznatků vyplývá přímá souvislost atomizace s nestabilitou kapalného filmu, zejména se vznikem solitárních vln. Je tedy zřejmé, že fyzikální princip atomizace souvisí s mechanismem destabilizace kapalného povrchu za vzniku vln. Podobně jako v případě experimentů je i v oblasti základů fyzikálních principů a predikce odtrhávání kapek z povrchu kapaliny významná práce [151]. Autoři ve shodě s principem růstu solitárních vln odůvodňují proces atomizace nerovnováhou mezi stabilizačním vlivem gravitace a povrchového napětí a destabilizačními vlivy tlakového propadu nad vrcholem vlny, viz obr. 3.5 v podkapitole 3.3. V principu se tedy jedná o stejný mechanismus, který způsobuje primární nestabilitu kapalného filmu a v některých případech autoři článků zjednodušeně hovoří o principu Kelvinovy-Helmholtzovy nestability.

Vzhledem k tomu, že klasická K-H teorie hydrodynamické nestability předpokladá pístový rychlostní profil proudícího vzduchu, je zřejmé, že dostatečně precizně nepostihuje fyzikální princip atomizace, zejména pro velké rychlosti, kdy narůstá význam smykových sil, jak bylo již uvedeno v části 3.3. Kim a Peterson [80] rozlišují tři typy mechanismu odtržení kapaliny z povrchu filmu v závislosti na významu smykových sil:

- V případě nízkých rychlostí plynu převažuje vliv tlakových sil. Autoři hovoří o odtržení v důsledku vln, které nastává z vrcholků solitárních vln následkem výše uvedené silové nerovnováhy. Odporová síla (angl. *drag force*) je převážně důsledkem tlakového propadu způsobeném víry a odtržením mezní vrstvy za vrcholem vlny. Vzniklá výduť je následně odtržena proudem plynu.

- V případě rostoucích rychlostí klesá tloušťka filmu a v důsledku malých amplitud vln klesá současně vliv tlakových výchylek a naopak vliv smykových sil narůstá.

- V krajním případě, kdy jsou smykové síly dominujícími, hovoří autor o smykovém odtržení.

Na rozhraní mezi oběma mechanismy je pak přechodový typ odtržení.

Důležitými parametry v problematice zejména sekundární atomizace je Weberovo a Ohnesorgovo číslo zohledňující poměry působících sil. Weberovo číslo definováno vztahem

$$We = \frac{\rho U^2 D}{\sigma}, \tag{7.1}$$

kde D je charakteristický rozměr, vyjadřuje poměr rozrušujících hydrodynamických sil vůči stabilizačním silám povrchového napětí. Ohnesorgovo číslo definované ve tvaru

$$Oh = \frac{\mu_L}{\sqrt{\rho_L D \sigma}} = \frac{\sqrt{We}}{Re}, \tag{7.2}$$

zohledňuje poměr vazkosti kapaliny vůči povrchovému napětí a setrvačným silám. Vliv čísel na velikost atomizovaných kapek studuje např. [155] (bag breakup), [110] (ligament breakup).

Vzhledem k tomu, že popis fenoménu a odvození kritérií sekundární atomizace by si vyžádal samostatný text přesahující téma disertační práce, omezíme se v dalším pouze na atomizaci primární jakožto navazující proces nestability kapalného filmu.

7.3 Kritéria primární atomizace stěnového kapalného filmu

Pro přehlednost jsou dále uváděná kritéria rozlišena na kritéria závislá na vlnové délce vlny, z jejíhož vrcholu dochází k odtrhávání fragmentů kapaliny, a na kritéria zohledňující tloušťku filmu. V prvním případě je základním principem teorie Kelvinovy-Helmholtzovy nestability a ve druhém případě jsou kritéria odvozena na základě definice Weberova čísla.

7.3.1. Závislost na vlnové délce

Z dosud uvedeného vyplývá, že základním podkladem k modelování atomizace z povrchu filmu je teorie Kelvinovy-Helmholtzovy nestability. Silová rovnováha stabilizačních a destabilizačních sil pak vede dle [151] k podmínce neutrální stability

$$P_{\mathrm{WR}} + g\rho_{\mathrm{L}} + \sigma\alpha^2 = 0\,. \tag{7.3}$$

Teorie Kelvinovy-Helmholtzovy nestability řeší podmínku (7.3) předpokladem neviskózního proudění s rovnoměrným rychlostním profilem vedoucímu dle [60] ke vztahu

$$P_{\mathrm{WR}}^{\mathrm{KH}} = -(U_{\mathrm{G}} - c_{\mathrm{R}})^2\alpha\rho_{\mathrm{G}}\,, \tag{7.4}$$

kde U_{G} resp. ρ_{G} je rychlost resp. hustota plynu. Substitucí (7.4) do (7.3) obdržíme za předpokladu $U_{\mathrm{L}} \cong c_{\mathrm{R}}$ zjednodušenou podmínku neutrální stability

$$U_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{L}} = \left(\frac{g\rho_{\mathrm{L}} + \sigma\alpha^2}{\alpha\rho_{\mathrm{G}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5}$$

Klasické odvození dle K-H teorie, viz [80], vede k podmínce

$$U_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{L}} = \left(\frac{[\sigma\alpha^2 + (\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}})g](\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}})}{\alpha\rho_{\mathrm{L}}\rho_{\mathrm{G}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.6}$$

Evidentně z (7.5) plyne (7.6) pro $\rho_{\mathrm{L}} \gg \rho_{\mathrm{G}}$. Pro případ dvojice tekutin voda–vzduch obdržíme kritickou hodnotu $U_{\mathrm{G\,krit}} = 6{,}95\,\mathrm{m/s}$ pro $\lambda_{\mathrm{krit}} = 17\,\mathrm{mm}$. S ohledem na výše uvedené nedostatky K-H teorie ve vztahu k diskutovanému fenoménu je třeba navrhnout precizující úpravy vztahů (7.4) a (7.5) resp. (7.6).

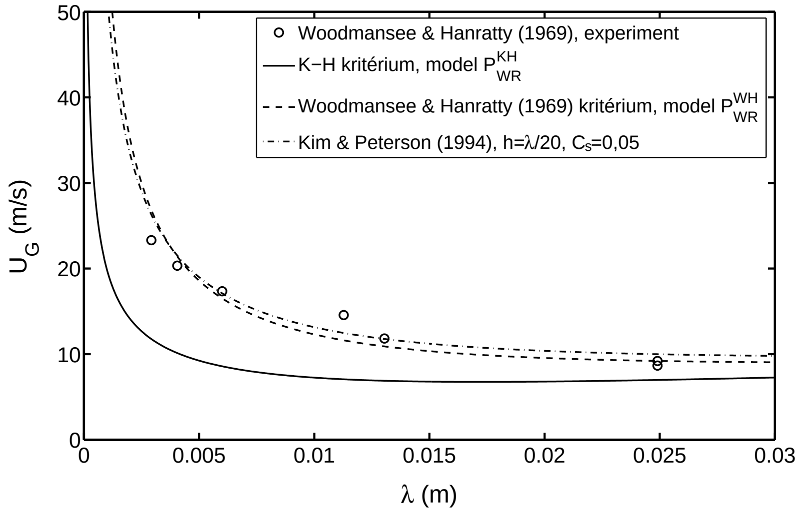
Woodmansee a Hanratty [151] spočetli tlakové výchylky P_{WR} za předpokladu reálného rychlostního profilu pomocí řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice. Výslednou závislost vyjádřili poloempirickým vztahem (5.14). Substitucí (5.14) do (7.3) získáme kritérium

$$U_{\mathrm{G}} = \left[\frac{(\sigma\alpha^2 + \rho_{\mathrm{L}}g)\left(\alpha\frac{H}{2}\right)^{0{,}627}}{0{,}131\rho_{\mathrm{L}}\alpha\left(\frac{H}{\nu_{\mathrm{G}}}\right)^{0{,}229}}\right]^{\frac{1}{2{,}229}}, \tag{7.7}$$

které je vykresleno na obrázku 7.3 v porovnání s klasickým kritériem (7.5) a experimentálními daty z článku [151]. Lze nahlédnout, že kritérium velmi dobře vystihuje naměřené hodnoty, zatímco kritérium (7.5) založené na predikci amplitud tlakových fluktuací předpisem (7.4) data výrazně podhodnocuje.

Jiný způsob odvození kritéria stability uvádějí Kim a Peterson [80] rozšířením přístupu K-H teorie o Jeffreysovu hypotézu zmíněnou v podkapitole 3.3. Odvozené kritérium má tvar

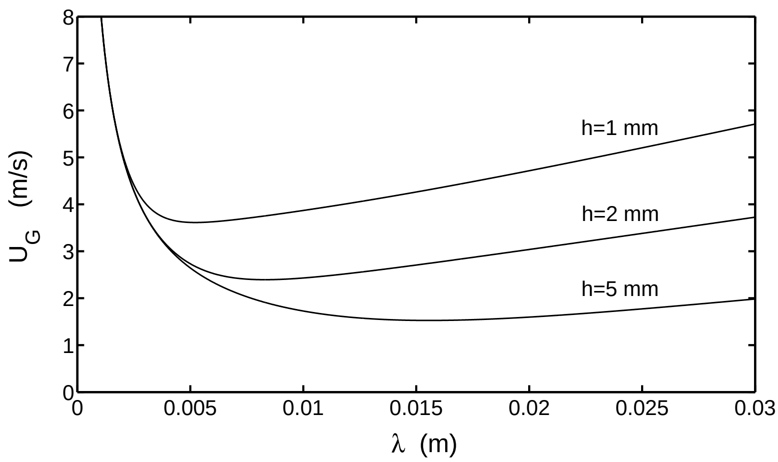
$$U_{\mathrm{G}} = c + \left[\frac{4\rho_{\mathrm{L}}c}{C_s\rho_{\mathrm{G}}}\left(\frac{\nu_{\mathrm{L}}\alpha}{\tanh\alpha h} + \frac{1}{4\sinh^2\alpha h}\sqrt{\frac{\nu_{\mathrm{L}}\alpha c}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8}$$



Obrázek 7.3: Srovnání atomizačních kritérií (7.5), (7.7) a (7.8) pro C_s=0,05 za předpokladu $h = \lambda/20$ s měřením v kanále o výšce 2,54 cm viz [151].

kde C_s je koeficient v Jeffreysově hypotéze (angl. sheltering coefficient) a c je fázová rychlost daná vztahem (2.13) uváděným také ve tvaru

$$c = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} g \frac{\rho_{\mathrm{L}} - \rho_{\mathrm{G}}}{\rho_{\mathrm{L}}} + \frac{\sigma}{\rho_{\mathrm{L}}} \alpha\right) \tanh \alpha h} \,. \tag{7.9}$$



Obrázek 7.4: Kritické rychlosti dle kritéria (7.8) pro C_s = 0,25 a vybrané tloušťky filmu v závislosti na vlnové délce.

Na obrázku 7.4 je zachycen průběh kritických rychlostí dle kritéria (7.8) v závislosti na vlnové délce a tloušťce kapalné vrstvy. Z experimentálních dat dle [80] plyne, že pro tloušťky h=2,5–10 mm kritérium pro C_s = 0,25 udává rychlosti přibližně o 50 % nižší než pozorované hodnoty. Vzhledem k tomu, že kritérium odpovídá mezi vzniku nestabilních vln, Kim a Peterson dedukují, že vznik těchto nestabilit není dostatečný pro odtrhávání kapaliny. Druhým vysvětlením uvedené nesrovnalosti je omezení platnosti vztahu na případy, kdy je tloušťka kapaliny větší než polovina vlnové délky ($h > \lambda/2$), což není splněno pro $h < 4$ mm. Řešením uvedených rozdílů může být volba smykového koeficientu C_s. Pokles koeficientu o 50 % vede k nárůstu kritických rychlostí přibližně o 40 %. Autoři však neudávají žádnou metodu pro volbu konkrétní hodnoty.

Dosud uvedená kritéria definuji kritické rychlosti v závislosti na vlnové délce předpokládaných vln. Tento parametr však v reálném případě není a priori znám a lze při tom předpokládat, viz např. [12], že vlnová délka je závislá na tloušťce filmu, kterou kritéria nijak nezohledňují. Woodmansee a Hanratty [151] na základě experimentů předpokládají vlnovou délku $\lambda = 5h_p$, kde h_p je výška solitární vlny, z jejíhož vrcholu dochází k atomizaci. Problém kritických rychlostí je tedy závislý na predikci parametru h_p, což ovšem není triviální úkol a uvedený článek se mu nevěnuje. Uvedená atomizační kritéria tedy představují pouze dílčí řešení problému atomizace.

7.3.2. Závislost na tloušťce filmu

Pro případy kdy $h < 1$ mm je k dosažení atomizace třeba vyšších rychlostí, narůstá vliv smykových sil a povrchového napětí a, jak bude dokumentováno dále, kritéria založená na K-H teorii již mají omezenou platnost. Kim a Peterson [80] ve snaze postihnout uvedená specifika při odvození kritéria vycházejí z článku Milese [100], který na základě Orrovy-Sommerfeldovy rovnice odvodil kritérium nestability definované hodnotou Weberova čísla

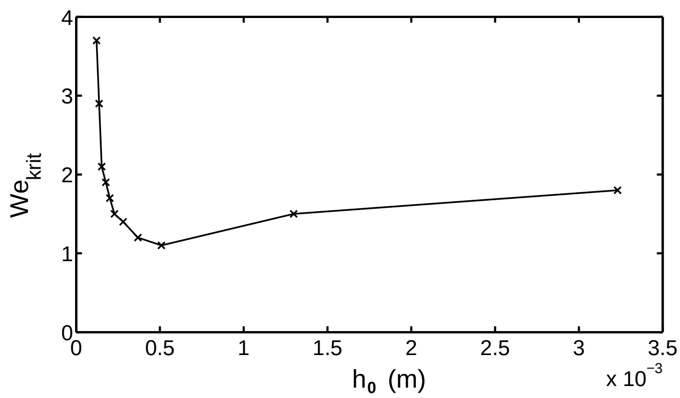
$$We = \frac{\rho U^2 h}{\sigma} < 3\,, \tag{7.10}$$

kde ρ a U je hustota kapaliny resp. povrchová rychlost filmu.

Definujeme-li Weberovo číslo pomocí hustoty plynu a relativní rychlosti plynu vůči povrchu filmu, viz např. [151], lze kritérium atomizace jednoduše odvodit ve tvaru

$$U_{\mathrm{G}} = \sqrt{\frac{We_{\mathrm{krit}}\,\sigma}{\rho_{\mathrm{G}} h}}. \tag{7.11}$$

Problém predikce kritické rychlosti se nyní přesouvá na určení kritického Weberova čísla We_{krit}. Autoři v článku [151] na základě experimentů rozlišují kritické Weberovo číslo spočtené pro základní tloušťku filmu h_0, $We_{\mathrm{krit}} = 1{,}5$, a pro výšku solitární vlny h_p[1], $We_{\mathrm{krit}} = 5{,}5$. Příslušnou experimentálně získanou závislost kritického Weberova čísla na základní tloušťce filmu lze nahlédnout z obrázku 7.5. Je patrné, že uváděná hodnota $We_{\mathrm{krit}} = 1{,}5$ je dosažena pro filmy o tloušťce přesahující cca 1 mm. Vyšší hodnoty v případě tenčích filmů souvisejí s výrazně vyššími rychlostmi potřebnými k atomizaci.



Obrázek 7.5: Hodnoty kritického Weberova čísla v závislosti na základní tloušťce filmu. Naměřené hodnoty převzaty z [151].

V případě Weberova čísla definovaného pomocí povrchové rychlosti filmu, viz [80], autoři odvozují podmínku atomizace na základě rovnosti smykových napětí na hladině filmu definovaných

[1] Význam označení h_p a h_0 viz obrázek 3.4 na straně 26.

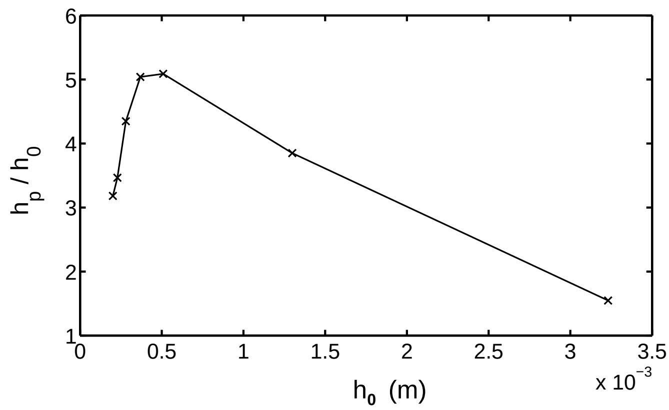
vztahy

$$\tau_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s}} \frac{\rho_{\mathrm{G}}}{2} {U_{\mathrm{G}}}^2 = \mu_{\mathrm{L}} \frac{U_{\mathrm{s}}}{h}\,. \tag{7.12}$$

Vyjádřením U_{s} z rovnosti (7.12) a substitucí do kritéria (7.10) obdržíme vztah pro kritickou rychlost plynu ve tvaru

$${U_{\mathrm{G}}}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{f_{\mathrm{s}}} \frac{\mu_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{G}} h} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{\mathrm{L}} h}}\,, \tag{7.13}$$

kde autoři uvažují hodnotu $We_{\mathrm{krit}} = 3$ navrženou v původním kritériu (7.10). Hodnoty kritických rychlostí definované vztahem (7.13) jsou nyní závislé na určení smykového koeficientu f_{s}. Autoři užívají vztah pro smykový koeficient dle Wallise (4.82). Odpovídající kritérium je vykresleno na na obrázku 7.7 spolu s kritérii pro smykové koeficienty spočtené dle vztahů (4.83) a (4.84) a kritériem (7.11) pro $We_{\mathrm{krit}} = 1{,}5$ v porovnání s měřením [151].



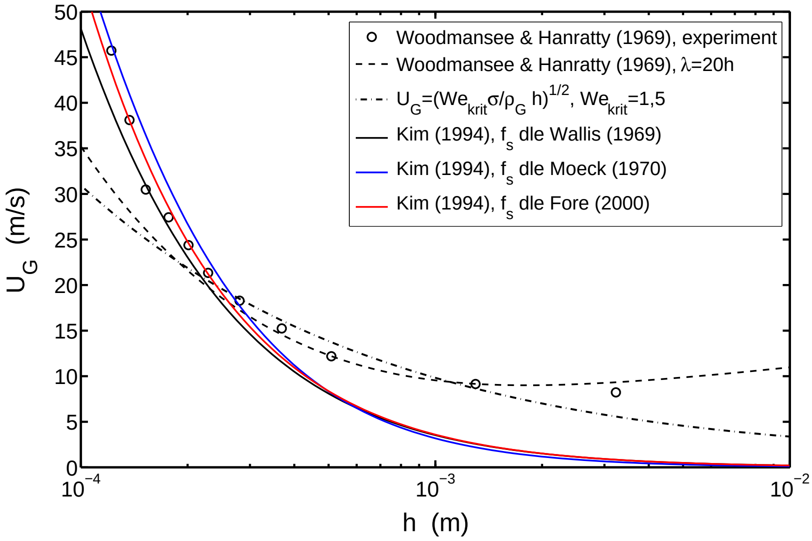
Obrázek 7.6: Poměr výšky solitární vlny při atomizaci vůči základní tloušťce filmu. Naměřené hodnoty převzaty z [151].

Jak bylo naznačeno v předchozím odstavci, lze další kritérium dle tloušťky filmu získat z kritéria (7.7) volbou poměru mezi výškou solitární vlny h_p a vlnovou délkou λ. Dle experimentálních dat z článku [151], viz obrázek 7.6, je poměr mezi výškou solitární vlny a základní tloušťkou filmu h_0 při atomizaci cca $h_p/h_0 \approx 3$–5. Pak pro $\lambda = 5h_p$, viz [151], obdržíme přibližnou hodnotu $\lambda/h_0 \approx 15$–25. Příslušné kritérium je na obrázku 7.7 vykresleno pro $\lambda/h = 20$. Obdobně lze upravit kritérium (7.8) z předchozího odstavce. Odpovídající průběh kritických rychlostí je zakreslen na obrázku 7.3 pro $C_s = 0{,}05$. Ačkoliv kritické rychlosti vykazují velmi dobrou shodu s měřením, nedostatkem kritéria zůstává specifikace koeficientu C_s.

Z obrázku 7.7 lze nahlédnout, že kritérium (7.11) nevystihuje kritické rychlosti příliš dobře, zejména pro krajní hodnoty tloušťky filmu. Úspěšnost kritéria je evidentně závislá na optimální volbě kritického Weberova čísla. Kritérium odvozené z (7.7) pro $\lambda/h = 20$ predikuje velmi dobře naměřené hodnoty pro tloušťky filmu větší než asi 0,2 mm. Pro menší tloušťky filmu lze úspěšně použít kritérium (7.13), přičemž nejlepší shody s experimentem je dosaženo pro smykový koeficient spočtený dle vztahu (4.84). Pro úplnost poznamenejme, že substituce součinitelů definovaných vztahy (4.85) a (4.87) z odstavce 4.4.3 do kritéria (7.13) nedává dobrou shodu s měřením použitým v obrázku 7.7.

7.4 Shrnutí

Experimentální data poukazují na souvislost mezi ustavením solitárních vln a vlastní primární atomizací. Výchozím bodem řešení odtržení fragmentů kapaliny z povrchu filmu je tedy porozumění problematice vzniku a rozvoje počátečních nestabilit až do solitární fáze.



Obrázek 7.7: Porovnání průběhu kritických rychlostí dle kritérií (7.11) pro We_{krit}=1,5, (7.7) pro $\lambda = 20h$ a (7.13) pro f_{s} dle (4.82), (4.83) a (4.84). Experimentální data převzata z měření v kanále o výšce 2,54 cm viz [151].

Mechanismus atomizace a odvozená kritéria vycházejí z identifikace sil ovlivňujících proces odtržení. V případě silnějších vrstev je hlavní destabilizující vliv způsoben tlakovým propadem v okolí vrcholu vlny. Tato skutečnost umožňuje aplikaci teorie Kelvinovy-Helmholtzovy nestability. Odvozená kritéria jsou závislá na přesnosti určení tlakových výchylek a vlnové délky vln na povrchu filmu, což vyžaduje jejich doplnění modely amplitud tlakových fluktuací a předpokládaných vlnových délek v závislosti na tloušťce filmu a rychlosti vnějšího proudu.

V případě, kdy důsledkem vyšších rychlostí nebo menšího průtoku klesá tloušťka filmu, narůstá vliv smykových sil a povrchového napětí a vhodným přístupem je odvození kritérií na základě definice Weberova čísla. Příslušná kritéria nevyžadují informaci o vlnové délce a navíc zohledňují vliv tloušťky filmu. Úspěšnost predikce je v tomto případě závislá na určení kritického Weberova čísla případně smykového napětí. Uvedené předpoklady byly potvrzeny porovnáním sestavených kritérií s naměřenými daty. Kritéria založená na Kelvinově-Helmholtzově nestabilitě (7.8), resp. zohledňující vliv tlakových sil (7.7), vykazují dobrou shodu s měřením pro filmy o tloušťce větší než 0,2 mm. Naopak kritéria (7.13) odvozená z Weberova čísla založeného na rychlosti filmu na rozhraní definované pomocí smykového napětí nezohledňují vliv tlaku a predikují tak dobře atomizaci v případě velmi tenkých filmů, kdy jsou smyková napětí dominantní, zatímco značně podhodnocují kritické rychlosti atomizace filmů s větší tloušťkou, kdy s ohledem na solitární vlny velkých amplitud narůstá vliv tlakových fluktuací, speciálně propadů nad vrcholy vln. Z teoretického hlediska je tedy použití zvoleného typu kritéria závislé na poměru destabilizujících sil, při praktické aplikaci kritérií se jeví být postačující přihlédnout k tloušťce filmu.

Na závěr kapitoly poznamenejme, že v poslední době se modelováním hydrodynamické nestability na rozhraní dvou viskózních vrstev až do atomizační fáze zabývají autoři v rámci numerického řešení pomocí tzv. VOF metody (angl. volume of fluid method). V článcích [21], [54] je prezentováno porovnání VOF metody s lineárním přístupem pomocí simultánně řešených Orrových-Sommerfeldových rovnic sestavených pro obě fáze viz [20], [152]. Uvedené studie jsou ovšem omezeny na vzájemnou validaci numerickými přístupy bez odkazu na experimentální data. Preciznější vyhodnocení přístupů i prezentovaných kritérií je tak limitováno malým počtem experimentálních dat pro různé geometrické podmínky.

Závěr

Experimentální pozorování ukazují, že nestability kapalných filmů lze rozřadit do několika typů v závislosti na geometrických parametrech. S výjimkou velmi tenkých filmů se počáteční nestability projevují jako dvoudimenzionální vlny, které se vzrůstající rychlostí proudění plynu přecházejí v solitární, případně neuspořádané třídimenzionální vlny. Při nadkritických rychlostech dochází k odtržení fragmentů kapaliny - atomizaci - z povrchu solitárních vln. Z uvedeného je zřejmé, že různé typy nestabilit stejně jako velké množství možných konfigurací problému znemožňují použití jednoho univerzálního přístupu k řešení. Tato situace motivovala přehledový charakter práce s ukázkami řešení pro vybrané případy geometrických charakteristik a typů nestabilit. Konkrétně byla v kapitole 4 uvedena formulace řešení pomocí integrace pohybových rovnic a pomocí simultánního řešení soustavy Orrových-Sommerfeldových rovnic.

Jak bylo dokumentováno literární rešerší v oblasti fyzikálních principů vzniku nestabilit v podkapitole 3.3, byly jako klíčové faktory vzniku nestabilit identifikovány fluktuace smykových a tlakových sil působících na hladinu filmu. V kapitole 4 byly nejpoužívanější modely rozlišeny dle poměru předpokládaných vlnových délek ku výšce plynné vrstvy nad hladinou filmu. V případě krátkých vln je v literatuře nejčastěji aplikován model D*, viz odstavec 4.4.1, v případě dlouhých vln v porovnání s výškou kanálu se užívají vztahy odvozené z formule pro odporovou sílu (4.60). Oba typy modelů lze aplikovat při řešení nestabilit kapalných filmů za předpokladu, že kapalný zvlněný povrch lze považovat za pevný a fázová rychlost vln na hladině filmu je zanedbatelná v porovnání s rychlostí plynu.

Relativní složitost modelu D* a omezení použitelnosti formulí druhého typu vedly k myšlence odvození algebraických modelů fluktuací smykového napětí a tlaku na základě výsledků CFD simulací proudění vzduchu nad zvlněným povrchem pro různé rychlosti, výšku kanálu a poměry vlnové délky ku amplitudě vlny. Specifikace, výsledky simulací a odvozené modely včetně jejich validace experimenty jsou uvedeny v kapitole 5. Z porovnání vyplývá, že zvolený turbulentní model k-ϵ V2F poskytuje poměrně dobrou shodu s naměřenými hodnotami silových charakteristik a odvozené modely je s výhodou jejich jednoduché implementace možné ve vymezeném rozsahu podmínek aplikovat v numerických modelech nestabilit kapalného filmu.

Vzhledem k tomu, že většina publikovaných řešení je založena na lineárním přístupu k analýze nestabilit odvozených za předpokladů, jejichž platnost je v závislosti na tendenci růstu nestabilit dočasná, nelze s úspěchem predikovat vývoj vybraného typu nestability v delším časovém horizontu jedním modelem. Protože každá metoda navíc představuje samostatný vědecký úkol, bylo zájmové pole dizertační práce v oblasti návrhu matematického modelu omezeno na predikci iniciace dvoudimenzionálních nestabilit a kritických rychlostí při atomizaci.

Model iniciace nestabilit odvozený pomocí pohybových rovnic v integrálním tvaru a algebraických modelů působících napětí sestavených v kapitole 5 je prezentován v kapitole 6. Uvedený model je třeba doplnit rychlostními profily kapalné a plynné vrstvy a poměrem amplitudy vln ku tloušťce filmu. Za předpokladu lineárního profilu rychlostí filmu a mocninného profilu proudu vzduchu dává sestavený model velmi dobré výsledky při určení kritických rychlostí pro iniciaci nestabilit a predikci vlnových délek dvoudimenzionálních vln na hladině filmu. Získané charakteristiky lze v případě dalšího růstu rychlostí vnějšího proudění využít v nelineárních modelech solitárních vln, případně v analýze vlivu zvlněného stěnového filmu na fyzikální vlastnosti konkrétní technické části. Jak vyplývá z kapitol 3, resp. 5, zvlněný charakter filmu zpětně ovlivňuje rychlostní profil i vlastnosti mezní vrstvy vzduchu, a bude tak mít vliv například na přestup tepla stěnou.

Modely kritických rychlostí pro atomizaci filmu jsou prezentovány v kapitole 7 s využitím modelů smykových koeficientů z odstavce 4.4.3. Uváděná kritéria jsou rozlišena dle typu vedoucí veličiny na kritéria závislá na vlnové délce a kritéria zohledňující tloušťku filmu. První typ kritérií je vhodnější pro vlny s větší amplitudou, kdy rozhodující destabilizující silou je tlakový propad nad vrcholem vlny, zatímco druhý typ lépe zohledňuje vliv smykových sil, které nabývají na významu v případě atomizace tenkých filmů za vysokých rychlostí. Po doplnění adekvátním modelem tloušťky a tvorby filmu by bylo možné příslušná kritéria použít například při předcházení erozi lopatek turbín dopadem kapiček odtržených z filmu kondenzujícího na přívodním potrubí.

V souvislosti s naměřenými daty použitými v dizertaci je třeba poznamenat, že analýza a validace dosavadních modelů nestability kapalných filmů je limitována souvisejícími experimentálními studiemi. Většina experimentálních dat použitých pro validaci prezentovaných modelů byla naměřena precizními studiemi provedenými v počátcích výzkumu nestabilit, neboť se zdá, že studium diskutovaného fenoménu z hlediska základního výzkumu ustoupilo do pozadí speciálním aplikacím a novější měření kritických rychlostí umožňující sestavení map režimů nestabilit pro široké podmínky vstupních parametrů nejsou k dispozici. Symptomatickými této skutečnosti jsou například články citované v závěru kapitoly 7, kde porovnání s experimenty zcela chybí, případně článek [109] z roku 2011 vydaný v impaktovaném časopise, kde aplikace poměrně složitého modelu rychlostního profilu nad kapalným filmem v modelu nestabilit je dokumentována nevhodným grafem kritických rychlostí naměřených v roce 1966. Je zřejmé, že konstrukce komplexních numerických modelů fyzikálních jevů by neměla snižovat význam ověření jejich použitelnosti v reálné praxi.

Závěrem lze přínos dizertační práce ke studiu problematiky a její původní výsledky shrnout v následujících bodech:

- Byla vytvořena přehledová studie včetně souhrnu literárních pramenů souvisejících s tématem nestabilit kapalných filmů.
- Byla sestavena procedura na řešení zobecněného problému vlastních čísel s nehomogenními okrajovými podmínkami aplikovatelná na Orrovu-Sommerfeldovu rovnici popisující iniciaci hydrodynamické nestability.
- Pomocí CFD metod byla provedena studie turbulentního proudění nad zvlněným povrchem a výpočet série simulací umožňujících analýzu vlastností příslušné mezní vrstvy a silového působení.
- Na základě výsledků soustavy CFD simulací byly sestaveny algebraické modely fluktuací smykových napětí a tlaků působících na zvlněný povrch v závislosti na geometrii vln, rozměrech kanálu a rychlosti proudění.
- Pomocí formulí pro smyková napětí byly navrženy modely umožňující predikci odtržení kapek z povrchu filmu v závislosti na rychlosti vzduchu a tloušťce filmu.

Dílčí výsledky práce byly použity při řešení projektu GAČR GA101/08/0096, Moderní metoda Large Eddy Simulation pro řešení dvoufázového turbulentního proudění a kapalný stěnový film.

Seznam použitých zdrojů

[1] Abrams, J.: Turbulent flow over small amplitude solid waves, Ph.D. Disertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1984.

[2] Abrams, J., Hanratty, T. J.: Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface, J. Fluid Mech., 151, pp. 443–455, 1985.

[3] Akylas, T. R.: A note on the generation of surface waves by inviscid shear flows, Wave Motion, 6, pp. 141–148, 1984.

[4] Aktershev, S. P., Alekseenko, S. V.: Influence of condensation on the stability of a liquid film moving under the effect of gravity and turbulent vapor flow, International Journal of Heat and Mass Transfer, 48, pp. 1039–1052, 2005.

[5] Alekseenko, S. V., Nakoryakov, V. E., Pokusaev, B. G.: Wave formation on vertical falling liquid films, International Journal of Multiphase Flow, vol. 11, no. 5, pp. 607–627, 1985.

[6] Alekseenko, S. V., Nakoryakov, V. E.: Instability of a liquid film moving under the effect of gravity and gas flow, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 38, no. 11, pp. 2127–2134, 1995.

[7] Alekseenko, S. V., Aktershev, S. P., Cherdantsev, A. V., Kharlamov, S. M., Markovich, D. M.: Primary instabilities of liquid film flow sheared by turbulent gas stream, International Journal of Multiphase Flow, 35, pp. 617–627, 2009.

[8] Andreussi, P., Asali, J. C., Hanratty, T. J.: Initiation of roll waves in gas-liquid flows, AIChE Journal, vol. 31 , no. 1, pp. 119–126, 1985.

[9] Andritsos, N., Hanratty, T. J.: Interfacial instabilities for horizontal gas-liquid flows in pipelines, Int. Multiphase Flow, vol. 13, no. 5, pp. 583–603, 1987.

[10] Andritsos, N., Hanratty, T. J.: Influence of interfacial waves in stratified gas-liquid flows, AIChE Journal, vol. 33, no. 3, pp. 444–454, 1987.

[11] Ansari, M. R., Shokri, V.: New algorithm for the numerical simulation of two-phase stratified gas-liquid flow and its application for analyzing the Kelvin-Helmholtz instability criterion with respect to wavelength effect, Nuclear Engineering and Design, 237, pp. 2302–2310, 2007.

[12] Asali, K. C., Hanratty, T. J.: Ripples generated on liquid film at high gas velocities, Int. Multiphase Flow, 19, pp. 229–243, 1993.

[13] Azzopardi, B. J., Gibbons, D. B.: Annular two-phase flow in a large diameter tube, Chem. Eng., 398, pp. 19–31, 1983.

[14] Azzopardi, B. J.: Drops in annular two-phase flow, Int. J. Multiphase Flow, 23, pp. 1–53, 1997.

[15] Bagué, A., Fuster, D., Popinet, S., Scardovelli, R., Zaleski, S.: Instability growth rate of two-phase mixing layers from a linear eigenvalue problem and an initial value problem, Physics of Fluids, 22, pp. 092104, 2010.

[16] Bai, Ch.: Modelling of spray impingement processes, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering. Imperial College of Science, Technology & Medicine, University of London, 1996.

[17] Banner, M. L., Melville, W. K.: On the separation of air flow over water waves, J. Fluid Mech., vol. 77, no. 4, pp. 825–842, 1976.

[18] Belt, R. J., Van't Westende, J. M. C., Portela, L. M.: Prediction of the interfacial shear-stress in vertical annular flow, International Journal of Multiphase Flow, 35, pp. 689–697, 2009.

[19] Benjamin, T. B.: Shearing flow over a wavy boundary, J. Fluid Mech., 6, pp. 161–205, 1959.

[20] Boeck, T., Zaleski, S.: Viscous versus inviscid instability of two-phase mixing layers with continuous velocity profile, Physics of Fluids, 17, pp. 032106-1-032, 2005.

[21] Boeck, T., Li, J., López-Pagés, E., Yecko, P., Zaleski, S.: Ligament formation in sheared liquid-gas layers, Theor. Comput. Fluid Dyn., 21, pp. 59–76, 2007.

[22] Boomkamp, P. A. M., Boersma, B. J., Miesen, H. M., Beijnon, G. V.: A Chebyshev Collocation Method for Solving Two-Phase Flow Stability Problems, Journal of Computational Physics, 132, pp. 191–200, 1997.

[23] Boomkamp, P. A. M., Miesen, H. M.: Classification of instabilities in parallel two-phase flow, Int. J. Multiphase Flow, 22, pp. 67–88, 1996.

[24] Boulesteix, S., Ern, P., Charru, F., Luck, F.: Size and velocity distributions of droplets in an air-water horizontal pipe flow, ILASS-Europe 2010, 23rd Annual Conference on Liquid Atomization and Spray systems, Brno, Czech Republic, September 2010

[25] Brauner, N., Maron, D. M.: Role of interfacial shear modeling in predicting stability, Multiphase Reactor and Polymerization System Hydrodynamics, Advances in engineering Fluid Mechanics Series, Edited by Nicholas P. Cheremisinoff, Gulf publishing Company, Houston, Texas, 1996.

[26] Brauner, N., Maron, D. M.: Modeling of wavy flow in inclined thin films in the presence of interfacial shear, Chemical Engineering Science, vol. 40, no. 6, pp. 923–937, 1985.

[27] Brauner, N., Maron, D. M., Zijl, W.: Interfacial collocation equation of thin liquid film in the presence of interfacial shear: Stability analysis, Chemical Engineering Science, vol. 44, no. 11, pp. 2711–2722, 1989.

[28] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: Mechanika kontinua, 2. vydání, Academia, AV ČR, Praha, 2000, ISBN 80-200-0772-5.

[29] Brock, R. R.: Development of roll waves in open channels, Ph.D. Thesis, Division of Engineering and Applied Science, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1967.

[30] Bruno, K., McCready, M. J.: Origin or roll waves in horizontal gas-liquid flows, AIChE Journal, vol. 34, no. 9, pp. 1431–1440, 1988.

[31] Buckles, J., Hanratty, T. J., Adrian, R. J.: Turbulent flow over large-amplitude wavy surface, J. Fluid Mech., 140, pp. 27–44, 1984.

[32] Carpenter, E. F., Colburn, A. P.: The Effect of Vapor Velocity on Condensation Inside Tubes, Proceedings of the General Discussion of Heat Transfer, The Institution of Mechanical Engineers and The American Society of Mechanical Engineers, pp. 20–26, 1951.

[33] Cohen, L. S., Hanratty, T. J.: Generation of Waves in the Concurrent Flow of Air and a Liquid, AIChE Journal, 11, pp. 138–144, 1965.

[34] Cohen, L. S., Hanratty, T. J.: Effect of waves at a gas liquid interface on a turbulent air flow, J. Fluid Mech., 31, pp. 467–479, 1968.

[35] Cook, G. W.: Turbulent Flow Over Solid Wavy Surfaces, Ph.D. Thesis, Department of Chemical Engineering, University of Illinois, Urbana, 1970.

[36] Craik, A. D. D.: Wind-generated waves in thin liquid films, J. Fluid Mechanics, 26, pp. 369–392, 1966.

[37] Danabasoglu, G., Biringen, S.: A Chebyshev matrix method for spatial modes of the Orr-Sommerfeld equation, NASA Contractor Report 4247, 1989.

[38] Davidson, L., Nielsen, P. V., Sveningsson, A.: Modifications of the V2 Model for Computing the Flow in a 3D Wall Jet, Turbulence, Heat and Mass Transfer, 4, pp. 577–584, 2003.

[39] Dattatri, J., Shankar, N. J., Raman, H.: Wind velocity distribution over wind-generated water waves, Coastal Engineering, 1, 243–260, 1977.

[40] Dobran, F.: Hydrodynamic and heat transfer analysis of two-phase annular flow with a new liquid film model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, 26, pp. 1159–1171, 1983.

[41] Dongarra, J. J., Straughan, B., Walker, D. W.: Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamics stability problems, Applied Numerical Mathematics, 22, pp. 399–434, 1996.

[42] van Driest, E.R.: On turbulent flow near a wall, J. Aeronaut. Sci., vol. 23, no. 11, pp. 1007–1011, 1956.

[43] Duin, C. A., Janssen, P. A. E. M.: An analytic model of the generation of surface gravity waves by turbulent air flow, J. Fluid Mech., 236, pp. 197–215, 1992.

[44] Durbin, P. A.: Separated flow computations with k-ϵ-v^2 model, AIAA Journal, vol. 33, no. 4, pp. 659–664, 1995.

[45] Durbin, P. A.: On the k-e stagnation point anomaly, Int. J. Heat and Fluid Flow, 17, 89–90, 1996.

[46] Ebner, J., Schober, P., Schäfer, O., Koch, R., Wittig, S.: Modelling of shear-driven liquid wall films: effect of accelerated air flow on the film flow propagation, Progress in Computational Fluid Dynamics, 4, pp. 183–190, 2004.

[47] Ebner, J., Gerendás, M., Schäfer, O., Wittig, S.: Droplet entrainmnet from a shear-driven liquid wall film in inclined ducts: Experimental study and correlation comparison, Transactions of the ASME, 124, pp. 874–880, 2002.

[48] Ekvall, A. G. C.: Evolution of roll waves running down an inclined plane, Chemical Engineering Science, vol. 48, no. 1, pp. 69–80, 1993.

[49] European research Community on Flow, Turbulence and Combustion Database, Classic collection [databáze online], [cit. 1.1.2012], dostupné z `http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/index.html`

[50] Fore, L. B., Beus, S. G., Bauer, R. C.: Interfacial friction in gas-liquid annular flow: analogies to full and transition roughness, International Journal of Multiphase Flow, 26, pp. 1755-1769, 2000.

[51] Frederick, K. A.: Wave generation at a gas-liquid interface, M. S. Dissertation, University of Illinois, Urbana, 1982.

[52] Frederick, K. A., Hanratty, T. J.: Velocity measurements for a turbulent nonseparated flow over solid waves, Experiments in Fluids, 6, pp. 477–486, 1988.

[53] Fukano, T., Furukawa, T.: Prediction of the effects of liquid viscosity on interfacial shear stress and frictional pressure drop in vertical upward gas-liquid annular flow, Int. J. Multiphase Flow, vol. 24, no. 4, pp. 587–603, 1998.

[54] Fuster D., Bagué, A., Boeck, T., Le Moyne, L., Leboissetier, A., Popinet, S., Ray, P., Scardovelli, R., Zaleski, S.: Simulation of primary atomization with an octree adaptive mesh refinement and VOF method, Int. J. of Multiphase Flow, 35, pp. 550–565, 2009.

[55] Gao, D., Morley, N. B., Dhir, V.: Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method, Journal of Computational Physics, 192, pp. 624–642, 2003.

[56] Gardner, D. R., Trogdon, S. A., Douglas, R. W.: A modified tau spectral method that eliminates spurious eigenvalues, Journal of Computational Physics, 80, pp. 137–167, 1989.

[57] van Gastel, K., Janssen, P. A. E. M., Komen, G. J.: On phase velocity and growth rate of wind induced gravity-capillary waves, J. Fluid Mech., 161, pp. 199–216, 1985.

[58] Gaster, M.: A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability, Journal of Fluid Mechanics, 14, pp. 222–224, 1962.

[59] Gepperth, S., Guildenbecher, D., Koch, R., Bauer, H. J.: Pre-filming primary atomization: Experiments and modeling, ILASS-Europe 2010, 23rd Annual Conference on Liquid Atomization and Spray systems, Brno, Czech Republic, September 2010

[60] Hanratty, T. J.: Interfacial instabilities caused by air flow over a thin liquid layer, Waves on Fluid Intarfaces (Edited by Meyer, R.E.), Academic Press, New York, pp. 221–259, 1983.

[61] Hanratty, T. J., McCready, M. J.: Phenomenological understanding of gas-liquid separated flow, Proceedings of the Third International Workshop on Two-Phase Flow Fundamentals, Imperial College of London, April 1992

[62] Hanratty, T. J., Hershman, A.: Initiation of Roll Waves, AIChE Journal, vol. 7, pp. 488, 1961.

[63] Henstock, W. H., Hanratty, T. J.: The interfacial drag and the height of the wall layer in annular flows, AIChE J., 22, pp. 990, 1976.

[64] Himmelsbach, J., Noll, B., Wittig, S.: Experimental and numerical studies of evaporating wavy fuel films in turbulent air flow, Int. Heat Mass transfer, vol. 37, no. 8, pp. 1217–1226, 1994.

[65] Hinze, J. O.: Turbulence, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1975.

[66] Hoepffner, J.(b): PhD codes, *blasius.m* [online], [cit. 18.1.2013], dostupné z `http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/codes.php`

[67] Hoepffner, J.(a): Implementation of boundary conditions [online], [cit. 18.1.2013], dostupné z `http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/boundarycondition.pdf`

[68] Hsu, S., Kennedy, J. F.: Turbulent flow in wavy pipes, J. Fluid Mech., 47, 1971.

[69] Hudson, J. D.: The effect of a wavy boundary on turbulent flow, PhD thesis, University of Illinois, Urbana, IL, 1993.

[70] Hudson, J. D., Dykhno, L., Hanratty, T. J.: Turbulence production in flow over a wavy wall, Exper. Fluids, 20, pp. 257, 1996.

[71] Chang, H.-Ch.: Monlinear waves on liquid film surfaces - I. Flooding in a vertical tube, Chemical Engineering Science, vol. 41, no. 10, pp. 2463–2476, 1986.

[72] Chen, L.-H., Chang, H.-Ch.: Nonlinear waves on liquid film surfaces - II. Bifurcation analyses of the long-wave equation, Chemical Engineering Science, vol. 41, no. 10, pp. 2477–2486, 1986.

[73] Cherukat, P., Na, Y., Hanratty, T. J., McLaughlin, J. B.: Direct numerical simulation of a fully developed turbulent flow over a wavy wall, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 11, pp. 109–134, 1998.

[74] Iacarrino, G.: Predictions of turbulent separated flow using commercial CFD codes, J. Fluids Eng., vol. 123, no. 4, pp. 819–828, 2001.

[75] Jeffreys, H.: On the Formation of Waves by Wind, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A., 110, pp. 341–347, 1925.

[76] Jurman, L. A., Bruno, K., McCready, M. J.: Periodic and solitary waves on thin, horizontal, gas-sheared liquid films, Int. J. Multiphase Flow, 15, pp. 371–384, 1989.

[77] Jurman, L. A., McCready, M. J.: Study of waves on thin liquid films sheared by turbulent gas flows, Phys. Fluids, pp. 522–536, 1989.

[78] Kang, H. C., Kim, M. H.: The relation between the interfacial shear stress and the wave motion in a stratified flow, Int. J. Multiphase Flow, vol. 19, no. 1, pp. 35–49, 1993.

[79] Kendall, J. M.: The turbulent boundary layer over a wall with progressive surface waves, J. Fluid Mech., 41, 1970.

[80] Kim, B. H., Peterson, G. P.: Theoretical and physical interpretation of entrainment phenomenon in capillary-driven heat pipes using hydrodynamics instability theories, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 37, no. 17, pp. 2647–2660, 1994.

[81] Kim, W.: Study of liquid films, fingers and droplet motion for steam turbine blading erosion problem, Ph.D. Thesis, University of Michigan, Department of Mechanical Engineering, 1978.

[82] Kosky, P. G.: Thin liquid films under simultaneous shear and gravity forces, Int. J. Heat Mass Transfer, 14, pp. 1220–1224, 1971.

[83] Krantz, W. B., Goren, S. L.: Stability of thin liquid film flowing down a plane, Ind. Eng. Chem. Fundam., vol. 10, no. 1, pp. 91–101, 1971.

[84] Kundu, P. J. - Cohen, I. M.: Fluid Mechanics, Fourth Edition, Elsevier Inc., 2008.

[85] Kuru, W. C., Sangali, M., Uphold, D. D., McCready, M. J.: Linear stability of stratified channel flow, Int. J. Multiphase Flow, vol. 21, no. 5, pp. 733–753, 1995.

[86] Kuzan, J. D., Hanratty, T. J., Adrian, R. J.: Turbulent flows with incipient separation over solid waves, Experiments in Fluids, 7, pp. 88–98, 1989.

[87] Lighthill, M. J.: Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by wind, Fluid Mech., 14, pp. 358–398, 1962.

[88] Lin, S. P.: Instability of a liquid film flowing down an inclined plane, The Physics of Fluids, 10, pp. 308–3013, 1967.

[89] Lin, P. Y., Hanratty, T. J.: Prediction of the initiation of slugs with linear stability theory, Int. J. Multiphase Flow, vol. 12, no. 1, pp. 79–98, 1986.

[90] Ludwieg, H., Hornung, H.: The instability of a liquid film on a wall exposed to an air flow, J. Fluid Mechanics, 200, pp. 217–233, 1988.

[91] Maass, C., Schumann, U.: Direct numerical simulation of separated turbulent flow over wavy boundary, Flow Simulation with High-Performance Computers (Notes on Numerical Fluid Mechanics), Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, 1996, pp. 227–241, ISBN 9783528076528.

[92] Malamatenios, Ch., Giannakoglou, K.C., Papailiou, K.D.: A coupled two-phase shear layer/liquid film calculation method. Formulation of the physical problem and solution algorithm, Int. J. Multiphase Flow, vol. 20, no. 3, pp. 593–612, 1994.

[93] Mandhane, J. M., Gregory, G. A., Aziz, K.: A flow pattern map for gas-liquid flow in forizontal pipes, Int. Multiphase Flow, 1, pp. 537–553, 1974.

[94] Maron, D. M., Brauner, N.: The role of interfacial mobility in determining the interfacial shear factor in two-phase film flow, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 14, pp. 45–55, 1987.

[95] Maroteaux, F., Llory, D., Le Coz, J. F., Habchi, C.: Liquid film atomiazation on wall edges - separation criterion and droplets formation model, Journal of Fluids Engineering, 124, pp. 565–575, 2002.

[96] Menter, F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence modeling for engineering applications, AIAA Journal, 32, pp. 1598–1605, 1994.

[97] Miesen, R., Boersma, B.J.: Hydrodynamics stability of sheared liquid film, J. Fluid Mech., 301, pp. 175–202, 1995.

[98] Miles, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows, J. Fluid Mech., 3, pp. 185–204, 1957.

[99] Miles, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows. Part 2, J. Fluid Mech., 6, pp. 568–582, 1959.

[100] Miles, J. W.: The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion, J. Fluid Mech., 8, pp. 593–610, 1960.

[101] Miles, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows. Part 4, J. Fluid Mech., 13, pp. 433–448, 1962.

[102] Min, J. K., Park, I. S.: Numerical study for laminar wavy motions of liquid film flow on vertical wall, International Journal of Heat and Mass Transfer, 54, pp. 3256–3266, 2011.

[103] Moeck, E. O.: Annular-Dispersed two phase flow and critical heat flux, Chalk River: Atomic Energy of Canda, AECL-3656, 1970.

[104] Moran, K., Inumaru, J., Kawaji, M.: Instantaneous hydrodynamics of laminar wavy liquid film, International Journal of Multiphase Flow, 28, pp. 731–755, 2002.

[105] Motsa, S. S., Sibanda, P. 2001: On the Chebyshev spectral collocation method in channel and jet flows, J. Pure Math., 1, pp. 36–47, 2001.

[106] Motzfeld, H.: Die turbulente Strömung an welligen Wänden. Z. Angew. Math. u. Mechanik, 17, pp. 193, 1937.

[107] Miya, M.: Properties of roll waves, Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana, 1970.

[108] Miya, M., Woodmansee, D.E., Hanratty, T.J.: A model for roll waves in gas-liquid flow, Chem. eng. Science, 21, pp. 1915, 1971.

[109] Náraigh, L. Ó., Spelt, P. D. M., Matar, O. K., Zaki, T. A.: Interfacial instability in turbulent flow over a liquid film in a channel, International Journal of Multiphase Flow, 37, pp. 812–830, 2011.

[110] Olesen, M.: Prediction of drop-size distributions based on ligament breakup, Ph.D. Thesis, Queen's University at Kingston, Department of Mechanical Engineering, Ontario, 1997.

[111] Orszag, S. A.: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech*, 50 , pp. 689–703, 1971.

[112] Panton, R. L.: Incompresible Flow, Third Edition, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.

[113] Peng, C. A., Jurman, L. A., McCready, M.J.: Formation of solitary waves on gas-sheared liquid layers, Int. J. Multiphase Flow, 1991.

[114] Phillips, O. M.: On the generation of waves by turbulent wind, J. Fluid Mech., vol. 2, no. 5, pp. 417—445, 1957.

[115] Phillips, O. M.: Resonant phenomena in gravity waves, Proc. Symp. in Appl. Maths, 13, pp. 91, 1962.

[116] Pumir, A., Manneville, P., Pomeau, Y.: On solitary waves running down an inclined plane, Journal of Fluid Mechanics, vol. 135, no. 27, 1983.

[117] Reichardt, H.: Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 31, no. 7, pp. 208–219, 1951.

[118] van Rossum, J. J.: Experimental investigation of horizontal liquid films: Wave formation, atomization, film thickness, Chemical Engineering Science, vol. 11, no. 1, pp. 35–52, 1959.

[119] Shen, L., Zhang, X., Yue D. K. P., Triantafyllou, M. S.: Turbulent flow over a flexible wall undergoing a streamwise travelling wave motion, J. Fluid Mech., 484, pp. 197–221, 2003.

[120] Schlichting, H.; Gersten, K.: Boundary-layer theory, 8th Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2000.

[121] Schmehl R., Rosskamp, H, Willmann, M., Wittig, S.: CFD analysis od spray propagation and evaporation including wall film formation and spray/film interactions, International Journal of Heat and Fluid Flow, 20, pp. 520–529, 1999.

[122] Schubauer, G. B., Skramstad, H. F.: Laminar boundary layer oscillations and the stability of laminar flow, J. Aero. Sci., 14, pp. 69–78, 1947.

[123] Schubring, D., Shedd, T. A.: Critical friction factor modeling of horizontal annular base film thickness, International Journal of Multiphase Flow, 35, pp. 389–397, 2009.

[124] Sigal, A.: An Experimental Investigation of the Turbulent Boundary Layer over a Wavy Wall, Ph.D. Thesis, Department of Aeronautical Engineering, California Institute of Technology, 1970.

[125] Smith, M. K., Davis, S. H.: The instability of sheared liquid layers, J. Fluid Mech., 121, pp. 187–206, 1982.

[126] Smith, M. K.: The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films, J. Fluid Mech., 217, pp. 469-485, 1990.

[127] Stanton, T., Marshall D., Houghton, R.: The growth of waves on water due to the action of the wind, Proc. R. Soc. Lond. A, 137, pp. 282, 1932, DOI: 10.1098/rspa.1932.0136.

[128] Su, Y. Y., Khomami, B.: Numerical solution of eigenvalue problems using spectral techniques, Journal of Computational Physics, 100, pp. 197–305, 1992.

[129] Sullivan, P. P., McWilliams, J. C., Moeng, Ch.-H.: Simulation of turbulent flow over idealized water surface, J. Fluid Mech., 404, pp. 47–85, 2000.

[130] Štefan, D.: Hydraulické ztráty v potrubí, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, bakalářská práce, vedoucí práce Ing. Pavel Rudolf, Ph.D., 40 s., Brno, 2009.

[131] Taitel, Y., Dukler, A. E.: A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow, AIChE Journal, vol. 22, no. 1, pp. 47–55., 1976.

[132] Taitel, Y., Dukler, A. E.: A theoretical approach to the Lockhart-Martinelli correlation for stratified flow, Int. J. Multiphase Flow, 2, pp. 591–595, 1976.

[133] Tesař, V.: Mezní vrstvy a turbulence, Vydavatelství ČVUT, 1996, ISBN 80-01-00675-1.

[134] Theofilis, V.: The discrete temporal eigenvalue spectrum of the generalised Hiemenz flow as solution of the Orr-Sommerfeld equation, Journal of Engineering Mathematics, 28, pp. 241–259, 1994.

[135] Thorsness, C. B., Morrisroe, P. E., Hanratty, T. J.: A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave, Chemical engineering Science, 33, pp. 579–592, 1978.

[136] Tsai, Y. S., Grass, A. J., Simons, R. R.: On the spatial linear growth of gravity-capillary water waves sheared by a laminar air flow, Physics of Fluids, 17, DOI: 10.1063/1.2033910, 2005.

[137] Tsao, J.-Ch., Rothmayer, A. P., Ruban, A. I.: Stability of air flow past thin liquid films on airfoils, Computers & Fluids, vol. 26, no. 5, pp. 427–452, 1997.

[138] Ursell, F.: Surveys in mechanics, Ed. G. K. Batchelor, pp. 216, Cambrige University Press, 1956.

[139] User Guide, STAR-CCM+, Version 6.04.016, CD-adapco, 2011

[140] Valenzuela, G. R.: The growth of gravity-capillary waves in a coupled shear flow, J. Fluid Mech., vol. 76, no. 2, pp. 229–250, 1976.

[141] Vlachos, N. A., Paras, S. V., Karabelas, A. J.: Liquid-to-wall shear stress distribution in stratified/atomization flow, Int. J. Multiphase Flow, vol. 23, no. 5, pp. 845–863, 1997.

[142] Yoon, H. S., El-Samni, O. A., Huynh, A. T., Chun, H. H., Kim, H. J., Pham, A. H., Park, I.R.: Effect of wave amplitude on turbulent flow in a wavy channel by direct numerical simulation, Ocean Engineering, 36, pp. 697–707, 2009.

[143] Wallis, G. B.: One-dimensional Two-phase Flow, McGraw-Hill, New York, 1969.

[144] Weideman, J. A. C., Reddy, S. C.: A MATLAB Diferentiation matrix suite, ACM Transaction on Mathematical Software, vol. 26, no. 4, pp. 465–519, 2000.

[145] Weideman, J. A. C., Reddy, S. C.: A MATLAB Diferentiation matrix suite [online], last updated 29th of August 2003, [cit. 18.1.2013], dostupné z
`http://dip.sun.ac.za/~weideman/research/differ.html`

[146] Wilcox, D. C.: Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc., 1998.

[147] Wolf, A., Jayanti, S., Hewitt, G. F.: Flow development in vertical annular flow, Chemical Engineering Science, 56, pp. 3221–3235, 2001.

[148] Wongwises, S.: Interfacial friction factors in countercurrent stratified two-phase flow in nearly-horizontal circular pipe, Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 25, no. 3, pp. 369–377, 1998.

[149] Wongwises, S., Kalinitchenko, V.: Mean velocity distribution in a horizontal air-watter flow, International Journal of Multiphase Flow, 28, pp. 167–174, 2002.

[150] Wongwises, S., Kongkiatwanitch, W.: Interfacial friction factor in vertical upward gas-liquid annular two-phase flow, Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 28, no. 3, pp. 323-336, 2001.

[151] Woodmansee, D. E., Hanratty, T. J.: Mechanism for the removal of droplets from a liquid surface by a parallel air flow, Chemical Engineering Science, 24, pp. 299–307, 1969.

[152] Yecko, P., Zaleski, S., Fullana, J.-M. Viscous modes in two-phase mixing layers, Physics of Fluids, vol. 14, no. 12, pp. 4115–4122, 2002.

[153] Yih, C. S.: Instability due to viscosity stratification, J. Fluid Mech., 27, 337–352, 1967.

[154] Young, A. D.: Boundary layers, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington, DC & BSP Professional Books, London, 1989.

[155] Zhao, H., Liu, H. F., Xu, J. L., Li, W. F.: Experimental study of drop size distribution in the bag breakup regime, Industrial & Engineering Chemistry Research, 50, pp. 9767–9773, 2011.

[156] Zilker, D. P., Cook, G. W., Hanratty, T. J.: Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows, J. Fluid Mech., 82, pp. 29–51, 1977.

[157] Zilker, D. P., Hanratty, T. J.: Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows, J. Fluid Mech., 90, pp. 257–271, 1979.

Publikace autora

[A1] Knotek, S., Jícha, M.: Analýza stability kapalinového filmu. In XXVII. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky, Západočeská univezita v Plzni, 2008, s. 143–146, ISBN 978-80-7043-666-0.

[A2] Knotek, S., Jícha, M.: On the solution of laminar flow instability using Orr-Sommerfeld equation. In Engineering mechanics 2010, Institute of Thermomechanics, AS CR, Praha, 2010, s. 63–64, ISBN 978-80-87012-26-0.

[A3] Knotek, S., Jícha, M.: Modelování a simulace obtékání zvlněného povrchu. In XXIX. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2010, s. 121–124, ISBN 978-80-248-2244-0.

[A4] Knotek, S., Jícha, M.: Introduction to liquid wall film instability. In Colloquium Fluid Dynamics 2010 Proceedings, Institute of Thermomechanics AS CR, Praha, 2010, s. 11-12, ISBN 978-80-87012-27-7.

[A5] Knotek, S., Jícha, M.: Introduction to liquid wall film atomization. In Conference Experimental Fluid mechanics 2010 Conference Proceedings, Technical University of Liberec, 2010, s. 271–276, ISBN 978-80-7372-670-6.

[A6] Knotek, S., Jícha, M.: CFD simulation of flow over a wavy surface. In Engineering mechanics 2011, Book of full texts. 1, Institute of Thermomechanics, Academy of Science of the Czech Republic, Praha, 2011, s. 295–298, ISBN 978-80-87012-33-8.

[A7] Knotek, S., Jícha, M.: Modeling and simulation of flow over a wavy surface. Transaction of the VŠB-Technical university of Ostrava, Mechanical series, 2011, roč. 61, č. 3, 2010, s. 79–84, ISSN 1210-0471.

[A8] Knotek, S., Jícha, M.: On solution of laminar flow instability using Orr-Sommerfeld equation, Acta Technica ČSAV, 2011, roč. 2010, č. 4, s. 383–394, ISSN 0001-7043.

[A9] Knotek, S., Jícha, M.: Criteria of liquid wall film atomization. In 30. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky. Sborník příspěvků, Technická univerzita v Liberci, 2011, s. 97–100, ISBN 978-80-7372-747-5.

[A10] Knotek, S., Jícha, M.: Simulation of flow over a wavy solid surface: Comparison of turbulence models. In Experimental Fluid Mechanics 2011. Jičín, Technical University of Liberec, 2011. s. 747–753, ISBN 978-80-7372-784-0.

[A11] Knotek, S., Jícha, M.: Liquid film instability model using CFD simulations. In 31. Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky. Sborník příspěvků, Vysoké učení technické v Brně, 2012, s. 103–106. ISBN 978-80-214-4529-1.

Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Jednotka	Popis
a	m	Amplituda vlny
A, A^+	–	Konstanta tlumící funkce D_f resp. D_m, def. (3.34) resp. (4.50)
A_L	–	Parametr smykového napětí, def. (4.76)
B	m	Průměr trubice, výška kanálu
Bo	–	Bondovo číslo, def. (2.15)
c	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Rychlost vlny
C_f	–	Součinitel tření, def. (4.60)
C_s	–	koeficient v Jeffreysově hypotéze (angl. sheltering coefficient)
D	m	Charakteristický rozměr
D_f, D_m	–	tlumící funkce turbulentního profilu, def. (3.34), (4.50)
D_h	m	Hydraulický průměr
e	–	Eulerovo číslo
f	–	smykový koeficient
F	–	Složka proudové funkce
Fr	–	Freudeho číslo, def. (4.28)
g	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	Tíhové zrychlení
h	m	Výška kapalinného filmu (vrstvy)
h_p	m	Výška solitární vlny, def. obr. 3.4
h_0	m	Základní tloušťka filmu, def. obr. 3.4
H	m	Výška plynné vrstvy
i	–	Imaginární jednotka
i, j	–	Indexy
k	$\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$	Turbulentní kinetická energie
k_s	m	Parametr pískové drsnosti
K	m	Aditivní konstanta turbulentního profilu
l	–	Metrická funkce, def. (4.38), (4.39)
m	–	Podíl kinematických viskozit plynu a kapaliny
Oh	–	Ohnesorgovo číslo, def. (7.2)
p, P	Pa	Tlak
Q	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$	Objemový průtok na jednotku délky v příčném směru
r	–	Podíl hustot plynu a kapaliny
R_{ij}	–	Reynoldsova napětí
Re	–	Reynoldsovo číslo
$\mathcal{R}$	–	Člen řídící rovnice modelu D*, def. (4.42)
$\Re$	–	Reálná část komplexního čísla
S_{ij}	–	Tenzor rychlosti deformace, def. (D.8)
u, U	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Rychlost ve směru osy x
u_a	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Průměrná rychlost filmu, def. (4.1)

u_s	$m \cdot s^{-1}$	Rychlost filmu na hladině
u_τ	$m \cdot s^{-1}$	Třecí rychlost, def. (3.20)
U_b	$m \cdot s^{-1}$	Průměrná rychlost plynu, def. (4.10)
v, V	$m \cdot s^{-1}$	Rychlost ve směru osy y
$\mathbf{v}$, $\mathbf{V}$	$m \cdot s^{-1}$	Vektor rychlosti
t	s	Čas
T	s	Perioda vlny
We	–	Weberovo číslo, def. (7.1)
x, y, z	m, -	Kartézské souřadnice
α	m^{-1}	Vlnové číslo ve směru osy x
β	m^{-1}	Vlnové číslo ve směru osy z
γ	–	Parametr rychlostního profilu, def. (3.27)
Γ	–	Tvarový parametr rychlostního profilu, def. (4.4)
δ	m	Tloušťka mezní vrstvy
δ_s^+	m	Bezrozměrná tloušťka vazké podvrstvy
δ^*	m	Odtlačovací tloušťka mezní vrstvy
ϵ	$m^2 \cdot s^{-3}$	Rychlost disipace turbulentní energie
θ	°, rad	Fázové posunutí
ϑ	°, rad	Úhel odklonu stěny od vektoru tíhového zrychlení
κ	–	von Kármánova konstanta
λ	m	Vlnová délka
Λ	–	Tvarový parametr Pohlhausenova rychlostního profilu, def. (1.56)
μ	$Pa \cdot s$	Dynamická viskozita
ν	$m^2 \cdot s^{-1}$	Kinematická viskozita
ν_t	$m^2 \cdot s^{-1}$	Turbulentní viskozita
ρ	$kg \cdot m^{-3}$	Hustota
σ	$N \cdot m^{-1}$	Povrchové napětí
τ	Pa	Smykové napětí
ϕ	$m^2 \cdot s^{-1}$	Amplitudová funkce příslušná proudové funkci Ψ
Φ	$m^2 \cdot s^{-1}$	Rychlostní potenciál
Ψ	$m^2 \cdot s^{-1}$	Proudová funkce
ω	s^{-1}	Úhlová frekvence

Dolní index	**Popis**
B	Hodnota veličiny na horní stěně kanálu
BI	Imaginární část amplitudy
BR	Reálná část amplitudy
G	Plyn
I	Imaginární složka veličiny
krit	Kritická hodnota veličiny
L	Kapalina
max	Maximální hodnota veličiny
P	Tlak
R	Reálná složka veličiny
SI	Imaginární část amplitudové veličiny na zvlněném povrchu
SR	Reálná část amplitudové veličiny na zvlněném povrchu
s	Hodnota veličiny na rozhraní
w	Hodnota veličiny na stěně (rozhraní)
WI	Imaginární část amplitudové veličiny na rozhraní
WR	Reálná část amplitudové veličiny na rozhraní

Akcent	Popis
$\bar{}$	Průměrná hodnota veličiny po délce vlny
$'$	Fluktuace, resp. derivace dle y v případě veličin F, R_{ij} a ϕ
$\hat{}$	Amplituda
$^+$	Bezrozměrná veličina
^{1}	Veličina odpovídající posunutí Δx_{P}^1, def. obr. 5.13
^{2}	Veličina odpovídající posunutí Δx_{P}^2, def. obr. 5.13

Zkratka	Popis
CFD	Výpočtová mechanika tekutin
DNS	Metody přímé numerické simulace
K-H	Kelvinova-Helmholtzova nestabilita
O-S	Orrova-Sommerfeldova rovnice
RANS	Časově průměrované Navierovy-Stokesovy rovnice

Seznam obrázků

1.1 Struktura oblak formovaných mechanismem Kelvinovy-Helmholtzovy nestability 7
1.2 Výchozí stav pro K-H nestabilitu 7
1.3 Podmínky K-H nestability 8
1.4 Kritéria Kelvinovy-Helmholtzovy nestability 10
1.5 Závislost rychlosti c_{R} na vlnovém čísle α. Poisseuilleovo proudění; Re=2000. . . . 14
1.6 Závislost rychlosti c_{I} na vlnovém čísle α. Poisseuilleovo proudění; Re=8000. . . . 14
1.7 Amplitudová funkce. Poisseuilleovo proudění, α=1,32; Re=1000 14
1.8 Oblast nestability Poisseuilleova proudění 14
1.9 Křivky neutrální stability mezních vrstev 15
1.10 Blasiův rychlostní profil a jeho druhá derivace 16
1.11 Reálná a imaginární složka amplitudové funkce pro Blasiův profil mezní vrstvy . 16
1.12 Oblast nestability pro Blasiův profil mezní vrstvy 16
1.13 Závislost rychlosti c_I na vlnovém čísle α pro Re=630 a Re=2200 16
1.14 Pohlhausenovy rychlostní profily 17
1.15 Oblasti nestability pro Pohlhausenovy profily mezní vrstvy 17
1.16 Porovnání Blasiova a Pohlhausenova rychlostního profilu 17
1.17 Srovnání oblasti nestability Blasiova a Pohlhausenova rychlostního profilu 17

2.1 Náčrt vlny na povrchu kapalné vrstvy a souřadnicový systém 21
2.2 Závislost fázové rychlosti na vlnové délce 22
2.3 Periodické a solitární vlny jako řešení Kortewegovy-de Vriesovy rovnice. 23

3.1 Mapa režimu vln na tenkém filmu 24
3.2 Mapa režimu vln na tenkém filmu 24
3.3 Mapa režimu vln pro $\mu_{\mathrm{L}} = 30\,\mathrm{cP}$ 25
3.4 Charakteristický tvar tzv. pomalé resp. solitární vlny 26
3.5 Schéma silového působení při vzniku nestabilit 29
3.6 Fyzikální význam veličin $P_{\mathrm{WR}}, P_{\mathrm{WI}}, \tau_{\mathrm{WR}}, \tau_{\mathrm{WI}}$ 30
3.7 Rychlostní profily turbulentní mezní vrstvy 33
3.8 Srovnání modelů turbulentních rychlostních profilů 34

4.1 Schéma problému při řešení integrální metodou 37
4.2 Schéma problému při řešení pomocí Orrovy-Sommerfeldovy rovnice 40
4.3 Modely smykových koeficientů na rozhraní 47
4.4 Modely tloušťky filmu 48

5.1 Výpočtová oblast a souřadnicový systém pro CFD simulace 50
5.2 Průběh tlaku a smykového napětí na zvlněné stěně pro 2D a 3D geometrii 51
5.3 Průběhy tlaku a smykového napětí na zvlněné stěně v porovnání s DNS řešením 52

5.4 Rychlostní profily u_x v přístěnné oblasti získané užitím vybraných RANS modelů turbulence v porovnání s DNS výsledky . . . 53
5.5 Rychlostní profily u_y získané užitím vybraných RANS modelů turbulence v porovnání s DNS výsledky . . . 53
5.6 Vliv hustoty výpočtové sítě na hodnoty tlaku a smykového napětí . . . 54
5.7 Vliv hustoty výpočtové sítě na rychlostní profily . . . 55
5.8 Vliv rychlosti na profil tlaku a smykového napětí . . . 56
5.9 Vliv poměru λ/a na profil tlaku a smykového napětí . . . 56
5.10 Silové účinky tlaku a smykového napětí v závislosti na rychlosti . . . 57
5.11 Silových účinky tlakových a smykových sil . . . 57
5.12 Závislost amplitud fluktuací tlaku resp. smykového napětí, $|\hat{P}|$ resp. $|\hat{\tau}|$, na rychlosti U_b, poměru λ/a a výšce kanálu H . . . 58
5.13 Fázové posunutí a deformace tlakového průběhu . . . 59
5.14 Závislost fázového posunutí tlaku a smykového napětí θ_{P} a θ_τ na H, λ/a a U_b . . . 59
5.15 Závislost amplitudové složky P_{SR} na výšce kanálu H, poměru λ/a a rychlosti U_b v porovnání s analytickým modelem . . . 60
5.16 Závislost amplitudové složky P_{SI} na výšce kanálu H, poměru λ/a a rychlosti U_b . 60
5.17 Závislost složek τ_{SR} a τ_{SI} na výšce kanálu H, poměru λ/a a rychlosti U_b . . . 61
5.18 Aproximace tlakových extrémů v závislosti na výpočtu fázového posunu . . . 63
5.19 Relativní odchylky amplitud výchylek tlaku a smykového napětí od CFD výsledků 63
5.20 Srovnání modelu smykového napětí s měřením Zilker (1977) . . . 64
5.21 Srovnání modelu smykového napětí s měřením viz Abrams (1984) . . . 64
5.22 Srovnání predikce fluktuací smykového napětí s měřením a modelem . . . 65
5.23 Srovnání predikce fluktuací tlaku s jinými modely a měřeními . . . 66

6.1 Predikce rychlosti filmu na hladině v závislosti na tloušťce filmu a maximální rychlosti proudění vzduchu . . . 71
6.2 Závislost rychlosti růstu fluktuací na vlnovém čísle . . . 72
6.3 Oblast stability a vlnových délek maximálního růstu . . . 73
6.4 Oblast stability a vlnových délek maximálního růstu . . . 73
6.5 Predikce kritických rychlostí pro iniciaci nestabilit v porovnání s měřením . . . 74
6.6 Závislost vlnových délek počátečních nestabilit na tloušťce filmu . . . 74
6.7 Závislost fázové rychlosti na vlnové délce v porovnání s analytickým vztahem . . 75

7.1 Schéma sekundární atomizace kapky . . . 77
7.2 Experimentální pozorování solitárních vln a atomizace v závislosti na rychlosti vzduchu a průtoku kapalného filmu . . . 77
7.3 Porovnání atomizačních kritérií v závislosti na vlnové délce . . . 80
7.4 Kritické rychlosti pro vybrané tloušťky filmu v závislosti na vlnové délce . . . 80
7.5 Hodnoty kritického Weberova čísla v závislosti na základní tloušťce filmu . . . 81
7.6 Poměr výšky solitární vlny při atomizaci vůči základní tloušťce filmu . . . 82
7.7 Modely kritických rychlostí pro atomizaci . . . 83
B.1 Mapa režimu vln pro $\mu_{\mathrm{L}} = 8\,\mathrm{cP}$ . . . 103
B.2 Mapa režimu vln pro $\mu_{\mathrm{L}} = 8\,\mathrm{cP}$ . . . 103
C.1 Poloha bodů separace a přilnutí simulovaná vybranými turbulentními modely . . 104
C.2 Ukázka výpočtové sítě . . . 104
C.3 Vliv rychlosti na profil smykového napětí pro $\lambda/a = 50$ . . . 105
C.4 Validace modelů fluktuací smykového napětí pro nízké rychlosti . . . 105
C.5 Validace modelů fluktuací tlaku pro nízké rychlosti . . . 105

Seznam tabulek

1.1 Vlastní hodnoty O-S rovnice pro Poisseuilleovo proudění 19

5.1 Poloha bodů separace a přilnutí dle vybraných turbulentních modelů v porovnání s experimentálními daty a DNS výsledky 51
5.2 Parametry a charakteristiky použité pro analýzu vlivu výpočtové sítě na řešení . 54

Seznam příloh

Příloha A: Pohybové rovnice

Příloha B: Mapy režimů nestabilit

Příloha C: Dodatky CFD simulací

Příloha D: Model k-ϵ V2F

Příloha A: Pohybové rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice pro 2D nestacionární nestlačitelné proudění

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}X \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}Y \tag{A.2}$$

Rovnice kontinuity pro 2D nestacionární nestlačitelné proudění

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{A.3}$$

Odvození pohybových rovnic paralelního proudění
Dosazením paralelního proudění

$$[u, v] = [U(y) + u'(x, y, t), v'(x, y, t)], \tag{A.4}$$

$$p = P(x, y) + p'(x, y, t), \tag{A.5}$$

do rovnic (A.1)-(A.3) obdržíme po zanedbání objemových sil a členů s kvadrátem fluktuačních rychlostí systém

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right), \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0\,. \tag{A.8}$$

Navierovy-Stokesovy rovnice základního proudu degenerují v systém

$$0 = \frac{1}{\rho} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,, \tag{A.9}$$

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\,. \tag{A.10}$$

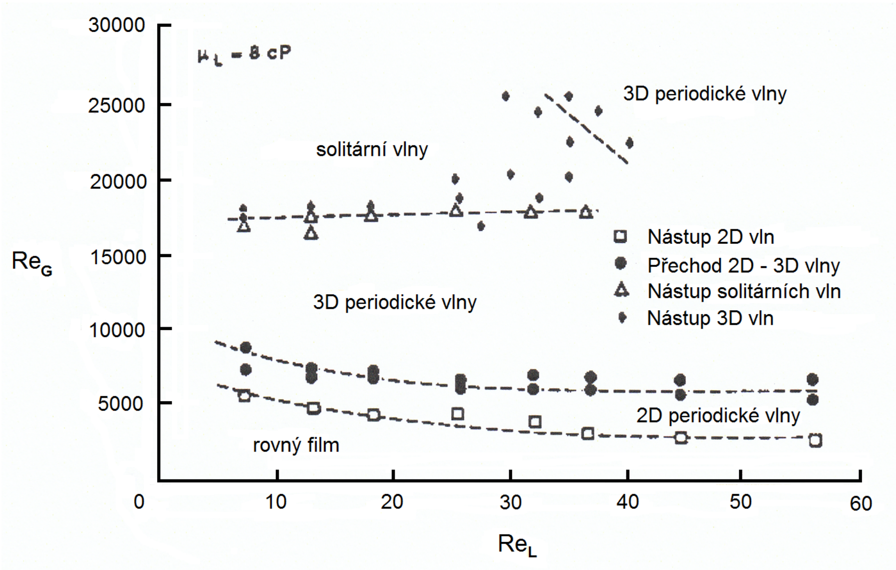
Odečtením (A.9) a (A.10) od (A.6) a (A.7) obdržíme pohybové rovnice paralelního proudění

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = \nu\Delta u', \tag{A.11}$$

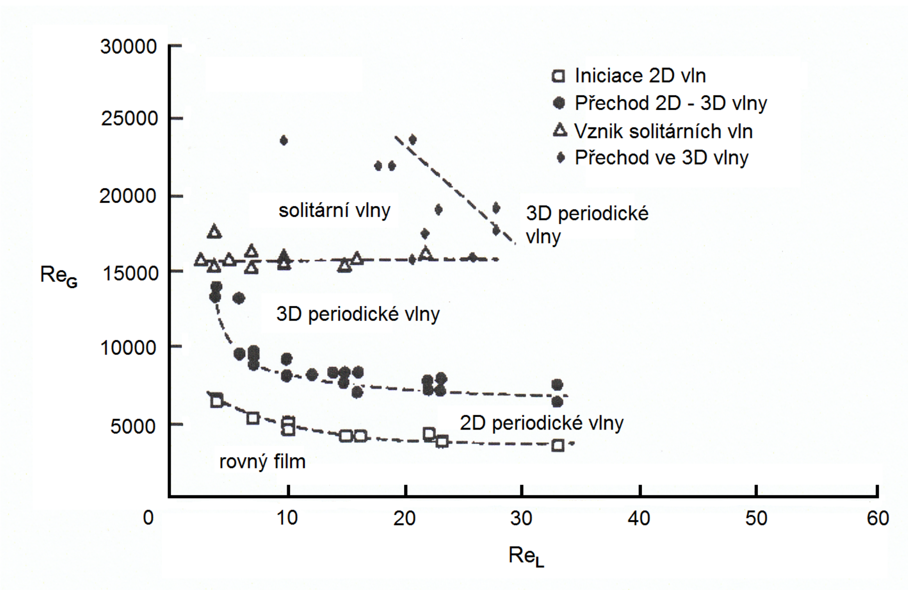
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = \nu\Delta v', \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0\,. \tag{A.13}$$

Příloha B: Mapy režimů nestabilit

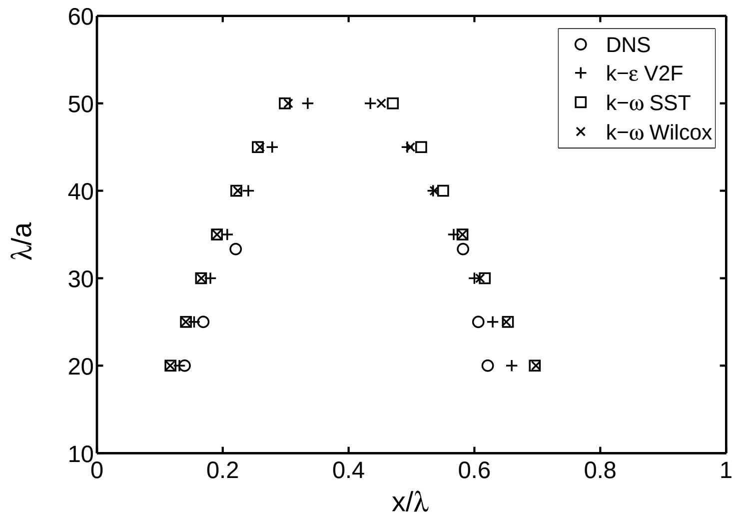


Obrázek B.1: Mapa režimu vln pro $\mu_L = 8\,\mathrm{cP}$. Převzato z [113], upraveno.

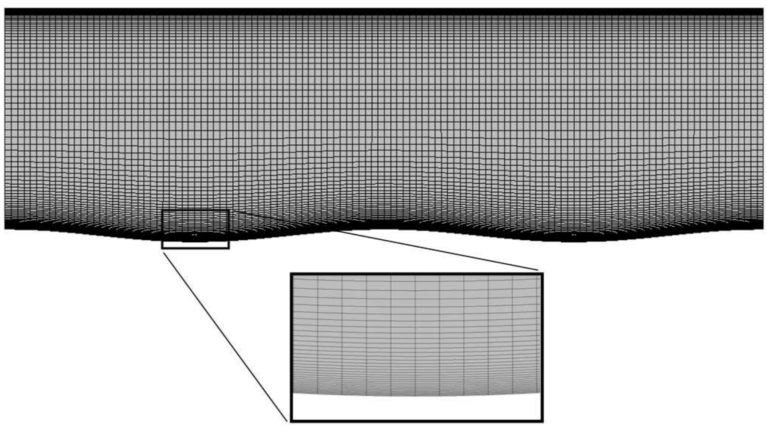


Obrázek B.2: Mapa režimu vln pro $\mu_L = 15\,\mathrm{cP}$. Převzato z [113], upraveno.

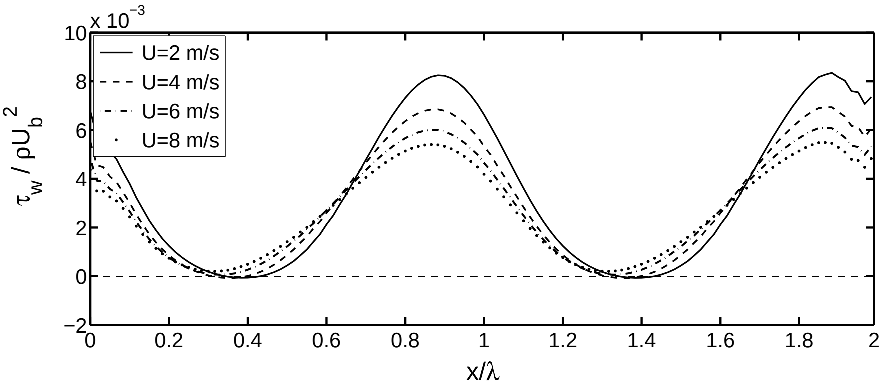
Příloha C: Dodatky CFD simulací



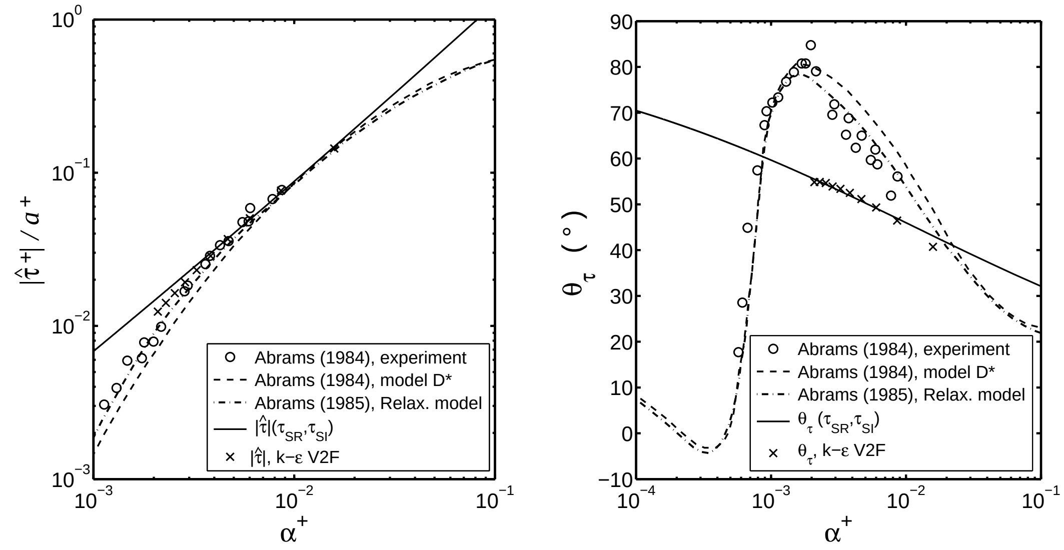
Obrázek C.1: Poloha bodů separace a přilnutí simulovaná pomocí vybraných turbulentních modelů v porovnání s DNS řešením Yoon a kol. (2009) [142]. Simulováno pro H=λ, Re=6760 (H=0,05 m, U_b=2,118 m/s).



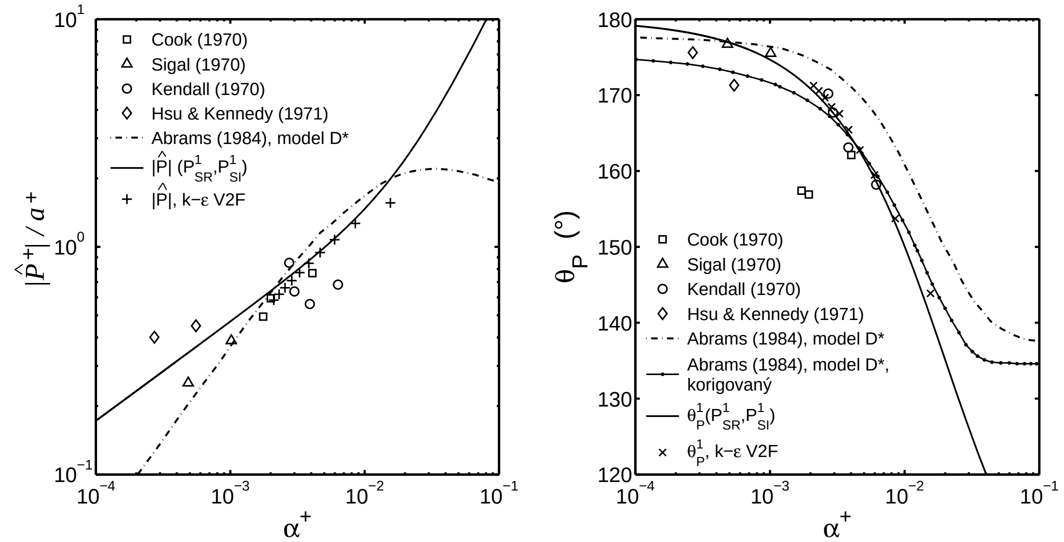
Obrázek C.2: Ukázka výpočtové sítě. H/λ=0,6; λ/a=60.



Obrázek C.3: Vliv střední rychlosti U_b na profil smykového napětí pro H=λ, $\lambda/a = 50$.



Obrázek C.4: Porovnání modelů fluktuací smykového napětí (6.9)–(6.10) pro nízké střední rychlosti U_b s měřením a modely viz [1], [2]. Vykresleno pro H=λ, λ/a=142,86.



Obrázek C.5: Porovnání modelů fluktuací tlaku (6.11)–(6.12) pro nízké rychlosti U_b s modelem D* viz Abrams (1984) [1] a měřeními Kendall [79], Sigal [124], Hsu & Kennedy [68] a Cook [35]. Vykresleno pro H=λ, λ/a=60.

Příloha D: Model k-ϵ V2F

Rovnice modelu převzaté z [74] jsou formulované pro turbulentní kinetickou energii k, rychlost disipace ϵ, turbulentní napětí v normálovém směru $\overline{v_2}$ a jeho redistribuční funkci f_{22}. Rovnice jsou zapsány pomocí Einsteinovy sumačni konvence, ∇^2 značí Laplaceův operátor. Podrobnější implementace modelu v software Star-CCM+ verze 6.04.016 viz [139].

Rovnice turbulentní kinetické energie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j k - \left(\mu + \frac{\rho \nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] = \rho\nu_t(P + P_B) - \rho\epsilon - \frac{2}{3}\left(\rho\nu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho k\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{D.1}$$

Rovnice rychlosti disipace turbulentní energie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j \epsilon - \left(\mu + \frac{\rho \nu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right] = \frac{C^z_{\epsilon_1}}{T_s}\left[\rho\nu_t P - \frac{2}{3}\left(\rho\nu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho k\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] - \frac{C_{\epsilon_2}}{T_s}\rho\epsilon \tag{D.2}$$

Rovnice v_2

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{v_2}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j v_2 - \left(\mu + \frac{\rho \nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\right] = \rho k f_{22} - 6\rho\overline{v_2}\frac{\epsilon}{k} \tag{D.3}$$

Rovnice f_{22}

$$L^2\nabla^2 f_{22} - f_{22} = \frac{1 - C_1}{T_s}\left(\frac{2}{3} - \frac{\overline{v_2}}{k}\right) - C_2\frac{\rho\nu_t P}{\rho k} - 5\frac{\overline{v_2}/k}{T_s} \tag{D.4}$$

Délkové měřítko

$$L = C_L \max\left\{\min\left\{\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \frac{k^{3/2}}{\sqrt{3}C_{\mu_{v2}}\overline{v_2}|S_{ij}|}\right\}, C_\eta\left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}\right\} \tag{D.5}$$

Časové měřítko

$$T_s = \max\left\{\frac{k}{\epsilon}, C_{kT}\left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}\right\} \tag{D.6}$$

Turbulentní viskozita

$$\nu_t = T_s \min\left\{C_{\mu_{std}} k, C_{\mu_{v2}}\overline{v_2}\right\} \tag{D.7}$$

Použité výrazy a konstanty

$$P = S_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad P_B = -\frac{g_i}{\sigma_h}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad C^z_{\epsilon_1} = 1 + 0{,}045\sqrt{k/\overline{v_2}} \tag{D.8}$$

σ_k	σ_ϵ	σ_h	C_{ϵ_1}	C_{ϵ_2}	C_1	C_2	C_L	C_η	C_{kT}	$C_{\mu_{std}}$	$C_{\mu_{v2}}$
1,0	1,3	0,9	1,4	1,9	1,4	0,3	0,023	70,0	6,0	0,09	0,22