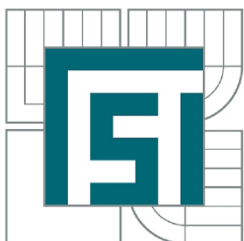




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF POWER ENGINEERING

VYSOKOFREKVENČNÍ PULSACE PŘI PROVOZU TURBÍNY

HIGH-FREQUENCY PULSATIONS OF TURBINE IN OPERATION

DISERTAČNÍ PRÁCE

DOCTORAL THESIS

Autor Práce:

Author

Školitel:

Supervisor

Ing. JIŘÍ KUBÁLEK

Doc. Ing. MILOSLAV HALUZA, CSc.

BRNO 2013

Abstrakt

Tato práce se zabývá problematikou modelování vysokofrekvenčních pulsací v čerpadlových turbínách, které způsobují vysokocyklické namáhání víka, spirály, rozváděcího a oběžného kola. Jsou zde navržena řešení pomocí metody přenosových matic pro trubice s konstantním a kuželovým průřezem. V práci jsou porovnávány varianty válcových a kuželových trubic, při změnách okrajových podmínek. Jsou zde porovnány modely PVE Dlouhé Stráně složené jen z válcových trubic vůči modelu s válcovými a kuželovými trubicemi.

Abstract

This thesis is concentrated on mathematical modeling of high frequency pulsations in pump turbines, which are the source of high-cycle continuous stress of the spiral casing cover, wicket gates and runner. There are proposed the solutions using the methods transfer matrix for the tube with a constant and conical cross-section. The paper compares variations of cylindrical and conical tubes, changes in boundary conditions. There are the models of PSPP Dlouhé Stráně made only of cylindrical tubes comparing to the model with cylindrical and conical tubes

Klíčová slova:

Pulsace, tlak, průtok, dynamika, vysokofrekvenční pulsace, přenosové matice, rychlost zvuku, hydraulické stroje, druhá viskozita,

Key words:

Pulsation, pressure, discharge, flow, dynamics, high-frequency pulsation, transfer matrix, celerity, sound velocity, hydraulic machines, second viscosity

KUBÁLEK, J. *Vysokofrekvenční pulsace při provozu vodní turbíny* Brno: Vysoké učení technické učení v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 77 s. Vedoucí disertační práce doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že dílo je původní, vypracované pouze autorem za podpory Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana.

Poděkování:

Rád bych touto cestou poděkoval všem, kteří mi s touto prací pomáhali. Zejména panu doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za jeho cenné rady a mému vedoucímu panu doc. Ing. Miloslavu Haluzovi, CSc.

Obsah

1	Úvod.....	1
2	Viskozita.....	2
3	Přenosové matice.....	4
3.1	PŘENOSOVÁ MATICE PRO TRUBICE S KONSTANTNÍM PRŮŘEZEM	4
3.1.1	<i>Zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity).....</i>	4
3.1.2	<i>Rovnice silové rovnováhy.....</i>	9
3.1.3	<i>Přenosová matice pro trubici ve tvaru válce.....</i>	11
3.2	PŘENOSOVÁ MATICE PRO TRUBICE VE TVARU KUŽELE	15
3.2.1	<i>Tenzor nevratných napětí.....</i>	15
3.2.2	<i>Vlnová rovnice.....</i>	15
3.2.3	<i>Přenosová matice pro trubice ve tvaru kužele.....</i>	21
4	Porovnání válcové a kuželové trubice	23
4.1	STANOVENÍ VLASTNÍ FREKVENCE	24
4.2	OKRAJOVÉ PODMÍNKY P_Q	24
4.2.1	<i>Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku.....</i>	24
4.2.2	<i>Tvary průtoku při P_Q.....</i>	26
4.2.3	<i>Tvary tlaků při P_Q.....</i>	27
4.3	OKRAJOVÉ PODMÍNKY Q_Q	29
4.3.1	<i>Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku.....</i>	29
4.3.2	<i>Tvary průtoku při Q_Q.....</i>	30
4.3.3	<i>Tvary tlaků při Q_Q.....</i>	31
4.4	OKRAJOVÉ PODMÍNKY P_P	33
4.4.1	<i>Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku.....</i>	33
4.4.2	<i>Tvary průtoku při P_P.....</i>	34
4.4.3	<i>Tvary tlaku při P_P.....</i>	35
4.5	OKRAJOVÉ PODMÍNKY Q_P	37
4.5.1	<i>Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku.....</i>	37
4.5.2	<i>Tvary průtoku při Q_P.....</i>	38
4.5.3	<i>Tvary tlaku při Q_P.....</i>	39
5	Modelování vysokofrekvenčních pulsací.....	41
5.1	MODEL A MĚŘENÍ PVE DLOUHÉ STRÁNĚ	42
5.2	MATEMATICKÝ MODEL PVE DLOUHÉ STRÁNĚ	43
5.2.1	<i>1D model</i>	46
5.2.2	<i>2D model</i>	46
5.2.3	<i>Linearizovaný odpor.....</i>	47
5.2.4	<i>Turbínový 1D.....</i>	49
5.2.5	<i>Čerpadlový 1D</i>	51
5.2.6	<i>Turbínový 2D.....</i>	53
5.2.7	<i>Čerpadlový 2D</i>	55
5.3	VYHODNOCENÍ MĚŘENÝCH POMOCÍ DFT.....	57
6	Závěr.....	60
	Použitá literatura.....	62
	Seznam nejdůležitějších symbolů.....	64

Seznam obrázků.....	66
Seznam tabulek	68
Seznam příloh	69

1 Úvod

Čerpadlové turbíny resp. reakční vodní turbíny, pracují v ustálených podmínkách. Přesto podléhají tlakovým i průtokovým pulsacím. V obvyklých provozních režimech jsou tyto pulsace nízké. Z pohledu životnosti stroje a hluku zanedbatelné. Přesto v některých provozních oblastech vznikají intenzivní tlakové a průtokové pulsace.

Rozlišujeme tři typy tlakových a průtokových pulsací. Vlastní, samobuzené a vynucené. Vlastní kmitání můžeme pozorovat u vodního rázu, při rychlém zavření nebo otevření ventilu. Vírový cop v savce reakční vodní turbíny produkuje samobuzené kmitání, když je stroj provozován mimo optimum.

Vysokofrekvenční pulsace vzniklé při provozu vodní turbíny je možno modelovat jako vynucené. Jsou buzené krátkými tlakovými impulsy od lopatek oběžného kola, které procházejí kolem rozváděcích lopatek. Tento cyklus se během jedné otáčky několikrát opakuje. Je dán otáčkami stroje a všech jejich násobků. Odtud plyne název vysokofrekvenční pulsace. Závažné jsou rezonanční frekvence, kdy vektor vnějšího buzení není kolmý k sdruženému vlastnímu vektoru soustavy. Tento stav je charakterizován dynamickým zesílením v oběžném kole, spirále a přívaděči, na rozváděcích lopatkách nebo na víku stroje viz Habán [1]. V savce turbíny jsou pulsace minimální. Nutnou podmínkou pro vznik pulsací je dostatečně malá mezera mezi oběžnými a rozváděcími lopatkami.

Předpověď těchto jevů umožňuje vybrat správnou kombinaci rozváděcích a oběžných lopatek už v raném stadiu návrhu čerpadlové turbíny.

Dynamika hydraulického systému můžeme být řešena v časové oblasti. Například pomocí programu SIMSEN Nicolet [18]. Pro jednorozměrný model potrubí vychází ze zákonů zachování hmotnosti a hybnosti. Pak model převede na elektricky ekvivalentní (odpory). Tímto způsobem převádí všechny hydraulické prvky (ventily, ...). Může tak sestavit libovolný hydraulický systém. Program pracuje se systémem rovnic sestavených dle Kirchhoffových zákonů. Integraci v časové oblasti dosahuje metodou Runge-Kutta 4 řádu. Celkovou matici soustavy může linearizovat pro analýzu vlastních čísel. Výpočet je nutné optimalizovat s naměřenými hodnotami.

Další možnost, jak řešit dynamiku hydraulického systému je ve frekvenční oblasti pomocí metody přenosových matic. Kdy s použitím Laplaceovi transformace řešíme dvě nelineární parciální diferenciální rovnice podle času a podle souřadnice. Silovou rovnici makroskopické částice a rovnici kontinuity. Předností této metody je tvar pro numerický výpočet.

Aby bylo možné porovnávat vysokofrekvenční pulsace v 1D modelu, tj. sestaveného jen z válcových trubic a 2D modelu tj. složeného z válcových i kuželových trubic, byly nejprve porovnány samostatně válcové a kuželové trubice při různých okrajových podmínkách.

Bylo provedeno porovnání vypočtených a naměřených hodnot.

Dle neustále rostoucího počtu publikací je snižování velikosti tlakových i průtokových pulsací ve vodních strojích stále problém.

Pokud není vztahem popsán symbol, tak je vysvětlen v seznamu použitých symbolů na straně 64.

2 Viskozita

Dynamická viskozita η

Pro snazší pochopení si ji můžeme přiblížit na příkladu dvou rovnoběžných desek, mezi nimi se nachází viskózní tekutina [9]. Spodní deska je v klidu, horní se pohybuje konstantní rychlostí, tak že je mezi deskami stále konstantní vzdálenost. Platí podmínka ulpívání, tj. vrstva přiléhající ke spodní desce je v klidu, vrstva přiléhající k horní desce se pohybuje.

Vlivem vnitřního tření se uvedou do pohybu všechny vrstvy kapaliny s výjimkou vrstvy přiléhající ke spodní a horní desce. Předpokládáme, že jednotlivé vrstvy tekutiny se pohybují ve směru horní desky. Tomuto vzájemnému klouzání tenkých vrstev tekutiny říkáme laminární proudění. Čím vyšší rychlost vrstvy, tím blíže je k horní desce a naopak. Zavedením osy x , tj. kolmá na spodní desku a osy y , tj. rovnoběžná s pohybem horní desky. Potom myšlená jednotková plocha mezi jednotlivými vrstvami charakterizuje odpor, který klade tekutina vzájemnému pohybu.

Je to třecí síla, která vznikne mezi dvěma rovnoběžnými vrstvami proudící kapaliny se styčnou plochou 1m^2 , při rozdílu rychlostí 1m.s^{-1} .

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dv}{dy} \dots \text{gradient rychlosti v kolmém směru} \quad (1)$$

τ ... tečné napětí, η ... dynamická viskozita

Kinematická viskozita ν

Její název vychází z toho, že v jejím rozměru jsou kinematické veličiny (dráha a čas). Jak uvádí [20] kinematická viskozita je uměle zavedená veličina, protože se často v mnoha vztazích vyskytuje poměr η/ρ .

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

S narůstající teplotou se snižuje.

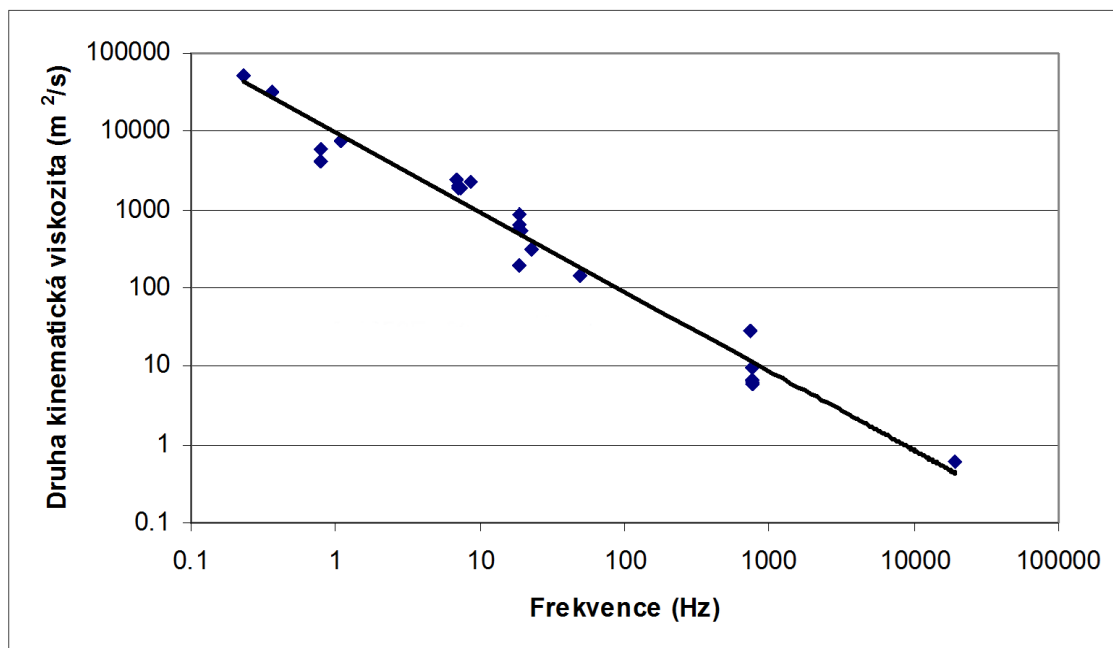
Druhá viskozita

- **Ztráty**

Ztráty v kapalině způsobené druhou viskozitou souvisí se stlačitelností kapaliny. Pro nestlačitelnou kapalinu jsou nulové. Při stacionárním průtoku bez tlakových pulsací jsou ztráty od 2. viskozity zanedbatelně malé vůči ztrátám třecím. Význam druhé viskozity je pouze pro pulsace ve stlačitelné tekutině.

Frekvence

Jak je uvedeno v [16] druhá viskozita je funkcí frekvence. Toto tvrzení má velký dopad pro matematický model tenzoru nevratného napětí, definovaného vztahem (39). Lze ho využít pro řešení vynuceného kmitání buzeného harmonickou funkcí. Pro přechodové kmitání kapaliny není vhodné.



Obr. 1 Závislost mezi 2. kinematickou viskozitou a frekvencí [15]

Experimentálně určený vztah (3) podle [1] pro 2. kinematickou viskozitu.

$$\xi = \frac{\xi_H}{fr} \quad \xi_H \dots \text{pro vodu je } 9800 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, \quad (3)$$

kde: ξ ... 2. kinematická viskozita, fr ... frekvence

- **Zavedení 2. dynamické viskozity**

V rovnici silové rovnováhy je definovaný tenzor nevratných napětí Π_{ij} vztahem (75) a po derivaci podle ∂x_j :

$$\frac{\partial \Pi_{ij\infty}}{\partial x_j} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + b \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (4)$$

Ze vztahu vyplývá, že ztráty od druhé viskozity se lineárně zvyšují s divergencí rychlosti. Ztráty souvisí se stlačitelností. Pro nestlačitelnou tekutinu jsou nulové. U stacionárního nepulsujícího průtoku je účinek ztrát od druhé viskozity zanedbatelný vůči ztrátám třecím. Druhá viskozita je důležitá při řešení úloh se stlačitelnou tekutinou.

- **Stanovení 2. dynamické viskozity**

Máme dva způsoby jak stanovit 2. viskozitu. Z porovnání naměřených a vypočtených tlakových pulsací. První metoda porovnává shodnost vypočtených a naměřených vlastních čísel. Druhý postup porovnává vynucené tlakové pulsace. Podrobněji je problematika vysvětlena v [1].

3 Přenosové matice

Přenosové matice umožňují sestavení frekvenčních rovnic i pro komplikované pružné soustavy v přehledné a zhuštěné formě. Jejich tvar je vhodný pro numerické výpočty.

Při odvození vycházíme ze zákona zachování hmotnosti (rovnice kontinuity) a zákona zachování hybnosti (silové rovnice rovnováhy makroskopické částice). Problematikou přenosových matic se zabývají následující práce [1], [2], [17], [16]. Při řešení ve frekvenční oblasti uvažujeme malé změny průtoku, pak můžeme linearizovat rovnice pomocí Laplaceovi transformace podle času a souřadnice.

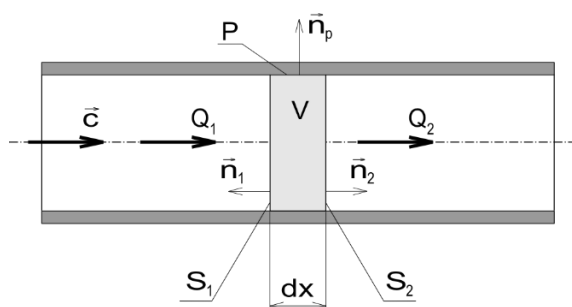
Druhá viskozita představuje frekvenčně závislé tlumení. Umožňuje numerické modelování reálných hodnot tlakových i průtokových pulsací.

Význam tlumení materiálu trubice se nejvíce projevuje u poddajných materiálů.

3.1 Přenosová matice pro trubice s konstantním průřezem

3.1.1 Zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity)

Vycházíme ze zákona zachování hmotnosti makroskopické částice ve vytknutém objemu V . Následující odvození je podrobně popsáno v práci [17], kde se autor odkazuje na [4], [5].



Obr. 2 Vytknutý element dx pro odvození rovnice kontinuity

$$\Delta m = \text{konst.} \quad (5)$$

Δm ... změna hmotnosti

$$\Delta m = \rho \Delta V. \quad (6)$$

$$\Delta V = S(x) dx. \quad (7)$$

ρ ... hustota kapaliny, ΔV ... změna objemu, $S(x)$... plocha kapaliny v místě x podle Obr. 2.

Změnu hybnosti (5) derivujeme podle času

$$\frac{d\Delta m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\rho \Delta V) = 0. \quad (8)$$

Rovnici (8) rozepíšeme jako součin dvou funkcí

$$\frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d(\Delta V)}{dt} = 0. \quad (9)$$

Pomocí Gauss-Ostrogradského věty rozepíšeme $d(\Delta V)/dt$.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \frac{d}{dt} V(t) = \int_{V(t)} \operatorname{div} \mathbf{c} dV = \oint_{S(V)} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = Q. \quad (10)$$

Předpokládáme: $P \dots$ nepropustná pružná plocha stěny trubice, S_1 a $S_2 \dots$ plochy kterými protéká kapalina, $Q \dots$ průtok, $\mathbf{n} \dots$ jednotkový vektor vnější normály, $\mathbf{c} \dots$ rychlost kapaliny

Plocha S je složená: $S_1 \cup S_2 \cup P$.

$$\oint_S \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS. \quad (11)$$

S ohledem na orientaci jednotkového vektoru vnější normály podle Obr. 2 a integrací přes plochu S dostaneme (12)

$$\oint_S \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = -c_1 S_1 + c_2 S_2 + \int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS = -Q_1 + Q_2 + \int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS. \quad (12)$$

Po dosazení (12) do (9) získáme (13)

$$\frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \left(-Q_1 + Q_2 + \int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS \right) = 0. \quad (13)$$

Pro velmi malé elementy dx platí (14)

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad \Rightarrow \quad Q_2 - Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} dx. \quad (14)$$

Dosazením (14) do (12) obdržíme (15)

$$\frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS \right) = 0. \quad (15)$$

Vyjádření hustoty kapaliny ρ prostřednictvím tlaku p

$$dp = \frac{K}{\rho} d\rho \quad ; v_0^2 = \frac{K}{\rho}, \text{ kde} \quad (16)$$

$v_0 \dots$ rychlost zvuku v kapalině (šíření tlakových vln). $K \dots$ modul pružnosti kapaliny. Rovnici (16) vynásobíme $1/dt$.

$$\frac{dp}{dt} = v_0^2 \frac{d\rho}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{v_0^2} \frac{dp}{dt}. \quad (17)$$

Při uvažování rychlosti zvuku v kapalině dle (17) můžeme upravit rovnici (15) a dosazením ze (7) vznikne vztah (18)

$$\frac{S(x)}{v_0^2} \frac{dp}{dt} + \rho \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS \right) = 0. \quad (18)$$

Integrací přes element trubice dostaneme rovnici kontinuity ve tvaru

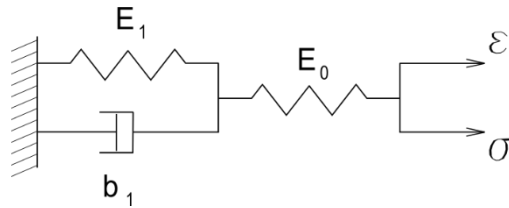
$$\frac{S(x)}{v_0^2} \frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \frac{\left(\int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS \right)}{dx} = 0. \quad (19)$$

Kde: $\int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_p dS$ vyjadřuje průtok přes plochu trubice. Stěny trubice jsou nepropustné, deformovatelné, jedná se malé změny. Pokud bude trubice absolutně tuhá (nedochází k deformacím), bude rychlost šíření tlakových vln nulová. Jak uvádí Habán [1], hodnota deformace poddajnosti trubice se řádově shoduje s poddajností kapaliny. Po Laplaceově transformaci v rovnice kontinuity (18) dostaneme (20):

$$\left. \begin{aligned} L \left\{ S(x) \frac{1}{v_0^2} \frac{dp}{dt} \right\} &= S \frac{1}{v_0^2} s \sigma_L \\ L \left\{ \rho \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} &= \rho \frac{\partial q}{\partial x} \\ L \left\{ \rho \frac{\int_P \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS}{dx} \right\} &= \rho \frac{\int_P \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} dS}{dx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S}{v_0^2} s \sigma_L + \rho \frac{\partial q}{\partial x} + \rho \frac{\int_P \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{n}_p dS}{dx} = 0. \quad (20)$$

Kde: σ_L ... Laplaceův obraz tlaku, s ... parametr Laplaceovy transformace.

Abychom mohli lépe popsat tlumení, a deformaci v materiálu trubice zavedeme si model standardního tělesa podle Obr. 3



Obr. 3 Model standardního tělesa

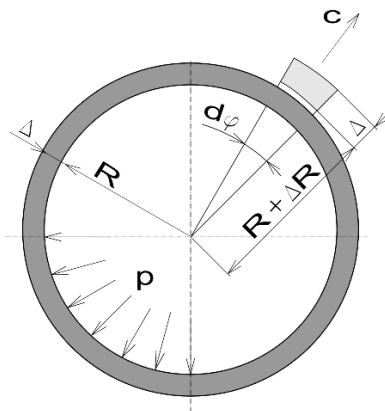
V modelu předpokládáme jen jednoosou napjatost. Ze silové rovnováhy a deformačních vlastností modelu můžeme zapsat (napětí podle Hookova zákona a celkovou poměrnou deformaci).

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \quad \sigma = \varepsilon_0 E_0, \quad \sigma = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_1 b_1 = \varepsilon_1 E_1 + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} b_1. \quad (21)$$

Po Laplaceově transformaci rovnic (21) podle času a vyjádření si ε_0 a ε_1 můžeme vyjádřit napětí σ , kde: b_1 ... tlumení (materiálová konstanta) trubice.

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\varepsilon}_0 E_0, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\varepsilon}_1 E_1 + s b_1 \tilde{\varepsilon}_1, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\varepsilon} \frac{E_0 (E_1 + s b_1)}{E_1 + s b_1 + E_0}. \quad (22)$$

Vyjádření rychlosti v závislosti na změně poloměru trubice



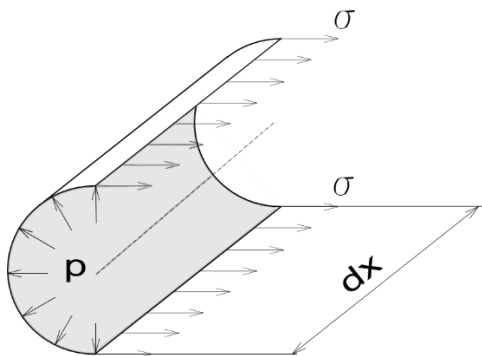
Obr. 4 Závislost změny poloměru trubice na rychlosti c

Vyjádření rychlosti v závislosti na změně poloměru trubice:

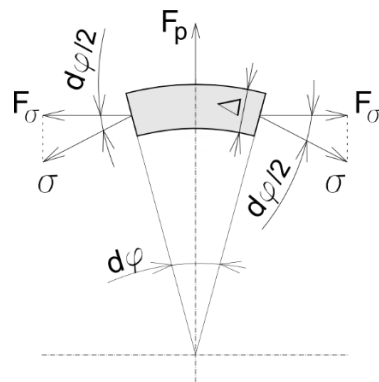
$$c = \frac{\partial \Delta R}{\partial t} = R \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (23)$$

Provedeme Laplaceovu transformaci rychlosti a vyjádříme si obraz transformace epsilon

$$L\{c\} = L\left\{R \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right\} = R s \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{c}}{R s}. \quad (24)$$



Obr. 5 Silová rovnováha elementu trubice



Obr. 6 Rozložení sil na elementu trubice

Složením sil od napětí F_σ a vnitřního přetlaku trubice F_p dle Obr. 6 získáme setrvačnou sílu F_s

$$F_s = F_p + F_\sigma, \quad (25)$$

Rozepsání sil

$$F_s = m \frac{d\Delta R^2}{dt^2}, \quad F_p = R p d\varphi, \quad F_\sigma = -2 \sin \frac{d\varphi}{2} \sigma \Delta. \quad (26)$$

Pro malé úhly φ si zavedeme zjednodušení (27)

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}. \quad (27)$$

Zjednodušení funkce sinus plyne z Taylorovy řady, lze ho použít jen pro malé úhly. Po aplikaci (27) na (26) a rozepsání (25)

$$m \frac{d\Delta R^2}{d^2t} = R p d\varphi - \sigma \Delta d\varphi. \quad (28)$$

Po rozepsání hmotnosti můžeme rovnici (28) zkrátit podle $d\varphi$ a vyjádřit si $\frac{dR^2}{dt^2}$ jako derivaci rychlosti podle času

$$\rho_t \Delta R \frac{dc}{dt} = R p - \sigma \Delta, \text{ kde: } \rho_t \dots \text{ hustota trubice.} \quad (29)$$

Na rovnici (29) aplikujeme Laplaceovu transformaci podle času

$$\rho_t \Delta R s \tilde{c} = R \sigma_L - \tilde{\sigma} \Delta. \quad (30)$$

Nyní můžeme dosadit z (24) do (22) a doplnit Laplaceův obraz napětí v trubici $\tilde{\sigma}$ v rovnici (30)

$$\rho_t \Delta R s \tilde{c} = R \sigma_L - \frac{\tilde{c}}{R s} \frac{E_0 (E_1 + s b_1)}{E_0 + E_1 + s b_1} \Delta \Rightarrow \tilde{c}. \quad (31)$$

Po vyjádření obrazu rychlosti dosadíme do rovnice kontinuity (20)

$$\frac{S}{v_0^2} s \sigma_L + \rho \frac{\partial q}{\partial x} + \rho \frac{\int_P \frac{R^2 \sigma_L s (E_0 + E_1 + s b_1)}{R^2 \rho_t \Delta s^2 (E_0 + E_1 + s b_1) + E_0 \Delta (E_1 + s b_1)} \mathbf{n}_p dS}{dx} = 0. \quad (32)$$

Výraz v závorce vytkneme před integrál, není závislý na ploše dS . Řešením integrálu získáme plochu pláště a po vydělení elementární délkou dx máme obvod trubice. Uvažujeme plochu $S = \pi R^2$.

$$S \frac{1}{v_0^2} s \sigma_L + \rho \frac{\partial q}{\partial x} + \rho \frac{R^2 \sigma_L s (E_0 + E_1 + s b_1) 2 \pi R}{R^2 \rho_t \Delta s^2 (E_0 + E_1 + s b_1) + E_0 \Delta (E_1 + s b_1)} = 0. \quad (33)$$

Rovnici kontinuity (33) můžeme zjednodušit vytknutím a dosazením za S plochu kruhu.

$$\rho \frac{\partial q}{\partial x} + S s \sigma_L \left(\frac{2 \rho R (E_0 + E_1 + s b_1)}{R^2 \rho_t \Delta s^2 (E_0 + E_1 + s b_1) + E_0 \Delta (E_1 + s b_1)} + \frac{1}{v_0^2} \right) = 0. \quad (34)$$

Výraz v závorce můžeme označit jako

$$\frac{1}{v^2} = \frac{2 \rho R (E_0 + E_1 + s b_1)}{R^2 \rho_t \Delta s^2 (E_0 + E_1 + s b_1) + E_0 \Delta (E_1 + s b_1)} + \frac{1}{v_0^2}. \quad (35)$$

V odvození je uvažována setrvačnost trubice. Z praktického hlediska modelování vysokofrekvenčních pulsací je možné toto zanedbat. Rovnicí (35) jsme si zavedli **komplexní rychlost zvuku obsahující tlumení v materiálu trubice**. Po její aplikaci do rovnice (34) získáme **výslednou rovnici kontinuity**.

$$\rho \frac{\partial q}{\partial x} + S s \sigma_L \frac{1}{v^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho v^2}{S} \frac{\partial q}{\partial x} + s \sigma_L = 0. \quad (36)$$

3.1.2 Rovnice silové rovnováhy

Vycházíme z Navier-Stokesovi rovnice se zanedbáním tíhových sil.

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_j - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (37)$$

Kde: $c \dots$ rychlost, $p \dots$ tlak, $t \dots$ čas, $\Pi_{ij} \dots$ tenzor nevratných napětí vyjadřující vliv viskózních sil.

Následující odvození se opírá o [17]. Rovnici (37) integrujeme přes vytknutý elementární objem ΔV při rozpětí. Zrychlení v prvním členu rozepíšeme jako substanciální derivaci

$$\int_{\Delta V} \rho \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + c_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right) dV - \int_{\Delta V} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = 0. \quad (38)$$

Tenzor nevratných napětí představuje disipaci tlakové ztráty, na elementu kapaliny. Tenzor nevratných napětí si zavedeme podle [19].

$$\Pi_{ij} = 2 \eta c_{ij} + \Theta \delta_{ij} c_{kk}, \quad c_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right), \quad c_{kk} = \frac{\partial c_k}{\partial x_k}, \quad (39)$$

Kde: $\eta \dots$ dynamická viskozita, $c_{ij} \dots$ tenzor rychlosti deformace, $c_{kk} \dots$ divergence značící zřidlivost rychlostního pole, $\Theta \dots$ dynamická druhá viskozita, její význam se projeví se změnou makroskopické částice, jak píše [19]. Hlavně u vyšších frekvencí se projevují účinky druhé viskozity tlakovými a průtokovými pulsacemi.

Z (39) dosazením c_{ij} , c_{kk} a derivací podle $\frac{\partial}{\partial x_j}$ obdržíme (40)

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left(\frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \Theta \delta_{ij} \frac{\partial^2 c_k}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (40)$$

Zavedeme si (41) abychom zjednodušili tenzor nevratného napětí (40).

$$\Theta \delta_{ij} \frac{\partial^2 c_k}{\partial x_i \partial x_k} = \Theta \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (41)$$

Po roznásobení a vytknutí získáme (42)

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\eta + \Theta) \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (42)$$

Rovnici (43) získáme dosazením (38) do (36)

$$\int_{\Delta V} \rho \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + c_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right) dV - \int_{\Delta V} \left(\eta \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\eta + \Theta) \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = 0. \quad (43)$$

Provedeme integraci, přičemž $c_j \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$ zanedbáme, jelikož rychlost c je zanedbatelná vzhledem k rychlosti zvuku. Část s paměťovou funkcí Γ je odvozena v [4].

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \rho (2\nu + \xi) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \rho \frac{\nu^2}{R^4} \int_0^t \Gamma(t - \tau) Q(\tau) d\tau + S \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (44)$$

kde: ν ... kinematická viskozita, ξ ...druhá (objemová) kinematická viskozita, τ ... Laplaceův obraz času, Γ ... bezrozměrná paměťová funkce, který představuje ztráty vlivem nestacionárního rychlostního profilu. Jak uvádí [1], má značný vliv pro nestacionární proudění viskózních kapalin (oleje), nebo při proudění v kapilárách. V běžné technické praxi při proudění vody je její význam zanedbatelný ve srovnání s vlivem druhé viskozity.

$$\frac{\nu^2}{R^4} \int_0^t \Gamma(t - \tau) Q(\tau) d\tau, \dots \text{představuje vliv nestacionárního rychlostního profilu.}$$

Roznásobením $1/\rho$ (44) a úpravě druhé derivace průtoku získáme (45)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - (2\nu + \xi) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right] + \frac{\nu^2}{R^4} \int_0^t \Gamma(t - \tau) Q(\tau) d\tau + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (45)$$

Provedeme Laplaceovu transformaci podle času:

$$s q - (2\nu + \xi) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial q}{\partial x} \right] + \frac{\nu^2}{R^4} \psi q + \frac{S}{\rho} \frac{\partial \sigma_L}{\partial x} = 0, \quad (46)$$

kde: ψ ... vyjadřuje ztráty vlivem laminárního nestacionárního rychlostního profilu, odvozeno [4], q ... Laplaceův obraz průtoku. Z rovnice kontinuity (36), kde je zavedena komplexní rychlost zvuku, si vyjádříme $\frac{\partial q}{\partial x}$ a dosadíme do Navier-Stokesovi rovnice (46):

$$s q - (2\nu + \xi) \left[-\frac{S}{\rho} \frac{1}{\nu^2} s \frac{\partial \sigma_L}{\partial x} \right] + \frac{\nu^2}{R^4} \psi q + \frac{S}{\rho} \frac{\partial \sigma_L}{\partial x} = 0. \quad (47)$$

Provedeme roznásobení závorek, vytknutí $\frac{\partial \sigma_L}{\partial x}$ a q . Dostáváme **výsledný tvar pohybové rovnice** (48), kterou použijeme pro odvození přenosové matice pro tlakové a průtokové pulsace s konstantním průřezem.

$$\left(s + \frac{\nu^2}{R^4} \psi \right) q + \left[(2\nu + \xi) \frac{S}{\rho} \frac{1}{\nu^2} s + \frac{S}{\rho} \right] \frac{\partial \sigma_L}{\partial x} = 0. \quad (48)$$

3.1.3 Přenosová matice pro trubici ve tvaru válce

Řešením soustavy dvou diferenciálních rovnic tj. rovnice kontinuity (36) a pohybové rovnice (48), získáme přenosovou matici. Přenosová matice popisuje přenos stavového vektoru od počátku trubice $x = 0$ po délce $x = L$.

$$\frac{\rho v^2}{S} \frac{\partial q}{\partial x} + s \sigma_L = 0. \quad (36)$$

$$\left(s + \frac{v^2}{R^4} \psi \right) q + \left[(2v + \xi) \frac{S}{\rho} \frac{1}{v^2} s + \frac{S}{\rho} \right] \frac{\partial \sigma_L}{\partial x} = 0. \quad (48)$$

Pro usnadnění dalšího výpočtu si zavedeme následující označení: A, B, C

$$A = \frac{S}{\rho} + (2v + \xi) \frac{s S}{\rho} \frac{1}{v^2}, \quad B = s + \frac{v^2}{R^4} \psi, \quad C = \frac{v^2 \rho}{S}. \quad (49)$$

Přičemž platí vztah (50) vyjadřující ztráty vlivem laminárního nestacionárního rychlostního profilu. Odvozeno v [4].

Kde: $J \dots$ Besselova funkce

$$\psi(s) = \frac{R^4}{v^2} \frac{2s J_1 \left(R i \sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{2s J_1 \left(R i \sqrt{\frac{s}{v}} \right) - R i \sqrt{\frac{s}{v}} J_0 \left(R i \sqrt{\frac{s}{v}} \right)}. \quad (50)$$

Dosazením ψ do konstanty B (49), ji můžeme vyjádřit jako (51)

$$B = s \left[1 + \frac{2J_1 \left(R i \sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{2s J_1 \left(R i \sqrt{\frac{s}{v}} \right) - R i \sqrt{\frac{s}{v}} J_0 \left(R i \sqrt{\frac{s}{v}} \right)} \right]. \quad (51)$$

Poté můžeme přepsat rovnici kontinuity (36) do podoby (52) a pohybovou rovnici (48) do tvaru (53)

$$C \frac{\partial q}{\partial x} + s \sigma_L = 0. \quad (52)$$

$$B q + A \frac{\partial \sigma_L}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Převedením rovnic (52) a (53) do maticového tvaru a vyjádření si neznámé, získáme

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & s \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Vypočítáme inverzní matici

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix} = - \frac{1}{AC} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Po roznásobení matic a výpočtu determinantu můžeme psát matice (56)

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Pro zjednodušení matic (56) si zavedeme stavový vektor $\mathbf{u}$ a matici $\mathbf{U}$ (57)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} q \\ \sigma_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Zjednodušení (57) aplikujeme na (56) a upravíme do (58)

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (58)$$

Po Laplaceově transformaci podle souřadnice vztahu (58) získáme (59)

$$\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(0, s). \quad (59)$$

Po vyknutí a vyjádření si obrazu Laplaceovi transformace dostaneme (60)

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{E} \cdot \varepsilon + \mathbf{U})^{-1} \cdot \mathbf{u}(0, s). \quad (60)$$

Provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci

$$\mathbf{u}(x, s) = L^{-1} \left\{ (\mathbf{E} \cdot \varepsilon + \mathbf{U})^{-1} \right\} \cdot \mathbf{u}(0, s). \quad (61)$$

(61) přepíšeme do maticového tvaru (62)

$$\mathbf{u}(x, s) = L^{-1} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon + \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\} \cdot \mathbf{u}(0, s). \quad (62)$$

Po úpravě

$$\mathbf{u}(x, s) = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & \varepsilon \end{bmatrix}^{-1} \right\} \cdot \mathbf{u}(0, s). \quad (63)$$

Vypočteme inverzní matici

$$\mathbf{u}(x,s) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 - \frac{B s}{A C}} \begin{bmatrix} \varepsilon & -\frac{s}{C} \\ -\frac{B}{A} & \varepsilon \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathbf{u}(0,s). \quad (64)$$

Zavedeme konstanty

$$\gamma = \frac{s}{C}, \quad \mu = \frac{B}{A}, \quad \lambda^2 = \gamma \mu = \frac{B s}{A C}. \quad (65)$$

Po aplikaci konstant (65) na (64) získáme (66)

$$\mathbf{u}(x,s) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \begin{bmatrix} \varepsilon & -\gamma \\ -\mu & \varepsilon \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathbf{u}(0,s). \quad (66)$$

Po úpravě

$$\mathbf{u}(x,s) = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \lambda^2} & \frac{-\gamma}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \\ \frac{-\mu}{\varepsilon^2 - \lambda^2} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathbf{u}(0,s). \quad (67)$$

Zpětná Laplaceova transformace jednotlivých členů (67) pomocí rozvoje

$$L^{-1} \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \right\} = \frac{\lambda}{2\lambda} e^{\lambda x} + \frac{-\lambda}{2(-\lambda)} e^{-\lambda x} = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2} = \cosh(\lambda x). \quad (68)$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{-\gamma}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \right\} &= -\gamma L^{-1} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \right\} = -\gamma \left[\frac{1}{2\lambda} e^{\lambda x} + \frac{1}{2(-\lambda)} e^{-\lambda x} \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{\lambda} \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} = -\frac{\gamma}{\lambda} \sinh(\lambda x). \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{-\mu}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \right\} &= -\mu L^{-1} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 - \lambda^2} \right\} = \mu \left[\frac{1}{2\lambda} e^{\lambda x} + \frac{1}{2(-\lambda)} e^{-\lambda x} \right] = \\ &= -\frac{\mu}{\lambda} \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} = -\frac{\mu}{\lambda} \sinh(\lambda x). \end{aligned} \quad (70)$$

Jednotlivé členy Laplaceovy transformace (68), (69), (70) dosadíme zpět do upravené inverzní matice (67)

$$\mathbf{u}(x,s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cosh(\lambda x) & -\frac{\gamma}{\lambda} \sinh(\lambda x) \\ -\frac{\mu}{\lambda} \sinh(\lambda x) & \cosh(\lambda x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}(x,s)} \cdot \mathbf{u}(0,s). \quad (71)$$

Výsledný tvar přenosové matice trubice s konstantním průřezem (72) v sobě zahrnuje vlivy: druhé viskozity, materiálu trubice jako modelu standardního tělesa, vliv nestacionárního rychlostního profilu

$$\mathbf{P}(x,s) = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda x) & -\frac{\gamma}{\lambda} \sinh(\lambda x) \\ -\frac{\mu}{\lambda} \sinh(\lambda x) & \cosh(\lambda x) \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Pokud uvedeme přenosovou matici ve tvaru (72), můžeme přepsat změnu stavového vektoru v místě x-ové souřadnice do tvaru (73).

Vztah (73) vyjadřuje změnu stavového vektoru mezi počátkem trubice a stavovým vektorem v x-ové souřadnici trubice.

$$\mathbf{u}(x,s) = \mathbf{P}(x,s) \cdot \mathbf{u}(0,s). \quad (73)$$

Dosadíme-li za x délku trubice, obdržíme přenos trubice.

3.2 Přenosová matice pro trubice ve tvaru kužele

3.2.1 Tenzor nevratných napětí

Touto problematikou se dlouhodobě zabývali Pochylý, Habán [5], [6]. Výchozí vztah (74) pro tenzor nevratného napětí Π_{ij} obsahuje jak základní kinematickou viskozitu, tak druhou viskozitu, ve které je zahrnuta stlačitelnost kapaliny.

$$\Pi_{ij} = 2\eta c_{ij} + \delta_{ij} \int_0^t \Theta(t-\tau) c_{kk}(\tau) d\tau, \quad (74)$$

kde: η ...dynamická viskozita, c_{ij} ... tenzor rychlosti deformace (předpokládá se, že dochází při nevratném ději k malým změnám teploty), δ_{ij} ... Kroneckerovo delta, t ... čas, τ ... integrační proměnná, c_{kk} ... divergence udávající zřídlivost rychlostního pole, Θ ... druhá dynamická viskozita související s objemovou pamětí kapaliny, tzn., že její změny nezávisí na účinku vnějšího prostředí, ani na charakteru přetvoření [19].

Ve frekvenční oblasti zavádí [6] pro Π_{ij} , experimentálně ověřené vztahy (75)

$$\Pi_{ij\omega} = 2\eta c_{ij\omega} + \delta_{ij} \frac{k}{\omega} c_{kk\omega}, \quad k = 5 \text{ Pa s}, \quad c_{ij\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right), \quad c_{kk\omega} = \frac{\partial c_k}{\partial x_k}. \quad (75)$$

Zde je patrná závislost druhé dynamické viskozity na frekvenci.

Kde je k ... experimentálně zjištěná konstanta.

$$\xi = \frac{k}{\rho \omega}, \quad \Theta = \frac{k}{\omega}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (76)$$

kde: ξ ... druhá kinematická viskozita, ν ... kinematická viskozita, ρ ... hustota.

3.2.2 Vlnová rovnice

Problematika odvození vlnových rovnic je řešena v [5], kde autoři Pochylý a Habán uvádějí odvození vztahu (77). Výchozí vztahy byly rovnice kontinuity a Navier-Stokesovy rovnice. V silové rovnici rovnováhy předpokládali u tenzoru nevratného napětí objemovou paměť kapaliny. Z nelineární vlnové rovnice pro šíření tlakové vlny, vznikne lineární (77), při zanedbání nelineárních členů.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - 2\frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta p) - \int_0^t \frac{1}{\rho} \Theta(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p) d\tau - \nu^2 \Delta p = 0, \quad \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (77)$$

kde: p ... tlak, Δ ... Laplaceův operátor, ν ... rychlost zvuku.

$$\int_0^t \Theta(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p) d\tau. \quad (78)$$

(78) je konvoluční integrál, který vyjadřuje vliv druhé viskozity.

V (77) upravíme druhý člen rovnice na kinematickou viskozitu ν , pak aplikujeme Laplaceovu transformaci pole času, při nulových počátečních podmínkách a po úpravách získáme (80).

$$L\{p(t)\} = \sigma(s), \quad L\{\Theta\} = \psi(s) = \xi(s) \rho, \quad (79)$$

kde: $s \dots$ parametr Laplaceovi transformace podle času, $\sigma \dots$ tlaková funkce.

$$s^2 \sigma - \Delta \sigma \left(v^2 + s (2v + \xi(s)) \right) = 0. \quad (80)$$

Jednoduchou úpravou (80) dostaneme (81)

$$\frac{s^2}{v^2 + s (2v + \xi(s))} \sigma - \Delta \sigma = 0. \quad (81)$$

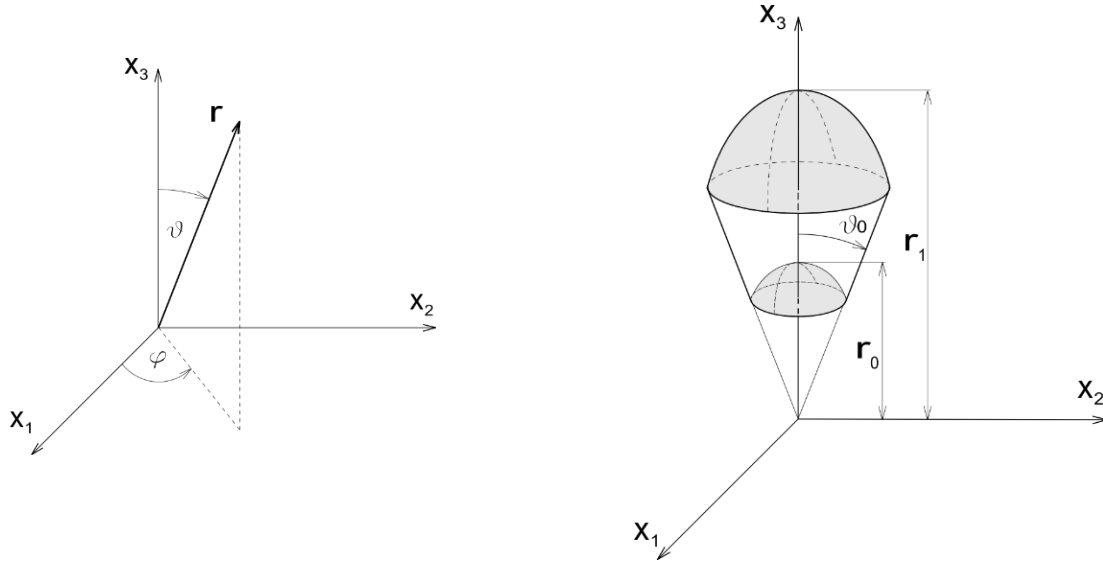
Pro zjednodušení si zavedeme κ^2

$$\kappa^2 = - \frac{s^2}{v^2 + s (2v + \xi(s))}. \quad (82)$$

Aplikujeme zjednodušení (82) na (81) a získáme Helmholtzovu rovnici (83)

$$\kappa^2 \sigma + \Delta \sigma = 0. \quad (83)$$

Pro další řešení si zavedeme sférický souřadnicový systém (r, ϑ, φ) , podle Obr. 7



Obr. 7 Definování sférického prostoru pro řešení matice

Zapišeme si obecnou definici Laplaceova operátoru Δf ve sférickém souřadnicovém systému viz [9],

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (84)$$

Dosadíme σ do (84) a zderivujeme:

$$\Delta \sigma = \frac{1}{r^2} 2r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} r^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2}. \quad (85)$$

Aplikujeme tlakovou funkci σ z (85) do Helmholtzovy rovnice (83) a získáme vlnovou rovnici ve tvaru (86)

$$\kappa^2 \sigma + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (86)$$

Tlakovou funkci σ v (86) neznáme. Můžeme předpokládat řešení této rovnice jako součin funkcí (87), tzv. metoda separace proměnných [10].

$$\sigma = Z(r) W(\vartheta) \Phi(\varphi). \quad (87)$$

Dosazením σ z (87) do (86) a vydělením $Z W \Phi$ a vynásobením r^2 , získáme (88)

$$\frac{1}{Z} \left[r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 r^2 Z \right] + \frac{1}{W} \left[\frac{d^2 W}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dW}{d\vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0. \quad (88)$$

Z tvaru vlnové funkce v (86) vyplývá, že tlakovou funkci σ můžeme vyjádřit nekonečnou řadou vzhledem k φ [6]

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} H(r, \vartheta, s) [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] \quad (89)$$

Z toho důvodu lze psát pro řešení (88) část se součinem Φ

$$\frac{1}{\Phi_p} \frac{d^2 \Phi_p}{d\varphi^2} = -n^2, \quad \text{řešení } \Phi_p \text{ je ve tvaru } \Phi_p = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (90)$$

Položíme-li sobě rovné výrazy (88) a (90) dostaneme (91)

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \left[r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 r^2 Z \right] + \frac{1}{W} \left[\frac{d^2 W}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dW}{d\vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \\ = \frac{1}{\Phi_p} \frac{d^2 \Phi_p}{d\varphi^2} + n^2. \end{aligned} \quad (91)$$

Po úpravách (91)

$$\frac{1}{Z} \left[r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 r^2 Z \right] + \frac{1}{W} \left[\frac{d^2 W}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dW}{d\vartheta} - \frac{n^2}{\sin^2 \vartheta} W \right] = 0. \quad (92)$$

Z rovnice (92) plyne, že první část v hranatých závorkách závisí na délce r a druhá na úhlu ϑ . Proto každá část musí být rovna volitelné konstantě např. $*p^2$ viz [12].

$$\frac{1}{Z} \left[r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 r^2 Z \right] = *p^2. \quad (93)$$

$$-*p^2 = \frac{1}{W} \left[\frac{d^2 W}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dW}{d\vartheta} - \frac{n^2}{\sin^2 \vartheta} W \right] = 0. \quad (94)$$

Po vynásobení pravé strany a převedení, získáme (93):

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 r^2 Z - *p^2 Z = 0. \quad (95)$$

Obdobně (94):

$$\frac{d^2 W}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dW}{d\vartheta} - \frac{n^2}{\sin^2 \vartheta} W - p^2 W = 0. \quad (96)$$

Z pohledu definování Obr. 7 si zavedeme zjednodušení. Předpokládejme, že tlaková funkce je rotačně symetrická a nezávisí ani na úhlu ϑ . Postačí nám vyřešit (95).

Modifikovaná Besselova rovnice

Při řešení diferenciálních rovnic popisujících kmitání v oboru komplexních čísel, v cylindrickém nebo sférickém souřadném systému, je vhodné využít Besselových funkcí [9]. Další postup se opírá o modifikovanou Besselovu rovnici (95).

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 r^2 Z = 0. \quad (97)$$

Upravíme podělením r^2

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dZ}{dr} + \kappa^2 Z = 0. \quad (98)$$

Transformovaná verze Besselovy diferenciální rovnice dle Bowmana [11].

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1) x \frac{dy}{dx} + (a^2 x^{2r} + s^2) y = 0. \quad (99)$$

Řešení Besselovy rovnice

$$y = x^{-p} \left[C_1 J_{q/r} \left(\frac{\alpha}{r} x^r \right) + C_2 Y_{q/r} \left(\frac{\alpha}{r} x^r \right) \right], \quad (100)$$

kde: $J_n(x)$, $Y_n(x)$... Besselovy funkce, C_1 , C_2 ... konstanty

$$q = \sqrt{p^2 - s^2}, \quad (2p+1) = 2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}. \quad (101)$$

Řešení tlakové funkce

$$\sigma = Z = r^{-\frac{1}{2}} \left[G_0 J_{0,5}(\kappa r) + H_0 Y_{0,5}(\kappa r) \right] \quad (102)$$

Po úpravě

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[G_0 J_{0,5}(\kappa r) + H_0 Y_{0,5}(\kappa r) \right] \quad (103)$$

Pohybové (Navier-Stokesovy) rovnice

Když nebudeme uvažovat konvektivní členy, můžeme pro složky rychlosti ve sférickém souřadnicovém systému psát (104), (105), (106). Kde je uvažována 2. viskozita.

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\xi}{v^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r c_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 c_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot g \vartheta}{r^2} \frac{\partial c_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2c_r}{r^2} - \frac{2c_\vartheta \cot g \vartheta}{r^2} \right]. \quad (104)$$

$$\frac{\partial c_\vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(p + \frac{\xi}{v^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r c_\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 c_\vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot g \vartheta}{r^2} \frac{\partial c_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_r}{\partial \vartheta} - \frac{c_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right]. \quad (105)$$

$$\frac{\partial c_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(p + \frac{\xi}{v^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r c_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 c_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot g \vartheta}{r^2} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial c_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{c_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right]. \quad (106)$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2c_r}{r} + \frac{c_\vartheta \cot g \vartheta}{r} = 0.$$

Předpokládáme rotačně symetrickou tlakovou funkci, která není závislá na úhlu ϑ . Pak můžeme zjednodušit vlnovou rovnici ve sférických souřadnicích (86) zapsat ji ve tvaru (107)

$$\kappa^2 \sigma + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0. \quad (107)$$

Předpokládáme, že vliv druhé viskozity se výrazně projeví při pulsacích tlaku. Za tohoto předpokladu lze zjednodušit Navier-Stokesovy rovnice (104), (105), (106) tím že zanedbáme členy v hranatých závorkách. Pak pro (104) platí:

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\xi}{v^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (108)$$

Na vztah (108) aplikujeme Laplaceovu transformaci vzhledem k proměnné t

$$L\{c_r(r, t)\} = w_r(r, s), \quad L\{p(t)\} = \sigma(s). \quad (109)$$

Za předpokladu nulových počátečních podmínek, můžeme psát:

$$s w_r = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma + \frac{\xi}{v^2} s \sigma \right). \quad (110)$$

Po úpravě:

$$w_r = - \frac{1}{\rho s} \left(1 + s \frac{\xi}{v^2} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial r}. \quad (111)$$

Z pohledu dalšího řešení bude vhodné zavést střední rychlost (112), která vychází z (103):

$$\tilde{c}_r = \frac{1}{2\vartheta_0} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} c_r d\vartheta. \quad (112)$$

Uvážíme-li (111)

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[G_0 J_{1/2}(\kappa, r) + H_0 Y_{1/2}(\kappa, r) \right] \quad (113)$$

Za užití (111)

$$\tilde{w}_r = \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \text{kde} \quad \alpha = - \frac{1}{2\vartheta_0 \rho s} \left(1 + s \frac{\xi}{v^2} \right), \quad (114)$$

kde: σ ... představuje tlakovou funkci popsanou pomocí modifikovaných Besselových funkcí prvního a druhého druhu, $\tilde{w}_r$... Laplaceův obraz střední rychlosti kapaliny ve sférickém souřadném systému.

Po aplikaci (113) do (114) získáme (115)

$$\tilde{w}_r = \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \left[G_0 \frac{\partial J_{1/2}}{\partial r}(\kappa r) + H_0 \frac{\partial Y_{1/2}}{\partial r}(\kappa r) \right] - \frac{1}{2} r^{-3/2} \alpha \left[G_0 J_{1/2}(\kappa r) + H_0 Y_{1/2}(\kappa r) \right] \quad (115)$$

Rozšíříme pomocí r

$$\tilde{w}_r = \frac{r \alpha}{r^{3/2}} \left[G_0 \frac{\partial J_{1/2}}{\partial r}(\kappa r) + H_0 \frac{\partial Y_{1/2}}{\partial r}(\kappa r) \right] - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^{3/2}} \left[G_0 J_{1/2}(\kappa r) + H_0 Y_{1/2}(\kappa r) \right] \quad (116)$$

Vytkneme G_0 a H_0 :

$$\tilde{w}_r = \frac{r \alpha}{r^{3/2}} \frac{\partial J_{1/2}(\kappa r) - 0,5 \alpha J_{1/2}(\kappa r)}{r^{3/2}} G_0 + \frac{r \alpha}{r^{3/2}} \frac{\partial Y_{1/2}(\kappa r) - 0,35 \alpha Y_{1/2}(\kappa r)}{r^{3/2}} H_0. \quad (117)$$

Derivací Besselovy funkce rozumíme

$$\frac{\partial J(\kappa r)}{\partial r} = \kappa \frac{\partial J(\kappa r)}{\partial(\kappa r)}. \quad (118)$$

Maticový zápis rovnic (113) a (117)

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_r \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \alpha \frac{\partial J_{1/2}(\kappa r) - 0,5 \alpha J_{1/2}(\kappa r)}{\partial r} & r \alpha \frac{\partial Y_{1/2}(\kappa r) - 0,5 \alpha Y_{1/2}(\kappa r)}{\partial r} \\ \frac{1}{\sqrt{r}} J_{1/2}(\kappa, r) & \frac{1}{\sqrt{r}} Y_{1/2}(\kappa, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ H_0 \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Stavový vektor $U(r,s)$

$$U(r,s) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_r \\ \sigma \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Zavedeme si zjednodušení (121) a (122) pro přehlednost maticového zápisu

$$P_G(r,s) = \begin{bmatrix} r \alpha \frac{\partial J_{1/2}(\kappa r) - 0,5 \alpha J_{1/2}(\kappa r)}{\partial r} & r \alpha \frac{\partial Y_{1/2}(\kappa r) - 0,5 \alpha Y_{1/2}(\kappa r)}{\partial r} \\ \frac{1}{\sqrt{r}} J_{1/2}(\kappa r) & \frac{1}{\sqrt{r}} Y_{1/2}(\kappa r) \end{bmatrix}. \quad (121)$$

$$G_h = \begin{bmatrix} G_0 \\ H_0 \end{bmatrix}. \quad (122)$$

$$U(r,s) = P_G(r,s) G_h, \quad U(r_0,s) = P_G(r_0,s) G_h, \quad P_G^{-1}(r_0,s) U(r_0,s) = G_h. \quad (123)$$

$$U(r,s) = P_G(r,s) P_G^{-1}(r_0,s) U(r_0,s). \quad (124)$$

V přenosové matici si převedeme rychlosti na plochy a průtoky

$$U_Q \begin{bmatrix} Q \\ \sigma \end{bmatrix} = S \cdot U, \quad S = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(r_1) = S_r P_G(r) P_G^{-1}(r_0) S_{r_0}^{-1} U_Q(r_0). \quad (125)$$

3.2.3 Přenosová matice pro trubice ve tvaru kužele

Zavedeme si stavové vektory:

$$\mathbf{U}^T = (\tilde{w}_r, \sigma). \quad (126)$$

Stavový vektor na počátku trubice r_0 :

$$\mathbf{U}^T(r_0,s) = [\tilde{w}_r(r_0,s), \sigma(r_0,s)]. \quad (127)$$

Stavový vektor v libovolném místě trubice r :

$$\mathbf{U}^T(r,s) = [\tilde{w}_r(r,s), \sigma(r,s)]. \quad (128)$$

Ze vztahů (113) a (114) si vyjádříme integrační konstanty v závislosti na $\tilde{w}_r(0,5)$ a $\sigma(0,5)$, platí:

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta\sqrt{r_0}} \begin{bmatrix} Y_{1/2}(\kappa r_0) & -\alpha \frac{\partial Y_{1/2}(\kappa r_0)}{\partial r} \\ -J_{1/2}(\kappa r_0) & \alpha \frac{\partial J_{1/2}(\kappa r_0)}{\partial r} \end{bmatrix} \mathbf{U}(r_0, s) \quad (129)$$

$$\text{kde: } \delta = \frac{\alpha}{r_0} \left[\frac{\partial J_{1/2}(\kappa r_0)}{\partial r} Y_{1/2}(\kappa r_0) - \frac{\partial Y_{1/2}(\kappa r_0)}{\partial r} J_{1/2}(\kappa r_0) \right]. \quad (130)$$

Z rovnic (114) vyplývá:

$$\mathbf{U}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \alpha J_{1/2}(\kappa r) & \alpha Y_{1/2}(\kappa, r) \\ J_{1/2}(\kappa, r) & Y_{1/2}(\kappa, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ H_0 \end{bmatrix}. \quad (131)$$

Dosazením stavového vektoru (131) do (129):

$$\mathbf{U}(r, s) = \frac{1}{\delta\sqrt{r_0}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha J_{1/2}(\kappa, r) & \alpha Y_{1/2}(\kappa, r) \\ J_{1/2}(\kappa, r) & Y_{1/2}(\kappa, r) \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} Y_{1/2}(\kappa, r_0) & -\alpha \frac{\partial Y_{1/2}(\kappa, r_0)}{\partial r} \\ -J_{1/2}(\kappa, r_0) & \alpha \frac{\partial J_{1/2}(\kappa, r_0)}{\partial r} \end{bmatrix} \mathbf{U}(r_0, s). \quad (132)$$

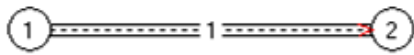
Výsledný tvar přenosové matice pro trubice ve tvaru kužele bude (133). Matice zahrnuje: kinematickou viskozitu, druhou kinematickou viskozitu

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\delta\sqrt{rr_0}} \begin{bmatrix} \alpha \left[J_{1/2}(\kappa, r) Y_{1/2}(\kappa, r_0) - J_{1/2}(\kappa, r_0) Y_{1/2}(\kappa, r) \right] & \alpha^2 \left[-J_{1/2}(\kappa, r) Y_{1/2} \frac{\partial Y(\kappa, r_0)}{\partial r} + \right. \\ & \left. + Y_{1/2}(r) J_{1/2} \frac{\partial J(r_0)}{\partial r} \right] \\ J_{1/2}(\kappa, r) Y_{1/2}(\kappa, r_0) - Y_{1/2}(\kappa, r) J_{1/2}(\kappa, r_0) & \alpha \left[-J_{1/2}(\kappa, r) Y_{1/2} \frac{\partial Y(\kappa, r_0)}{\partial r} + \right. \\ & \left. + Y_{1/2}(\kappa, r) J_{1/2} \frac{\partial J(\kappa, r_0)}{\partial r} \right] \end{bmatrix}. \quad (133)$$

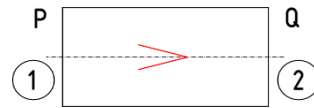
4 Porovnání válcové a kuželové trubice

Před využitím přenosové matice pro trubice ve tvaru kužele a vložení do matematického modelu PVE bylo nutno otestovat její chování.

V programu F-A char byly vytvořeny dva typy modelů. První s přenosovou maticí pro trubice s konstantním průřezem (dále válcové trubice) Obr. 8., druhý s přenosovou maticí pro trubice ve tvaru kužele (dále kuželové trubice) Obr. 10.



Obr. 8 Model trubice v SW F-A char



Obr. 9 Schematický model válcové trubice

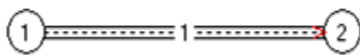
Červené šipky značí směr výpočtu od počátku (0) po maximum (1).

Trubice je složena ze dvou uzlů, kde se zadávají okrajové podmínky tlaku nebo průtoku. Stručný popis nastavení modelů v programu F-A char: V menu trubice byl nastaven model výpočtu. U válcové trubice 3, u kuželové trubice 135.

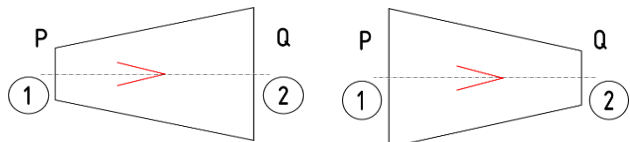
Další parametry: délka, rychlost zvuku, hustota kapaliny, druhá viskozita, byly nastaveny shodně pro válcovou i kuželovou trubici. Vliv stěny trubice nebyl uvažován, byla předpokládána nekonečně tuhá trubice.

U válcové trubice byla zvolena délka 1m a průměr 0,2m. Z délky a rychlosti při známých okrajových podmínkách můžeme analyticky vypočítat vlastní frekvence trubice a vykreslit si tvary kmitu. Tímto způsobem byla provedena kontrola u válcové trubice.

U kuželové trubice byla shodná délka 1m, měněny byly vstupní průměry $D_1 = 0,0124-0,34\text{m}$ a výstupní průměry $D_2 = 0,34-0,0124\text{m}$, tak aby byl objem shodný s válcovou trubicí, viz Obr. 11.



Obr. 10 Model trubice v SW F-A char



Obr. 11 Změna průměrů $D_{1,2}$ u kuželové trubice

V uzlu 1 byla zadávána okrajová podmínka buzení tlakem nebo průtokem. V uzlu 2 byla nastavena okrajová podmínka tlaku nebo průtoku. Modifikací okrajových podmínek vznikly čtyři série výpočtů:

- V uzlu 1 buzení tlakem (P) a v uzlu 2 podmínka nulového průtoku (Q), dále P_Q. Více v kapitole 4.1.
- V uzlu 1 buzení průtokem (Q) a v uzlu 2 podmínka nulového průtoku (Q), dále Q_Q. Viz kapitola 4.3.
- V uzlu 1 buzení tlakem (P) a v uzlu 2 podmínka tlaku (P), dále P_P. Viz kapitola 4.4.
- V uzlu 1 buzení průtokem (Q) a v uzlu 2 podmínka tlaku (P) dále Q_P. Viz kapitola 4.5.

Modely trubic byly ukládány s koncovkou *.ttl.

V menu výpočty nabídce výpočet F-A char. je nutné nastavit rozsah počítaných frekvencí omega, pomocí mezí, počtu a velikost kroku. Kontrola vypočtených frekvencí se provede v menu Zobraz nabídce F-A char, tlačítko Zobraz Amplitudu, zde je třeba upravit polohu, podle uzlu kmitu. Grafické zumování provádíme tlačítky myši. Když po grafickém zaostření na konkrétní pík je vrchol seříznut, tak

zmenšíme velikost kroku, upravíme meze a výpočet zopakujeme. Vypočtené hodnoty byly uloženy v menu Soubor nabídce Ulož F-A char., typ souboru bude *.fac.

Myši vyzumujeme pík a klikneme na vrchol. Vykreslení tvaru kmitu nebo tlaku je v menu Zobrazit položka Tvar kmitu a příslušná tlačítka. Vypočtené hodnoty uložíme tlačítkem Soubor v kartě Volba pro tvar kmitu, typ souboru bude *.tva

Zpracování výsledků z programu F-A char bylo provedeno v MS Office Excel.

4.1 Stanovení vlastní frekvence

Pro málo tlumené systémy je možno stanovit vlastní frekvenci z frekvenčně amplitudové charakteristiky pro jednotlivé vrcholy. V následujících kapitolách tohoto bylo využito (4.2, 4.3, 4.4, 4.5).

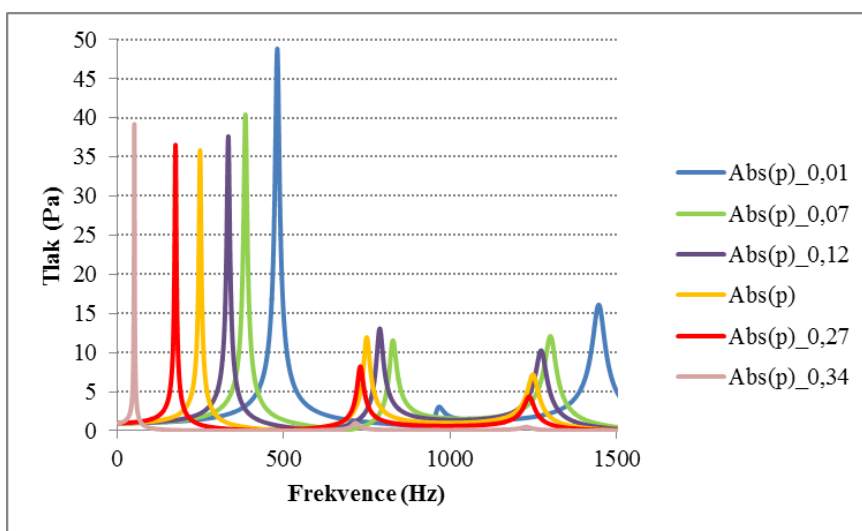
4.2 Okrajové podmínky P_Q

V uzlu jedna byla okrajová podmínka buzení tlakem (P). V uzlu dva byla okrajová podmínka nulového průtoku (Q) viz Obr. 9 a Obr. 11.

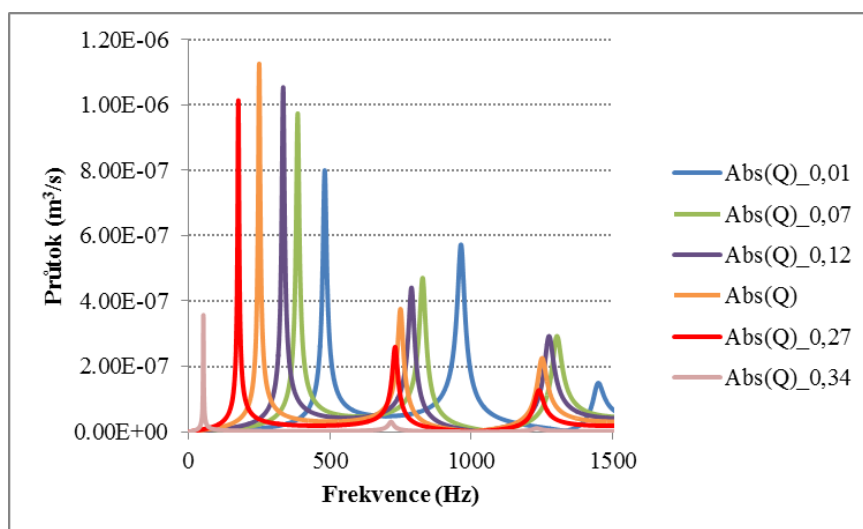
4.2.1 Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku

Následující obrázky Obr. 12 a Obr. 13 ukazují vypočtené vynucené frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaků a průtoku v místech maximálního dynamického zesílení v poloze 0,5m. Poloha byla volena tak, aby byla vykreslena kmitna tlaku, průtoku.

V legendě grafu udává hodnota za podtržítkem vstupní průměr kuželové trubice. Oranžová křivka, je válcová trubice o průměru 0,2m. Tento systém je použit i pro ostatní grafy.



Obr. 12 Amplitudy tlaků při P_Q

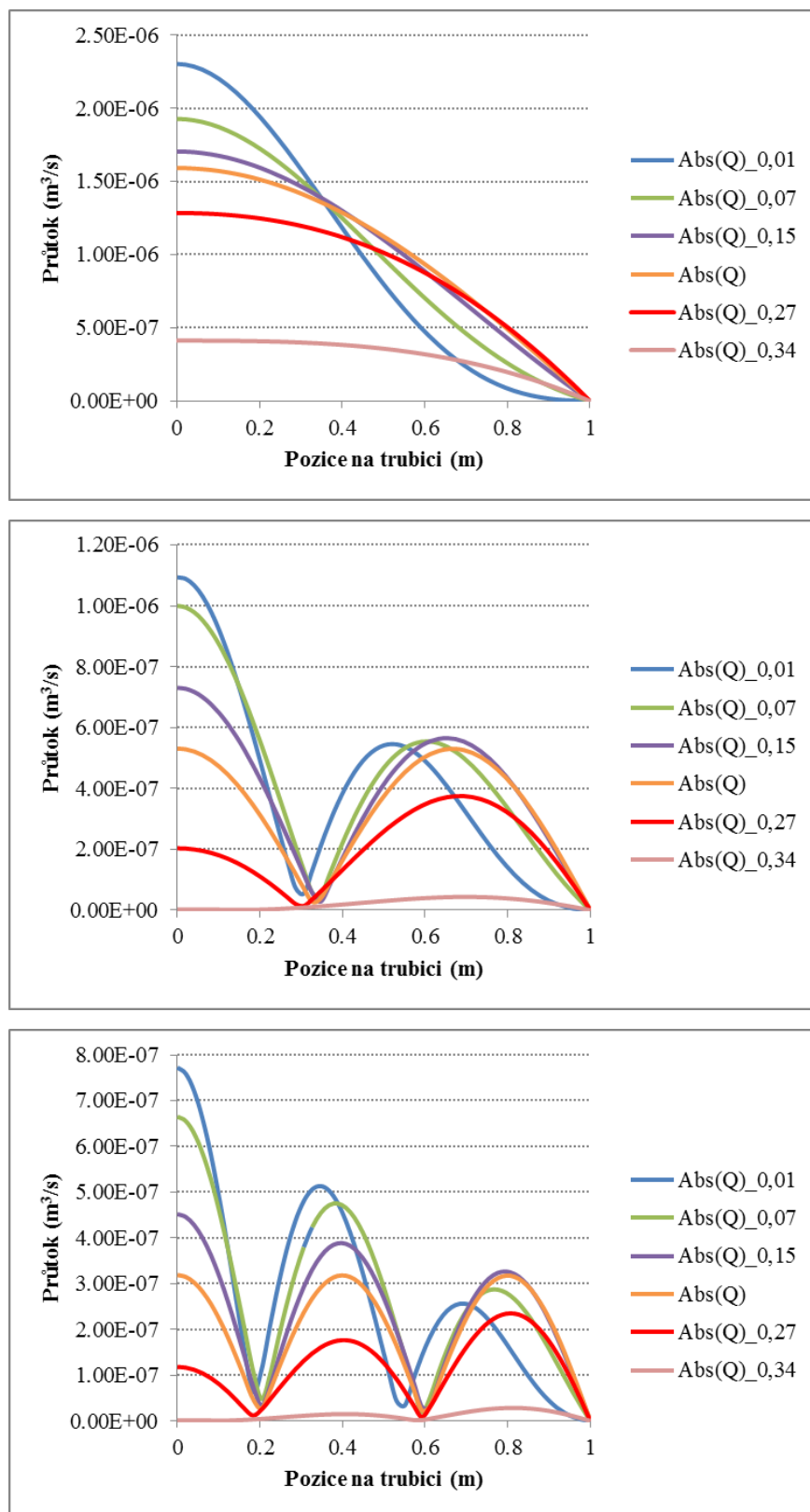


Obr. 13 Amplitudy průtoků při P_Q

Na následujících obrázcích jsou vykreslené vynucené tvary průtoku a tlaku, při frekvenci maximálního dynamického zesílení v blízkosti prvních tří vlastních frekvencí při okrajových podmínkách P_Q.

4.2.2 Tvary průtoku při P_Q

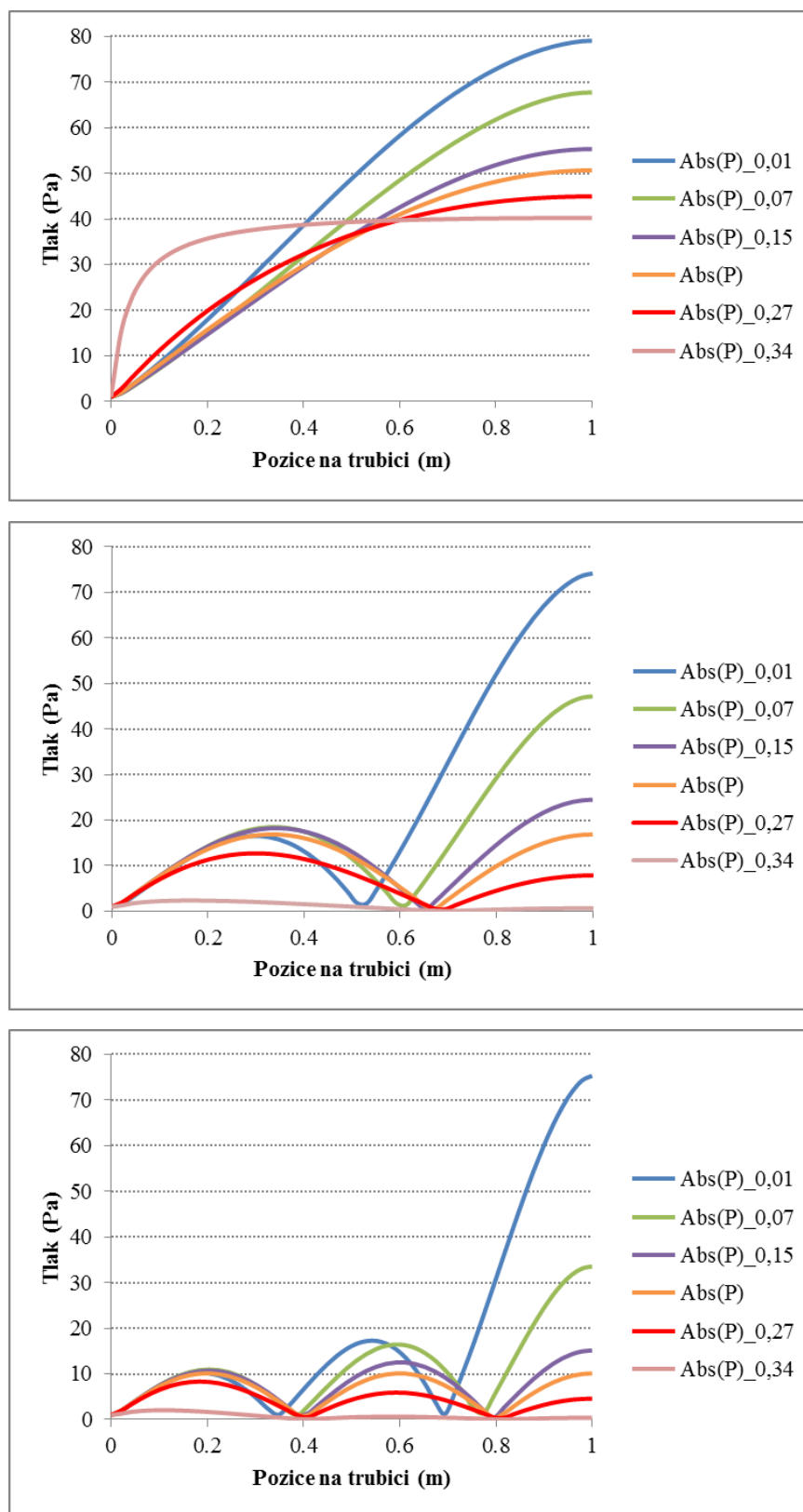
První tři vynucené tvary průtoku při frekvenci v blízkosti maximálního dynamického zesílení.



Obr. 14 První tři tvary průtoku při P_Q

4.2.3 Tvary tlaků při P_Q

První tři vynucené tvary tlaků v místě maximálního dynamického zesílení.

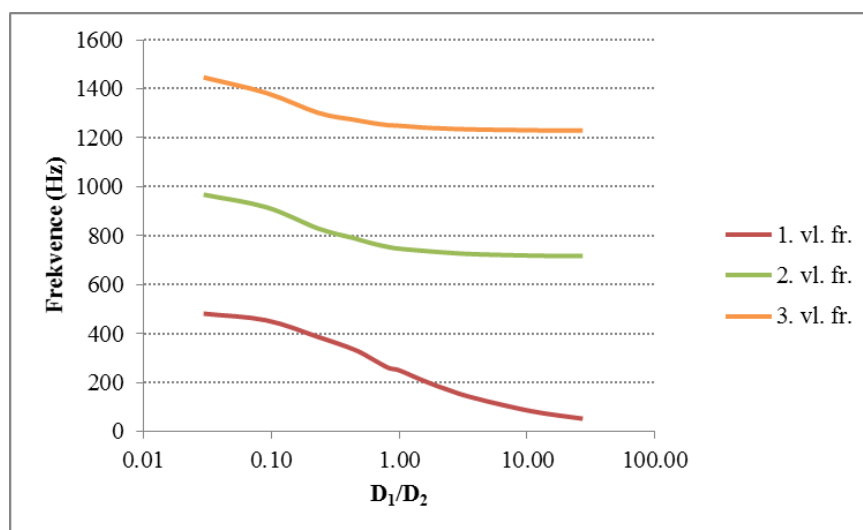


Obr. 15 První tři tvary tlaků při P_Q

Vliv změny vstupního průměru na frekvenci						
D_1/D_2	0.03	0.09	0.23	0.44	0.63	0.82
$\varnothing D_1$ (m)	0.01	0.03	0.07	0.12	0.15	0.18
1. vl. fr.	481.76	454.55	386.11	334.70	294.20	260.30
2. vl. fr.	967.90	916.81	829.08	789.49	767.76	753.92
3. vl. fr.	1446.88	1383.61	1301.81	1273.80	1259.95	1251.48
D_1/D_2	1	1.53	2.24	3.79	10.73	27.25
$\varnothing D_1$ (m)	0.20	0.24	0.27	0.30	0.33	0.34
1. vl. fr.	249.92	209.09	176.23	137.91	83.40	52.60
2. vl. fr.	747.07	738.48	731.68	724.71	718.70	716.67
3. vl. fr.	1249.37	1242.28	1237.99	1234.25	1230.71	1229.55

Tab. 1 Vypočtené frekvence (Hz) při P_Q

V rámci této série výpočtů byl prověřen vyšší počet vstupních průměrů, kdy byly prověřovány trubice blížící se kuželovitostí rovné trubici, včetně obou extrémů pro úzký i široký vstupní průměr viz Tab. 1.

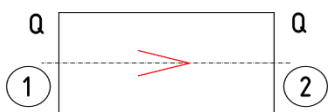


Obr. 16 Vliv poměru průměrů na frekvenci při P_Q

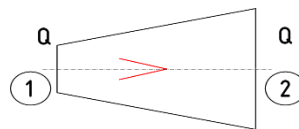
Nejvyšší rozdíly ve frekvenci pro kuželovou a válcovou trubici jsou u první frekvence. Pro kuželové trubice ve tvaru difuzoru, se vstupním průměrem menším než válcová, jsou vynucené frekvence vyšší než pro válcovou trubici. V konfuzoru jsou naopak nižší viz Obr. 16 a Tab. 1.

4.3 Okrajové podmínky Q_Q

V uzlu jedna byla okrajová podmínka buzení průtokem (Q). V uzlu dvě byla okrajová podmínka nulového průtoku (Q).



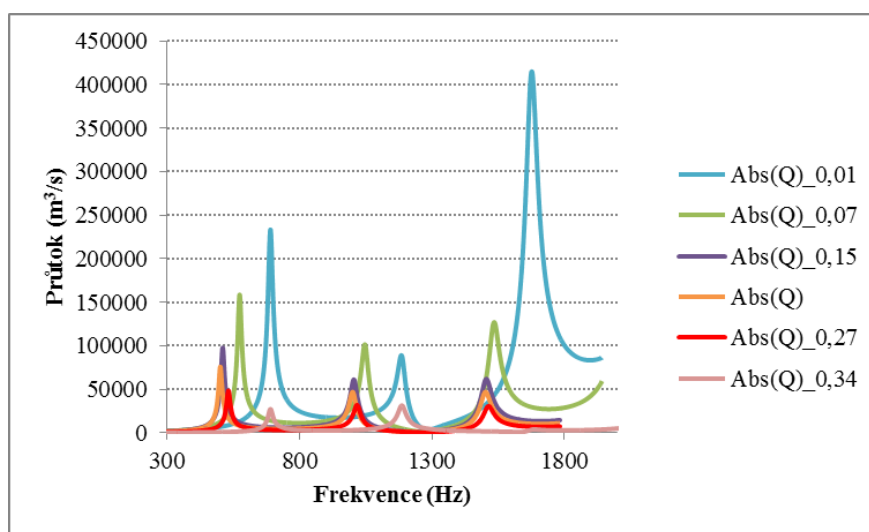
Obr. 17 Schéma okrajových podmínek



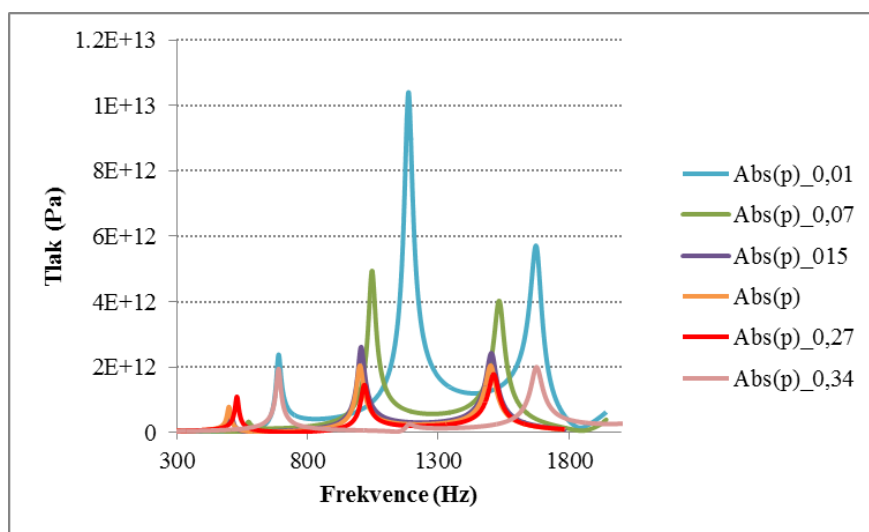
Obr. 18 Schéma okrajových podmínek

4.3.1 Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku

Následující obrázky Obr. 19 a Obr. 20 ukazují vypočtené vynucené frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku v místech maximálního dynamického zesílení v poloze 0,6m. Poloha byla volena tak, aby byla vykreslena kmitna tlaku, průtoku.



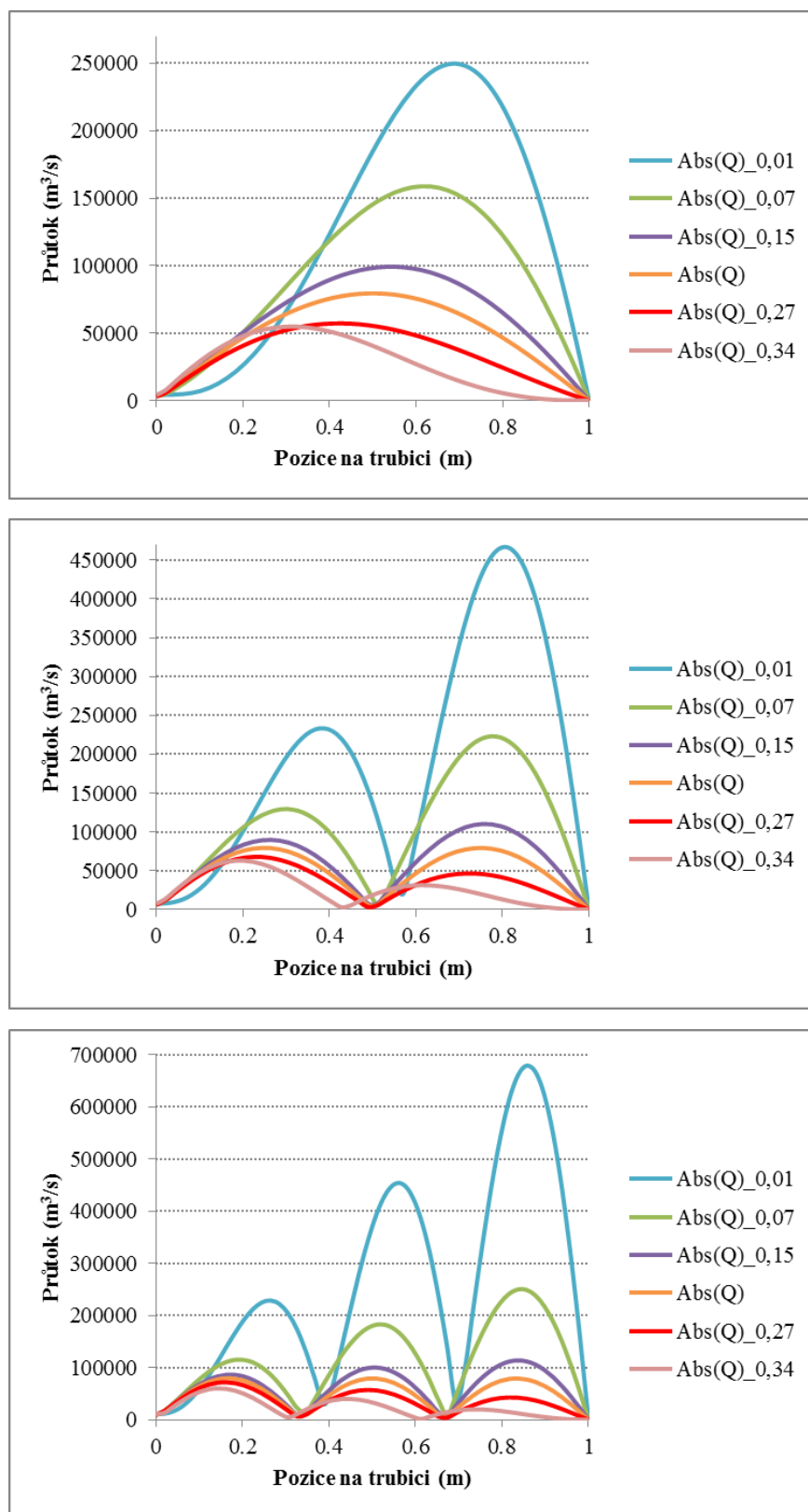
Obr. 19 Frekvence průtoku při Q_Q



Obr. 20 Frekvence tlaku při Q_Q

4.3.2 Tvary průtoků při Q_Q

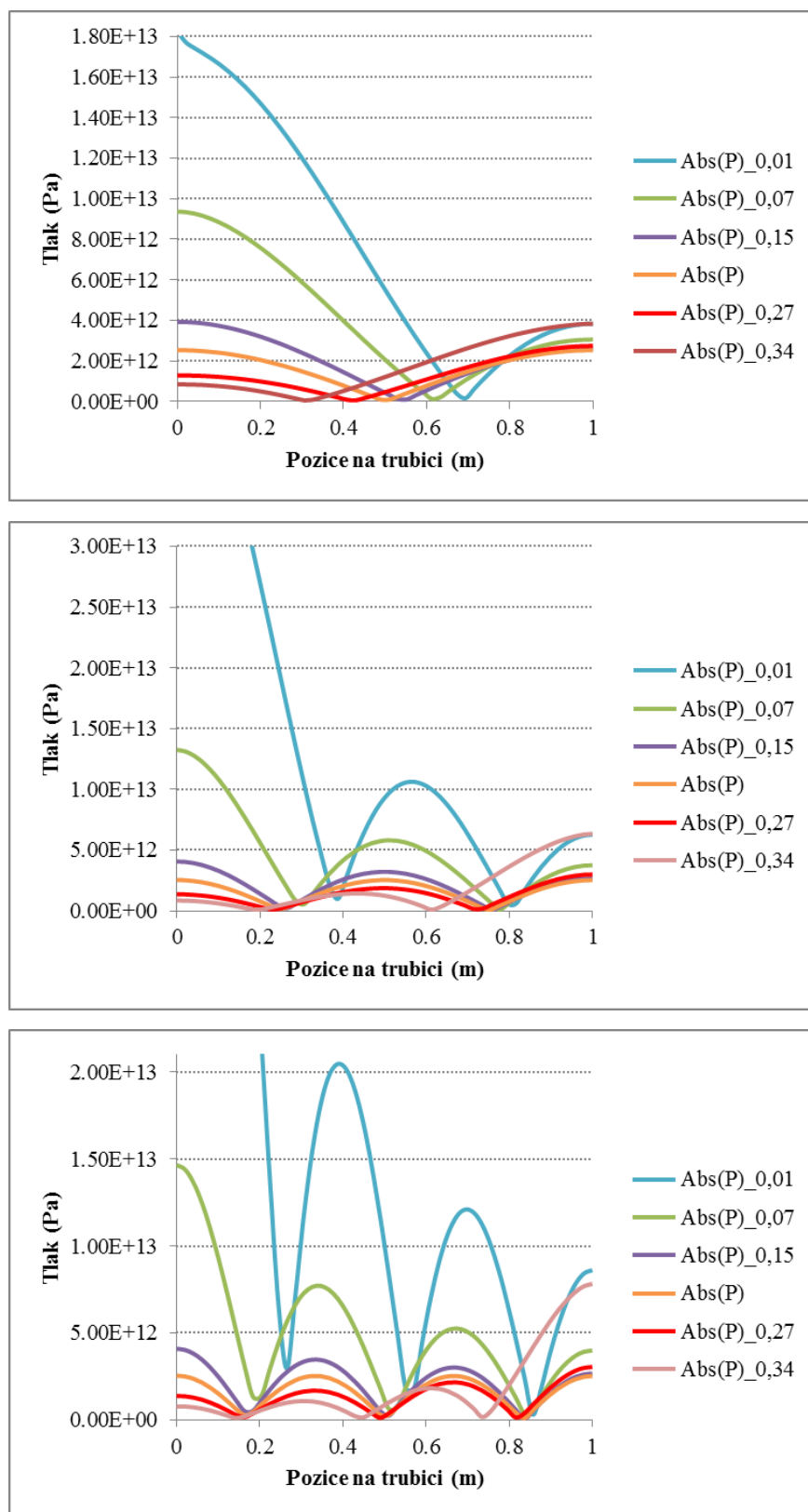
První tři vynucené tvary průtoků při frekvenci v blízkosti maximálního dynamického zesílení.



Obr. 21 První tři vlastní tvary průtoků pro Q_Q

4.3.3 Tvary tlaků při Q_Q

První tři vynucené tvary tlaků při frekvenci v blízkosti maximálního dynamického zesílení.

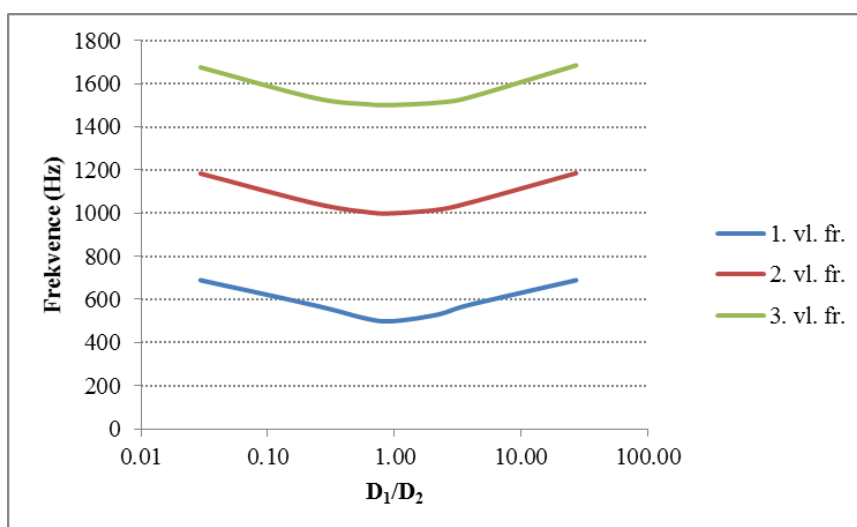


Obr. 22 První tři vlastní tvary tlaků při Q_Q

U druhého a třetího vlastního tvaru bylo z důvodu vyšší názornosti upraveno měřítko na ose y.

Vliv průměru na vlastní frekvenci							
D_1/D_2	0.03	0.23	0.63	1	2.24	3.791288	27.25
$\varnothing D_1$ (m)	0.01	0.07	0.15	0.2	0.27	0.3	0.34
1. vl. fr.	689.38	573.04	509.06	500.15	530.62	573.0219	689.43
2. vl. fr.	1183.71	1045.73	1004.27	999.69	1016.44	1045.842	1185.55
3. vl. fr.	1676.14	1534.30	1504.65	1501.59	1513.05	1534.59	1685.29

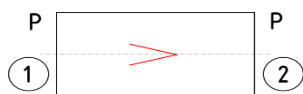
Tab. 2 Vypočtené frekvence (Hz) při Q_Q



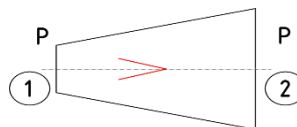
Obr. 23 Vliv poměru průměrů na frekvenci při Q_Q

4.4 Okrajové podmínky P_P

V uzlu jedna byla okrajová podmínka buzení tlakem (P). V uzlu dva byla okrajová podmínka tlaku (P).



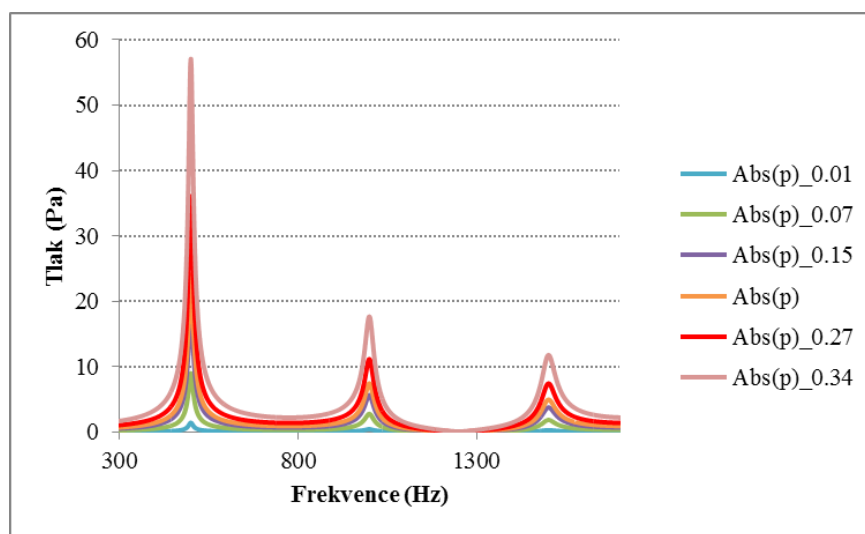
Obr. 24 Schéma okrajových podmínek



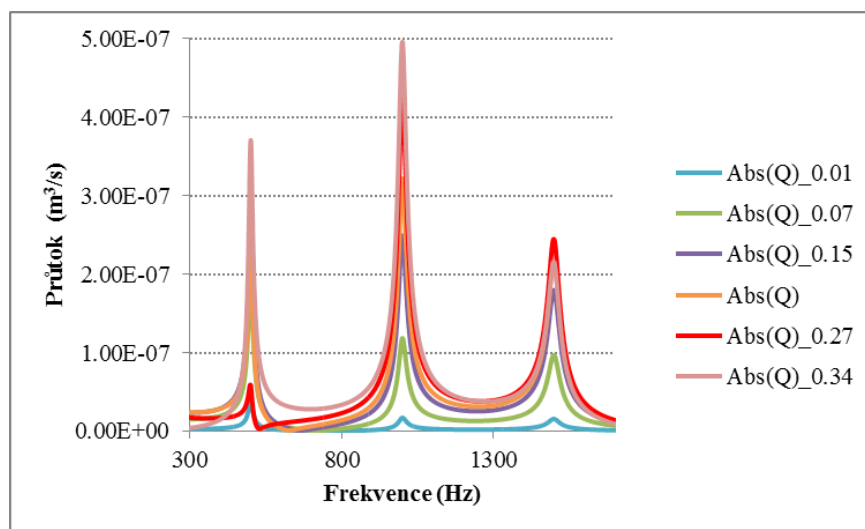
Obr. 25 Schéma okrajových podmínek

4.4.1 Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku

Následující obrázky Obr. 26 a Obr. 27 ukazují vypočtené vynucené frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku v místech maximálního dynamického zesílení v poloze 0,6m.



Obr. 26 Frekvence tlaků při P_P

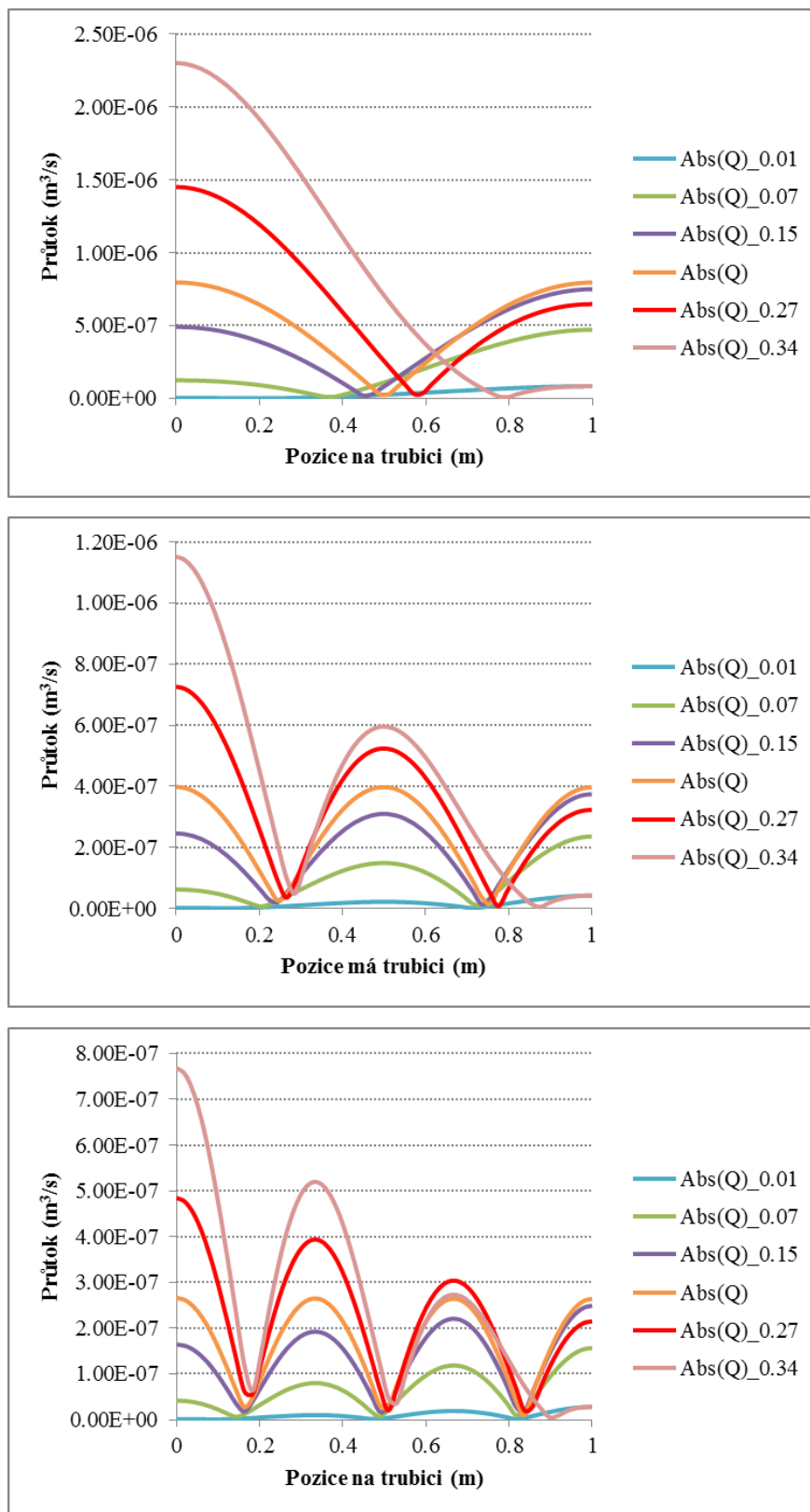


Obr. 27 Frekvence průtoku při P_P

Amplitudy tlaku i průtoku jsou vyšší konfuzoru než v difuzoru.

4.4.2 Tvary průtoku při P_P

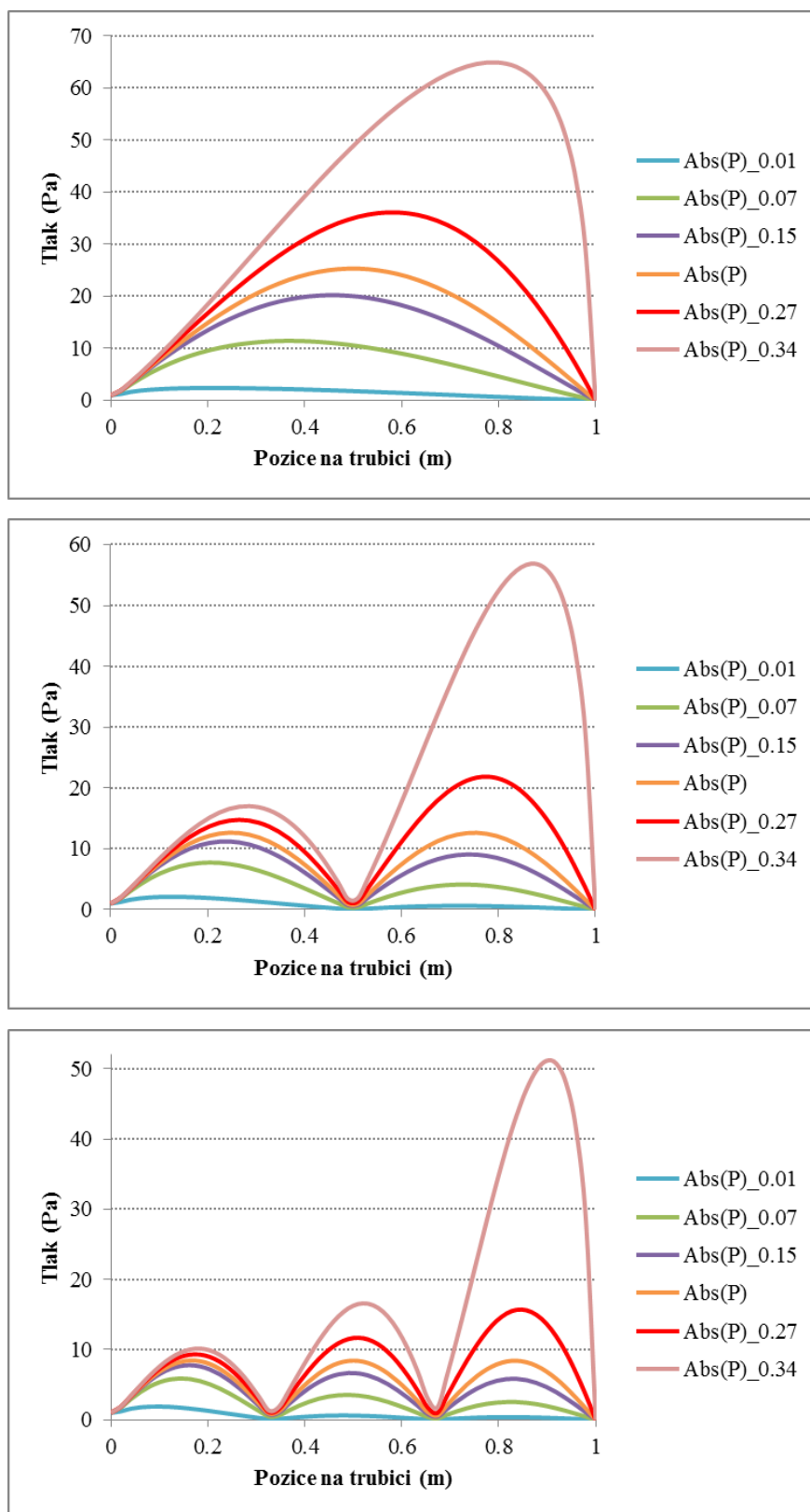
První tři vynucené tvary průtoků při frekvenci v blízkosti maximálního dynamického zesílení.



Obr. 28 První tři vlastní tvary průtoku při P_P

4.4.3 Tvary tlaku při P_P

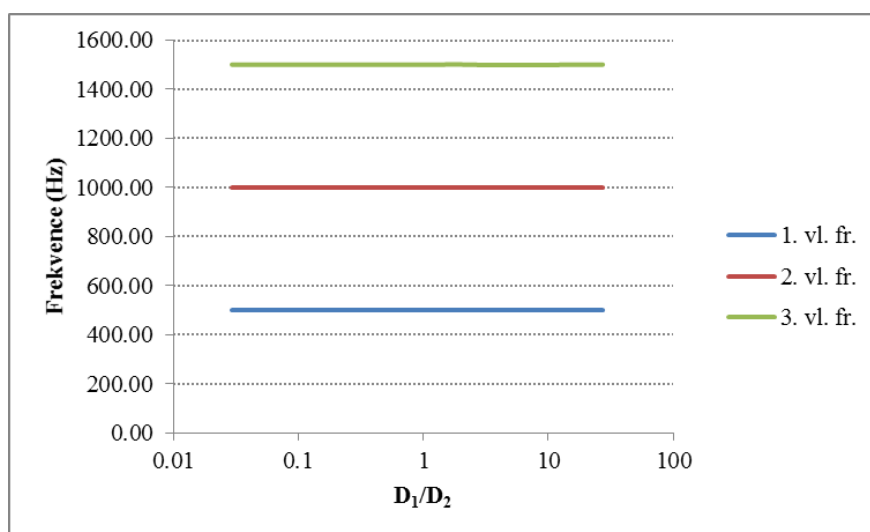
První tři vynucené tvary tlaků při frekvenci v blízkosti maximálního dynamického zesílení.



Obr. 29 První tři vlastní tvary tlaku při P_P

Vliv průměru na frekvenci							
D_1/D_2	0.029412	0.233333	0.625	1	2.239037	3.791288	27.25022
$\varnothing D_1$ (m)	0.01	0.07	0.15	0.2	0.27	0.3	0.34
1. vl. fr.	500.06	500.05	500.06	500.06	500.05	500.0529	500.06
2. vl. fr.	999.50	999.50	999.50	999.49	999.49	1000.046	999.50
3. vl. fr.	1501.29	1501.28	1501.28	1501.28	1501.28	1499.052	1501.28

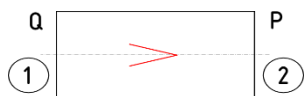
Tab. 3 Vypočtené frekvence (Hz) při P_P



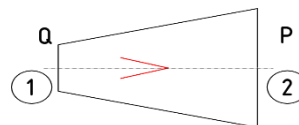
Obr. 30 Vliv poměru průměrů na frekvenci při P_P

4.5 Okrajové podmínky Q_P

V uzlu jedna byla okrajová podmínka buzení průtokem (Q). V uzlu dva byla okrajová podmínka tlaku (P).



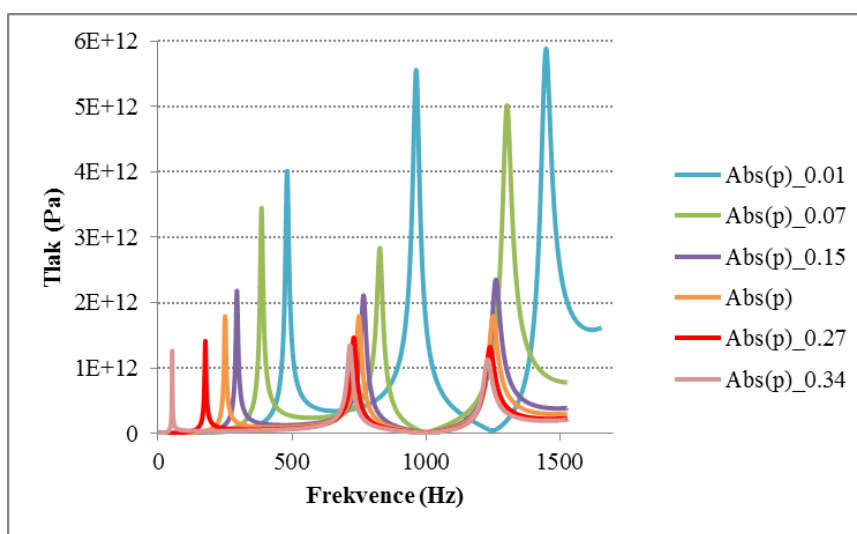
Obr. 31 Schéma okrajových podmínek



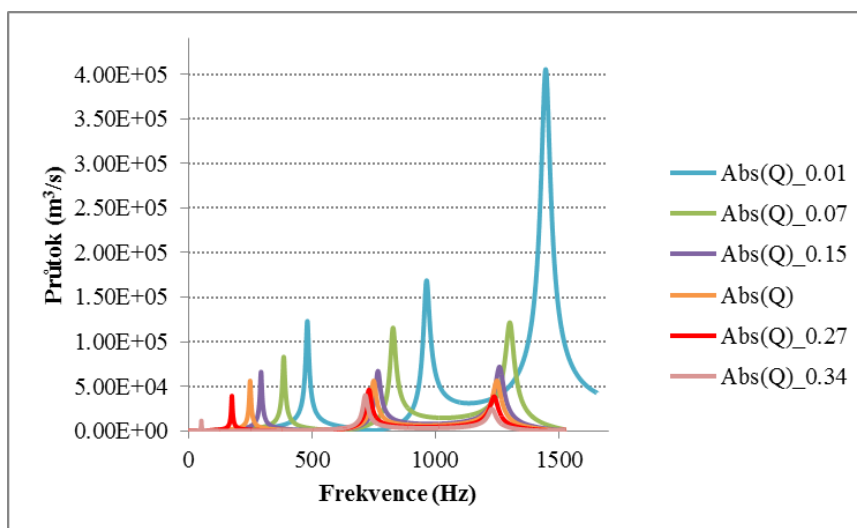
Obr. 32 Schéma okrajových podmínek

4.5.1 Frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku

Následující obrázky Obr. 33 a Obr. 34 ukazují vypočtené vynucené frekvenčně amplitudové charakteristiky tlaku a průtoku v místech maximálního dynamického zesílení v poloze 0,5m.



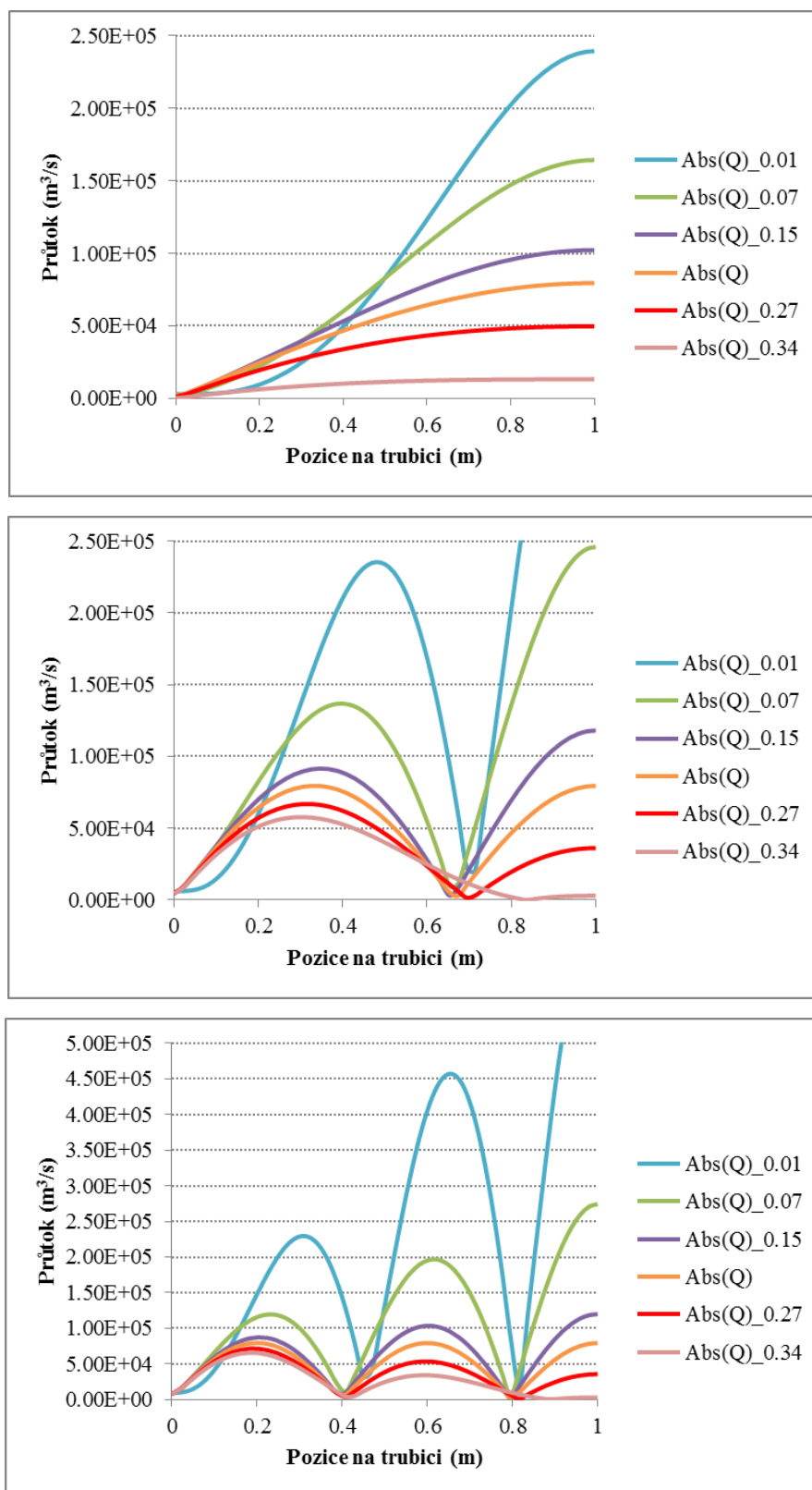
Obr. 33 Frekvence tlaků při Q_P



Obr. 34 Frekvence průtoků při Q_P

4.5.2 Tvary průtoku při Q_P

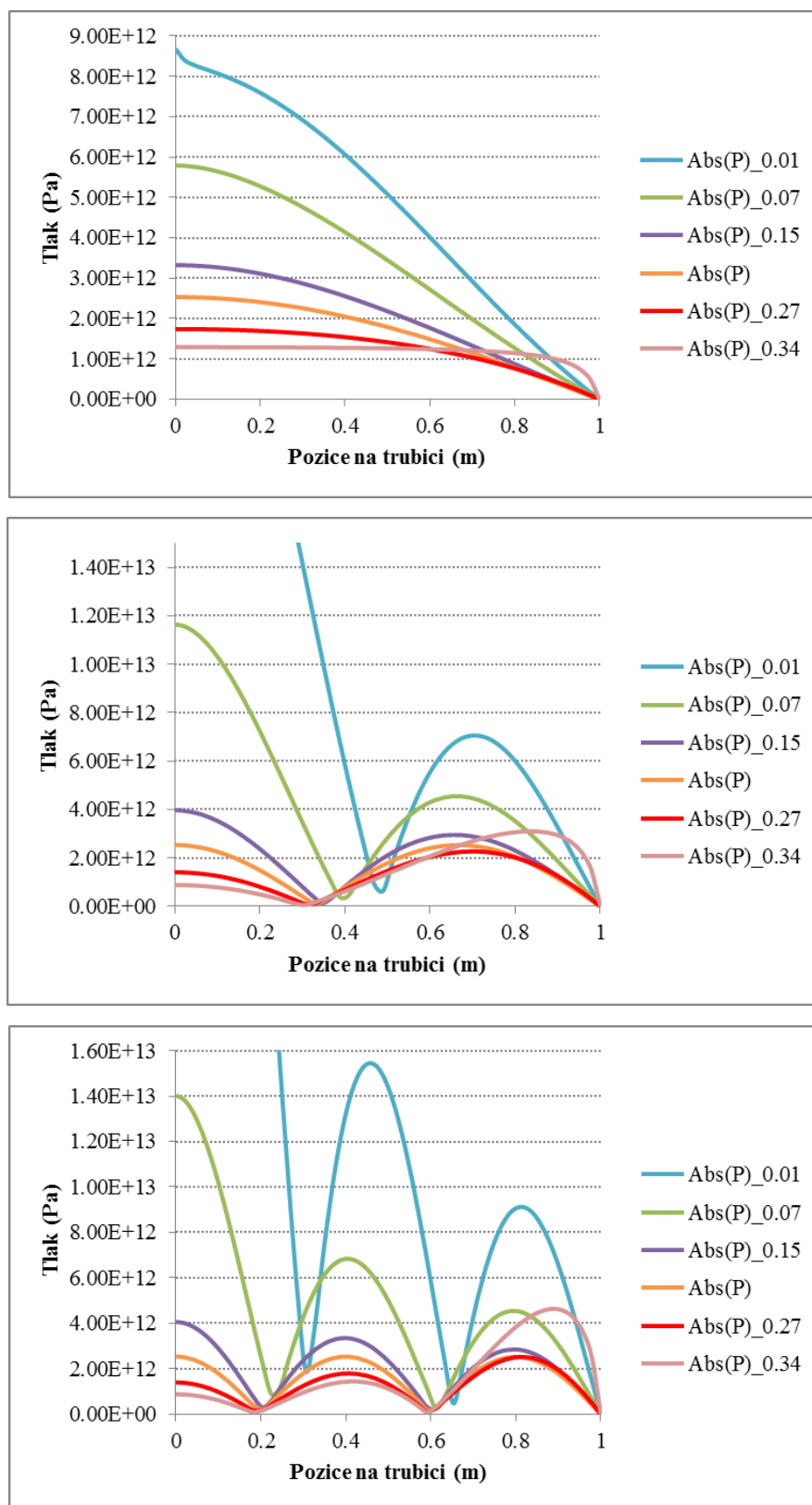
První tři vynucené tvary průtoku při frekvenci v blízkosti max. dynamického zesílení. U druhého a třetího vlastního tvaru, bylo z důvodu vyšší názornosti upraveno měřítko na ose y.



Obr. 35 První tři vynucené tvary průtoků při Q_P

4.5.3 Tvary tlaku při Q_P

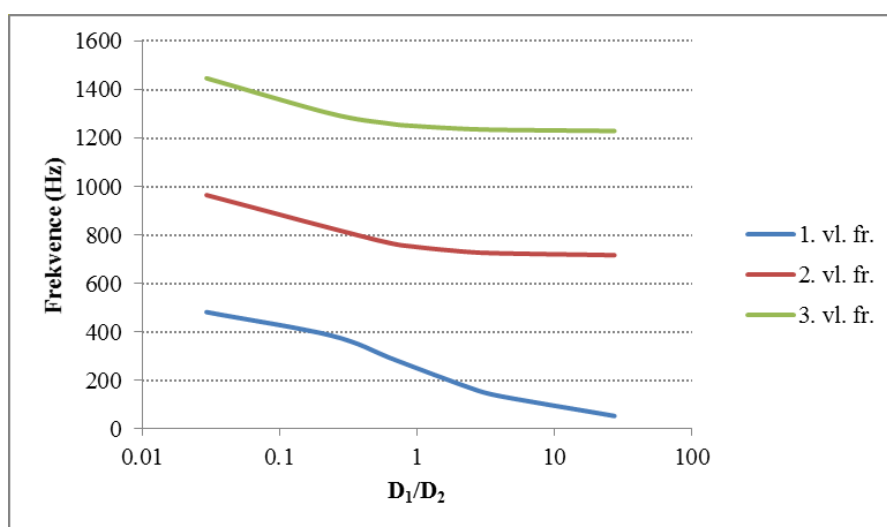
První tři vynucené tvary tlaku při frekvenci v blízkosti max. dynamického zesílení. U druhého a třetího vlastního tvaru bylo z důvodu vyšší názornosti upraveno měřítko na ose y.



Obr. 36 První tři vynucené tvary tlaku při Q_P

Vliv průměru na vlastní frekvenci							
$\varnothing D_1/D_2$	0.03	0.23	0.63	1	2.24	3.79	27.25
$\varnothing D_1$ (m)	0.01	0.07	0.15	0.2	0.27	0.3	0.34
1. vl. fr.	481.82	386.14	294.27	249.97	176.25	137.8606	53.01
2. vl. fr.	964.85	828.89	767.83	750.44	731.25	724.7597	716.74
3. vl. fr.	1447.19	1301.73	1260.09	1249.50	1238.13	1234.312	1229.54

Tab. 4 Vypočtené frekvence (Hz) při Q_P



Obr. 37 Vliv poměru průměrů na frekvenci při Q_P

Při porovnání frekvencí u kuželové a válcové trubice jsou nejvyšší rozdíly u první frekvence. Pro kuželové trubice ve tvaru difuzoru se vstupním průměrem menším než válcová, jsou vynucené frekvence vyšší než pro válcovou trubici. V konfuzoru jsou naopak nižší, viz Tab. 4 a Obr. 37. Frekvence u kuželových trubic při okrajových podmínkách P_Q se shodují s frekvencemi při Q_P.

Pro stejné vstupní průměry, se vypočtené frekvence v Tab. 1 shodují s Tab. 4.

5 Modelování vysokofrekvenčních pulsací

Vysokofrekvenční pulsace vznikají vzájemným působením pevné a rotující lopatkové mříže, tj. oběžného kola a rozváděcích lopat. Jak se při otáčení lopatka oběžného kola blíží k rozváděcí lopatce, vzniká tlakový impuls o vysoké frekvenci. Tyto tlakové pulsace se šíří z mezilopatkového prostoru (dále MLP), do oblasti oběžného a rozváděcího kola. Mají za následek cyklické únavové namáhání jednotlivých částí stroje. Nepříznivě působí na víko, spirálu a lopatky turbíny.

Kritériem pro stanovení buzení nestacionárním tlakovým a rychlostním polem v MLP je závislost mezi počtem rozváděcích lopat a lopatek oběžného kola. Touto kombinací získáme tvar tlakového pole v MLP (134)

$$k \cdot z_r - m \cdot z_s = N \quad (134)$$

kde:

- $z_r \dots$ počet oběžných lopat
- $z_s \dots$ počet rozváděcích lopat
- $k, m \dots$ celé číslo (0, 1, 2, 3 ...)
- $N \dots$ celé číslo, ale může být i záporné

N určuje počet vln po obvodu MLP prostoru, kladná hodnota N znamená rotaci tlakového buzení ve směru rotace oběžného kola, záporná proti směru rotace oběžného kola [1].

Pro $N=1$ je tlakové pole ve tvaru rotujícího excentru Obr. 38, Při $N=2$ je tlakové pole ve tvaru rotujícího piškotu Obr. 39.

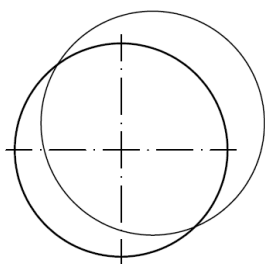
k určuje frekvenci z pohledu pevného souřadnicového systému tj. MLP, spirály, ..., (135)

$$f = f_n \cdot k \cdot z_r \quad (135)$$

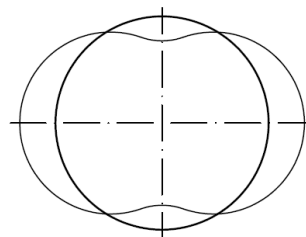
kde: $f_n \dots$ frekvence otáčení rotoru

V rotujícím souřadnicovém systému tj. hřídele, oběžného kola, ..., určuje frekvenci m .

$$f = f_n \cdot m \cdot z_s \quad (136)$$

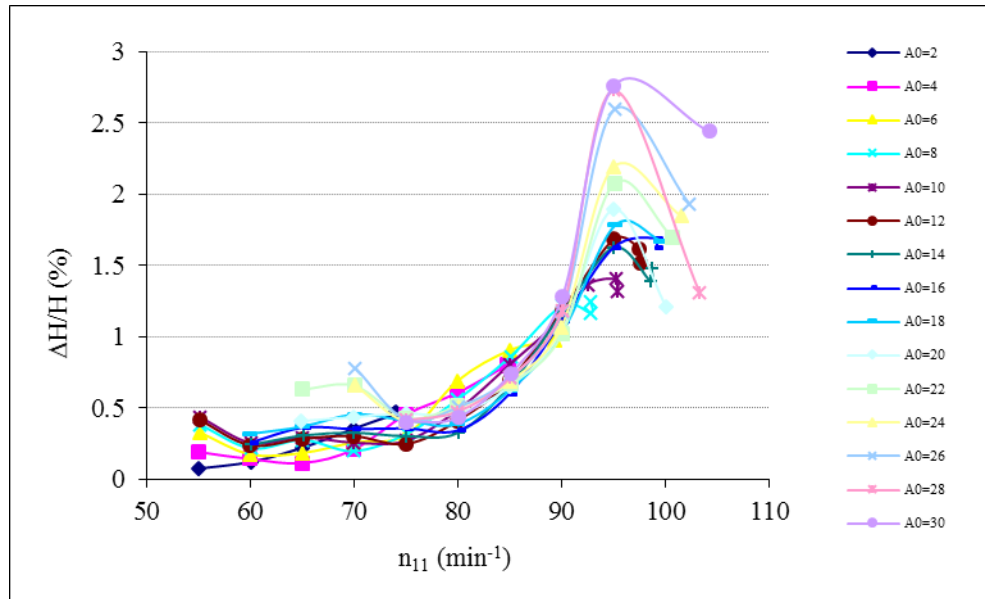


Obr. 38 $N=1$



Obr. 39 $N=2$

Pro výpočet kmitání tlaku a průtoku v závislosti na frekvenci bylo použito metody přenosových matic s vlivem druhé viskozity a tlumení v materiálu trubice. Druhá viskozita představuje frekvenčně závislé tlumení. Pokud chceme popsat tlumení na vyšších frekvencích, je nutno vliv druhé viskozity uvažovat.



Obr. 42 Vyhodnocení měření pro turbínu ve SPI a MLP

Měřená data na Obr. 42 jsou hodnoty tlakových pulsací v bezrozměrném parametru definovaném jako pulsace spádu v místě měření lomeno spadem na turbínu. Legenda prezentuje jednotlivé hodnoty otevíření rozvaděče A_0 . Dle následujícího vztahu:

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{Ai}}{H} \cdot 100\% \quad (137)$$

kde: MLP mezilopátkový prostor (snímače 8–16)

SPI spirála (snímače 1–7)

n počet měřených tlaků

p_{Ai} změřená amplituda tlaku ze snímače s indexem i .

ρ hustota

H spád

g gravitační zrychlení

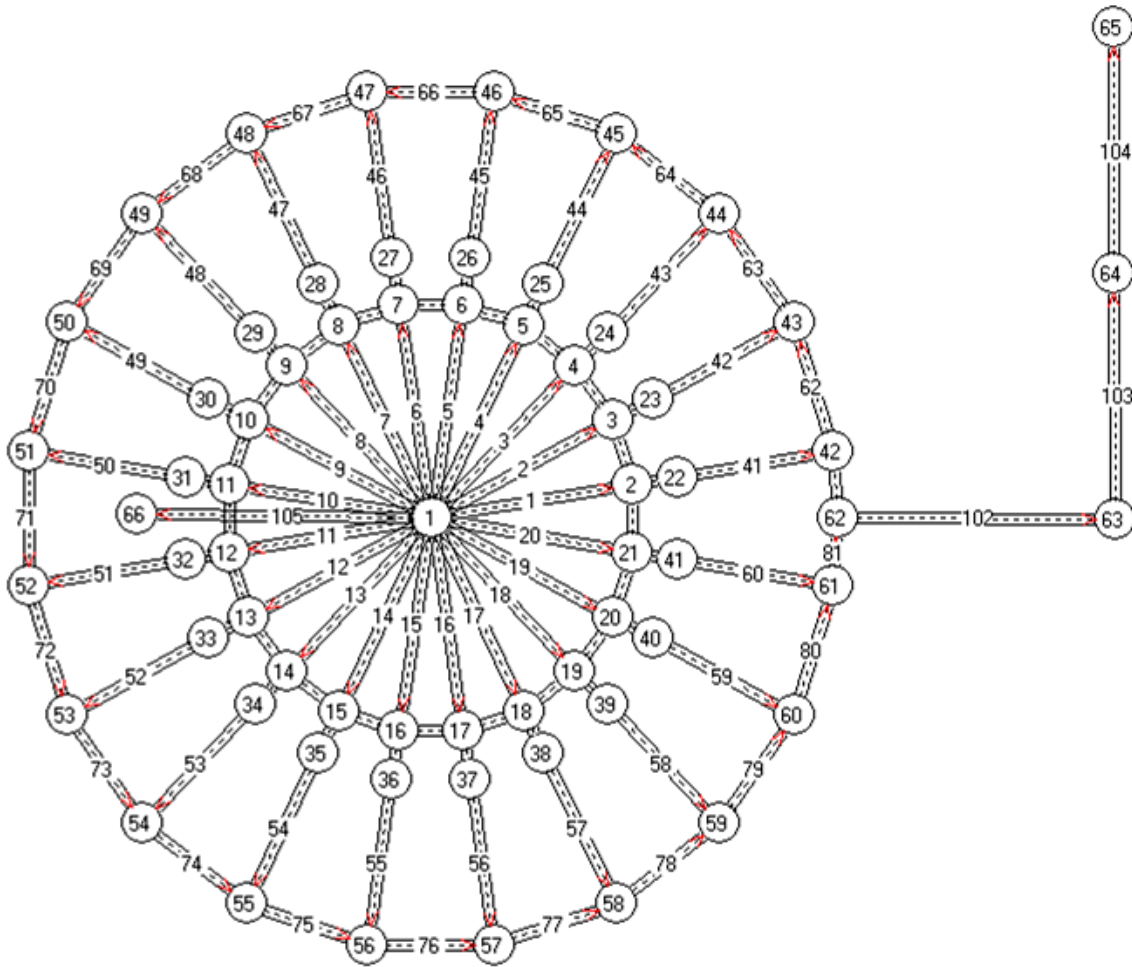
Amplitudy tlakových pulsací p_{ai} byly stanoveny po DFT měřeného časového záznamu jednotlivých snímačů tlaku.

Amplitudy jsou v turbinového režimu pro spirálu a MLP na trojnásobku lopátkové frekvence z pohledu pevného souřadnicového systému.

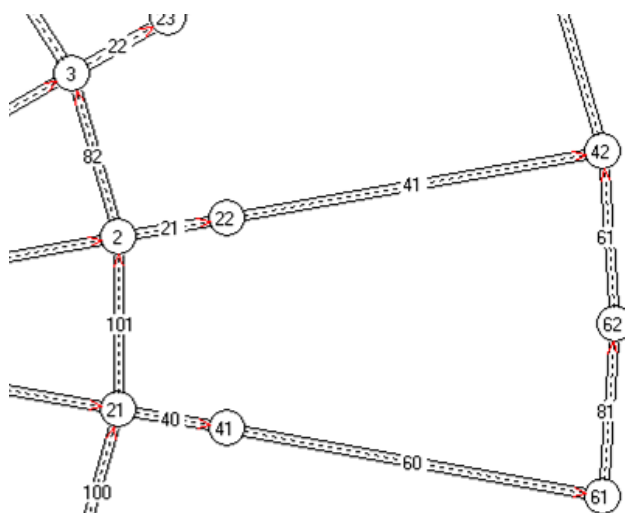
5.2 Matematický model PVE Dlouhé Stráně

Při výpočtu vynuceného kmitání v hydraulickém modelu bylo nutné nejdříve provést výpočet stavového vektoru na počátku každého pole. Tento vektor popisuje průtok a tlak. V každém uzlu obvodu byl počítán Laplaceův obraz tlaku. V počátku každého pole byl počítán Laplaceův obraz průtoku. Řešená matice má tedy rozměr počet uzlů + počet trubíc. Pro řešení těchto neznámých máme dva typy

rovníc. První je okrajová podmínka v každém uzlu systému. Průtoková podmínka, kde platí rovnice kontinuity ($\Sigma Q=0$) nebo ($\Sigma Q=Q_{\text{budíci}}$) kdy suma všech průtoků vtékajících do tohoto uzlu se rovná hodnotě budícího průtoku. Tlaková okrajová podmínka, kde hodnota tlaku v uzlu je konstantní nebo má hodnotu tlakového buzení nebo je možno zadat vztah mezi Laplaceovým obrazem průtoku a tlaku. Druhá rovnice počítá Laplaceův obraz tlaku na konci každého úseku potrubí a porovnává s Laplaceovým obrazem tlaku v uzlu, kam toto pole ústí. Pomocí těchto dvou podmínek jsme dostali úplnou soustavu rovnic pro řešení dříve uvedených neznámých. Tato soustava byla přepsána do matice a řešena pomocí Gaussovy eliminace. Jednalo se o řešení soustavy lineárních rovnic s komplexními čísly [2].



Obr. 43 Model PVE Dlouhé Stráně



Obr. 44 Detail MLP a okružního potrubí

Index uzlu:

- | | |
|-------|---|
| 1 | modeluje prostor pod oběžným kolem |
| 2-21 | modeluje vstup kapaliny do oběžného kola |
| 22-41 | modeluje výstup kapaliny z rozvaděče |
| 42-62 | modeluje výtok ze spirály do prostoru rozváděcích lopatek |
| 64 | modeluje okrajovou podmínku spodní nádrže, je v něm zadán konstantní tlak |
| 66 | modeluje okrajovou podmínku horní nádrže, je v něm zadán konstantní tlak |

Index trubice:

- | | |
|---------|---|
| 1-20 | modelují oběžné kolo |
| 21-40 | modelují tlakový skok po obvodu (MLP) získaný z měření pro frekvenci 350Hz ve tvaru excentru po obvodu MLP. Tj. dáno kombinací lopatek rozvaděče a oběžného kola zde 20 a 7 |
| 41-60 | modelují prostor mezi lopatkami rozvaděče |
| 61-81 | modelují spirálu |
| 61 | modeluje vstup do spirály |
| 81 | modeluje nos spirály |
| 82-101 | modelují mezilopátkový prostor (MLP) |
| 102-104 | modelují přivaděč |
| 105 | modeluje savku turbíny |

5.2.1 1D model

Model je složen výhradně z válcových trubíc, tj. řešen pomocí přenosových matic pro trubice s konstantním průřezem.

Systém přiřazování délky a průměru jednotlivým trubicím si rozeberme na příkladech.

Spirála je utahována proti směru hodinových ručiček. Je složena z 20 trubíc. Byla pomyslně rozdělena na oblouky po 18° . Z výkresové dokumentace byl odečten v místě průměr na začátku a konci oblouku. Střední hodnota průměru byla zadána jako průměr trubice. Délka trubice se rovnala délce oblouku.

Rozvaděč je složen z 20 trubíc. Z výkresové dokumentace je znám vstupní a výstupní průměr, dále vstupní a výstupní šířka. Plocha na vstupu, výstupu byla podělena 20 a z té byl vyjádřen průměr. Průměr trubice byl nastaven podle střední hodnoty z průměru na vstupu a výstupu do rozvaděče. V půdorysném pohledu byly lopatky rozvaděče proloženy obloukem, jehož délka prezentuje délku trubice. V rámci optimalizace celého modelu bylo spočítáno několik variant pro různé délky trubice rozvaděče v závislosti na poloze otevření.

Stejným způsobem byly nastaveny zbylé části PVE. Tento systém v sobě zahrnuje podobnost délkovou, nikoliv objemovou.

5.2.2 2D model

Model je složen z kombinace válcových a kuželových trubíc. Kuželové trubice jsou ve spirále, v rozvaděči a v oběžném kole.

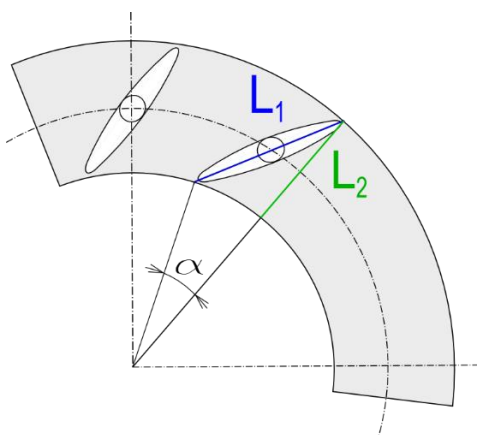
Spirála je utahována proti směru hodinových ručiček. Je složena z 20 trubíc. Byla pomyslně rozdělena na oblouky po 18° . Z výkresové dokumentace byl odečten průměr v místě na začátku a konci oblouku. Tyto průměry byly zadány jako vstupní a výstupní průměr trubice. Délka trubice vycházela z délky oblouku výseče. Sousední kuželové trubice na sebe průměry navazují.

Rozvaděč je složen z 20 trubíc. Z výkresové dokumentace je znám vstupní a výstupní průměr, dále vstupní a výstupní šířka. Plocha na vstupu, výstupu byla podělena dvaceti a z té byly vyjádřeny průměry na vstupu a výstupu trubice. V půdorysném pohledu byly lopatky rozvaděče proloženy obloukem, jehož délka prezentuje délku trubice. V rámci optimalizace celého modelu bylo spočítáno několik variant pro různé délky trubice rozvaděče v závislosti na poloze otevření.

Oběžné kolo bylo nastaveno podle stejného klíče jako rozvaděč.

Tento systém v sobě zahrnuje podobnost délkovou, nikoliv objemovou.

V rámci optimalizace modelu byla řešena poloha snímače na výkrese a na modelu. Na modelu PVE je možno měnit otevření rozvaděče Obr. 45, ale v matematickém modelu jsou trubice propojeny přímo, Obr. 43. Tlakový impuls vybuzečný v MLP je úhlově pootočen o úhel α , aby výsledný tvar budícího tlakového pole odpovídal Obr. 47.



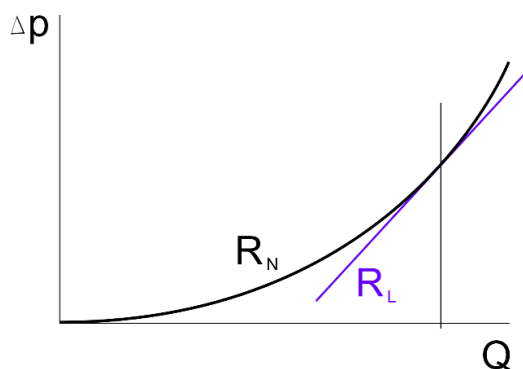
Obr. 45 Korekce natočení a délky

Tento úhel vychází z pracovního rozsahu rozváděcích lopatek. Byly počítány různé velikosti úhlu α . Dalším testovaným parametrem byla délka trubice rozvaděče L_2 , kde L_1 odpovídá délce kanálu na modelu a L_2 udává délku trubice v matematickém modelu. Délka trubic simulující oběžné kolo byla také testována.

Korekce pootočení α má velký vliv na celkovou shodu matematického a měřeného modelu. Při porovnání vlivu délky trubice a pootočení, na shodu modelů se jeví úpravy délek trubic rozvaděče a oběžného kola jako nevýznamné.

5.2.3 Linearizovaný odpor

Při výpočtu vysokofrekvenčních pulsací byly uvažovány linearizované odpory (R_L). Vliv tohoto odporu je definován ve smyslu tečny k reálné odporové charakteristice ve zvoleném provozním bodě definovaném průtokem.



Obr. 46 Nelineární a lineární odpor

Z podkladů měření k modelu PVE Dlouhé Stráně, dodaných od firmy Litostroj Power ČKD Blansko Engineering, známe pro jeden bod měření: (*. ASC) spád, průtok, otevření rozvaděče, otáčky a tlak z jednotlivých snímačů.

Určení Δp_r pro rozvaděč

$$Q = \frac{Q_c}{n_{TR}} \quad (138)$$

Kde: Q ... průtok přes jednu trubici, Q_c ... celkový průtok při měření modelu, n_{TR} ... počet trubic v matematickém modelu, tj. 20 trubic v rozvaděči.

$$\Delta p_r = R_N \cdot Q^2 \quad (139)$$

Kde: Δp_r ... určíme z měřených tlaků na spirále a v mezilopatkovém prostoru, tedy rozdíl středních hodnot, R_N ... nelinearizovaný odpor

$$d\Delta p_r = \underbrace{2 \cdot R_N}_{R_L} \cdot Q \cdot dQ \quad (140)$$

Kde: R_L ... linearizovaný odpor

Určení Δp_k pro oběžné kolo

$$\Delta p_k = \rho \cdot g \cdot H - \Delta p_r \quad (141)$$

Kde: ρ ... hustota kapaliny, g ... gravitační zrychlení, H ... spád na modelu.

Takto získané linearizované odpory pro dané číslo měření byly, zadávány do F-A char, jako horní a dolní mez.

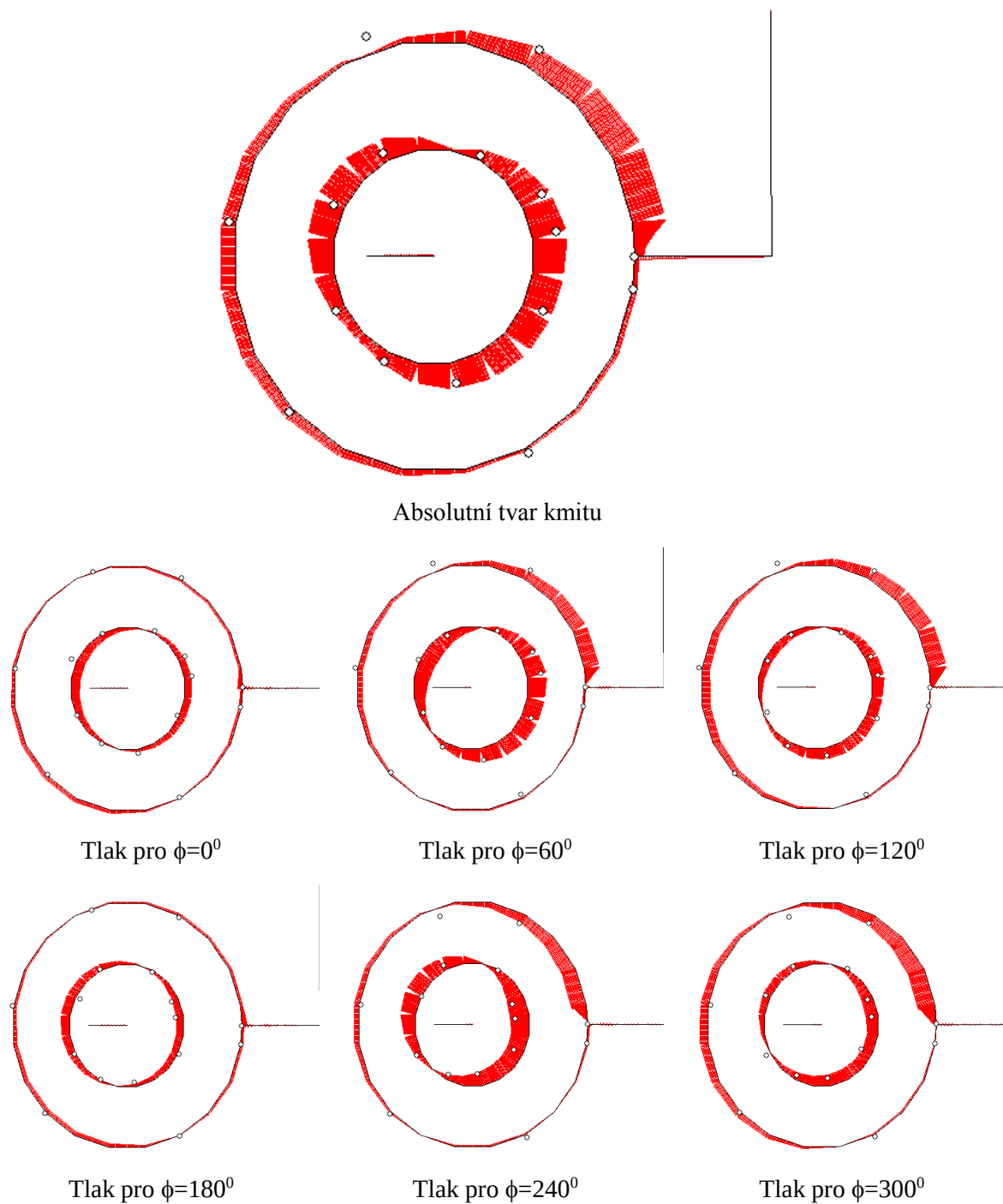
5.2.4 Turbínový 1D

V Tab. 5 jsou uvedeny parametry jednotlivých trubic matematického modelu. V prvním sloupci index trubice, ve druhém plocha trubice, ve třetím délka trubice, ve čtvrtém rychlost zvuku, v pátém linearizovaný odpor na vstupu do trubice, v šestém linearizovaný odpor na výstupu z trubice a v sedmém hodnota koeficientu druhé viskozity. Desetinné místo je odděleno tečkou.

Index trubice	Plocha m ²	l m	v m/s	R[1] Pa.s/m ³	R[2] Pa.s/m ³	ζ_H m ² .s ⁻²
1-20	0.001	0.52	768	9.27E+00	0	1000.01
41-60	0.0015	0.2	1300	1.36E+04	0	29989.71
82-101	0.00147559	0.07	762	0	0	1000.29
61	0.00008	0.0622	1299	4.36E+08	0	29998.22
62	0.00229	0.126	1299	0	0	29998.22
63	0.00385	0.129	1299	0	0	29998.22
64	0.00554	0.131	1299	0	0	29998.22
65	0.00754	0.133	1299	0	0	29998.22
66	0.00882	0.134	1299	0	0	29998.22
67	0.00985	0.135	1299	0	0	29998.22
68	0.0113	0.136	1299	0	0	29998.22
69	0.0133	0.138	1299	0	0	1000.07
70	0.015	0.139	1299	0	0	1000.07
71	0.0167	0.14	1299	0	0	1000.07
72	0.0191	0.141	1299	0	0	1000.07
73	0.0206	0.143	1299	0	0	1000.07
74	0.0227	0.144	1299	0	0	1000.07
75	0.0249	0.145	1299	0	0	1000.07
76	0.0266	0.146	731	0	0	29997.95
77	0.029	0.147	731	0	0	29997.95
78	0.0308	0.148	731	0	0	29997.95
79	0.0327	0.149	731	0	0	29997.95
80	0.0346	0.15	731	0	0	29997.95
81	0.0346	0.0748	731	0	0	29997.95
102	102.000	70	1500	0	0	10000.00
103	103.000	10	500	0	0	15000.00
104	104.000	35	500	0	0	15000.00
105	105.000	35	1400	0	0	10000.00

Tab. 5 Vypočtená data 1D turbínový režim

Červenou barvou je znázorněn vypočtený tlak, černými kroužky tlak měřený. V MLP je předpokládáno buzení tlakovým skokem ve tvaru rotujícího excentru, který se otáčí ve shodě s oběžným kolem. Dané grafy jsou vykresleny pro zájmovou frekvenci 489,69Hz.



Obr. 47 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v turbínové provozu

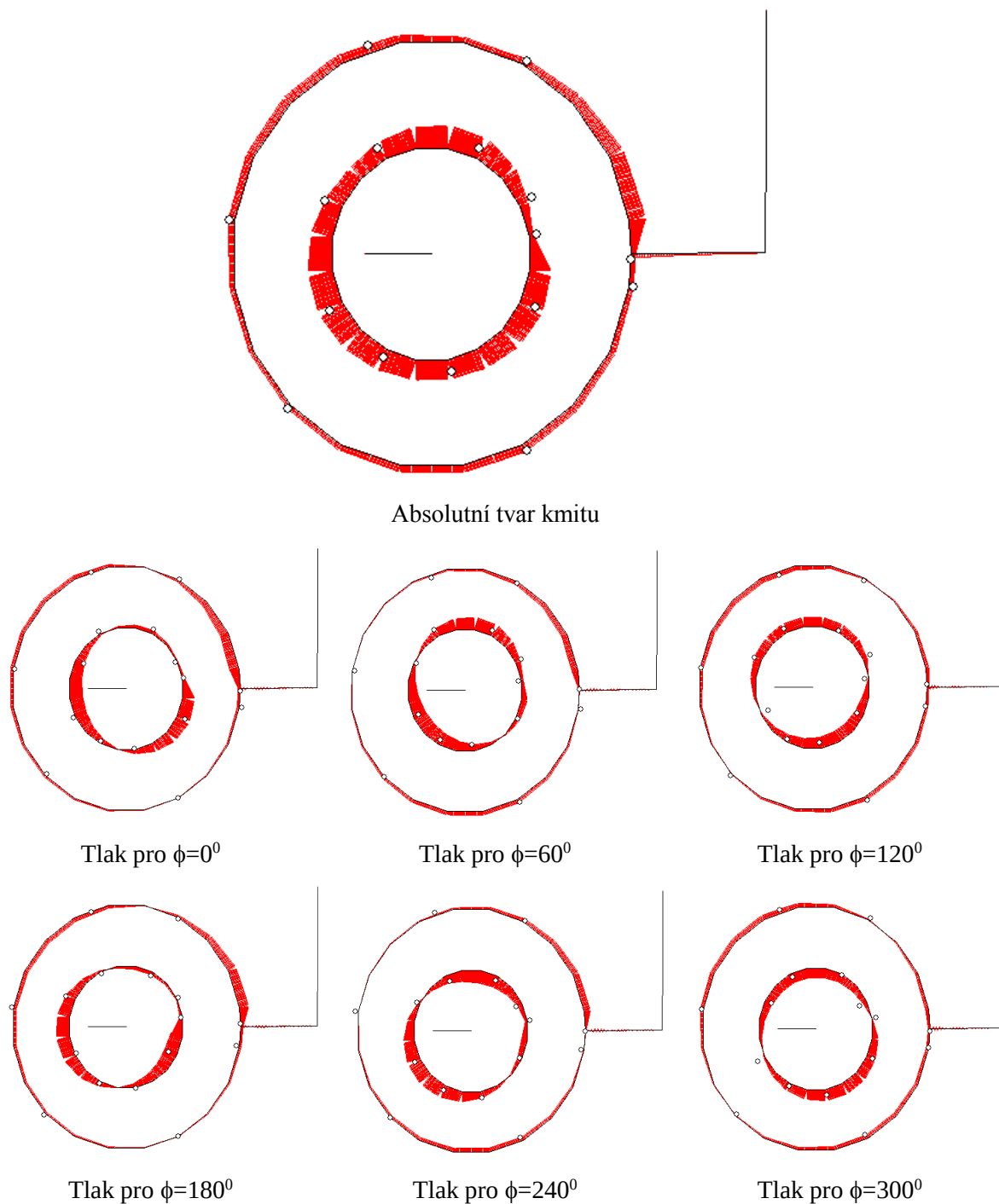
5.2.5 Čerpadlový 1D

V Tab. 6 jsou uvedeny parametry jednotlivých trubic matematického modelu. V prvním sloupci index trubice, ve druhém plocha trubice, ve třetím délka trubice, ve čtvrtém rychlost zvuku, v pátém linearizovaný odpor na vstupu do trubice, v šestém linearizovaný odpor na výstupu z trubice a v sedmém hodnota koeficientu druhé viskozity.

Index trubice	Plocha m ²	l m	v m/s	R[1] Pa.s/m ³	R[2] Pa.s/m ³	ζ_H m ² .s ⁻²
1-20	0.001	0.52	792	1.00E+00	0	1001.01
41-60	0.0015	0.2	762	1.19E+00	4.5081E-10	1000.44
82-101	0.0001	0.07	1300	0	0	1000.11
61	0.00008	0.0622	853	8.04E+00	0	1000.32
62	0.00229	0.126	853	0	0	1000.32
63	0.00385	0.129	853	0	0	1000.32
64	0.00554	0.131	853	0	0	1000.32
65	0.00754	0.133	853	0	0	1000.32
66	0.00882	0.134	853	0	0	1000.32
67	0.00985	0.135	853	0	0	1000.32
68	0.0113	0.136	853	0	0	1000.32
69	0.0133	0.138	1300	0	0	1000.38
70	0.015	0.139	1300	0	0	1000.38
71	0.0167	0.14	1300	0	0	1000.38
72	0.0191	0.141	1300	0	0	1000.38
73	0.0206	0.143	1300	0	0	1000.38
74	0.0227	0.144	1300	0	0	1000.38
75	0.0249	0.145	1300	0	0	1000.38
76	0.0266	0.146	1189	0	0	29983.74
77	0.029	0.147	1189	0	0	29983.74
78	0.0308	0.148	1189	0	0	29983.74
79	0.0327	0.149	1189	0	0	29983.74
80	0.0346	0.15	1189	0	0	29983.74
81	0.0346	0.0748	1189	0	0	29983.74
102	102.000	70	1500	0	0	10000.00
103	103.000	10	500	0	0	15000.00
104	104.000	35	500	0	0	15000.00
105	105.000	35	1400	0	0	10000.00

Tab. 6 Vypočtená data 1D čerpadlový režim

Červenou barvou je znázorněn vypočtený tlak, černými kroužky tlak měřený. V MLP je předpokládáno buzení tlakovým skokem ve tvaru rotujícího excentru, který se otáčí ve shodě s oběžným kolem. Dané grafy jsou vykresleny pro zájmovou frekvenci 490,33Hz



Obr. 48 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v čerpadlovém provozu

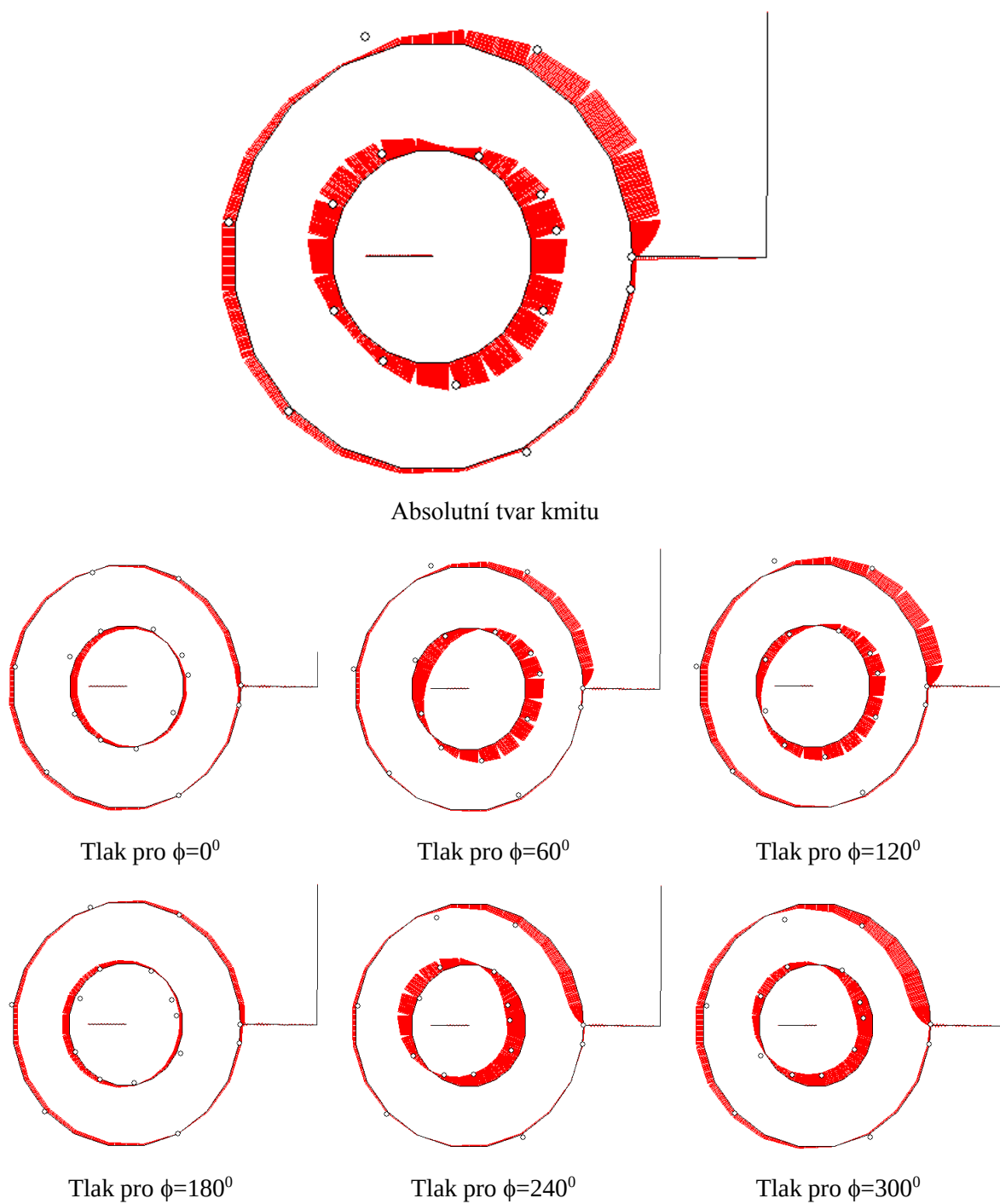
5.2.6 Turbínový 2D

V Tab. 7 jsou uvedeny parametry jednotlivých trubic matematického modelu. V prvním sloupci index trubice, ve druhém plocha trubice, ve třetím délka trubice, ve čtvrtém rychlost zvuku, v pátém linearizovaný odpor na vstupu do trubice, v šestém linearizovaný odpor na výstupu z trubice a v sedmém hodnota koeficientu druhé viskozity.

Index trubice	Plocha m ²	l m	v m/s	R[1] Pa.s/m ³	R[2] Pa.s/m ³	ζ_H m ² /s ²
1-20	0.001	0.572231	852	4.66E+05	0	8667.65
41-60	0.0015	0.2	1300	1.36E+04	0	29998.60
82-101	0.00081	0.07	813	0	0	1000.01
61	0.00008	0.0622	1300	8.06E+07	0	29999.70
62	0.00229	0.126	1300	0	0	29999.70
63	0.00385	0.129	1300	0	0	29999.70
64	0.00554	0.131	1300	0	0	29999.70
65	0.00754	0.133	1300	0	0	29999.70
66	0.00882	0.134	1300	0	0	29999.70
67	0.00985	0.135	1300	0	0	29999.70
68	0.0113	0.136	1300	0	0	29999.70
69	0.0133	0.138	1300	0	0	1000.01
70	0.015	0.139	1300	0	0	1000.01
71	0.0167	0.14	1300	0	0	1000.01
72	0.0191	0.141	1300	0	0	1000.01
73	0.0206	0.143	1300	0	0	1000.01
74	0.0227	0.144	1300	0	0	1000.01
75	0.0249	0.145	1300	0	0	1000.01
76	0.0266	0.146	1033	0	0	29999.80
77	0.029	0.147	1033	0	0	29999.80
78	0.0308	0.148	1033	0	0	29999.80
79	0.0327	0.149	1033	0	0	29999.80
80	0.0346	0.15	1033	0	0	29999.80
81	0.0346	0.0748	1033	0	0	29999.80
102	102.000	70	1500	0	0	10000.00
103	103.000	10	500	0	0	15000.00
104	104.000	35	500	0	0	15000.00
105	105.000	35	1400	0	0	10000.00

Tab. 7 vypočtená data 2D turbínový režim

Červenou barvou je znázorněn vypočtený tlak, černými kroužky tlak měřený. V MLP je předpokládáno buzení tlakovým skokem ve tvaru rotujícího excentru, který se otáčí ve shodě s oběžným kolem. Dané grafy jsou vykresleny pro zájmovou frekvenci 489,69Hz.



Obr. 49 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v turbínovém provozu

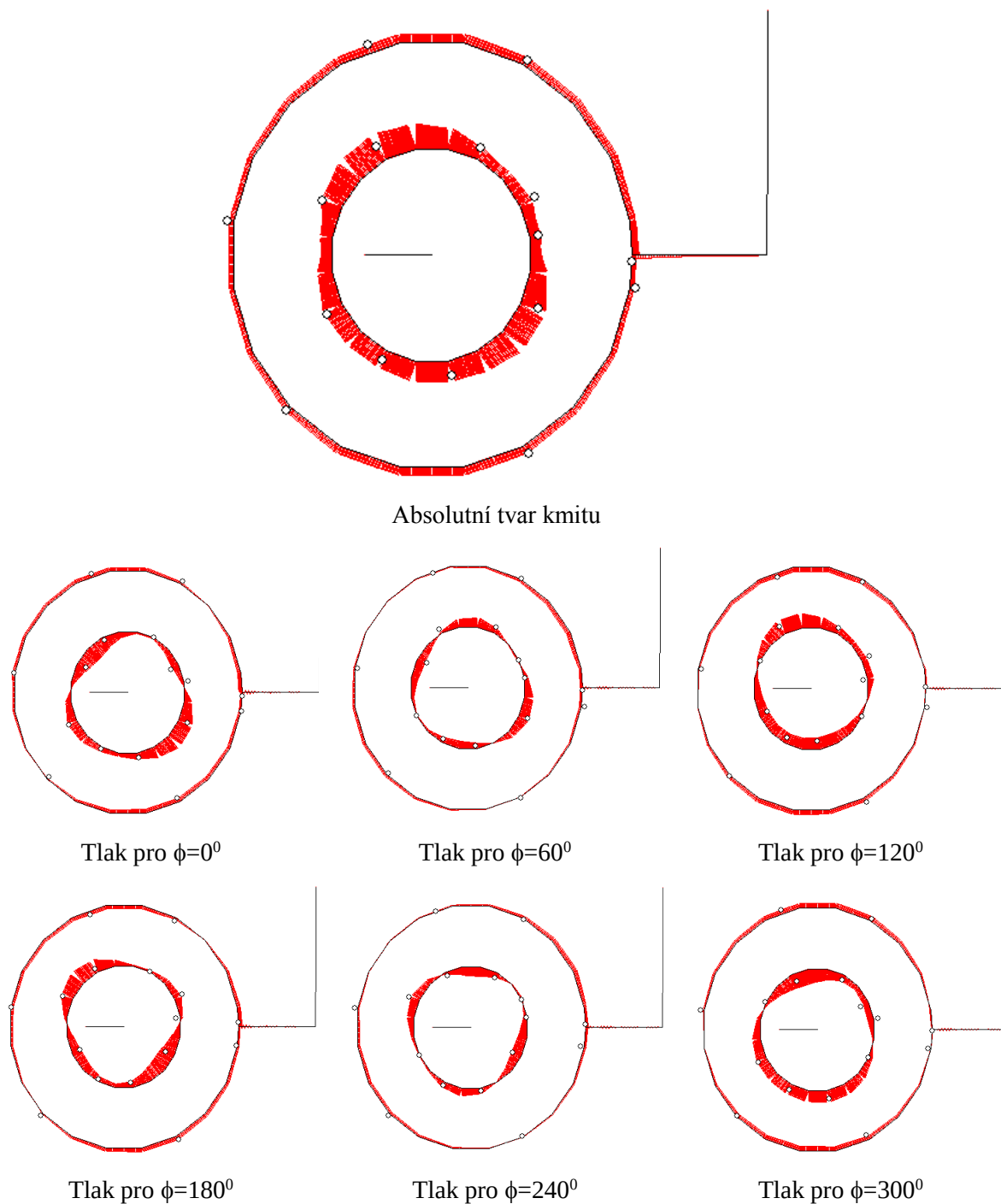
5.2.7 Čerpadlový 2D

V Tab. 8 jsou uvedeny parametry jednotlivých trubic matematického modelu. V prvním sloupci index trubice, ve druhém plocha trubice, ve třetím délka trubice, ve čtvrtém rychlost zvuku, v pátém linearizovaný odpor na vstupu do trubice, v šestém linearizovaný odpor na výstupu z trubice a v sedmém hodnota koeficientu druhé viskozity.

Index trubice	Plocha m ²	l m	v m/s	R[1] Pa.s/m ³	R[2] Pa.s/m ³	ζ _H m ² /s ²
1-20	0.001	0.572231	713	1.00E+00	0	1000.08
41-60	0.0015	0.2	825	1.00E+00	0	1000.01
82-101	0.00020135	0.07	604	0	0	1000.03
61	0.00008	0.0622	680	1.89E+09	0	1000.02
62	0.00229	0.126	680	0	0	1000.02
63	0.00385	0.129	680	0	0	1000.02
64	0.00554	0.131	680	0	0	1000.02
65	0.00754	0.133	680	0	0	1000.02
66	0.00882	0.134	680	0	0	1000.02
67	0.00985	0.135	680	0	0	1000.02
68	0.0113	0.136	680	0	0	1000.02
69	0.0133	0.138	898	0	0	1000.01
70	0.015	0.139	898	0	0	1000.01
71	0.0167	0.14	898	0	0	1000.01
72	0.0191	0.141	898	0	0	1000.01
73	0.0206	0.143	898	0	0	1000.01
74	0.0227	0.144	898	0	0	1000.01
75	0.0249	0.145	898	0	0	1000.01
76	0.0266	0.146	1010	0	0	1000.11
77	0.029	0.147	1010	0	0	1000.11
78	0.0308	0.148	1010	0	0	1000.11
79	0.0327	0.149	1010	0	0	1000.11
80	0.0346	0.15	1010	0	0	1000.11
81	0.0346	0.0748	1010	0	0	1000.11
102	102.000	70	1500	0	0	10000.00
103	103.000	10	500	0	0	15000.00
104	104.000	35	500	0	0	15000.00
105	105.000	35	1400	0	0	10000.00

Tab. 8 vypočtená data 2D čerpadlový režim

Červenou barvou je znázorněn vypočtený tlak, černými kroužky tlak měřený. V MLP je předpokládáno buzení tlakovým skokem ve tvaru rotujícího excentru, který se otáčí ve shodě s oběžným kolem. Dané grafy jsou vykresleny pro zájmovou frekvenci 490,33Hz

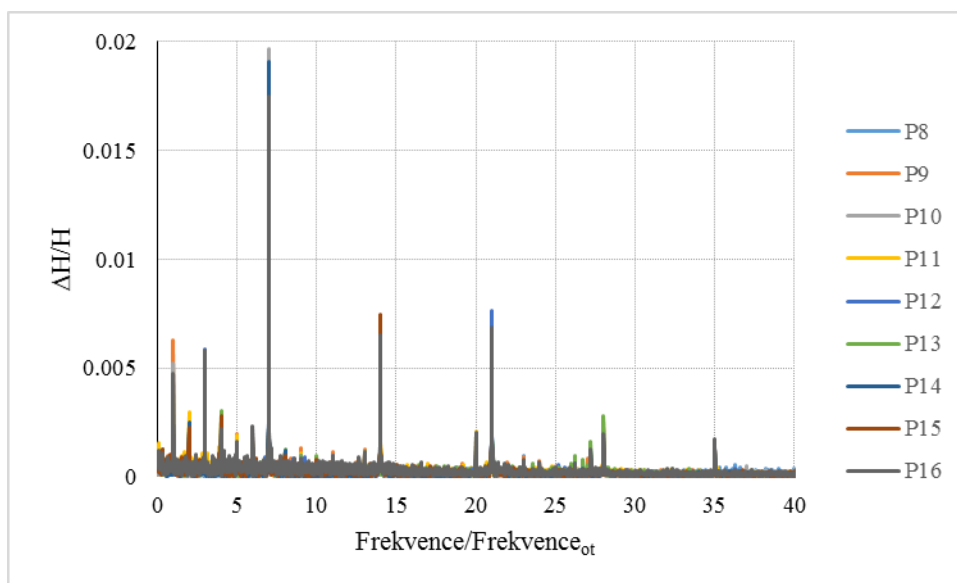


Obr. 50 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v čerpadlovém provozu

5.3 Vyhodnocení měřených pomocí DFT

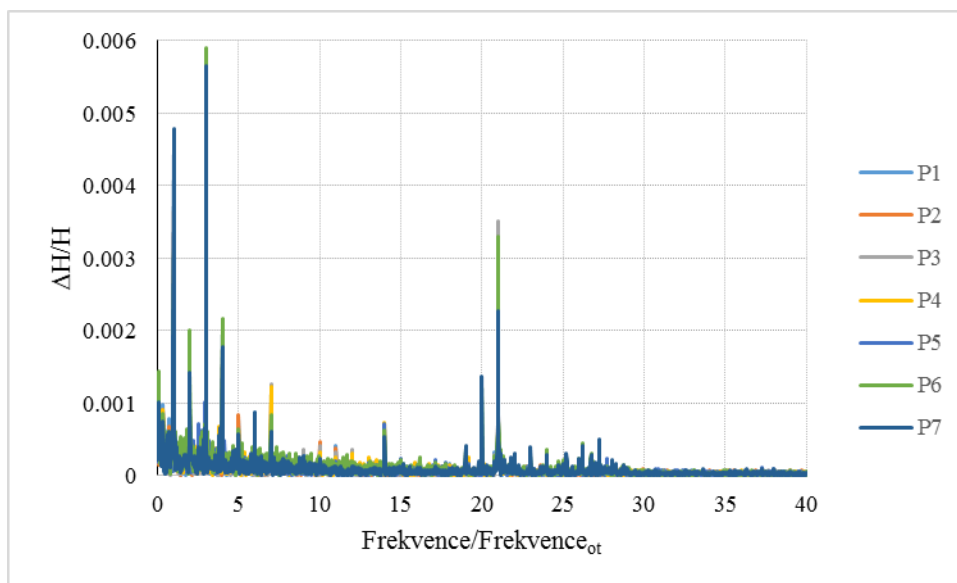
Následující Obr. 51, Obr. 52, Obr. 53 ukazují vyhodnocení měření modelu přečerpávací vodní elektrárny Dlouhé Stráně v čerpadlovém režimu, po aplikaci diskrétní Fourierovi transformace. V legendě jsou označeny tlakové snímače na spirále (P8-P16) a mezilopátkovém prostoru (P1-P7). Při známém počtu oběžných a rozváděcích lopatek může podle vztahů (134), (135), (136) můžeme určit lopátkové a otáčkové frekvence. U přečerpávací vodní elektrárny Dlouhé Stráně má oběžné kolo sedm lopatek, rozváděcích lopatek je dvacet.

Z Obr. 51 jsou patrné významné amplitudy na násobcích lopátkové frekvence oběžného kola. Kde lopátková frekvence je na sedminásobku otáčkové frekvence.

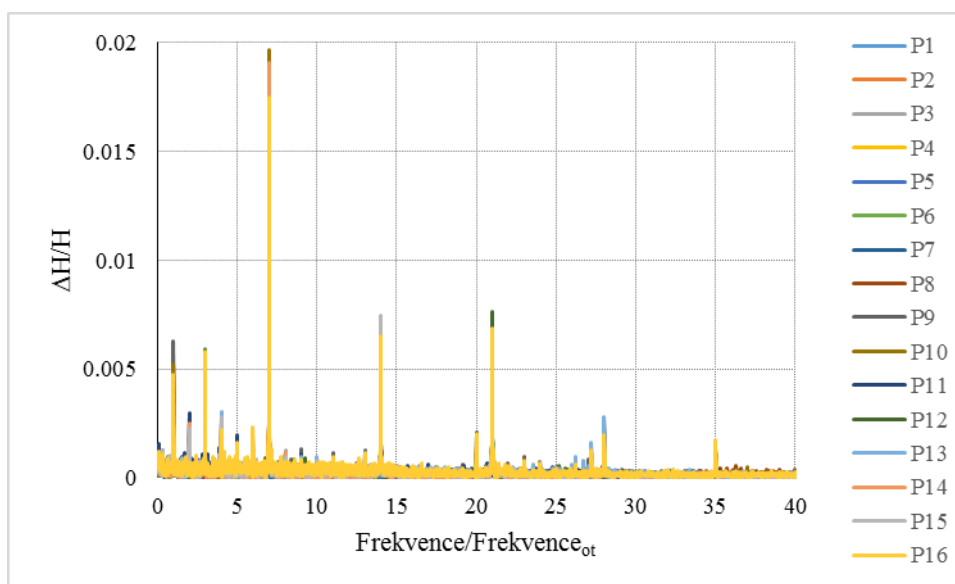


Obr. 51 Měření tlaku po DFT na spirále při čerpadlovém provozu.

V Obr. 52 je výrazný jednadvacátý násobek otáčkové frekvence.

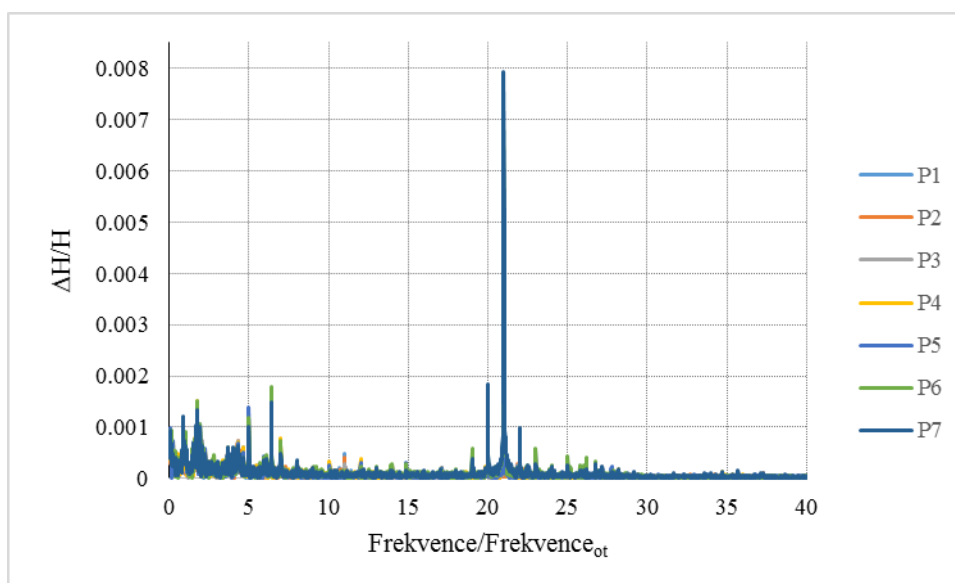


Obr. 52 Měření tlaku po DFT v MLP při čerpadlovém provozu.



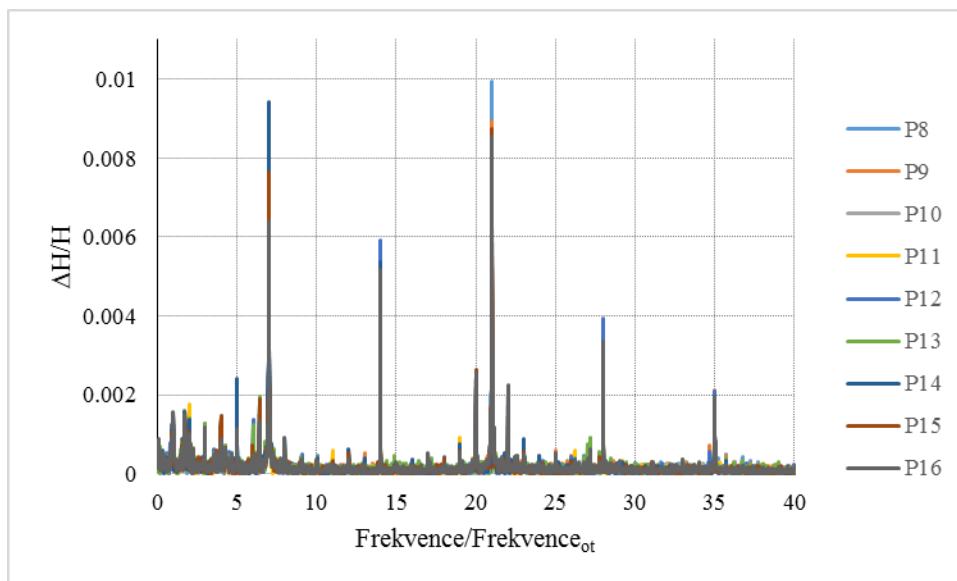
Obr. 53 Měřené tlaky po DFT na spirále a v MLP při čerpadlovém provozu.

Vyhodnocení měření modelu přečerpávací vodní elektrárny Dlouhé Stráně v turbinovém režimu po aplikaci diskrétní Fourierovi transformace. V legendě jsou označeny tlakové snímače na spirále (P8-P16) a mezilopatkovém prostoru (P1-P7). V Obr. 54 je významný jednadvacátý násobek otáčkové frekvence.

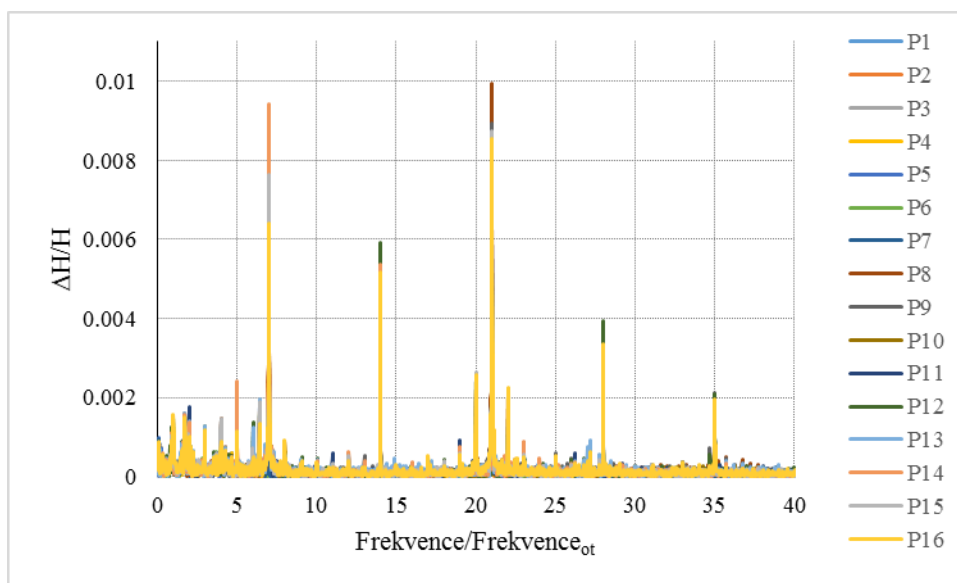


Obr. 54 Měřené tlaky po DFT v MLP při turbínovém provozu.

Z Obr. 55 jsou patrné dominantní sedminásobky frekvence.



Obr. 55 Měřené tlaky po DFT v MLP při turbinovém provozu



Obr. 56 Měřené tlaky po DFT na spirále a v MLP při turbinovém provozu.

6 Závěr

V práci je uvedeno odvození přenosové matice pro trubice s konstantním průřezem a přenosové matice pro trubice ve tvaru kužele s vlivem druhé viskozity.

Bylo provedeno porovnání válcových a kuželových trubic při různých okrajových podmínkách. 1) Na počátku buzení tlakem, na konci průtoková okrajová podmínka. 2) Na počátku buzení průtokem, na konci okrajová podmínka průtokem. 3) Na počátku buzení tlakem na konci okrajová podmínka tlaku. 4) Na počátku buzení průtokem a na konci okrajová podmínka tlaku.

Pouze při variantě okrajových podmínek buzení tlakem na počátku trubice a tlaku na konci trubice se nemění vlastní frekvence Obr. 30.

U trubic na počátku buzených průtokem a na konci okrajová podmínka průtokem jsou vlastní frekvence vyšší než u rovné trubice a to jako v konfuzoru, tak v difuzoru.

Pro trubice buzené tlakem na počátku a na konci okrajová podmínka průtokem je vliv kuželovitosti nejvýraznější pro první vlastní frekvenci. Se zvyšujícím se poměrem vstupního a výstupního průměru trubice narůstá i vlastní frekvence. Stejně závěry jsou i při buzení průtokem na počátku trubice a na konci tlakové okrajové podmínce.

Nejvyšší rozdíly ve vypočtených vlastních frekvencích mezi kuželovou a válcovou trubicí jsou u první vlastní frekvence. Pro kuželové trubice ve tvaru difuzoru se vstupním průměrem menším než válcová, jsou vynucené frekvence vyšší než pro válcovou trubicí. V konfuzoru jsou naopak nižší, viz Tab. 4 a Obr. 37. Frekvence u kuželových trubic při okrajových podmínkách P_Q se shodují s frekvencemi při Q_P .

Pomocí kuželových přenosových matic byl vytvořen model pro výpočet vysokofrekvenčních tlakových a průtokových pulsací v prostoru vodní turbíny, nebo čerpadla s uvažováním savky a přiváděče. Výsledky z výpočtu tlakových pulsací byly porovnány s naměřenými tlakovými pulsacemi na spirále a v MLP.

Při tvorbě modelu byly počítány různé varianty délek pro jednotlivé trubice na spirále, trubice modelující rozvaděč a před rozvaděč, modelující OK a okružní potrubí. Pro stejné trubice byla řešena i rychlost zvuku v trubicí, druhá viskozita, linearizovaný odpor na počátku a na konci trubice. Porovnání numerického modelu s měřenými hodnotami bylo pomocí rezidua. Toto reziduum představuje shodu mezi měřenými a vypočtenými tlakovými pulsacemi, a to jak hodnotu tlakových pulsací, tak i fázovou shodu. Po výpočtu hodnoty tohoto rezidua je možno provádět optimalizaci numerického modelu, a to buď ručně zadáním nových vstupních hodnot, nebo pomocí genetického algoritmu.

Genetický algoritmus je naprogramován v softwaru F-A char. Optimalizace 1D a 2D modelů vycházela z minimalizace rezidua. Pro výpočet rezidua je nutné mít vyhodnocená data z měření modelu, která poskytl ČKD Blansko Engineering. Měřené tlaky převést pomocí Fourierovy transformace z časové oblasti do frekvenční. Tím získat amplitudy a fáze pro dané frekvence. Reziduum bylo minimalizováno pouze na vybraných vstupních parametrech modelu, tj. na rychlosti zvuku, druhé viskozitě, odporu na počátku a konci trubice.

Při výpočtu rezidua pomocí genetického algoritmu, metoda sklouzává k lokálnímu minimu, proto byl výpočet přerušován a ručně upravovány řešené parametry. Další snížení rezidua je možné dosáhnout, zvýšením počtů stupňů volnosti, tj. zvětšením počtů počítaných parametrů, ale to může mít za následek nereálné výsledky parametrů trubic. Zde uvažovaný numerický model měl 16 stupňů volnosti.

Při porovnávání 1D a 2D modelů v turbinovém režimu se vliv kuželovitých trubic projevil nepatrně, tj. rozdíly ve shodě reziduí byly 3%.

V čerpadlovém režimu měl 2D model o 10% vyšší shodu reziduí, než 1D model.

Z pohledu tvorby 1D a 2D. Numerický model složený z válcových trubic, např. u spirály, kterou rozdělíme na segmenty. Dále zjistíme průměr na počátku a na konci, z nich spočítáme střední hodnotu, kterou zadáváme do numerického modelu, jako průměr trubice. Numerický model složený z válcových a kuželových trubic zadáváme přímo průměr na počátku a na konci segmentu spirály. Jednotlivé plochy segmentů spirály na sebe navazují, tím zajišťujeme spojitost plochy po délce spirály. Zvyšuje se tím uživatelský komfort při zadávání.

Použitá literatura

- [1] HABÁN, Vladimír. *Habilitační práce- Vysokofrekvenční pulsace ve vodních strojích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 77s. Školitel: Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [2] HABÁN, Vladimír. Popis k programu „F-Achar“: Program pro řešení pulsací ve větvených hydraulických obvodech metodou přenosových matic, rozšířený o výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitu. Technická zpráva. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2006. 27s. PDF. Nepublikováno
- [3] KOUTNÍK, Jiří. *Tlakové a průtokové pulsace v hydraulických systémech vodních turbín*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 1997. 41s. Školitel: Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [4] HABÁN, Vladimír. *Disertační práce – Tlumení tlakových a průtokových pulsací*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2001. 57s. Školitel: Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [5] POCHYLÝ, František; HABÁN, Vladimír. *Nelineární vlnová rovnice pro tlakovou funkci* Výzkumná zpráva č. VUT-EU-QR-17-05. Brno (CZ) VUT FSI, 2005
- [6] POCHYLÝ, František; HABÁN, Vladimír. *Přenosová matice tlakových a průtokových pulsací v trubici kruhového průřezu ve tvaru kužele*. Výzkumná zpráva č. VUT-EU-QR-09-07. Brno (CZ) VUT FSI, 2007
- [7] VESELÝ, Radek. *Řezání vodním paprskem modulovaným ultrazvukem – optimalizace kapalinového vlnovodu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 80s. Školitel: Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [8] POCHYLÝ, František; HABÁN, Vladimír. *Nelineární vlnová rovnice pro tlakovou funkci*. Výzkumná zpráva č. VUT-EU-QR-17-05. Brno (CZ) VUT FSI, 2005
- [9] BRDIČKA, M.; SAMEK, L.; SOPKO, B.: *Mechanika kontinua*. Vydání 4., opravené, Praha: Academia, 2011, ISBN 80-200-2039-0
- [10] FRANČO, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011, 160 s. ISBN 978-80-214-4399-0.
- [11] Wolfram Mathworld Help [online] 1/ 2013. Dostupné z WWW: <http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html>
- [12] Wolfram Mathworld Help [online] 1/ 2013. Dostupné z WWW: <http://mathworld.wolfram.com/SphericalBesselDifferentialEquation.html>
- [13] eFunda. Inc. Mathematics Help [online] 2013. Dostupné z WWW: http://www.efunda.com/math/math_home/math.cfm
- [14] POCHYLÝ, František; HABÁN, Vladimír. *Optimalizace tvaru kapalinového vlnovodu pro použití řezání vodním paprskem*. Výzkumná zpráva č. VUT-EU13303-QR-08. Brno (CZ) VUT FSI, 2008
- [15] POCHYLÝ, František. HABÁN, Vladimír. Technická zpráva – *Vlnová rovnice a druhá viskozita kapalin*. Brno 2001. VUT-EU-QR-34-01
- [16] HABÁN, Vladimír; KUBÁLEK Jiří. *Vyhodnocení měření tlakových pulsací čerpadlové turbíny Dlouhé Stráně*. Výzkumná zpráva č. VUT-EU13303-QR-36-7. Brno (CZ) VUT FSI, 2007

- [17] KUBÁLEK, Jiří. *Diplomová práce –Modelování vysokofrekvenčních pulsací*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2006. 45s.Školitel: Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [18] Nicolet C 2007 *Hydroacoustic Modelling and Numerical Simulation of Unsteady Operation of Hydroelectric Systems*. PhD Thesis EPFL n°3751 Lausanne (<http://library.epfl.ch/theses/?nr=3751>)
- [19] POCHYLÝ, F.: *Dynamika tekutinových systémů*. 1.vyd. Brno: Editační středisko VUT Brno, 1990. 110 s. ISBN 80214-01397
- [20] ŠOB, F.: *Hydromechanika*. 1.vyd. Brno: Editační středisko VUT Brno, 2002. 238 s. ISBN 80214-20375

Seznam nejdůležitějších symbolů

Symbol	Jednotka	Popis
$\lambda; \gamma; \mu$	1	Konstanty
δ_{ij}	1	Kroneckerův tenzor
$\varepsilon; \varepsilon_0; \varepsilon_1$	1	Poměrná deformace
$\tilde{\varepsilon}; \tilde{\varepsilon}_0; \tilde{\varepsilon}_1$	1	Laplaceův obraz poměrné deformace
η	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	Dynamická viskozita kapaliny
ν	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Kinematická viskozita kapaliny
ξ	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Druhá kinematická viskozita
ξ_H	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	Koeficient druhé kinematické viskozity
ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Hustota kapaliny
ρ_t	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Hustota trubice
σ	Pa	Napětí v trubici
$\tilde{\sigma}$	Pa	Laplaceův obraz napětí v trubici
σ_L	Pa	Laplaceův obraz tlaku
τ	1	Laplaceův obraz času
$\varphi; \vartheta$	rad	Úhel
$\psi(s)$	s^{-1}	Laplaceův obraz paměti ztrátového součinitele
ω	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Úhlová rychlost
Δ	m	Tloušťka stěny trubice
Θ	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	Druhá dynamická viskozita
$\Gamma(t)$	1	Paměťová funkce ztrátového součinitele pro nestacionární průtok
Π_{ij}	Pa	Nevratný tenzor napětí
Σ_{ij}	Pa	Tenzor napětí v trubici
b	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	Druhá dynamická viskozita
$\mathbf{c}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Vektor rychlosti kapaliny
c_r	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Rychlost ve sférickém souřadném systému
$c_{ij\omega}$	1	Tenzor rychlosti deformace
$c_{kk\omega}$	1	Divergence udávající zřidlivost rychlostního pole
$\tilde{\mathbf{c}}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Laplaceův obraz rychlosti kapaliny
$\tilde{c}_r$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Střední rychlost ve sférickém souřadném systému
f_r	Hz	Frekvence
$\mathbf{g}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	Tíhové zrychlení
i	1	Imaginární jednotka
$i; j$	1	indexy nabývající hodnot 1, 2, 3
k	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	Konstanta

m	kg	Hmotnost
$\mathbf{n}$	1	Normálový jednotkový vektor
$n_1; n_2; n_P$	1	Jednotkové vektory normály
p	Pa	Tlak v trubici
q	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	Laplaceův obraz průtoku
s	s^{-1}	Parametr Laplaceovy transformace podle času
t	s	Čas
$\mathbf{u}$	1	Stavový vektor
v	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Komplexní rychlost zvuku
v_0	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Rychlost zvuku v kapalině
$\tilde{w}_r$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Laplaceův obraz střední rychlosti kapaliny ve sférickém souř. syst.
x	m	Délková souřadnice
$A; B; C$	1	Substituce
D	m	Vnitřní průměr trubice
E_0	Pa	Materiálová konstanta trubice (tuhost)modul pružnosti
E_1	Pa	Materiálová konstanta trubice (tuhost)
$G_0; H_0$	1	Integrační konstanty
$J; Y$	1	Besselova funkce
L	m	Délka trubice
$\mathbf{P}$	1	Přenosová matice kapaliny
Q	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	Průtok
R	m	Vnitřní poloměr trubice
S	m^2	Plocha
$\mathbf{U}^T$	1	Stavový vektor
V	m^3	Objem
$Z(r)$		Tlaková funkce po délce trubice
MLP		Mezilopatkový prostor
SPI		Spirála
P_Q		Na počátku trubice buzení tlakem, na konci podmínka průtoku
P_P		Na počátku trubice buzení tlakem, na konci podmínka tlaku
Q_P		Na počátku trubice buzení průtokem, na konci podmínka tlaku
Q_Q		Na počátku trubice buzení průtokem, na konci podmínka průtoku

Seznam obrázků

Obr. 1 Závislost mezi 2. kinematickou viskozitou a frekvencí [15].....	3
Obr. 2 Vytknutý element dx pro odvození rovnice kontinuity	4
Obr. 3 Model standardního tělesa.....	6
Obr. 4 Závislost změny poloměru trubice na rychlosti c	7
Obr. 5 Silová rovnováha elementu trubice	7
Obr. 6 Rozložení sil na elementu trubice	7
Obr. 7 Definování sférického prostoru pro řešení matice	16
Obr. 8 Model trubice v SW F-A char	23
Obr. 9 Schematický model válcové trubice.....	23
Obr. 10 Model trubice v SW F-A char	23
Obr. 11 Změna průměrů $D_{1;2}$ u kuželové trubice.....	23
Obr. 12 Amplitudy tlaků při P_Q	24
Obr. 13 Amplitudy průtoků při P_Q	25
Obr. 14 První tři tvary průtoků při P_Q	26
Obr. 15 První tři tvary tlaků při P_Q	27
Obr. 16 Vliv poměru průměrů na frekvenci při P_Q	28
Obr. 17 Schéma okrajových podmínek	29
Obr. 18 Schéma okrajových podmínek	29
Obr. 19 Frekvence průtoků při Q_Q	29
Obr. 20 Frekvence tlaku při Q_Q	29
Obr. 21 První tři vlastní tvary průtoků pro Q_Q	30
Obr. 22 První tři vlastní tvary tlaků při Q_Q	31
Obr. 23 Vliv poměru průměrů na frekvenci při Q_Q	32
Obr. 24 Schéma okrajových podmínek	33
Obr. 25 Schéma okrajových podmínek	33
Obr. 26 Frekvence tlaků při P_P	33
Obr. 27 Frekvence průtoků při P_P	33
Obr. 28 První tři vlastní tvary průtoků při P_P	34
Obr. 29 První tři vlastní tvary tlaku při P_P	35
Obr. 30 Vliv poměru průměrů na frekvenci při P_P	36
Obr. 31 Schéma okrajových podmínek	37
Obr. 32 Schéma okrajových podmínek	37
Obr. 33 Frekvence tlaků při Q_P	37
Obr. 34 Frekvence průtoků při Q_P	37
Obr. 35 První tři vynucené tvary průtoků při Q_P	38
Obr. 36 První tři vynucené tvary tlaku při Q_P	39
Obr. 37 Vliv poměru průměrů na frekvenci při Q_P	40
Obr. 38 $N=1$	41
Obr. 39 $N=2$	41
Obr. 40 Umístění snímačů tlaku na spirále p1–p7	42
Obr. 41 Umístění snímačů tlaku po obvodu MLP p8–p16.....	42
Obr. 42 Vyhodnocení měření pro turbínu ve SPI a MLP	43
Obr. 43 Model PVE Dlouhé Stráně.....	44
Obr. 44 Detail MLP a okružního potrubí	45
Obr. 45 Korekce natočení a délky	47
Obr. 46 Nelineární a lineární odpor.....	47

Obr. 47 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v turbínové provozu	50
Obr. 48 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v čerpadlovém provozu	52
Obr. 49 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v turbínovém provozu	54
Obr. 50 Tvary kmitu tlaku při fázovém posunu 60° v čerpadlovém provozu	56
Obr. 51 Měřené tlaky po DFT na spirále při čerpadlovém provozu	57
Obr. 52 Měřené tlaky po DFT v MLP při čerpadlovém provozu	57
Obr. 53 Měřené tlaky po DFT na spirále a v MLP při čerpadlovém provozu	58
Obr. 54 Měřené tlaky po DFT v MLP při turbínovém provozu	58
Obr. 55 Měřené tlaky po DFT v MLP při turbínovém provozu	59
Obr. 56 Měřené tlaky po DFT na spirále a v MLP při turbínovém provozu	59
Obr. 57 První tři frekvence průtoků při (P_Q)	70
Obr. 58 První tři frekvence tlaků při (P_Q)	71
Obr. 59 První tři frekvence průtoků při (Q_Q)	72
Obr. 60 První tři frekvence tlaku při (Q_Q)	73
Obr. 61 První tři frekvence průtoků při (P_P)	74
Obr. 62 První tři frekvence tlaků při (P_P)	75
Obr. 63 První tři frekvence průtoků při (Q_P)	76
Obr. 64 První tři frekvence tlaků při (Q_P)	77

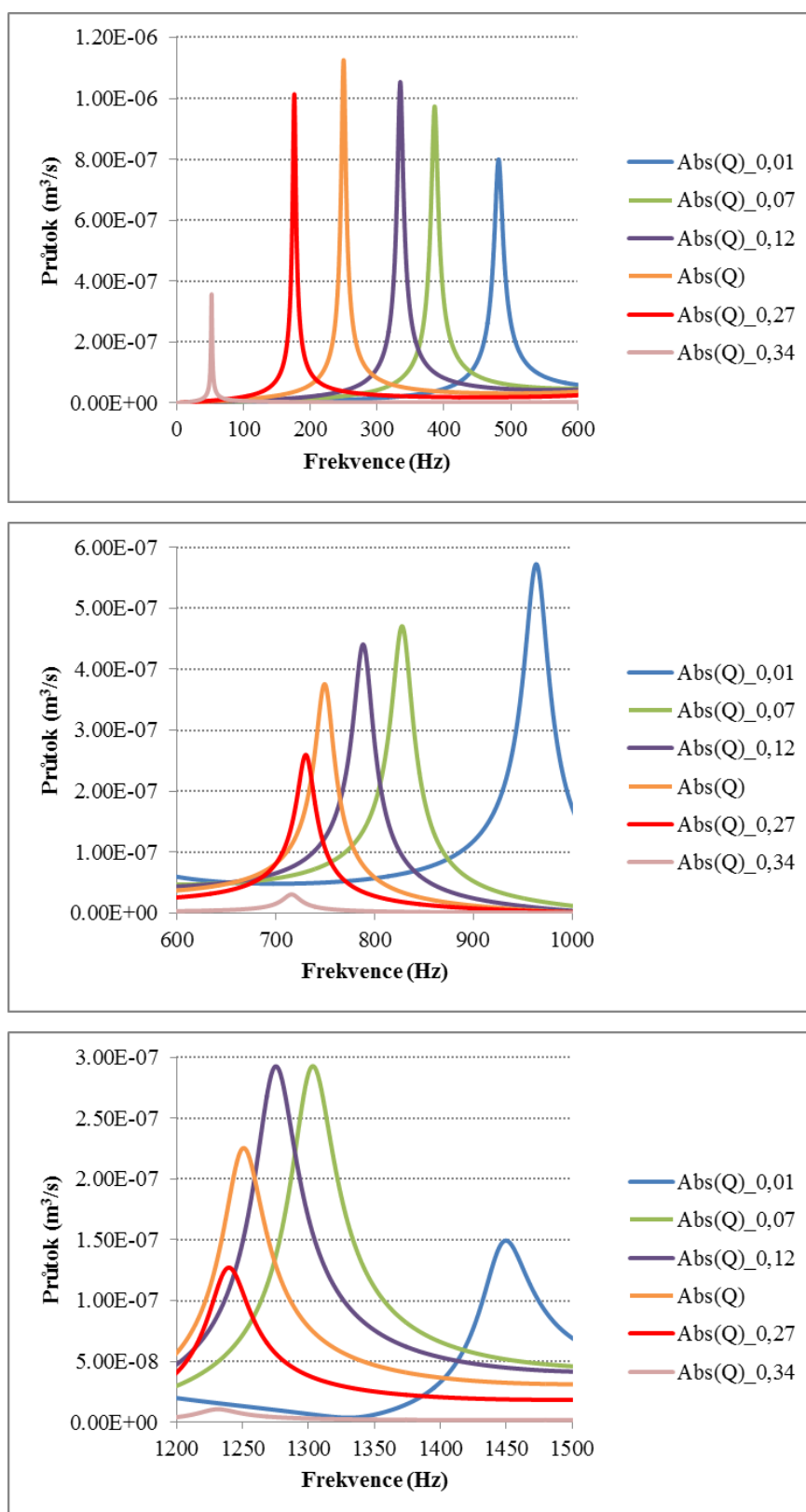
Seznam tabulek

Tab. 1 Vypočtené frekvence (Hz) při P_Q	28
Tab. 2 Vypočtené frekvence (Hz) při Q_Q	32
Tab. 3 Vypočtené frekvence (Hz) při P_P	36
Tab. 4 Vypočtené frekvence (Hz) při Q_P	40
Tab. 5 Vypočtená data 1D turbínový režim	49
Tab. 6 Vypočtená data 1D čerpadlový režim	51
Tab. 7 vypočtená data 2D turbínový režim	53
Tab. 8 vypočtená data 2D čerpadlový režim	55

Seznam příloh

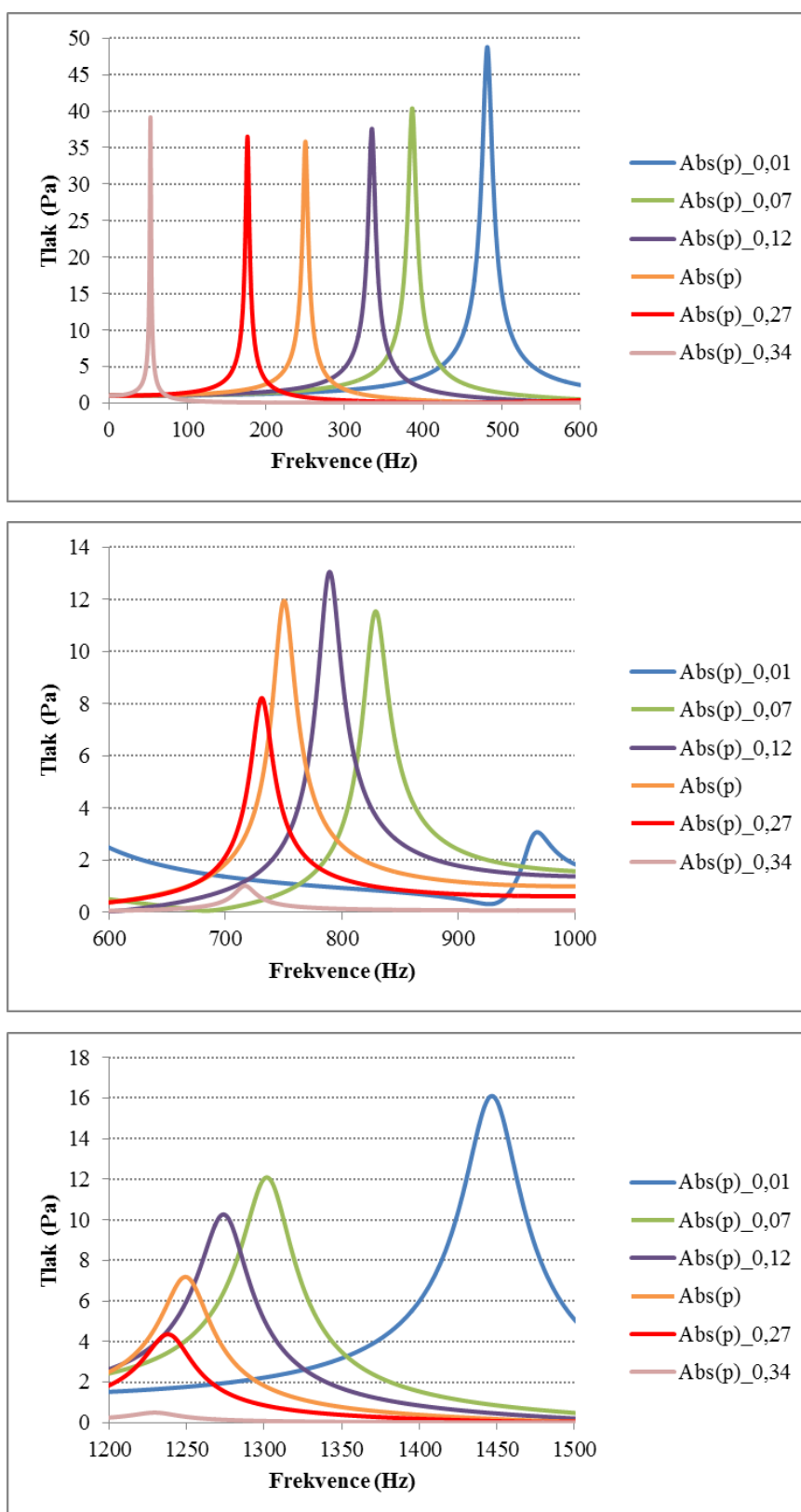
Příloha č. 1 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoků při P_Q.....	70
Příloha č. 2 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaků při P_Q	71
Příloha č. 3 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoků při Q_Q	72
Příloha č. 4 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaku při Q_Q	73
Příloha č. 5 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoků při P_P	74
Příloha č. 6 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaků při P_P.....	75
Příloha č. 7 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoků při Q_P.....	76
Příloha č. 8 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaků při Q_P	77

Příloha č. 1 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoků při P_Q

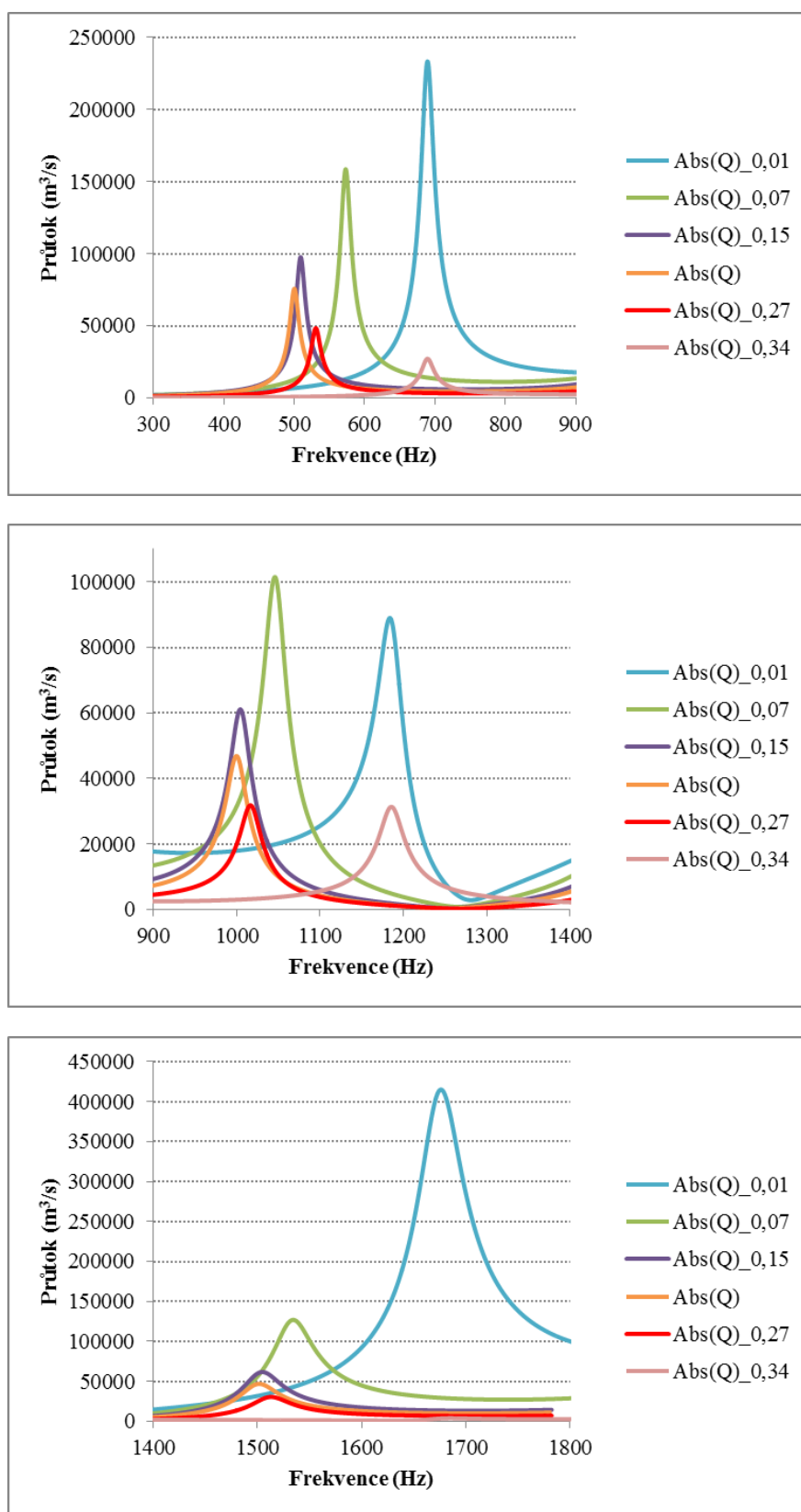


Obr. 57 První tři frekvence průtoků při (P_Q)

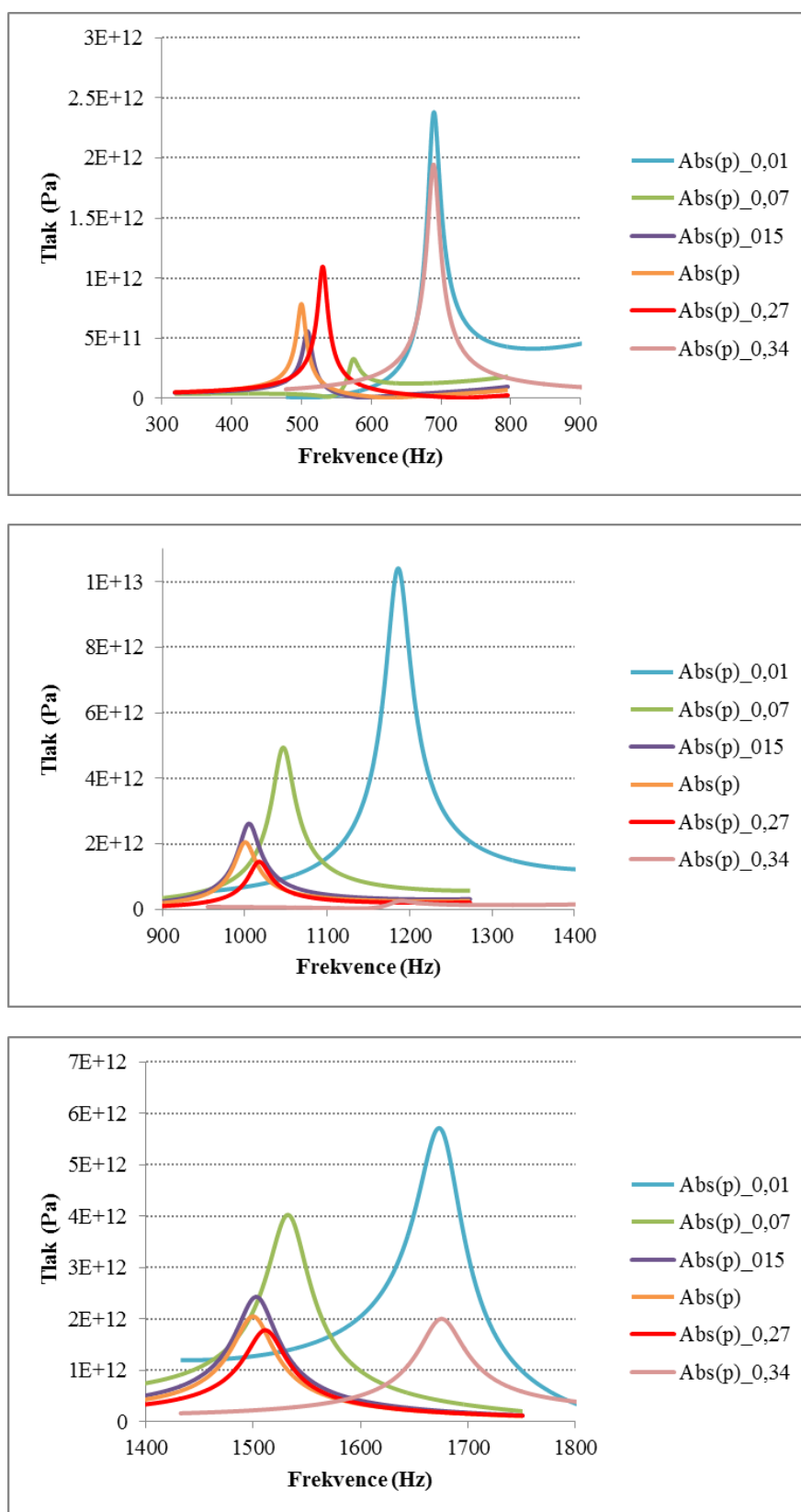
Příloha č. 2 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaků při P_Q



Obr. 58 První tři frekvence tlaků při (P_Q)

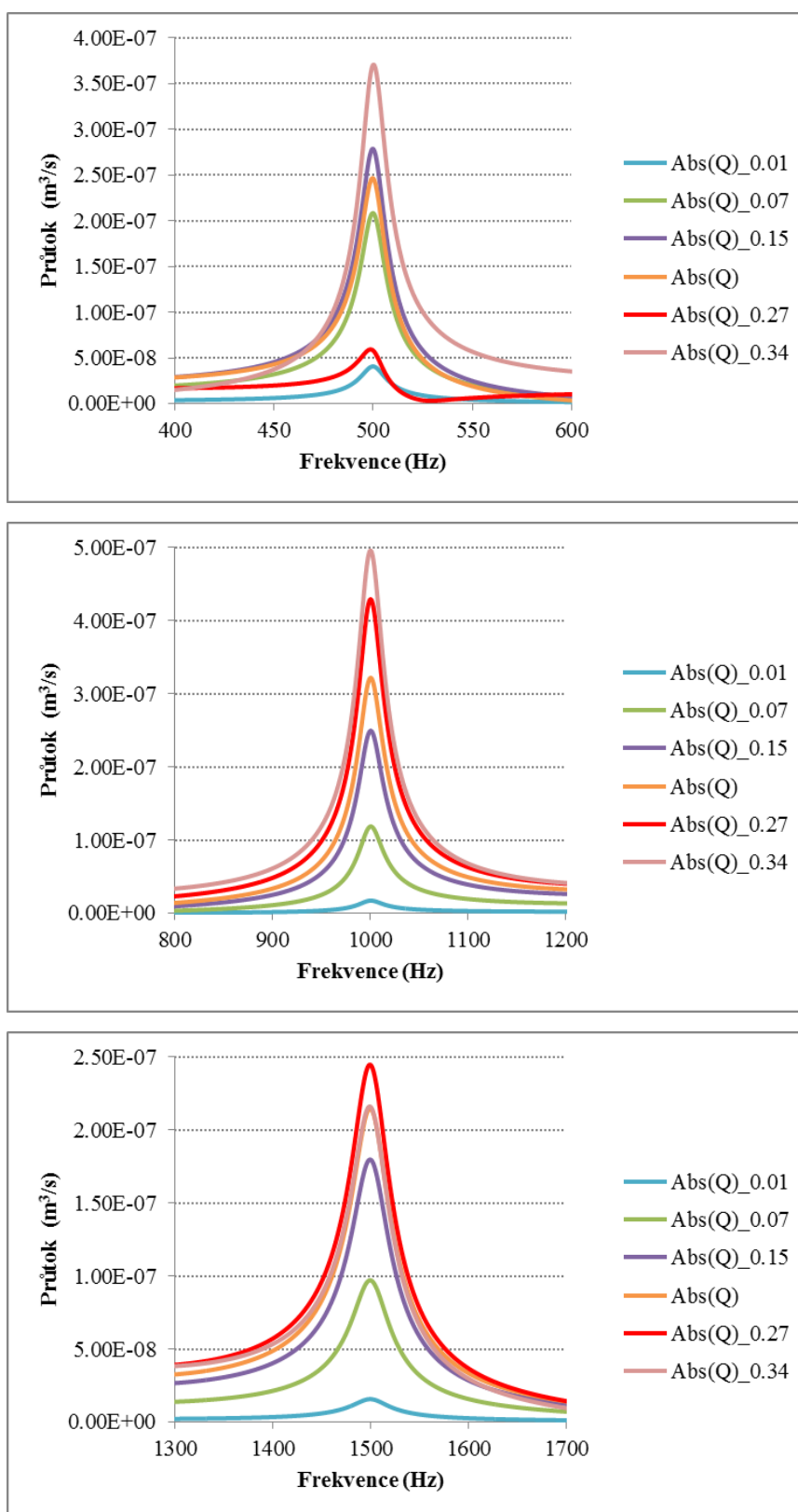
Příloha č. 3 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoku při Q_Q Obr. 59 První tři frekvence průtoku při (Q_Q)

Příloha č. 4 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaku při Q_Q



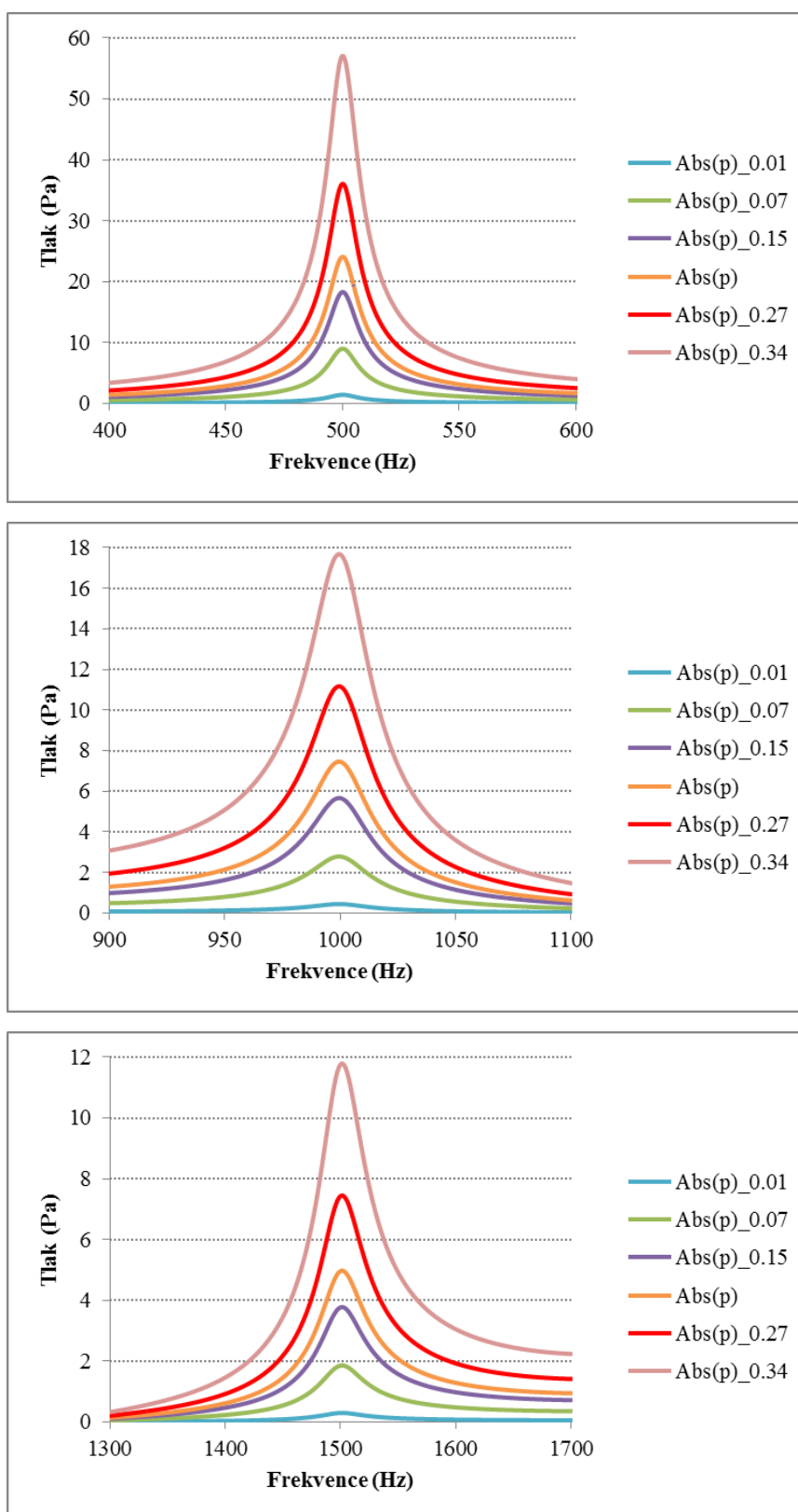
Obr. 60 První tři frekvence tlaku při (Q_Q)

Příloha č. 5 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoku při P_P

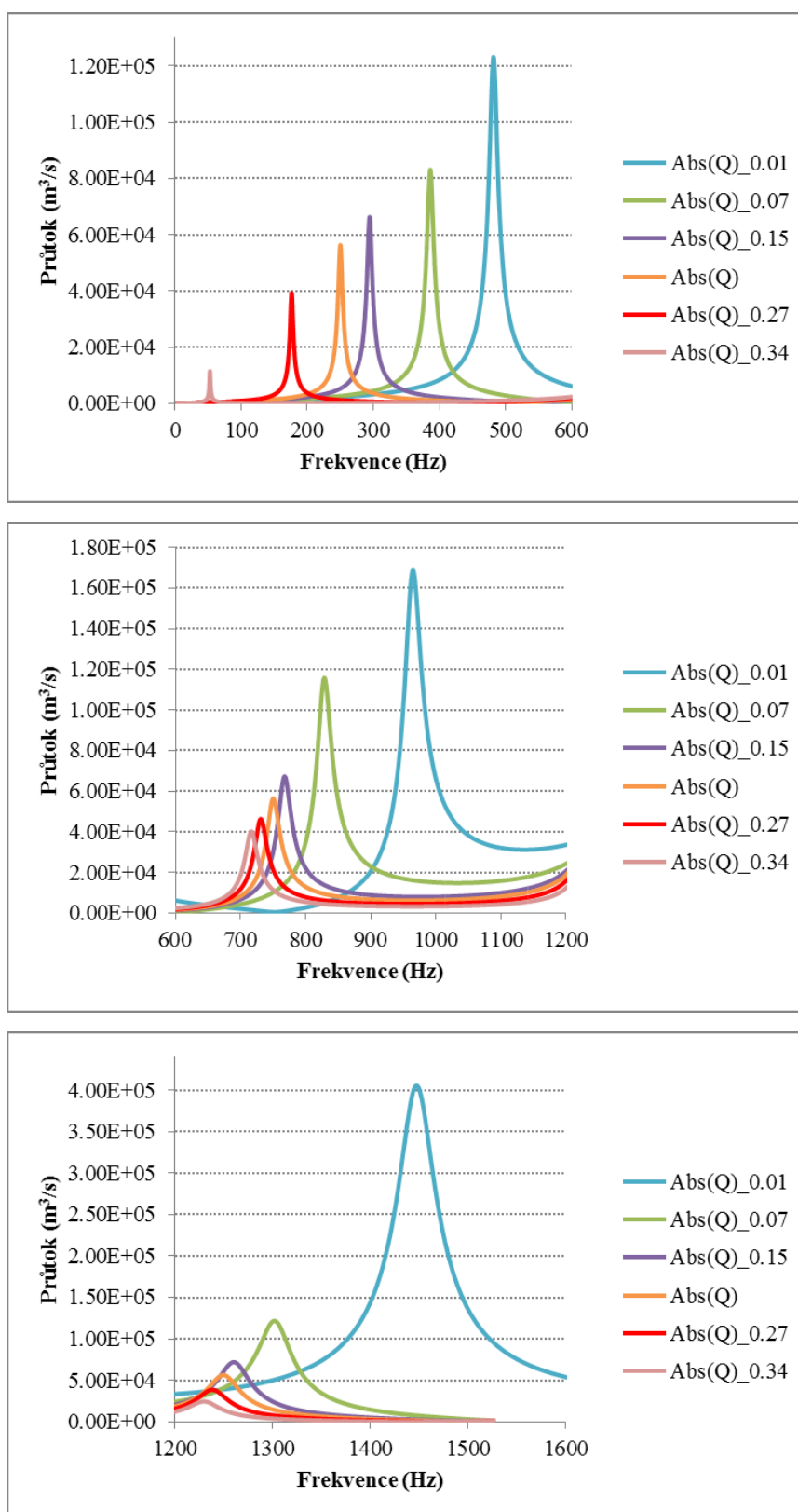


Obr. 61 První tři frekvence průtoku při (P_P)

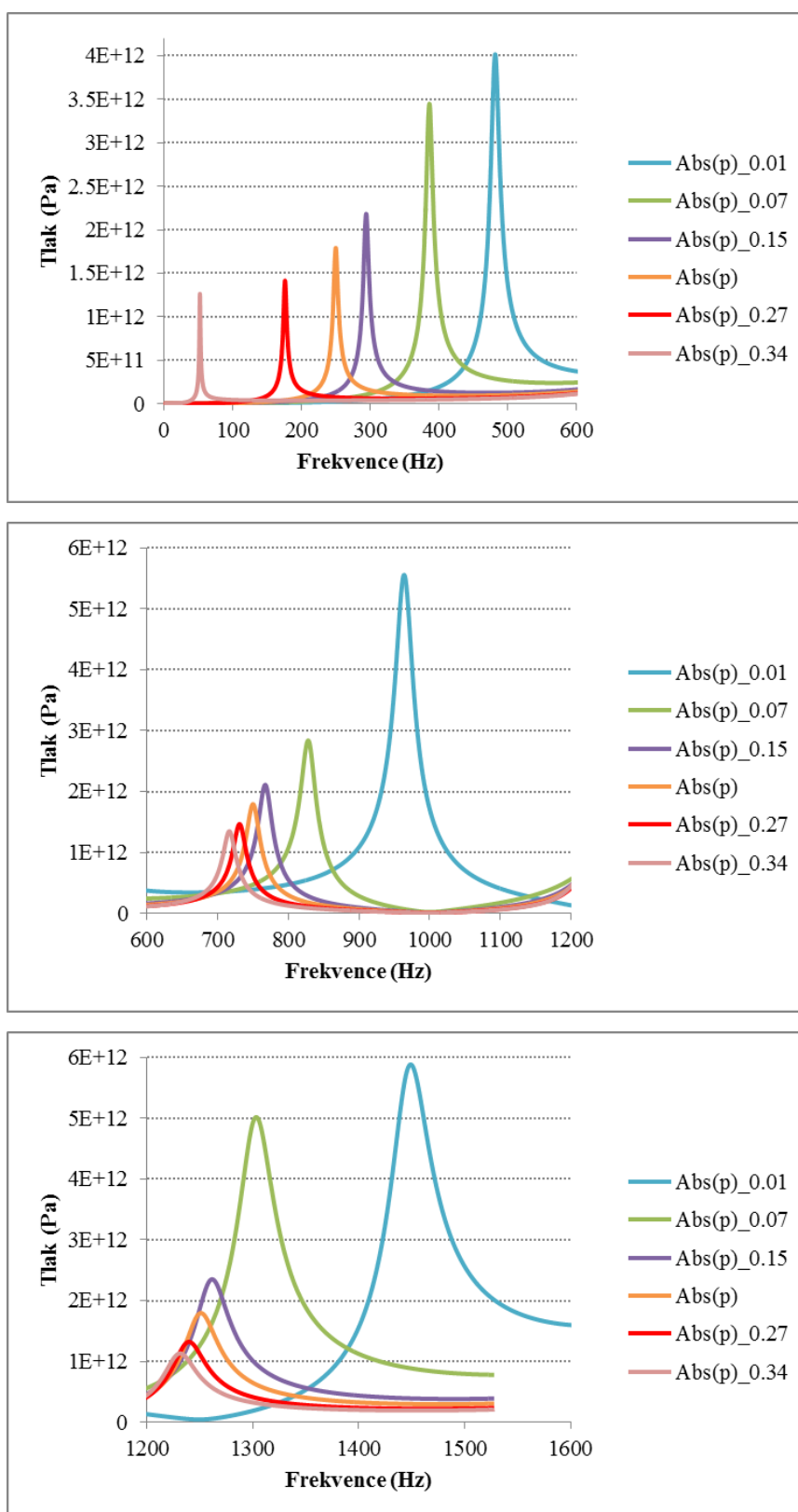
Příloha č. 6 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaků při P_P



Obr. 62 První tři frekvence tlaků při (P_P)

Příloha č. 7 Frekvenčně amplitudová charakteristika průtoků při Q_P Obr. 63 První tři frekvence průtoků při (Q_P)

Příloha č. 8 Frekvenčně amplitudová charakteristika tlaků při Q_P



Obr. 64 První tři frekvence tlaků při (Q_P)