

## MATEMATICKÉ MODELY LINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ

DAVID LOVAS

**ABSTRAKT.** Tento článek se zabývá modelováním lineárních mechanických oscilátorů. Důraz je kláden na sestavení pohybové rovnice a její vyřešení. K sestavení rovnice je třeba základní znalost příslušných fyzikálních zákonů. V článku jsou probrány také dvě operace s lineárními oscilátory: skládání oscilátorů a spřažení oscilátorů. V této souvislosti vznikají následující otázky. Jaké modely lineárních oscilátorů je možné obdržet přidáním patřičných sil? Co získáme složením kmitů? A jaké využití má spřažení?<sup>1</sup>.

### 1. TYPY LINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ

Za mechanický oscilátor budeme považovat hmotný bod o hmotnosti  $m$ , který je připevněn na pružině o tuhosti  $k$  (viz obrázek 1). Vychýlením hmotného bodu z rovnovážného stavu na něj začne působit síla daná Hookovým zákonem

$$F_1 = -ky,$$

kde  $y$  je poloha hmotného bodu, která je časově proměnná. Použitím druhého Newtonova zákona dostaváme homogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Konstantu  $\omega_0$  nazýváme úhlová frekvence. Vyřešením rovnice dostaváme řešení v kvadraturním tvaru

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Volbou konstant ve tvaru  $C_1 = A \sin(\varphi)$ ,  $C_2 = A \cos(\varphi)$  můžeme rovnici přepsat do amplitudového tvaru

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad A \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

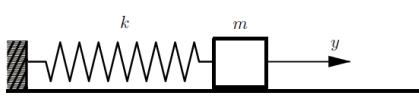
Oba vztahy popisují vlastní netlumené kmitání (viz obrázek 2) a soustavu konající tento pohyb nazýváme harmonický oscilátor.

---

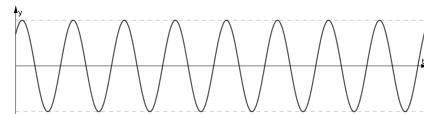
2010 MSC. Primární 70Jxx; Sekundární 34A30.

*Klíčová slova.* Mechanický oscilátor, lineární kmity, skládání oscilátorů, spřažení oscilátorů, synchronizace.

<sup>1</sup>Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.



Obrázek 1. Schéma netlumeného modelu.



Obrázek 2. Graf netlumených kmitů.

Dále do modelu zahrneme třetí sílu

$$F_2 = -ly,$$

která je závislá na aktuální rychlosti hmotného bodu. Kladnou konstantu  $l > 0$  nazýváme součinitel tření a vyjadřuje charakter styku hmotného bodu s okolím nebo také může být dána přidáním vazby hmotného bodu s nehybnou částí soustavy. Pohybová rovnice má nyní tvar

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad b = \frac{l}{2m}.$$

Tvar řešení se bude lišit v závislosti na vztazích mezi konstantami  $\omega_0$  a  $b$ . Pokud  $b > \omega_0$ , obdržíme

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kde  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou řešení rovnice  $\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$ . Tento případ nazýváme nadkritické tlumení (viz obrázek 3). Dále pokud  $b = \omega_0$ , řešení pohybové rovnice bude mít tvar

$$y(t) = e^{-bt}(C_1 t + C_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní se jedná o kritické tlumení. V obou případech kvůli příliš velkému tlumení v porovnání s úhlovou frekvencí nedojde ke kmitání, hmotný bod se neustále blíží rovnovážné poloze, které však dosáhne teoreticky (limitně) v nekonečnu. Poslední případ dostaneme v situaci, kdy  $b < \omega_0$ . Zde je řešením funkce

$$y(t) = e^{-bt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kterou můžeme vhodnou volbou konstant  $C_1, C_2$  přepsat do tvaru

$$y(t) = C e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad C \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

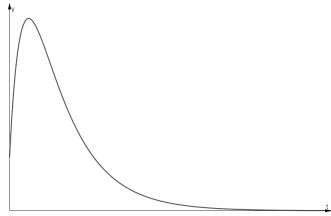
Při tomto druhu tlumení, které nazýváme podkritické tlumení, již ke kmitání dochází. Amplituda je zde však časově proměnná a s rostoucím časem klesá. Rovnovážné polohy dosáhne hmotný bod opět teoreticky v nekonečnu (viz obrázek 4).

Do modelu nyní zavedeme novou sílu, která bude časově proměnná, periodická, ale nezávislá na stavu hmotného bodu. Nazveme ji budící sílou a bude mít tvar

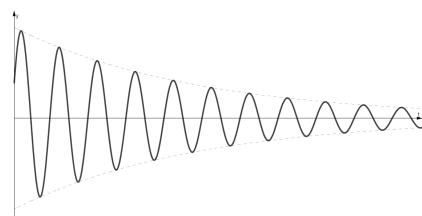
$$F_3(t) = P \sin(\omega t),$$

kde  $P$  je amplituda budící síly a  $\omega$  její úhlová frekvence. Pokud budící sílu přidáme do netlumeného systému, obdržíme rovnici

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin(\omega t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Obrázek 3. Nadkritické tlumení.



Obrázek 4. Podkritické tlumení.

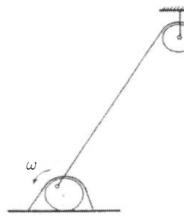
(viz obrázek 5). Řešení odpovídající homogenní rovnice bude stejné jako v modelu bez budící síly. Nově však budeme hledat i partikulární řešení nehomogenní rovnice, které bude různé pro různé hodnoty  $\omega_0$  a  $\omega$ . Pokud  $\omega_0 \neq \omega$ , výsledné řešení pohybové rovnice má tvar

$$y(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t),$$

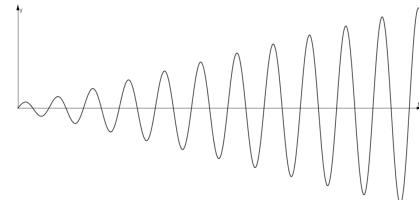
což je složení dvou kmitů o různých úhlových frekvencích. Pro případ  $\omega_0 = \omega$  je však situace daleko zajímavější. Řešení pohybové rovnice má totiž tvar

$$y(t) = C \sin(\omega t + \varphi) - \frac{P}{2m\omega} t \cos(\omega t)$$

a vyplývá z něho, že výsledná amplituda s časem roste (viz obrázek 6). Tomuto chování říkáme rezonance. Ta je často studována při modelování reálných procesů pro své pozitivní využití i negativní následky.



Obrázek 5. Příklad buzeného oscilátoru.



Obrázek 6. Grafické znázornění rezonance.

Budící sílu je možné zahrnout i do tlumeného oscilátoru. Řešení je třeba opět rozdělit na varianty podle velikosti konstant  $\omega_0$  a  $b$ , partikulární část řešení bude však pro všechny případy stejná. Výsledný kmit je složením dvou rovnoběžných kmitů obecně o různých úhlových frekvencích.

## 2. SKLÁDÁNÍ KMITŮ

Skládání kmitů je jedna ze základních operací, kterou je možné modelovat při rozboru lineárních oscilátorů. Systém si můžeme představit jako hmotný bod o hmotnosti  $m$  připevněný na obecně  $n$  pružinách o daných tuhostech, které obecně

kmitají s jinou amplitudou, úhlovou frekvencí a počáteční výchylkou. Rovnici výsledného pohybu sestavíme použitím principu superpozice. Pro dobré znázornění a zjednodušení řešení budeme v této kapitole uvažovat, že jednotlivé kmity soustavy jsou netlumené.

Nejjednodušší model jsou rovnoběžné izochronní kmity, jednotlivé kmity se tedy pohybují ve stejné ose a mají stejné úhlové frekvence. Rovnice pro samostatné pohyby mají tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \\ y_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Řešení lze nalézt analyticky nebo pomocí komplexní reprezentace. Obě metody jsou více popsány v [1]. V obou případech dostáváme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

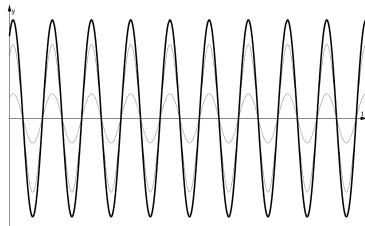
kde výsledná amplituda  $A$  má tvar

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}$$

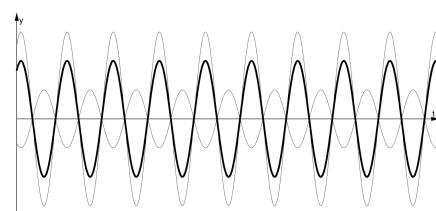
a pro fázi  $\varphi$  platí

$$\cos(\varphi) = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{A}, \quad \sin(\varphi) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A}.$$

Blíže rozebereme dva speciální případy tohoto druhu skládání kmítů. Pokud  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ , pak výsledná amplituda bude dána pouhým součtem jednotlivých amplitud, tedy  $A = A_1 + A_2$ . Tuto situaci nazýváme kmity ve fázi (viz obrázek 7). Pokud však platí, že  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ , je výsledná amplituda rovna absolutní hodnotě rozdílu jednotlivých amplitud, tedy  $A = |A_1 - A_2|$ . Zde mluvíme o kmitech v protifázi (viz obrázek 8).



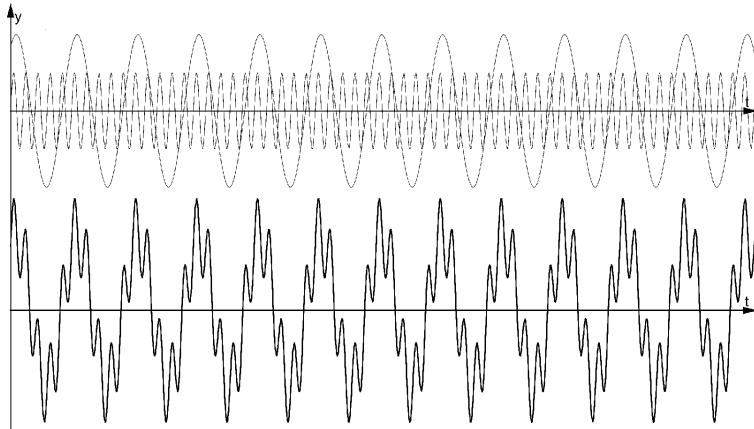
Obrázek 7. Skládání kmítů ve fázi.



Obrázek 8. Skládání kmítů v protifázi.

V situaci anizochronních kmítů, tedy když si úhlové frekvence nejsou rovny, výsledný pohyb není obecně harmonický ani periodický. I zde však mohou nastat případy, které stojí za pozornost. První takový případ nastane, když jsou úhlové frekvence skládaných kmítů soudělné, čili

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$



Obrázek 9. Skládání anizochronních kmitů o různých soudělných frekvencích.

Jedná se o případ anizochronních kmitů, kdy je výsledný pohyb periodický, není však již harmonický. Tento fakt je zřejmý z obrázku 9.

Další, avšak neméně zajímavý případ nastane pro soustavu s blízkými úhlovými frekvencemi. Úhlové frekvence skládaných kmitů zapíšeme ve tvaru

$$\omega_1 = \omega + \Omega, \quad \omega_2 = \omega - \Omega,$$

kde  $\omega \gg \Omega$  jsou vhodné konstanty. Předpokládejme nyní, že  $A = A_1 = A_2$ . Výsledný pohyb lze popsat výrazem

$$y(t) = \mathcal{A}(t) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right),$$

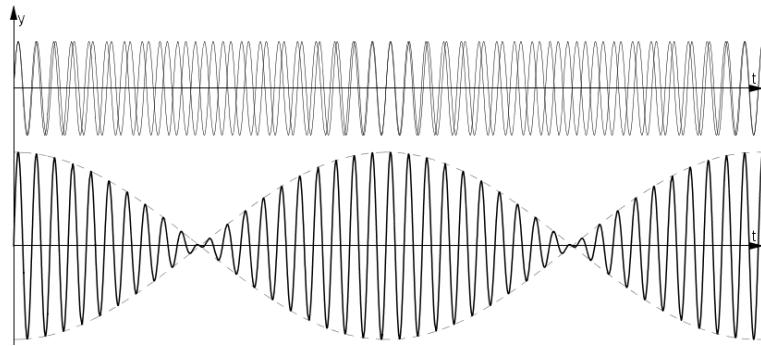
kde člen  $\mathcal{A}(t)$  vyjadřuje časově proměnnou pomalu se měnící amplitudu. Pro tu lze odvodit vztah

$$\mathcal{A}(t) = 2A \cos\left(\Omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right).$$

Tento druh kmitu je harmonický i periodický a bývá označován jako záZNĚje. Dochází k němu například při ladění hudebních nástrojů a používá se k měření úhlových frekvencí. Grafické znázornění kmitů (viz obrázek 10) je známé díky anglické kapelě Arctic Monkeys, která tento výjev použila na obal své desky AM.

Systém je možné složit i z kmitů, které se nepohybují v jedné ose. Zde je již však pohyb daleko složitější a výslednou rovnici lze upravit do jednoduššího tvaru jen ve speciálních případech. Rozebereme zde případ, kdy jsou skládané kmity na sebe kolmé, konkrétně jeden působí ve směru osy  $x$  a druhý ve směru osy  $y$ . Obecně tedy

$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y(t) = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

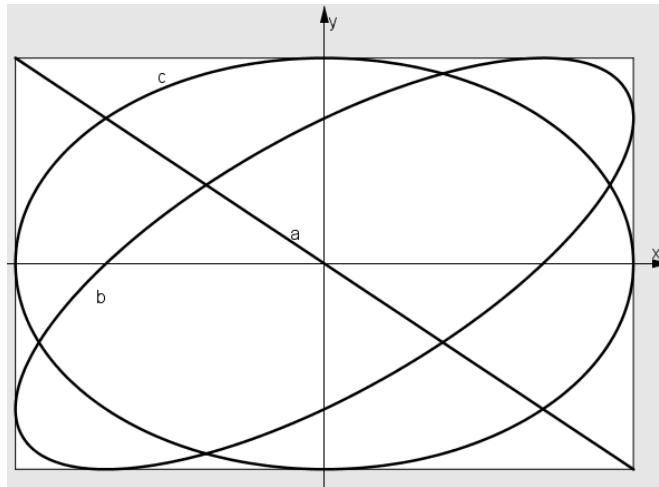


**Obrázek 10.** Kmity dvou synchronizovaných oscilátorů.

Uvažujme opět izochronní kmity (tj.  $\omega_1 = \omega_2$ ). Eliminací nezávisle proměnné  $t$  a další úpravou rovnic získáme

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\Delta\varphi) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\Delta\varphi),$$

kde  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Obdrželi jsme rovnici elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic. Na obrázku 11 jsou vykresleny křivky pro hodnoty  $\Delta\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (křivka a),  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$  (křivka b) a  $\Delta\varphi = \frac{(k+1)\pi}{2}$  (křivka c). Při libovolné volbě  $\Delta\varphi$  křivka neopustí obdélník o rozměrech  $2A \times 2B$ .



**Obrázek 11.** Příklady kolmých izochronních kmítů.

Při většině anizochronních kolmých kmítů je pohyb neperiodický. V takovém případě není křivka vykreslení pohybu uzavřená, postupem času zaplní celý obdélník o rozměrech  $2A \times 2B$ . Křivka je však uzavřená, pokud jsou úhlové frekvence

soudělné. V tomto případě bude i celkový pohyb periodický. Tyto křivky nazýváme Lissajousovy křivky.

### 3. SPŘAŽENÉ OSCILÁTORY

V této sekci budeme vycházet z pohybové rovnice tlumeného oscilátoru. V modelu však bude zařazeno více oscilátorů, které se navzájem ovlivňují. Pohybová rovnice  $i$ -tého oscilátoru má obecně tvar

$$m_i \ddot{y}_i + l_i \dot{y}_i + k_i y_i + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (a_{ir} \ddot{y}_r + b_{ir} \dot{y}_r + c_{ir} y_r) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (\alpha_{ir} \ddot{y}_i + \beta_{ir} \dot{y}_i + \gamma_{ir} y_i) = 0,$$

kde koeficienty  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  značí, jak je oscilátor  $i$  ovlivněn oscilátorem  $j$ , a koeficienty  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  znázorňují, jak oscilátor  $i$  ovlivňuje oscilátor  $j$ . Jednotlivé koeficienty nejsou na sobě zcela nezávislé. Odvození této závislosti vyplývající z kinetické energie, potenciální energie a disipační funkce lze nalézt v [3]. Pro další odvození a úpravu rovnic budeme řešit soustavu dvou spřažených oscilátorů, kde oba budou netlumené, tedy  $l_i = 0$  (viz obrázek 12).



**Obrázek 12.** Schéma dvou spřažených oscilátorů.

Při spřažení výchylkou dvou systémů dostáváme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + c_{11}) y_1 + c_{12} y_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + c_{22}) y_2 + c_{21} y_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Eliminací  $y_2$  soustavu převedeme na diferenciální rovnici čtvrtého řádu proměnné  $y_1$ . Eliminace i následné vyřešení diferenciální rovnice je poněkud zdlouhavé, celý proces však spočívá v patřičném použití vědomostí nabytých v kurzech matematické analýzy. Pro zájemce je možné si jej prostudovat v [2]. Zjistíme, že úhlové frekvence vyskytující se v obecném řešení soustavy jsou tvaru

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22}) \pm \sqrt{D}}{2m_1m_2}},$$

kde

$$D = [m_2(k_1 + c_{11}) - m_1(k_2 + c_{22})]^2 + 4m_1m_2c_{12}^2.$$

Nyní předpokládejme, že platí

$$m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k, \quad c_{11} = c_{12} = c_{22}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}}.$$

Úhlové frekvence  $\omega_{1,2}$  pak budou tvaru

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_s^2}, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

S těmito předpoklady lze systém (3.1) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + (\omega_0^2 + \omega_s^2)y_1 + \omega_s^2 y_2 &= 0, \\ \ddot{y}_2 + (\omega_0^2 + \omega_s^2)y_2 + \omega_s^2 y_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Obecné řešení této soustavy lze najít pomocí vhodně zvolené substituce a následným řešením dvou nezávislých diferenciálních rovnic (viz [2]).

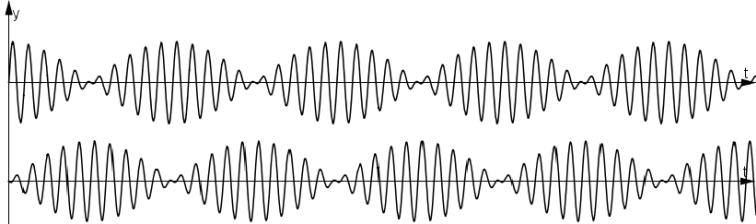
Uvažujme nyní počáteční úlohu pro soustavu (3.2) a diskutujme tři možné situace. Pokud na počátku vychýlíme jeden hmotný bod o  $2Y_0$ , druhý necháme s nulovou počáteční výchylkou a oba uvolníme s nulovou počáteční rychlostí, dostáváme počáteční podmínky ve tvaru

$$y_1(0) = 2Y_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0.\tag{3.3}$$

Řešení počáteční úlohy (3.2), (3.3) je tvaru

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t) + Y_0 \cos(\omega_2 t), \\ y_2(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t) - Y_0 \cos(\omega_2 t),\end{aligned}$$

což je složení dvou anizochronních kmitů. Pokud nebude docházet ke tření, bude mít soustava konstantní celkovou energii, která se bude „přelévat“ z kmitů jedné soustavy na druhou, viz obrázek 13.



**Obrázek 13.** Kmity spřažených soustav při vychýlení jednoho hmotného bodu na počátku.

Ve druhé situaci vychýlíme oba hmotné body na počátku o  $Y_0$  stejným směrem a uvolníme je s nulovou rychlostí. Získáme tak počáteční podmínky

$$y_1(0) = Y_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -Y_0, \quad \dot{y}_2(0) = 0,$$

při kterých má soustava (3.2) řešení

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Y_0 \cos(\omega_2 t), \\ y_2(t) &= -Y_0 \cos(\omega_2 t).\end{aligned}$$

Obě soustavy kmitají stejným směrem vzhledem k souřadné soustavě celého systému, se stejnou fází i velikostí amplitudy. Kmity jsou nezávislé na pružině spojující hmotné body. Během pohybu nedojde ke stlačení nebo natažení pružiny. Tento pohyb nazýváme jako první základní kmit (viz obrázek 14).

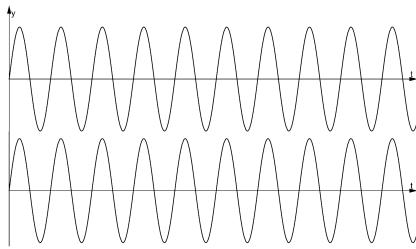
Nakonec vychylme oba hmotné body na počátku o  $Y_0$  opačným směrem a opět je uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Nyní máme počáteční podmínky

$$y_1(0) = Y_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = Y_0, \quad \dot{y}_2(0) = 0$$

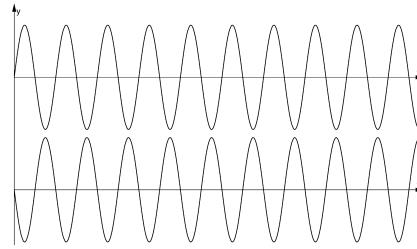
a odpovídající řešení je tvaru

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t), \\y_2(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t).\end{aligned}$$

Obě soustavy kmitají se stejnou fází i amplitudou, ale kmity jsou po celou dobu svého pohybu v protifázi, tedy oba hmotné body vždy míří opačným směrem vzhledem k souřadné soustavě celého systému. Tento pohyb nazýváme jako druhý základní kmit (viz obrázek 15).



Obrázek 14. První základní kmit.



Obrázek 15. Druhý základní kmit.

Poznamenejme ještě, že podobný algoritmus řešení byl použit v [2] i při spřažení druhou derivací výchylky. Soustava diferenciálních rovnic byla tvaru

$$\begin{aligned}(m_1 + a_{11})\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 &= 0, \\(m_2 + a_{22})\ddot{y}_2 + k_2 y_2 + a_{21}\ddot{y}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Opět je možné eliminací  $y_2$  vyjádřit úhlové frekvence objevující se v obecném řešení soustavy, dále zavést určité zjednodušení a soustavu převést na tvar, pro který je možné uvažovat stejné tři případy jako při spřažení výchylkou.

Pro spřažení dvou oscilátorů první derivací výchylky dostaneme diferenciální rovnice jednotlivých oscilátorů ve tvaru

$$\begin{aligned}m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + (d_{12} + e_{12})\dot{y}_2 &= 0, \\m_2\ddot{y}_2 + k_2 y_2 + (d_{12} - e_{12})\dot{y}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Eliminací člena  $y_2$  získáme opět obyčejnou diferenciální rovnici čtvrtého řádu. Nebudeme zde podrobně rozepisovat postup řešení, podíváme se raději na jednu z aplikací spřažení první derivací výchylky, kterou je synchronizace.

Pro synchronizaci zavedeme do diferenciální rovnice každého synchronizovaného kmítu kontrolní vstup  $u_i$ , který v systému  $n$  oscilátorů uvažujeme podle [4] ve tvaru

$$u_i = - \sum_{k=1}^n b_{ik} (\dot{y}_i - \dot{y}_k),$$

kde člen  $b_{ij}$  charakterizuje míru vzájemného ovlivnění systémů  $i$  a  $j$ . Soustava dvou oscilátorů, které budeme chtít synchronizovat, má tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + ky_1 + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \\ m\ddot{y}_2 + ky_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= 0, \end{aligned}$$

odkud dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 + K(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 - K(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \end{aligned}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad K = \frac{b}{m}.$$

Cílem je nalézt konstantu  $K$ , aby byla splněna podmínka synchronizace

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t) - y_2(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)| = 0.$$

Řešení úlohy lze provést sečtením a odečtením rovnic, zavedením vhodné substituce a vyřešením dvou nezávislých diferenciálních rovnic. Jelikož jedna ze získaných rovnic má tvar srovnatelný s pohybovou rovnicí tlumeného oscilátoru, je třeba opět uvažovat tři možnosti řešení, které závisí na porovnání konstant  $K$  a  $\omega$ . Po vyjádření homogenní i partikulární části řešení získáme

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + e^{-Kt} \left( C_1 \cos(\sqrt{D}t) + C_2 \sin(\sqrt{D}t) \right) \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[ A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - e^{-Kt} \left( C_1 \cos(\sqrt{D}t) + C_2 \sin(\sqrt{D}t) \right) \right], \end{aligned}$$

je-li  $\omega > |K|$ ,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + e^{-Kt} (C_1 t + C_2) \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[ A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - e^{-Kt} (C_1 t + C_2) \right], \end{aligned}$$

je-li  $\omega = |K|$ , a

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + C_1 e^{(-K-\sqrt{D})t} + C_2 e^{(-K+\sqrt{D})t} \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[ A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - C_1 e^{(-K-\sqrt{D})t} - C_2 e^{(-K+\sqrt{D})t} \right], \end{aligned}$$

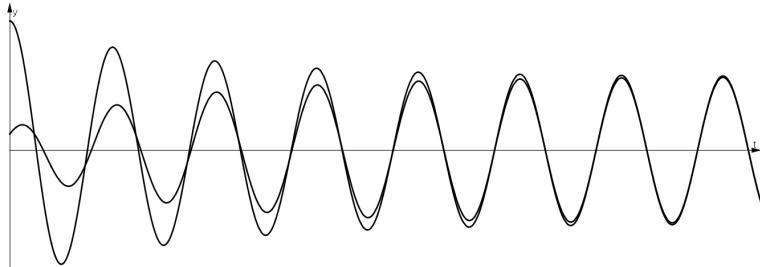
je-li  $\omega < |K|$ , kde

$$D = |K^2 - \omega^2|$$

a konstanty  $A_1, A_2, C_1, C_2$  jsou dány počátečními podmínkami. Není těžké ověřit, že podmínka synchronizace bude splněna, pokud  $K > 0$ , a tedy  $b > 0$ . Za tohoto předpokladu platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( y_k(t) - \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] \right) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2.$$

Na obrázku 16 je znázorněna synchronizace pro případ  $\omega > K > 0$ .



**Obrázek 16.** Synchronizace dvou kmitů.

#### 4. ZÁVĚR

Lineární oscilátory jsou jedním z mnoha systémů, v jejichž matematických modelech se objevují obyčejné diferenciální rovnice. Diskutovali jsme různé modely obsahující lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu a jejich soustavy, k jejichž řešení vždy stačily znalosti nabyté v kurzech matematické analýzy. Při skládání rovnoběžných kmitů lze výsledný pohyb lehce vyjádřit v izochronním případu. Zde jsme demonstrovali situaci kmitů ve fázi a v protifázi. Při anizochronních kmitech je model náročnější a celkový pohyb je periodický nebo harmonický jen ve speciálních případech. Podobně je tomu i při skládání kolmých kmitů. Spřažení jsme předvedli pro tři základní druhy a ukázali jejich využití nebo rozdíly řešení závislé na počátečních podmínkách.

#### REFERENCE

- [1] J. Bajer: *Mechanika 3*, 2., rozš. a dopl. vyd., chlup.net, Olomouc, 2012.
- [2] D. Lovas: *Matematické modely lineárních oscilátorů*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2018.
- [3] R. Košťál: *Kmity spřažených soustav*, Spisy přírodovědecké fakulty, Brno, 1931.
- [4] R. Olfati-Saber, R. M. Murray: *Flocking with obstacle avoidance: Cooperation with limited communication in mobile networks*. Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control **2** (2003) 2022–2028.

David Lovas, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
*e-mail:* 182702@vutbr.cz

