



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ V TECHNICKÝCH APLIKACÍCH

OPTIMAL CONTROL IN ENGINEERING PROCESSES

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Martin Jakal

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Martin Jakal**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Optimální řízení v technických aplikacích

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Teorie optimálního řízení umožňuje navrhnout takovou regulaci inženýrského procesu, která je optimální z daného hlediska, např. čas, energie apod. Ke stanovení posloupnosti režimů optimálního řízení je využit Pontrjaginův princip maxima.

Cíle diplomové práce:

Zpracování teorie optimálního řízení se zaměřením na problémy s omezením na stavové proměnné. Implementace vybrané třídy úloh v prostředí MATLAB a ilustrace na vybrané inženýrské aplikaci.

Seznam doporučené literatury:

TEO, K. L., GOH, C. J. a WONG, K. H. A unified computational approach to optimal control problems. Harlow: Longman u.a, 1991. ISBN 0-582-07810-5.

BRUNOVSKÝ, P. Matematická teória optimálneho riadenia. Bratislava: Alfa, 1980. Edícia teoretickej literatúry (Alfa).

BRYSON, A. E. a HO, Yu-Chi. Applied optimal control: optimization, estimation, and control. Rev. printing. New York: distributed by Halsted Press, 1975. ISBN 04-701-1481-9.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá problémem optimálního řízení elektrického vlaku, a to z hlediska času a spotřeby energie. Problém je rozšířen o analýzu v případě specifických rychlostních omezení. Využitím aparátu teorie optimálního řízení je odvozena posloupnost jednotlivých jízdních režimů a následně je numericky získáno řešení pomocí optimalizačních nástrojů v prostředí Matlab.

Summary

This thesis deals with electric train optimal control problem with a focus on time and energy optimization. The problem is extended by considering specific speed constraints. We are able to design the sequence of control settings by the use of the optimal control theory. Optimization tools in Matlab environment are used to determine the numerical solution of the considered task.

Klíčová slova

optimální řízení, časová a energetická optimalizace, princip maxima, elektrický vlak, skládání jízdních režimů, rychlostní omezení, Matlab

Keywords

optimal control, time and energy optimization, maximum principle, electric train, control settings design, speed constraints, Matlab

JAKAL, M. *Optimální řízení v technických aplikacích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 57 s. Vedoucí doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci na téma „Optimální řízení v technických aplikacích“ vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Petra Tomáška, Ph.D. s použitím zdrojů uvedených v seznamu použité literatury.

Bc. Martin Jakal

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce doc. Ing. Petru Tomáškoví, Ph.D. za vedení práce, cenné rady, připomínky, vstřícnost a trpělivost během tvorby této práce.

Bc. Martin Jakal

Obsah

Úvod	1
1. Základy optimálního řízení	2
1.1 Dynamické systémy a jejich regulace	2
1.2 Formulace základní úlohy	3
1.3 Princip maxima	4
1.4 Základní věty o optimálních regulacích	6
1.5 Vlastnosti úloh s omezeními	8
2. Úloha o energeticky optimální jízdě vlaku	10
2.1 Formulace úlohy	10
2.2 Aplikace principu maxima	12
2.3 Energeticky optimální jízda vlaku	15
2.4 Implementace úlohy v Matlabu	20
2.5 Analýza získaných výsledků	23
3. Úloha o energeticky optimální jízdě vlaku s rychlostním omezením	31
3.1 Globální rychlostní omezení jízdy	31
3.2 Dílčí úlohy s omezením	38
3.3 Lokální rychlostní omezení jízdy	42
3.4 Analýza výsledků úloh s omezením	47
Závěr	50
Seznam použitých zkratk a symbolů	52
Přílohy	54

Úvod

Mnohé matematické modely nejen technické praxe jsou formulovány prostřednictvím dynamických systémů. V rámci těchto dynamických systémů lze uvažovat vliv řídicích členů (cílených regulací), jejichž působením se dá ovlivňovat stav příslušného systému. Teorie optimálního řízení poskytuje aparát k nalezení takových řízení dynamických systémů, která vyhovují daným optimalizačním kritériím. Pod procesem řízení je možné si představit posloupnosti změn stavových veličin popisujících systém v čase, které mohou být diskrétní nebo spojité. Optimalizační kritérium pak vyjadřuje záměr minimalizovat či maximalizovat daný funkcionál, reprezentující příslušnou veličinu. Obvykle se v praxi setkáme s minimalizací nákladů, energie, času, spotřeby materiálu, zdrojů, případně jejich kombinací.

Problémy optimálního řízení hrají v technice důležitou roli a setkáváme se s nimi v dopravě, letectví, výrobních procesech, ekonomii a mnoha dalších odvětvích. Často se jedná o analýzu velmi komplikovaných nelineárních systémů vyžadujících k řešení komplexní matematický aparát. Ten využívá poznatků z algebry, diferenciální geometrie, funkcionální analýzy, statistiky, funkcí komplexních proměnných, parciálních diferenciálních rovnic a dalších oblastí. K velkému pokroku pro řešení úloh optimálního řízení došlo zejména s rozvojem výpočetní techniky a metod dynamického programování.

Tato práce řeší konkrétní problém optimalizace jízdy elektrického vlaku. Volným způsobem navazuje na [11]. Důraz je kladen zejména na analýzu specifických případů rychlostního omezení a použití alternativních optimalizačních nástrojů.

V první části jsou uvedeny základní pojmy z teorie optimálního řízení a jejich vlastnosti a vztahy potřebné k řešení úloh optimálního řízení.

V druhé části je formulována úloha o energeticky optimální jízdě elektrického vlaku a vyřešena s využitím principu maxima pro časovou a energetickou optimalizaci. Pro zpracování úlohy bylo použito optimalizační prostředí programu Matlab a získané výsledky byly analyzovány.

V třetí části je úloha následně modifikována přidáním rychlostního omezení. Z hlediska hledání optimálního řízení je v takovém případě nutné dodržovat podmínku, aby vlak v konkrétních úsecích trati nepřekračoval předepsanou maximální rychlost. Nejdříve je vyřešena úloha pro rychlostní omezení na celé délce trati, poté s rychlostním omezením pouze na předepsaném úseku trati. Obsaženo je odvození podmínek týkajících se aktivace rychlostního omezení, diskuze speciálního případu složení dvou různých scénářů omezení a úvaha ohledně vlivu volby odporové funkce na řešení. Součástí výstupu této práce jsou programy realizující výpočet uvedených optimalizačních úloh včetně grafických výstupů. Analýzu doplňují tabulky a obrázky znázorňující vztahy mezi veličinami a komentáře k těmto závislostem.

1. Základy optimálního řízení

V rámci této kapitoly představíme základní pojmy a poznatky z teorie optimálního řízení. Za nejvýznamnější pojem v této oblasti se dá považovat princip maxima, u něhož uvedeme i některé další jeho vlastnosti a další věty s ohledem na jejich využití v úlohách optimálního řízení. Princip maxima poprvé formuloval roku 1961 ruský matematik Lev Semjonovič Pontrjagin a jeho kolegové. Pontrjagin patří k uznávaným matematikům minulého století a během svého života se zasloužil o výsledky zejména v oblasti topologie a optimálního řízení. Princip maxima představuje silný nástroj pro hledání optimálního řízení dynamického systému. Při formulaci pojmů a využitých tvrzení vycházíme z [2], [3] a [12].

1.1. Dynamické systémy a jejich regulace

V této podkapitole definujeme řízené dynamické systémy a možnosti regulace těchto systémů.

Definice 1.1. (dynamický systém). Uvažujeme stavový prostor $X \in \mathbb{R}^n$, ve kterém se pohybuje objekt popsáný vektorem proměnné $x = (x_1, \dots, x_n)$. Jeho dynamika je popsána soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)),\end{aligned}$$

kterou lze zapsat vektorově $\dot{x}(t) = f(x(t))$ a nazveme ji *dynamickým systémem*.

Poznámka. Dynamický systém nazveme *autonomní*, pokud je na čase explicitně nezávislý.

Poznámka. Složky stavového vektoru x často představují v úlohách z oblasti mechaniky souřadnice polohy a rychlosti uvažovaného objektu.

Předpokládejme, že tento pohyb můžeme *regulovat*, tedy že daný systém je opatřený *řízením*, na jehož okamžitém stavu závisí pohyb objektu. Toto řízení si lze představit jako uspořádanou r -tici funkcí $u_1, \dots, u_r$, jejichž hodnoty závisí na čase a nabývají hodnot z *oboru regulace* U . Obor regulace představuje daná množina $U \subset E_r$, stanovuje se obvykle během formulace problému a závisí na technických parametrech řízení.

Definice 1.2. (řízený dynamický systém). Uvažujeme fázový prostor $X \in \mathbb{R}^n$, ve kterém se pohybuje objekt popsáný vektorem proměnné $x = (x_1, \dots, x_n)$. Jeho dynamika je popsána soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)),\end{aligned}\tag{1.1}$$

kterou lze zapsat vektorově $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ a nazveme ji *řízeným dynamickým systémem*. Pohyb objektu lze regulovat pomocí vektorové funkce u .

Definice 1.3. (regulace). *Regulace* je vektorová proměnná $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ definovaná na časovém intervalu $[t_0, t_f]$ a její hodnoty patří do oboru regulace U .

Definice 1.4. (přípustné regulace). Předpokládejme, že obor regulace U je kompaktní množina v E_r . Třidu regulací $u(t)$ nazveme třídou *přípustných regulací*, jestliže regulace z této třídy splňují následující vlastnosti:

1. Je-li $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ regulací, pak $u(t)$, $t \in I \subset [t_0, t_f]$ je také regulací.
2. Jsou-li $u_1(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ a $u_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ regulacemi, pak funkce

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [t_0, t_1], \\ u_2(t), & t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

je také regulací.

3. Je-li $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ regulací, pak při libovolné počáteční podmínce $x(t_0) = a$ pro libovolné $a \in X$ je soustava (1.1) jednoznačně řešitelná.

Definice 1.4 představuje předpoklady kladené na regulaci vzhledem k řešitelnosti soustavy. Vhodnou a často uvažovanou třídou funkcí splňujících uvedené předpoklady je třída po částech spojitých funkcí.

1.2. Formulace základní úlohy

Tato podkapitola se zabývá zavedením základní úlohy optimálního řízení a pojmu optimální regulace. Uvedené definice pochází z [3].

Definice 1.5. (řízený proces). Necht $a, b \in X$. Řekněme, že přípustná regulace $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ převádí systém ze stavu a do stavu b , jestliže odpovídající řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ x(t_0) &= a \end{aligned}$$

je definované na celém časovém intervalu $[t_0, t_f]$ a splňuje koncovou podmínku $x(t_f) = b$. Dvojici $x(t)$, $u(t)$ nazveme *řízeným procesem* převádějícím systém ze stavu a do stavu b .

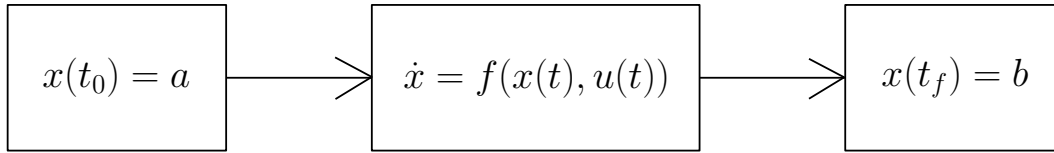
Poznámka. Jestliže $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ převádí a do b , pak tuto vlastnost má také každá regulace tvaru $u(t + p)$, $t \in [t_0 - p, t_f - p]$, $p \in \mathbb{R}$. Jedná se o důsledek toho, že daná soustava je autonomní, a této vlastnosti využíváme při spojování regulací.

Obrázek 1.1 znázorňuje řízení dynamického systému. Dynamický systém se z počátečního stavu $x(t_0) = a$ vlivem působení regulace $u(t)$ v konečném čase dostává do koncového stavu $x(t_f) = b$. Regulace u během působení v systému nabývá pouze hodnot z oboru U .

Nyní přistoupíme k formulaci základní úlohy optimálního řízení. Bez újmy na obecnosti označíme $t_0 = 0$ a $t_f = T$. Uvažujeme účelovou funkci definovanou

$$f_0(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) = f_0(x(t), u(t)), \quad (1.2)$$

přičemž předpokládáme, že $f_0(x(t), u(t))$ je spojitá spolu se svými parciálními derivacemi $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ na $X \times U$.



Obrázek 1.1: Schéma řízení dynamického systému

Definice 1.6. (základní úloha optimálního řízení). Necht' $a, b \in X$. Mezi všemi přípustnými regulacemi $u(t)$, které převádějí systém ze stavu a do stavu b (pokud tyto regulace existují), hledáme takovou, pro kterou funkcionál

$$J = J(T, u) = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \quad (1.3)$$

nabývá nejmenší možné hodnoty. Platí $t \in [0, T]$, kde T je koncový čas, a $x(t)$ je řešení dané řízené soustavy (1.1) s počáteční podmínkou $x(0) = a$ a $u(t)$ je odpovídající daná regulace splňující koncovou podmínku $x(T) = b$.

Definice 1.7. (optimální regulace). Regulaci, která je řešením úlohy uvedené v definici 1.6, nazveme *optimální regulací* a značíme $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$. Odpovídající trajektorii nazveme *optimální trajektorií* a značíme $\hat{x}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$. Dvojici $(\hat{x}(t); \hat{u}(t))$, $t \in [0, \hat{T}]$ pak nazveme *optimálním řízeným procesem*.

Poznámka. Výraz či symbol se stříškou se v rámci práce váže k objektům s přívlastkem optimální, v souladu s obvyklým značením používaným v literatuře.

Poznámka. Pro $f_0(x, u) \equiv 1$ přejde funkcionál (1.3) na tvar $J = \int_0^T 1 dt = T$ a jedná se o úlohu časové optimalizace.

Věta 1.8. Necht' $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je řešení úlohy uvedené v definici 1.6 a $\hat{x}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je odpovídající optimální trajektorie. Pokud $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \hat{T}$, pak regulace $\hat{u}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ je optimální regulace převádějící stav z polohy $\hat{x}(t_1)$ do polohy $\hat{x}(t_2)$ a $\hat{x}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ je odpovídající optimální trajektorie.

Poznámka. Z předchozí věty vyplývá, že každý úsek optimální trajektorie a každá část optimální regulace jsou opět optimální. Sjednocení optimálních trajektorií a optimálních regulací však optimální být nemusí.

1.3. Princip maxima

Náplní této podkapitoly je formulace podmínky optimality pro výše zformulovanou úlohu optimálního řízení.

K základní řízené soustavě (1.1) přidáme rovnici

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u),$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a f_0 je funkce zavedená způsobem viz. (1.2). Dostaneme rozšířenou řízenou soustavu $\dot{x} = f(x, u)$, kde $\dot{x} = (\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $f =$

$(f_0, f_1, \dots, f_n)$. Kromě této soustavy dále uvažujeme soustavu pro pomocné proměnné $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, tzv. *adjungovanou soustavu*, ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0 &= - \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_0}(x, u) \psi_k, \\ \dot{\psi}_1 &= - \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x, u) \psi_k, \\ &\vdots \\ \dot{\psi}_n &= - \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x, u) \psi_k.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Označíme $\psi^* = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$, $f^*(x, u) = (f_0(x, u), f_1(x, u), \dots, f_n(x, u))$ a zavedeme *Hamiltonovu funkci* H^* ve tvaru

$$H^* = H^*(\psi^*, x, u) = (\psi^*, f^*(x, u)) = \sum_{k=0}^n \psi_k f_k(x, u).\tag{1.5}$$

Řízenou soustavu $\dot{x} = f(x, u)$ a soustavu (1.4) lze přepsat do tvaru *Hamiltonovy soustavy*

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i}, & i = 0, 1, \dots, n, \\ \dot{\psi}_i &= - \frac{\partial H^*}{\partial x_i}, & i = 0, 1, \dots, n.\end{aligned}$$

V následující větě definujeme *princip maxima*, který představuje základní podmínku pro optimalitu hledaného řízení.

Věta 1.9. (princip maxima). Je dán stavový prostor X a stavy $a, b \in X$. Dále uvažujeme optimální řízený proces $(\hat{x}(t); \hat{u}(t))$, $t \in [0, \hat{T}]$ převádějící soustavu ze stavu a do stavu b . Pak na intervalu $[0, \hat{T}]$ existuje takové spojitě nenulové řešení $\psi^*(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ soustavy

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H^*}{\partial x_i}(\psi^*, \hat{x}, \hat{u}), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

že Hamiltonova funkce H^* splňuje pro $\forall t \in [0, \hat{T}]$ podmínku maxima

$$H^*(\psi^*(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} H^*(\psi^*(t), \hat{x}(t), u).\tag{1.6}$$

Navíc $H^*(\psi^*(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv 0$ a $\psi_0(t)$ je nekladná a konstantní funkce na $[0, \hat{T}]$.

Věta 1.10. (princip maxima pro úlohu časové optimalizace). Je dán stavový prostor X a stavy $a, b \in X$. Dále uvažujeme optimální řízený proces $(\hat{x}(t); \hat{u}(t))$, $t \in [0, \hat{T}]$ převádějící soustavu ze stavu a do stavu b v nejkratším čase. Pak na intervalu $[0, \hat{T}]$ existuje takové spojitě nenulové řešení $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ soustavy

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}(\psi, \hat{x}, \hat{u}), \quad i = 1, \dots, n,$$

že Hamiltonova funkce H splňuje pro $\forall t \in [0, \hat{T}]$ podmínku maxima

$$H(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), \hat{x}(t), u).$$

Navíc $H(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv konst \geq 0$ na $[0, \hat{T}]$.

Věta 1.11. (princip maxima pro úlohu s pevným časem). Je dán stavový prostor X a stavy $a, b \in X$. Dále uvažujeme optimální řízený proces $(\hat{x}(t); \hat{u}(t))$, $t \in [0, T]$ převádějící soustavu ze stavu a do stavu b , kde časový okamžik T je dán pevně. Pak na intervalu $[0, T]$ existuje takové spojitě nenulové řešení $\psi^*(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ soustavy

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}(\psi^*, \hat{x}, \hat{u}), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

že Hamiltonova funkce H^* (1.5) splňuje pro $\forall t \in [0, T]$ podmínku maxima (1.6). Navíc $H^*(\psi^*(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv konst$ a $\psi_0(t)$ je nekladná a konstantní funkce na $[0, T]$.

Poznámka. Princip maxima pro úlohu s pevným časem má téměř identické znění jako pro úlohu časové optimalizace. Jediný rozdíl spočívá v dodatečné podmínce, která má na $[0, \hat{T}]$ tvar

$$H^*(\psi^*(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv konst.$$

1.4. Základní věty o optimálních regulacích

V rámci této podkapitoly uvedeme některé ze základních vlastností optimálních regulací, které se nejčastěji využívají při řešení úloh optimálního řízení. Pro jejich analýzu je nutné definovat podmínku existence a jednoznačnosti optimální regulace.

Definice 1.12. (konvexní množina). Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní*, jestliže pro $\forall y_1, y_2 \in M$ platí

$$cy_1 + (1 - c)y_2 \in M, \quad \forall c \in [0, 1].$$

Geometricky množina M kromě bodů y_1 a y_2 obsahuje také úsečku, která tyto dva body spojuje.

Definice 1.13. (dosažitelná oblast). Nechť $a \in X, T > 0$. Množinu $V(t, a)$ nazveme *dosažitelnou oblastí*, pokud je tato množina množinou všech stavů prostoru X , do nichž je možné přejít ze stavu a vlivem některé přípustné regulace $u(t)$ za čas T .

Definice 1.14. (hraniční bod). Nechť $a, b \in X$ a $\hat{T}$ je minimální čas, za který lze převést bod a do bodu b . Potom b je *hraničním bodem* dosažitelné oblasti $V(\hat{T}, a)$.

Definice 1.15. (konvexní uzavřený mnohostěn). *Konvexním uzavřeným mnohostěnem* v E_r nazveme každý průnik U konečného počtu uzavřených poloprostorů, je-li tento průnik neprázdnou a ohraničenou množinou.

Konvexní uzavřený mnohostěn U je tedy množina všech bodů $u = (u_1, \dots, u_r)$ v E_r , jejichž souřadnice vyhovují soustavě lineárních nerovností $\sum_{k=1}^r c_{ik}u_k \leq d_i$, $i = 1, \dots, s$, je-li tato množina neprázdná a ohraničená, kde c_i, d_i představují obecně zvolené koeficienty a s představuje počet stěn mnohostěnu U .

Definice 1.16. (bod zvratu). Každý bod nespojitosti optimální regulace $\hat{u}(t), t \in [0, \hat{T}]$ nazveme *bodem zvratu*.

Poznámka. Bod zvratu představuje přepnutí hodnoty optimální regulace.

Věta 1.17. (o jednoznačnosti časově optimální regulace). Nechť je dána normální soustava (1.1), jejíž obor regulace je uzavřený konvexní mnohostěn U . Dále nechť $\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t)$ jsou dvě optimální regulace definované po řadě na intervalech $[0, \hat{T}_1], [0, \hat{T}_2]$ a převádějící fázový bod ze stavu $a \in X$ do stavu $b \in X$. Pak jsou tyto regulace identické, platí $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$ a $\hat{u}_1(t) \equiv \hat{u}_2(t)$ na intervalu $[0, \hat{T}_1]$.

Nyní zavedeme množinu V jako množinu všech stavů a prostoru $X \subset \mathbb{R}^n$, které lze pomocí vhodné přípustné regulace převést do počátku soustavy souřadnic. Předpokládáme, že počátek soustavy souřadnic je vždy prvkem množiny V .

Věta 1.18. (o existenci časově optimální regulace). Nechť je dána normální soustava (1.1), jejíž obor regulace je uzavřený konvexní mnohostěn U . Pak množina V je otevřená konvexní množina. Pro každý stav $a \in V$ existuje optimální regulace převádějící fázový bod ze stavu a do počátku soustavy souřadnic v nejkratším možném čase.

Věta 1.18 říká, že existuje otevřené okolí počátku souřadnic prostoru X takové, že se každý stav z tohoto okolí dá pomocí optimální regulace převést do počátku soustavy souřadnic. Dále říká, že pokud existuje přípustná regulace $u(t), t \in [0, T]$ převádějící stav $a \in X$ do počátku soustavy souřadnic prostoru X , potom existuje i optimální regulace $\hat{u}(t), t \in [0, \hat{T}]$ s touto vlastností.

Poznámka. Výše uvedená teorie se vztahuje k základní úloze optimálního řízení, v níž se regulovaný objekt pohybuje po přímce, známe počáteční a koncové podmínky systému a hledáme takovou regulaci pohybu objektu, aby v co nejkratší době zastavil v požadovaném bodě. Další modifikace úlohy spočívá v požadavku, aby se objekt dostal do nějakého bodu, v němž ale rychlost objektu nemusí být nutně nulová, tudíž koncový stav systému není přesně určený. Úlohy tohoto typu označujeme jako *úlohy s pohyblivým pravým koncem*. Důležitým nástrojem pro řešení takových úloh jsou *podmínky transversality*. Tato práce se však tímto typem úloh nezabývá a více informací k této problematice lze najít např. v [2].

Definice 1.19. (hladká varieta a rovina). Ve fázovém prostoru X je dána množina S všech bodů $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, jejichž souřadnice vyhovují k rovnicím

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

kde $1 \leq k < n$ a funkce $g_j(x)$ jsou definované a spojitě diferencovatelné na X . Pokud jsou vektory

$$\text{grad } g_1(x), \text{grad } g_2(x), \dots, \text{grad } g_k(x)$$

nenulové a lineárně nezávislé v každém bodě $x \in X$, tak množinu S nazveme $(n - k)$ -rozměrnou *hladkou varietou* v X . Jestliže jsou rovnice (1.7) definující tuto hladkou varietu lineární, pak S nazveme $(n - k)$ -rozměrnou *rovinou* v X .

Definice 1.20. (konvexní funkce). Funkci $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *konvexní*, pokud epigraf h je konvexní množina v $\mathbb{R} \times X$. Epigraf h je množina s vlastností

$$\text{epi } h = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X : \alpha \geq h(x)\}.$$

Věta 1.21. (o existenci optimální regulace). Nechť je dána řízená soustava (1.1), jejíž obor regulace $U \subset E_r$ je uzavřená ohraničená konvexní množina. Potom nechť vektorová funkce $f(x, u)$ je lineární v u a skalární funkce $f_0(x, u)$ viz. (1.2) je konvexní v u pro $\forall x \in X$. Pokud existuje aspoň jedna ohraničená měřitelná regulace $u(t)$, která převádí systém ze stavu $a \in X$ na uzavřenou hladkou varietu S , pak existuje i optimální ohraničená měřitelná regulace s touto vlastností.

1.5. Vlastnosti úloh s omezeními

Tato podkapitola obsahuje základní teorii a poznatky týkající se úloh s omezením. Jedná se o typ úloh optimálního řízení, v nichž jsou omezené některé ze stavových proměnných.

Uvažujme základní úlohu optimálního řízení (viz. definice 1.6), kterou rozšíříme omezením na stavovou proměnnou ve tvaru nerovnosti

$$S(x, t) \leq 0,$$

kde $S(x, t)$ je skalární funkce. Hamiltonova funkce H^* (1.5) je definována vztahem

$$H^* = (\psi^*, f^*(x, u)) + \mu S^{(q)}, \quad (1.8)$$

a $S^{(q)}$ označuje q -tou derivaci funkce $S(x, t)$ podle času t . Jakmile se v derivaci funkce $S(x, t)$ poprvé objeví explicitně řízení u , řekneme, že má funkce $S(x, t)$ omezení řádu q . Funkce $\mu(t)$ představuje Lagrangeův multiplikátor vyjadřující vliv omezení na systém. Na hranici omezení platí

$$S^{(q)} = 0, \quad S = 0, \quad \mu(t) \leq 0,$$

a mimo jeho hranici

$$S < 0, \quad \mu(t) = 0.$$

Adjungovaný systém dané soustavy je

$$\dot{\psi}_i = \begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\psi^*, x, u) - \mu \frac{\partial S^{(q)}}{\partial x_i}, & S^{(q)} = 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\psi^*, x, u), & S^{(q)} < 0, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Při vstupu na hranici omezení musí být splněny následující *derivační podmínky*

$$N(x, t) = \begin{bmatrix} S(x, t) \\ S^{(1)}(x, t) \\ \vdots \\ S^{(q-1)}(x, t) \end{bmatrix} = 0. \quad (1.9)$$

Uvažujeme, že na hranici omezení se systém dostane v čase t_1 a opustí ji v čase t_2 . Čas t_1 je bod, v němž Lagrangeovy multiplikátory a Hamiltonova funkce nemusí být spojitě,

ale v čase t_2 spojitost platí. Pro čas t_1 označíme jeho limitu zleva symbolem t_1^- a limitu zprava symbolem t_1^+ . Nespojitost Lagrangeových multiplikátorů ψ^* a Hamiltonovy funkce H je vyjádřena vztahy

$$\begin{aligned}\psi^{*T}(t_1^-) &= \psi^{*T}(t_1^+) + \pi^T \frac{\partial N}{\partial x(t_1)}, \\ H(t_1^-) &= H(t_1^+) - \pi^T \frac{\partial N}{\partial t_1},\end{aligned}\tag{1.10}$$

kde π je vektor dimenze q multiplikátorů omezení. Rovnice (1.10) nazýváme *skokové podmínky*. Poznamenejme, že pro stavové proměnné x platí spojitost v čase t_1 , tedy $x(t_1^-) = x(t_1^+)$.

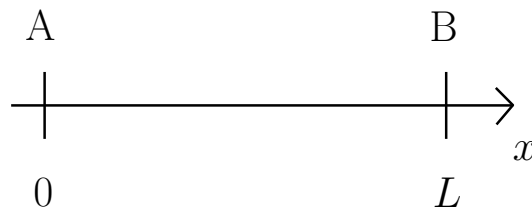
Další tvrzení a vlastnosti z oblasti optimálního řízení lze najít např. v [2] a [12].

2. Úloha o energeticky optimální jízdě vlaku

V této kapitole zpracujeme konkrétní úlohu z oblasti optimálního řízení. Pro tento účel využijeme výše uvedené poznatky z teorie optimálního řízení, vyřešíme úlohu v programu Matlab a analyzujeme získané výsledky. Formulace úlohy vychází z [3] a [11].

2.1. Formulace úlohy

Uvažujeme následující úlohu. Ve stanici A stojí elektrický vlak. Vlak se má dostat po rovných kolejnicích za daný čas T do stanice B a zastavit v ní. Vzdálenost stanic označíme L (přirozeně klademe $L > 0$) a okamžitou polohu vlaku v čase t značíme $x(t)$ (viz. obr. 2.1). Rychlost vlaku je derivací jeho polohy, tedy okamžitá rychlost v čase t je $\dot{x}(t)$. Na vlak působí během jízdy odpor prostředí $r = r(\dot{x})$, jehož velikost je úměrná rychlosti vlaku. Úkolem je nalézt takové řízení vlaku (v rámci jeho technických možností), aby během své jízdy odebral ze sítě co nejmenší množství elektrické energie. Jedná se o úlohu energetické optimalizace.



Obrázek 2.1: Schéma úlohy optimální jízdy vlaku

Pohyb vlaku je popsán pomocí Newtonova zákona

$$m\ddot{x}(t) = u(t) - r(\dot{x}(t)), \quad t \in [0, T], \quad u \in [-\alpha, \beta], \quad (2.1)$$

kde m značí hmotnost vlaku (bez újmy na obecnosti klademe $m = 1$), r značí danou odporovou funkci a u představuje řízení vlaku (při $u > 0$ chápeme řízení jako hnací sílu motoru vlaku a při $u < 0$ jako aktivní zapojení brzd), které má limitní hodnoty $-\alpha$ pro maximální brzdění a β v případě využití plného hnacího výkonu lokomotivy. Přirozeně klademe $\alpha, \beta > 0$.

V souladu s výše uvedenou formulací úlohy uvažujeme počáteční podmínky

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2.2)$$

jejichž interpretace je taková, že vlak stojí v počáteční stanici o poloze $x = 0$. Koncové podmínky úlohy

$$x(T) = L, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad (2.3)$$

říkají, že na konci pohybu v čase T se vlak dostane do konečné stanice o poloze $x = L$ ve vzdálenosti L od počáteční stanice a zastaví v ní.

Nyní specifikujeme řídicí funkci u a odporovou funkci r . Předpokládejme, že řídicí funkce u je po částech spojitá na intervalu $[0, T]$, kde v bodech nespojitosti existují konečné

limity zleva a zprava. Pokud v některé části jízdy vlaku dochází k brzdění, má řídicí funkce hodnotu $u(t) < 0$, a v takovém případě vlak nespotřebovává elektrickou energii, proto v rámci energetické spotřeby můžeme řízení vynechat a funkci u ve výrazu (2.1) nahradit funkcí u^+ . Funkci u^+ definujeme následujícím způsobem

$$u^+(t) = \frac{1}{2}(u(t) + |u(t)|),$$

platí

$$u^+ = \begin{cases} u, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Poznámka. Některé druhy elektrických vlaků jsou technicky uzpůsobené k tomu, aby byly schopny energii získanou během brzdění uložit do zásobníku energetického zdroje a následně ji ke své jízdě využít. Změny v optimálním řízení vlaku vlivem této vlastnosti jsou poměrně malé a v úloze tento prvek neuvažujeme.

Na odporovou funkci r klademe přirozené požadavky vyplývající z její fyzikální podstaty, a to takové, že existuje její první a druhá derivace podle $\dot{x}$ a platí

- $r(0) = 0$,
- $r(\dot{x}) > 0$ pro $\forall \dot{x} > 0$,
- $r'(\dot{x}) > 0$ pro $\forall \dot{x} \geq 0$,
- $r''(\dot{x}) \geq 0$ pro $\forall \dot{x} \geq 0$.

Poznámka. Často se za odporovou funkci volí případ *lineárního odporu* $r(\dot{x}) = C\dot{x}$, $C \in \mathbb{R}^+$, nebo *kvadratického odporu* $r(\dot{x}) = C\dot{x}^2$, $C \in \mathbb{R}^+$. Je však možné uvažovat také obecněji zadanou funkci vyhovující daným kladeným požadavkům. V této práci se zabýváme pouze případem lineárního odporu.

V případě minimalizace spotřeby energie uvažujeme funkcionál

$$J = J(u) = \int_0^L u^+ dx = \int_0^T u^+ \dot{x} dt \rightarrow \min. \quad (2.5)$$

Zavedením fázových souřadnic $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ transformujeme rovnici (2.1) na systém rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) - r(x_2(t)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

a počáteční (2.2) a koncové (2.3) podmínky úlohy

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, \\ x_1(T) &= L, & x_2(T) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Minimalizovaný funkcionál (2.5) má pak v nových proměnných tvar

$$J = \int_0^T u^+(t)x_2(t)dt \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

2.2. Aplikace principu maxima

Následující část obsahuje řešení úlohy založené na využití principu maxima. Z fyzikální podstaty úlohy vyplývá, že vlak danou dráhu může urazit pouze v nějakém kladném konečném čase T , $T \in \mathbb{R}^+$. Celkový čas jízdy vlaku T je předem zadáný, proto se jedná o úlohu s pevným časem. Vzhledem k fyzikálním omezením existuje minimální čas T_{min} , $T_{min} \in \mathbb{R}^+$, během kterého je vlak schopen dráhu urazit. Pro $T < T_{min}$ úloha není řešitelná. Prvním krokem řešení je proto nalezení minimálního času T_{min} , řešíme úlohu časové optimalizace.

Hamiltonova funkce H^* pro výše formulovanou optimalizační úlohu popsanou soustavou (2.6) a podmínkami (2.7) je podle věty 1.9 ve tvaru

$$H^* = \psi_0 u^+ x_2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - r(x_2)). \quad (2.9)$$

Za předpokladu, že $(\hat{x}(t); \hat{u}(t))$, $t \in [0, T]$ je optimální řízený proces, obdržíme dále podle věty 1.9 adjungovanou soustavu

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_0 \hat{u}^+ - \psi_1 + \psi_2 r'(\hat{x}_2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde platí, že $\psi_0(t) \equiv \psi_0 \leq 0$ na $[0, T]$. Protože ψ_0 je nekladná konstanta, je nutné rozlišit případ $\psi_0 < 0$ a případ $\psi_0 = 0$.

V případě $\psi_0 = 0$ pak Hamiltonova funkce H^* (2.9) přejde do tvaru

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - r(x_2)), \quad (2.11)$$

a příslušná adjungovaná soustava je

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + \psi_2 r'(x_2). \end{aligned}$$

Hamiltonova funkce H (2.11) splňuje podmínku maxima (1.6)

$$\max_{-\alpha \leq u \leq \beta} [\psi_1 \hat{x}_2 + \psi_2 (u - r(\hat{x}_2))] = \psi_1 \hat{x}_2 + \psi_2 (\hat{u} - r(\hat{x}_2)), \quad t \in [0, T_{min}]. \quad (2.12)$$

Členy nezávislé na regulaci u nemohou určení maxima ovlivnit a můžeme je vypustit, tímto krokem se podmínka maxima (2.12) změnila na

$$\max_{-\alpha \leq u \leq \beta} [\psi_2(t) u(t)] = \psi_2(t) \hat{u}(t), \quad t \in [0, T_{min}]. \quad (2.13)$$

Z podmínky maxima (2.13) dále vyplývá, že optimální regulace nabývá pouze hodnot

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } \psi_2(t) > 0, \\ -\alpha & \text{pro } \psi_2(t) < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Princip maxima v této situaci připouští pouze dva jízdní režimy vlaku. Protože $\psi_2(t) = 0$ pro jedinou hodnotu t , dojde k přepnutí mezi režimy pouze jednou. Tento *přepínací okamžik* značíme t_p , platí $t_p \in [0, T_{min}]$ a pro optimální regulaci (2.14) potom platí

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_p], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_p, T_{min}]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Řešený problém je popsán soustavou (2.6) a podmínkami (2.7), dochází k minimalizaci času

$$J = T \rightarrow \min.$$

Řízení vlaku je předepsáno vztahem (2.15) a odpovídá intuitivní fyzikální představě, že nejkratší doba jízdy nastává tehdy, když se vlak rozjíždí s maximálním zrychlením β a od určitého časového momentu s maximálním brzděním $-\alpha$ dobrzdí do cílového místa. Tímto je vyřešena časová optimalizace úlohy, která odpovídá případu $\psi_0 = 0$.

V případě $\psi_0 < 0$ aplikací principu maxima na Hamiltonovu funkci H^* (2.9) získáme podmínku maxima

$$\max_{-\alpha \leq u \leq \beta} [\psi_0 u^+ \hat{x}_2 + \psi_1 \hat{x}_2 + \psi_2(u - r(\hat{x}_2))] = \psi_0 \hat{u}^+ \hat{x}_2 + \psi_1 \hat{x}_2 + \psi_2(\hat{u} - r(\hat{x}_2)), \quad t \in [0, T]. \quad (2.16)$$

Vynecháním členů nezávislých na řízení u přejde podmínka maxima (2.16) do tvaru

$$\max_{-\alpha \leq u \leq \beta} [\psi_0 u^+ \hat{x}_2 + \psi_2 u] = \psi_0 \hat{u}^+ \hat{x}_2 + \psi_2 \hat{u}, \quad t \in [0, T].$$

Na základě definice u^+ (viz. (2.4)) rozdělíme analýzu podmínky maxima na dvě části. Pro $u \geq 0$ dostaneme výraz

$$\max_{0 \leq u \leq \beta} (\psi_0 \hat{x}_2 + \psi_2)u = (\psi_0 \hat{x}_2 + \psi_2)\hat{u}, \quad t \in [0, T], \quad (2.17)$$

a pro $u < 0$

$$\max_{-\alpha \leq u \leq 0} \psi_2 u = \psi_2 \hat{u}, \quad t \in [0, T].$$

Za ψ_0 bez újmy na obecnosti položíme zápornou konstantu $\psi_0 = -1$, podmínka maxima (2.17) je tudíž ve tvaru

$$\max_{0 \leq u \leq \beta} (\psi_2 - \hat{x}_2)u = (\psi_2 - \hat{x}_2)\hat{u}, \quad t \in [0, T].$$

Z uvedených podmínek dostaneme následující vyjádření optimální regulace

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } \psi_2(t) - \hat{x}_2(t) > 0, \\ \text{neurčeno na } [0, \beta] & \text{pro } \psi_2(t) - \hat{x}_2(t) = 0, \\ 0 & \text{pro } \psi_2(t) - \hat{x}_2(t) < 0, \psi_2(t) > 0, \\ \text{neurčeno na } [-\alpha, 0] & \text{pro } \psi_2(t) = 0, \\ -\alpha & \text{pro } \psi_2(t) < 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Pro volbu $\psi_0 = -1$ má adjungovaná soustava (2.10) tvar

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= \hat{u}^+ - \psi_1 + \psi_2 r'(x_2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

V dalším kroku je nutné vyšetřit případy, kdy hodnota $\hat{u}$ není principem maxima určena, tzv. *singulární případy*.

Pro případ $\hat{u}(t)$ neurčeno na $[-\alpha, 0]$ sporem předpokládejme, že rovnost $\psi_2 = 0$ nastává na nějakém netriviálním intervalu $I \subset [0, T]$. Pak také platí, že $\psi_2 = 0$ na I . Dále na I

platí $u^+ = 0$. Tedy podle poslední rovnice adjungované soustavy (2.19) také platí $\psi_1 = 0$ na I , tedy $\psi_1 = 0$ na $[0, T]$. Z toho plyne, že poslední rovnice adjungované soustavy je

$$\dot{\psi}_2 = \hat{u}^+ + r'(x_2)\psi_2.$$

Protože $r(x_2) > 0$ a $u^+ \geq 0$, tak platí, že je-li $\psi_2(t_1) > 0$ pro nějaké $t_1 \in [0, T]$, tak $\dot{\psi}_2(t_1) > 0$ pro $\forall t \in [t_1, T]$. Je-li tato funkce při kladných funkčních hodnotách rostoucí, pak je kladná a rostoucí od prvního okamžiku výskytu kladné hodnoty. Naopak z tvaru $\hat{u}$ plyne, že pro rozjezd vlaku musí být $\psi_2 > 0$ a pro dojezd vlaku musí být $\psi_2 \leq 0$. Tyto požadavky jsou však ve vzájemném sporu. Rovnost $\psi_2 = 0$ tedy může nastat pouze v izolovaných časových okamžicích.

Pro případ $\hat{u}(t)$ neurčeno na $[0, \beta]$ předpokládejme, že rovnost $\psi_2 - \hat{x}_2 = 0$ nastává na nějakém netriviálním intervalu $I \subset [0, T]$. Pak také platí, že $\dot{\psi}_2 - \dot{\hat{x}}_2 = 0$ na I . Regulace $\hat{u}$ nabývá pro $t \in I$ hodnot z intervalu $[0, \beta]$. Pro tato $t \in I$ podle (2.6) a (2.19) platí

$$\hat{u}^+ - \psi_1 + r'(\hat{x}_2) = \hat{u} - r(\hat{x}_2). \quad (2.20)$$

Na tomto intervalu platí rovnost $\hat{u}^+ = \hat{u}$, proto rovnice (2.20) přejde na

$$-\psi_1 + \psi_2 r'(\hat{x}_2) + r(\hat{x}_2) = 0,$$

a její derivací podle t získáme

$$-\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 r'(\hat{x}_2) + \psi_2 r''(\hat{x}_2) \dot{\hat{x}}_2 + r'(\hat{x}_2) \dot{\hat{x}}_2 = 0.$$

Dále platí $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = \dot{\hat{x}}_2$ na I , z toho dostáváme

$$\psi_2 r''(\hat{x}_2) \dot{\hat{x}}_2 + 2r'(\hat{x}_2) \dot{\hat{x}}_2 = 0,$$

a po úpravě

$$\dot{\hat{x}}_2 [\psi_2 r''(\hat{x}_2) + 2r'(\hat{x}_2)] = 0, \quad \forall t \in I.$$

Na základě platnosti $\psi_2(t) = \hat{x}_2(t)$ na I a zavedených požadavků na odporovou funkci r platí vztah

$$\psi_2 r''(\hat{x}_2) + 2r'(\hat{x}_2) > 0, \quad \forall t \in I.$$

Tedy platí $\dot{\hat{x}}_2(t) = 0$ a z rovnice (2.6) plyne

$$\hat{u} = r(x_2), \quad \forall t \in I.$$

Získali jsme předpis pro $\hat{u}$, který platí za předpokladu $\dot{\psi}_2 = 0$. Tento stav může a nemusí nastat.

Na základě analýzy singulárních případů jsme zjistili, že u předpisu optimálních regulací (2.18) může optimální regulace $\hat{u}(t)$ nabývat jen těchto hodnot

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } \psi_2(t) - \hat{x}_2(t) > 0, \\ r(\hat{x}_2(t)) \equiv \text{konst} & \text{pro } \psi_2(t) = \hat{x}_2(t), \\ 0 & \text{pro } \psi_2(t) - \hat{x}_2(t) < 0, \psi_2(t) > 0, \\ -\alpha & \text{pro } \psi_2(t) < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Z fyzikálního hlediska každé hodnotě optimální regulace (2.21) odpovídá příslušný jízdní režim

- $\hat{u}(t) = \beta$ - jízda s maximálním zrychlením (rozjezd),
- $\hat{u}(t) = r(\hat{x}_2(t)) \equiv konst$ - jízda konstantní rychlostí (překonávání odporu),
- $\hat{u}(t) = 0$ - jízda s vypnutým motorem (nulové zrychlení),
- $\hat{u}(t) = -\alpha$ - jízda s maximálním brzděním (dojezd).

Podrobnější analýzou znamének ψ_2 , x_2 a jejich derivací v předpisu optimálních regulací (2.21) je možné ukázat, že uvedené jízdní režimy nastávají právě v daném pořadí a neopakují se. Příslušný důkaz tohoto tvrzení lze najít v [3]. Existují tři přepínací časy t_1 , t_2 , t_3 splňující nerovnost

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 < T. \quad (2.22)$$

Poznámka. V případě rovnosti mezi přepínacími časy dochází k absenci příslušného režimu. Ve speciálním případě $t_1 = t_2 = t_3$ úloha odpovídá časové optimalizaci, tj. $T = T_{min}$.

Přepínací okamžiky časový interval jízdy $[0, T]$ dělí na dílčí intervaly, kde v každém z nich dochází k příslušnému jízdnímu režimu podle (2.21) následujícím způsobem

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_1], \\ r(\hat{x}_2(t)) \equiv konst & \text{pro } t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{pro } t \in [t_2, t_3], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_3, T]. \end{cases} \quad (2.23)$$

Naším dalším cílem je určit přepínací okamžiky t_1 , t_2 , t_3 .

Poznámka. S přihlédnutím k fyzikálnímu hledisku úlohy se intuitivně nabízí otázka, jestli vlak nemůže dosáhnout cílové stanice jízdou v režimu s vypnutým motorem tak, že by došlo k zastavení vlaku v cílové stanici pouze vlivem odporu a brzdňý režim by tak vůbec nenastal. K tomu by mohlo dojít za reálných podmínek, ale v naší výše uvedené idealizované formulaci úlohy je zavedený odpor přímo úměrný rychlosti vlaku (s klesající rychlostí se odpor snižuje). Nulové hodnoty rychlosti (tím pádem i nulové hodnoty odporu) může vlak dosáhnout až důsledkem brzdňého režimu.

2.3. Energeticky optimální jízda vlaku

Tato podkapitola obsahuje numerické řešení k nalezení přepínacích časů t_1 , t_2 , t_3 na základě zvolených parametrů úlohy. Čas pohybu T je pevně daný. U odporu uvažujeme případ lineárního odporu, kterému odpovídá odporová funkce ve tvaru $r(x_2) = Cx_2$, $C \in \mathbb{R}^+$. Jako konkrétní hodnoty koeficientů úlohy volíme

$$\alpha = \beta = C = L = 1. \quad (2.24)$$

U všech fyzikálních veličin uvažujeme obecně zvolené jednotky.

Prvním krokem výpočtu je určení hodnoty minimálního času T_{min} , což je nejmenší možný čas, pro který je při dané volbě hodnot úlohy a vhodně zvoleném řízení u možné vyhovět počátečním i koncovým podmínkám. Toto řízení vlaku má jediný přepínací okamžik

t_p , jedná se o úlohu časové optimalizace. V závislosti na výše uvedené definici lineárního odporu se soustava (2.6) změní na

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u - Cx_2,\end{aligned}\tag{2.25}$$

a funkcionál (2.8)

$$J = T \rightarrow \min.$$

Úvaha vychází ze skladby režimů (2.23), kde $t_1 = t_2 = t_3 = t_p$. Nejdříve vyšetříme případ jízdy s maximálním zrychlením v čase $t \in [0, t_p]$. Dosazením předepsané hodnoty řízení $u = \beta$ soustava (2.25) přejde do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta - Cx_2.\end{aligned}$$

Integrováním a úpravami dostaneme obecné řešení této soustavy

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{c_2}{C^2}e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}t + c_1, \\ x_2(t) &= -\frac{c_2}{C}e^{-Ct} + \frac{\beta}{C},\end{aligned}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Počáteční podmínky (2.7) dávají

$$c_1 = -\frac{\beta}{C^2}, \quad c_2 = \beta.$$

Partikulární řešení této soustavy pro $t \in [0, t_p]$ je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{\beta}{C^2}e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}t - \frac{\beta}{C^2}, \\ x_2(t) &= -\frac{\beta}{C}e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Obdobně pro případ jízdy s maximálním brzděním s řízením $u = -\alpha$ v čase $t \in [t_p, T_{min}]$ přejde soustava (2.25) do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha - Cx_2.\end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{c_2}{C^2}e^{-Ct} - \frac{\alpha}{C}t + c_1, \\ x_2(t) &= -\frac{c_2}{C}e^{-Ct} - \frac{\alpha}{C},\end{aligned}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Koncové podmínky (2.7) dávají

$$c_1 = \frac{\alpha}{C}T_{min} + \frac{\alpha}{C^2} + L, \quad c_2 = -\alpha e^{CT_{min}}.$$

Partikulární řešení této soustavy pro $t \in [t_p, T_{min}]$ je

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\alpha}{C^2}e^{C(T_{min}-t)} - \frac{\alpha}{C}t + \frac{\alpha}{C}T_{min} + \frac{\alpha}{C^2} + L, \\ x_2(t) &= \frac{\alpha}{C}e^{C(T_{min}-t)} - \frac{\alpha}{C}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Uvedené rovnice nám nyní dávají představu o průběhu veličin x_1 a x_2 během časové optimalizace. Optimální trajektorie se spojují v čase t_p . Ze soustav (2.26) a (2.27) dostaneme dosazením času $t = t_p$ dvě rovnice pro dvě neznámé t_p , T_{min} . Jejich vyřešením získáme explicitní vyjádření časů $T = T_{min}$ a t_p . Příslušnými úpravami získáme rovnice

$$\beta e^{-Ct_p} + \beta Ct_p - \beta = -\alpha e^{C(T_{min}-t_p)} - \alpha Ct_p + \alpha CT_{min} + \alpha + C^2L, \quad (2.28)$$

$$-\beta e^{-Ct_p} + \beta = \alpha e^{C(T_{min}-t_p)} - \alpha. \quad (2.29)$$

Dosazením rovnice (2.29) do (2.28) a úpravami získáme předpis pro T_{min}

$$T_{min} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) t_p - \frac{CL}{\alpha}. \quad (2.30)$$

Vyjádření času T_{min} (2.30) dosadíme do rovnice (2.29) a získáme vztah

$$-\beta e^{-Ct_p} + \beta = \alpha e^{\frac{\beta Ct_p - C^2L}{\alpha}} - \alpha. \quad (2.31)$$

Úpravami lze výraz (2.31) převést na

$$-\alpha(e^{Ct_p})^{\frac{\beta}{\alpha}+1} + (\alpha + \beta)e^{\frac{LC^2}{\alpha}} e^{Ct_p} - \beta e^{\frac{C^2L}{\alpha}} = 0. \quad (2.32)$$

V důsledku volby $\alpha = \beta$ můžeme z (2.32) vyjádřit přepínací okamžik t_p

$$t_p = \frac{1}{C} \ln \left(e^{\frac{LC^2}{\alpha}} \pm \sqrt{e^{\frac{LC^2}{\alpha}} \left(e^{\frac{LC^2}{\alpha}} - 1 \right)} \right). \quad (2.33)$$

Z dvojice možných hodnot přepínacího času t_p je správným řešením pouze hodnota vyhovující podmínce $t_p > 0$. Dosazením parametrů (2.24) do předpisů časů (2.30) a (2.33) vychází hodnoty $t_p = 1,585$ a $T_{min} = 2,170$, které vyhovují všem předpokladům. Ve složitějších případech v úlohách optimálního řízení však obecně nemusí být vždy možné vyjádřit jednotlivé časy explicitním předpisem.

Na tomto místě poznamenejme, že v případě časové optimalizace dosahuje vlak v časovém okamžiku t_p své *maximální rychlosti*, značíme v_{max} . Jedná se o nejvyšší možnou rychlost, které vlak může během jízdy na základě parametrů úlohy dosáhnout. Její vyjádření získáme dosazením času $t = t_p$ do rovnice pro rychlost (2.26)

$$v_{max} = x_2(t_p) = -\frac{\beta}{C}e^{-Ct_p} + \frac{\beta}{C}. \quad (2.34)$$

Pro hodnoty (2.24) a jim odpovídající čas $t_p = 1,585$ vychází $v_{max} = 0,795$. Při energetické optimalizaci vždy platí vztah $v < v_{max}$.

Teď přejdeme k určení přepínacích okamžiků pro jízdu se všemi režimy. Na základě analýzy adjungované soustavy jsme získali nerovnost (2.22) a posloupnost jízdních režimů (2.23).

První režimem je jízda se zrychlením s řízením $u = \beta$ na intervalu $t \in [0, t_1]$. Řešení je stejné jako v odpovídající části jízdy u případu časové optimalizace (2.26).

Druhým režimem je jízda konstantní rychlostí s řízením $u = Cx_2$ na intervalu $t \in [t_1, t_2]$. Soustava (2.25) přejde do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_2 t + c_1, \\ x_2(t) &= c_2,\end{aligned}\tag{2.35}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Koeficienty c_1, c_2 určíme z rovnosti soustavy (2.26) a (2.35) v bodě $t = t_1$

$$c_1 = \frac{\beta}{C^2}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} - \frac{\beta}{C^2}, \quad c_2 = -\frac{\beta}{C}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}.$$

Partikulární řešení této soustavy pro $t \in [t_1, t_2]$ je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\beta}{C}te^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t + \frac{\beta}{C^2}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} - \frac{\beta}{C^2}, \\ x_2(t) &= -\frac{\beta}{C}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Třetím režimem je jízda s vypnutým motorem s řízením $u = 0$ na intervalu $t \in [t_2, t_3]$. Soustava (2.25) přejde do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -Cx_2.\end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{c_2}{C}e^{-Ct} + c_1, \\ x_2(t) &= c_2e^{-Ct},\end{aligned}\tag{2.37}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Koeficienty c_1, c_2 určíme z rovnosti soustav (2.36) a (2.37) za podmínky $t = t_2$

$$c_1 = -\frac{\beta}{C}t_2e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_2, \quad c_2 = \frac{\beta}{C}e^{Ct_2} - \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t_1)}.$$

Partikulární řešení této soustavy pro $t \in [t_2, t_3]$ je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\beta}{C^2}e^{C(t_2-t)} + \frac{\beta}{C^2}e^{C(t_2-t_1-t)} - \frac{\beta}{C}t_2e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_2, \\ x_2(t) &= \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t)} - \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t_1-t)}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Posledním režimem je jízda s brzděním s řízením $u = -\alpha$ na intervalu $t \in [t_3, T]$. Řešení je stejné jako v odpovídající části jízdy u případu časové optimalizace, viz. (2.27).

Spojením soustav (2.38) a (2.27) v čase $t = t_3$ získáme vztah pro polohu

$$\begin{aligned} x_1(t_3) &= -\frac{\alpha}{C^2}e^{C(T-t_3)} - \frac{\alpha}{C}t_3 + \frac{\alpha}{C^2} + \frac{\alpha}{C}T + L \\ &= -\frac{\beta}{C^2}e^{C(t_2-t_3)} + \frac{\beta}{C^2}e^{C(t_2-t_1-t_3)} - \frac{\beta}{C}t_2e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

a vztah pro rychlost

$$x_2(t_3) = \frac{\alpha}{C}e^{C(T-t_3)} - \frac{\alpha}{C} = \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t_3)} - \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t_1-t_3)}. \quad (2.40)$$

Upravíme podmínku (2.40) na

$$\alpha(e^{C(T-t_3)} - 1) - \beta(1 - e^{-Ct_1})e^{C(t_2-t_3)} = 0, \quad (2.41)$$

a podmínku (2.39) s využitím podmínky (2.41) upravíme na

$$\alpha(t_3 - T) - CL + \beta(t_2 - t_2e^{-Ct_1} + t_1e^{-Ct_1}) = 0. \quad (2.42)$$

Funkcionál J (2.8) má tvar

$$J = \int_0^T u^+(t)x_2(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{\beta^2}{C}(1 - e^{-Ct})dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta^2}{C}(1 - e^{-Ct_1})^2dt \rightarrow \min. \quad (2.43)$$

Celkový energetický funkcionál (2.43) je určen součtem integrálů pro příslušné časové úseky, kde každý z nich vyjadřuje spotřebu energie během příslušného časového intervalu. Vzhledem ke způsobu zavedení funkce u^+ (viz. (2.4)) uvažujeme, že ke spotřebě energie nedochází při jízdě s vypnutým motorem a jízdě s brzděním, proto integrály pro tyto časové úseky jsou nulové.

Poznámka. Obsah integrálu je součinem řízení u a rychlosti $x_2(t)$ na příslušném úseku. Prvnímu úseku odpovídá $u^+ = \beta$ a $x_2(t)$ ze soustavy (2.26), druhému úseku $u^+ = Cx_2 = \beta(1 - e^{-Ct_1})$ a $x_2(t)$ ze soustavy (2.36).

Výpočtem určitých integrálů a úpravami dostaneme z (2.43) vztah

$$J = \frac{\beta^2}{C}(t_1 + \frac{e^{-Ct_1}}{C} - \frac{1}{C}) + \frac{\beta^2}{C}(1 - e^{-Ct_1})^2(t_2 - t_1) \rightarrow \min. \quad (2.44)$$

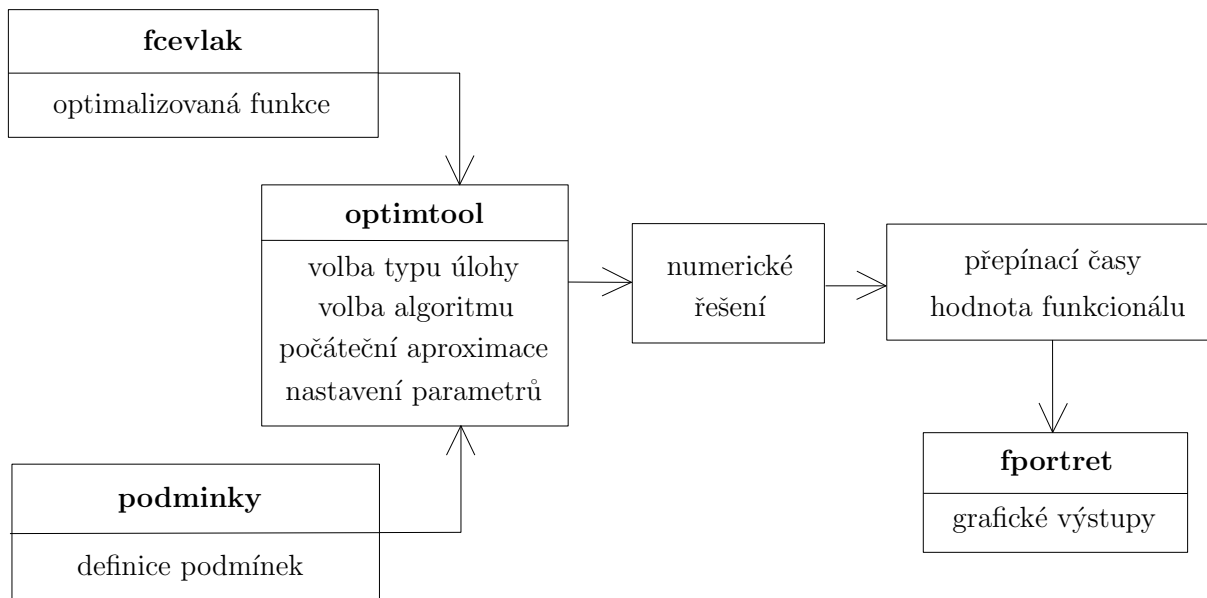
Sestavili jsme úlohu nelineárního programování, v níž minimalizujeme funkcionál (2.44) za omezujících podmínek ve formě rovností (2.41), (2.42) a nerovnosti

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 < T. \quad (2.45)$$

Použijeme volbu parametrů (2.24), k nimž jsme minimální čas T_{min} určili během časové optimalizace a dále předpokládáme, že platí $T_{min} < T$. Ke konkrétním volbám času T jsme schopni vhodným numerickým řešením určit hodnoty přepínacích časů t_1, t_2, t_3 a funkcionálu J .

2.4. Implementace úlohy v Matlabu

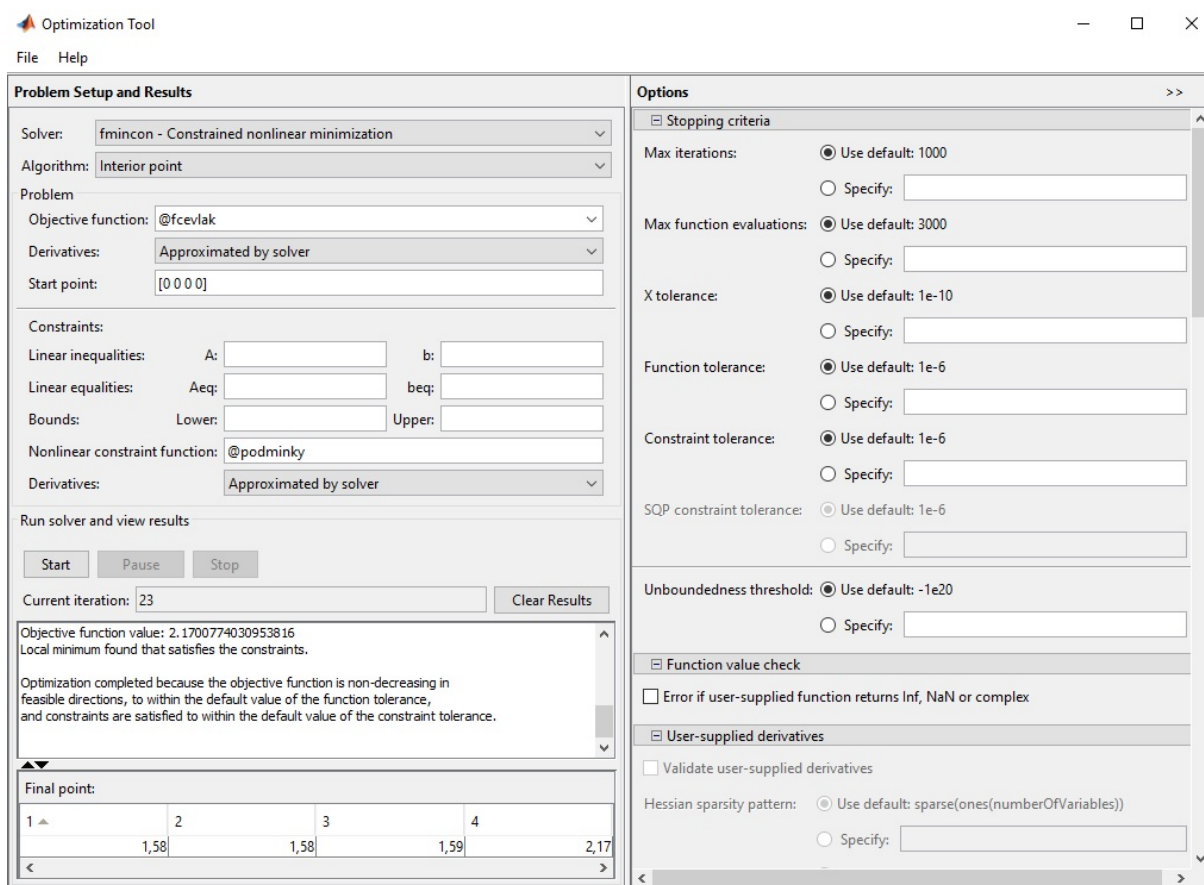
K řešení optimalizačních úloh je k dispozici celé řada programů jako např. GAMS, Maple, Mathematica a další. Jedním z cílů této práce je ilustrování práce s optimalizačním prostředím v programu Matlab. Pro účely optimalizace najdeme v novějších verzích Matlabu optimalizační toolbox, který vyvoláme kliknutím na položku *Optimization* na kartě *APPS*, anebo spuštěním příkazu *optimtool* v příkazovém řádku. Vzhled tohoto prostředí je na obrázku 2.3. Podrobné informace o fungování optimalizačního prostředí v Matlabu lze najít v [9] a [10].



Obrázek 2.2: Schéma řešení optimalizační úlohy v Matlabu

Podle typu daného problému je nejdříve nutné vybrat nejvhodnější algoritmus k jeho řešení. V našem případě řešíme úlohu omezené nelineární minimalizace *fmincon* - *Constrained nonlinear minimization* a dostupné algoritmy pro tento druh problému jsou metody *Inferior point* (implicitně zvolena), *SQP*, *Active set* a *Trust region reflective*. Algoritmy se liší především z hlediska přesnosti výsledků, výpočetní rychlosti a rychlosti konvergence. Jsou založeny na následujících principech:

- *Inferior point* - metoda založená na systému prediktor-korektor a Newtonově metodě. Výhodou je vysoká výpočetní rychlost, ale metoda ztrácí svou přesnost v situaci, kdy se odhad dostává k hranici bodové oblasti.
- *SQP* - metoda sekvenčního kvadratického programování. Jedná se o vysoce efektivní nástroj pro řešení omezených nelineárních úloh, který využívá rozdělení úlohy na soustavu kvadratických podproblémů.
- *Active set* - metoda pracuje s aktivní množinou. Zkouší, kdy dojde k porušení omezení nerovnosti, na základě toho aktivuje další omezení a aktivní množina se zmenší. Důsledkem používání větších kroků se zvyšuje výpočetní rychlost.
- *Trust region reflective* - metoda nejdříve určí oblast (obvykle kruhovou) kolem současného odhadu. Pokud v dalším kroku dojde ke zlepšení výsledku, tato oblast se



Obrázek 2.3: Optimalizační toolbox v Matlabu

Tabulka 2.1: Použité proměnné a jejich značení v textu a Matlabu

název proměnné	text	Matlab
horní mez řízení	β	B
dolní mez řízení	α	A
odporový koeficient	C	C
délka dráhy	L	L
celkový čas	T	T
čas prvního přepnutí	t_1	x(1)
čas druhého přepnutí	t_2	x(2)
čas třetího přepnutí	t_3	x(3)
optimalizační funkcionál	J	J, x(4)
dílčí opt. funkcionál i	J_i	Ji
rychlostní omezení	v_o	vo
dráhové omezení	L_o	Lo

zmenší a posune v daném směru. Konvergence metody vychází z toho, že změna oblasti závisí na jejím předchozím stavu.

Více informací o různých typech algoritmů lze najít v [10]. Doporučený postup dle [9] je použít nejdříve algoritmus *Inferior point*, potom *SQP* a nakonec *Active set* pro zlepšení přesnosti výsledků a rychlosti výpočtu. Použití algoritmu *Trust region reflective* je podmíněno zadáním hodnoty gradientu a splněním specifických požadavků na omezení.

K řešení úlohy bylo většinou vhodné použití algoritmu *Inferior point* i přesto, že v některých případech nekonvergoval. Algoritmu *SQP* vždy stačilo menší množství iterací a výpočet byl velmi rychlý, ale v některých případech byl odhad výsledků značně horší než u ostatních algoritmů. Algoritmus *Active set* poskytoval velmi podobné výsledky jako algoritmus *Inferior point*. Velmi významným faktorem ovlivňujícím výsledek je také volba počátečního bodu. Obecně také pro vyšší hodnoty parametru T v úloze u všech algoritmů výrazně roste počet iterací, výpočetní čas a klesá přesnost.

Pro ukázkou práce s tímto prostředím využijeme několika skriptů. Diagram znázorňující průběh řešení úlohy s využitím tohoto prostředí je na obrázku 2.2. Protože se značení proměnných v tomto textu a skriptech může lišit, pro přehlednost jsou v tabulce 2.1 uvedeny názvy veličin, jejich značení v textu a značení v Matlabu. Ve skriptu *fcevlak* jsou uvedené předpisy funkcionalů J , dále ve skriptu *podminky* jsou uvedené hodnoty konstant α , β , L a C , předpis pro čas T a požadované podmínky (2.41), (2.42) a (2.45). U podmínky (2.45) je nutné zapsat každou nerovnost samostatně, takže celkem máme šest omezujících podmínek ve tvaru čtyř nerovností a dvou rovností. Přepínací časy t_1, t_2, t_3 značíme jako proměnné $x(1), x(2), x(3)$. Název skriptu s funkcionaly vypisujeme do pole *Objective function* a název skriptu s podmínkami do pole *Nonlinear constraint function*. Při analýze musíme rozlišovat případy časové a energetické optimalizace, proto jsou v každém skriptu dva různé předpisy pro J a T . Správný postup je začít časovou optimalizací k nalezení T_{min} a ověření toho, že úloze vyhovuje zadaný čas T . V obou skriptech zvolíme J a T jako další proměnnou $x(4)$, konkrétně ve skriptu *podminky* zvolíme $T = x(4)$ a ve skriptu *fcevlak* zvolíme $J = x(4)$. Posledním krokem je zvolení počátečního bodu v poli *Start point*, od kterého bude výpočet probíhat. Je nutné zadat alespoň tolik hodnot, kolik máme proměnných (pro více hodnot než proměnných vyjdou přebytečné hodnoty nulové). Pro jednoduchost zvolíme bod $[0, 0, 0, 0]$. Nyní je v programu zadáno vše potřebné pro optimalizační výpočet. V pravé části okna je možné měnit různá nastavení jako jsou např. maximální počet iterací, tolerance výpočtu nebo grafické možnosti výstupu. Pro naše účely stačí použít již přednastavené volby.

Po proběhnutí výpočtu získáme několik výstupů. Prvním je počet iterací v poli *Current iteration*, které byly potřeba k nalezení výsledku s danou přesností. Vhodnější volbou počátečního bodu je možné počet iterací snížit a zkrátit tak celkovou dobu výpočtu. Dalším výstupem je hodnota zadaného funkcionalu *Objective function value*. V případě časové optimalizace tato hodnota odpovídá nalezenému času T , u energetické optimalizace odpovídá funkcionalu J . Hlavním výsledkem jsou pro nás hodnoty v polích *Final point*, což jsou určené hodnoty přepínacích časů a celkového (minimálního) času.

Nyní se přesuneme k energetické optimalizaci. Ve skriptu *fcevlak* změníme zadání funkcionalu J na předpis (2.44). Ve skriptu *podminky* nyní čas T zadáváme napevno a dopočítáváme k němu příslušné přepínací časy a hodnotu energetického funkcionalu J . Předtím však ještě určíme hodnotu J pro T_{min} volbou času $T = T_{min}$. Tímto je případ časové optimalizace kompletní. Nyní stačí měnit hodnotu T a určovat k ní příslušné hod-

noty t_1, t_2, t_3 a J . Získání dat pro širší časová rozpětí následně poskytuje lepší představu o průběhu úlohy.

Ke snadnější práci s výsledky můžeme data importovat přímo do pracovního prostředí Matlabu, a to následujícím způsobem. V toolboxu zvolíme možnost *File* $\rightarrow$ *Export to Workspace...* a můžeme zvolit a pojmenovat příslušná data k exportu - zadání úlohy *optimproblem*, nastavení řešiče *options* a samotné řešení *optimresults*.

Konkrétní hodnoty přepínacích časů a funkcionálu jsou v následující části analýzy použity jako vstup do dalších skriptů, které umožňují zejména grafické znázornění výsledků. Skript pojmenovaný *zadani* obsahuje vstupní hodnoty, nastavení podmínek a nastavení grafického rozhraní, skript *fportret* již realizuje samotné vykreslení fázových portrétů a skript *casovazavislost* obsahuje několik grafických znázornění dalších časových závislostí.

Poznámka. Počáteční bod můžeme zadat ve tvaru $[0, 0, 0, 0]$. Vhodnější zadání počátečního bodu je např. ve tvaru $[0, 1; 0, 1; 0, 4]$.

Poznámka. Kvůli přehlednosti a snazším modifikacím skriptu je předpis funkcionálu J pro energetickou optimalizaci ve skriptu *fcevlak* zapsán součtem dílčích optimalizovaných funkcionálů, které obecně značíme $J_1, \dots, J_n$. Každý z nich představuje hodnotu integrálu na příslušném časovém úseku, viz. (2.43). Dále je kvůli přehlednosti ve skriptu *zadani* každé fázové trajektorii přidělena jiná barva grafického výstupu. Detailnější popis skriptů a jejich rozdělení pro jednotlivé úlohy je v textovém souboru *popis*, který je mezi příloženými soubory.

Poznámka. Následující analýza je omezená přesností získaných výsledků vlivem výběru algoritmu, volby počátečního bodu a zaokrouhlování během výpočtu.

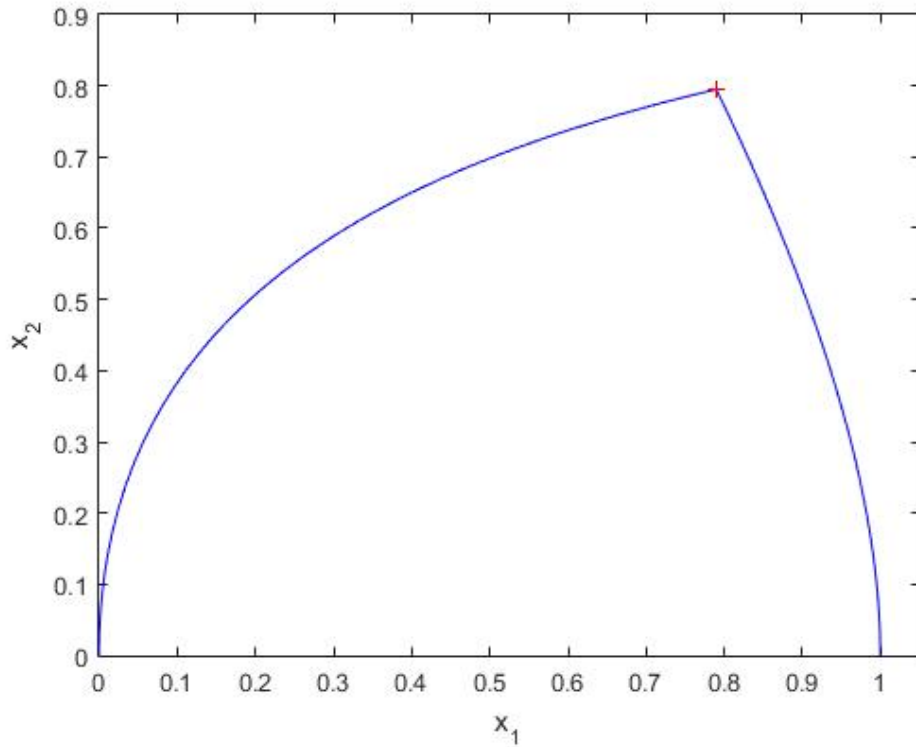
2.5. Analýza získaných výsledků

Úloha byla zpracována optimalizačními metodami, které nabízí prostředí Matlab. V programu Matlab jsme nejdříve využili optimalizačního toolboxu, který nám umožnil vypočítat čas T_{min} , příslušné přepínací okamžiky t_1, t_2, t_3 a hodnotu funkcionálu J pro různé hodnoty T . Následující část řešení se týká analýzy získaných hodnot a grafického znázornění průběhu jízdy a jednotlivých jízdních režimů formou fázových portrétů. Fázové portréty představují reprezentaci trajektorií ve fázovém prostoru, v našem případě znázorňují vztah polohy x_1 a rychlosti x_2 . Kvůli předpokladu, že poloha ani rychlost nemohou být záporné, stačí fázové portréty uvažovat pouze v prvním kvadrantu systému souřadnic.

Pro volbu parametrů $\alpha = \beta = L = 1$ a různé hodnoty odporu $C = \{0, 5; 1; 2\}$ dostáváme hodnoty T_{min} uvedené v tabulce 2.2.

Tabulka 2.2: Numerické výstupy pro $T = T_{min}$

C	T_{min}	t_1	t_2	t_3	J
0,5	2,0419	1,2710	1,2710	1,2710	0,6574
1	2,1701	1,5845	1,5845	1,5845	0,7896
2	2,6885	2,3442	2,3442	2,3442	0,9224



Obrázek 2.4: Fázový portrét pro $T = 2,1701$ ($T = T_{min}$)

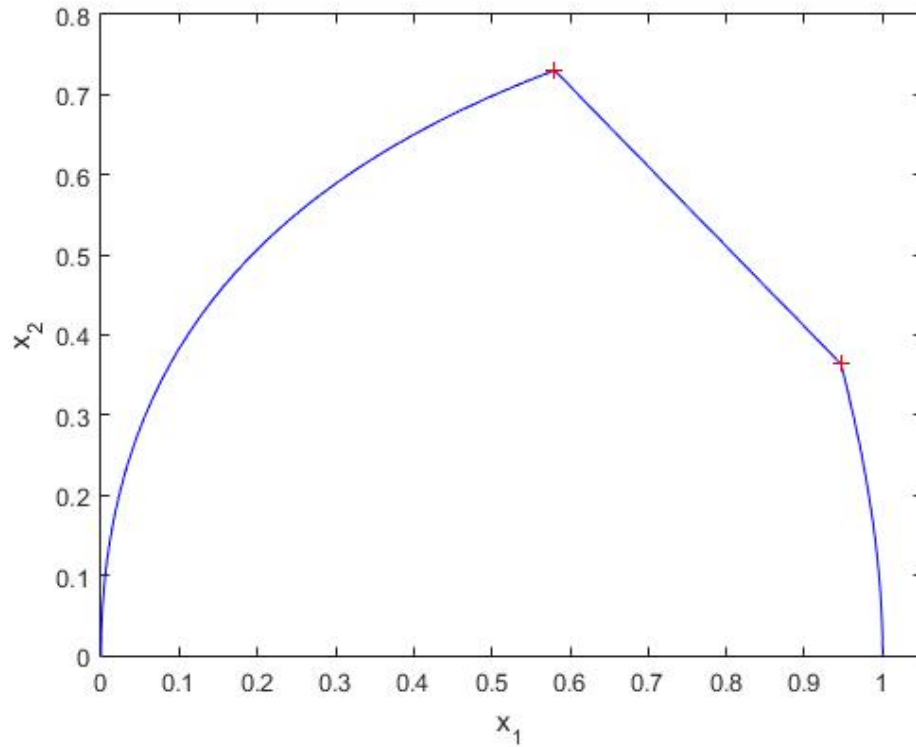
U případu časové optimalizace během jízdy dochází pouze k jednomu přepnutí, protože režim jízdy proti odporu prostředí a režim jízdy s vypnutým motorem vůbec nenastanou, což vyjadřuje vztah $t_1 = t_2 = t_3$. Vlak zahájí jízdu s maximálním zrychlením, získá co nejvyšší rychlost a v čase t_1 přepne tahovou sílu motoru na maximální brzdění, aby dobrzdil do cílové stanice a zastavil v ní.

Obrázek 2.4 znázorňuje fázový portrét pro $T = T_{min}$. Závislost polohy a rychlosti je vyjádřena dvojicí konkávních křivek. Ke zvyšování rychlosti vlaku dochází na větším úseku dráhy než jejímu klesání. Při zrychlování musí vlak odpor překonávat, zatímco při brzdění odpor ke snížení rychlosti pomáhá. Čím nižší je koeficient odporové funkce C , tím nižší je čas T_{min} . To dává smysl z fyzikálního hlediska, jelikož u vlaku s konstantním výkonem se při zvýšení odporu proti pohybu zvýší také celková doba jeho jízdy.

Z hodnot řešení je možné vypočítat, že existuje speciální hodnota času, kterou nazveme *kritický čas* a označíme T_{kr} . Pokud je celková doba jízdy stejná nebo menší jako

Tabulka 2.3: Numerické výstupy pro $T = T_{kr}$

C	T_{kr}	t_1	t_2	t_3	J
0,5	2,419	0,8351	0,8351	2,0821	0,3060
1	2,317	1,3105	1,3105	2,0065	0,5802
2	2,755	2,1935	2,1935	2,5610	0,8501



Obrázek 2.5: Fázový portrét pro $T = 2,317$ ($T = T_{kr}$)

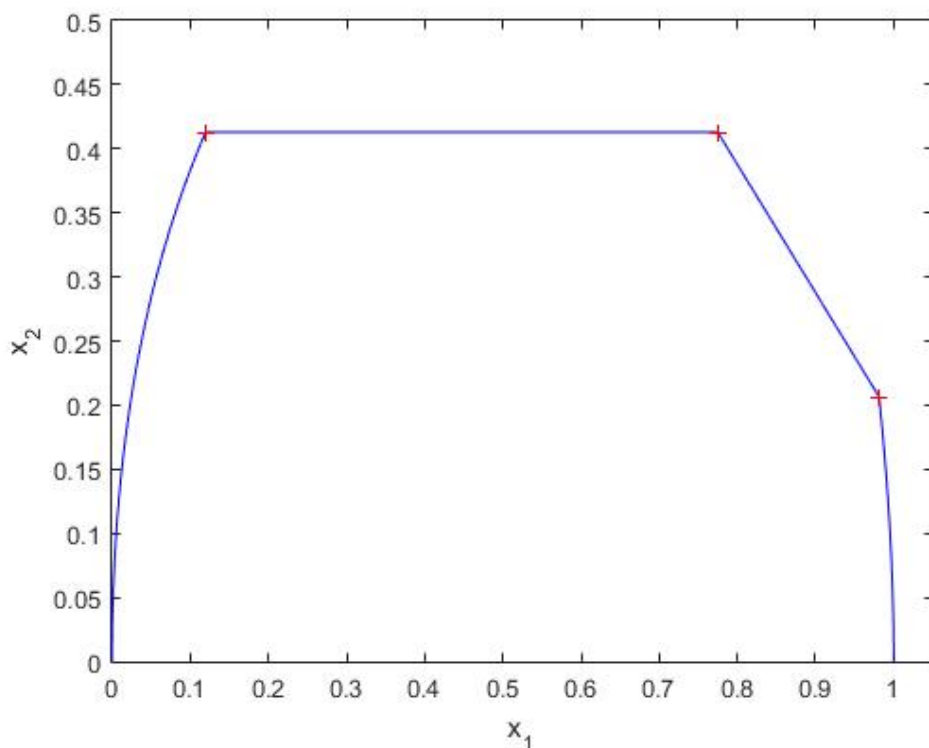
hodnota kritického času, tedy platí $T \leq T_{kr}$, dojde během jízdy ke dvěma přepnutím, platí $t_1 = t_2$ a během jízdy nenastane režim jízdy konstantní rychlostí proti odporu. Podobně jako v předchozím případě se vlak rozběhne s maximálním zrychlením, v čase t_1 vypne motor, v dalším časovém úseku se pohybuje vlivem setrvačných sil a nakonec v čase t_3 nastaví maximální brzdění a dobrzdí v cílové stanici. Hodnoty kritického času T_{kr} jsou uvedeny v tabulce 2.3.

Poznámka. V návaznosti na předchozí podkapitolu hledáme kritický čas v Matlabu zkoušením různých voleb T během energetické optimalizace. Zde hraje velkou roli výběr algoritmu, protože různé algoritmy mohou poskytovat odlišné hodnoty T_{kr} i přesto, že příslušná hodnota J je stejná. Tabulka 2.3 se vztahuje k použití algoritmu *Inferiorpoint*. Obtížnost v hledání hodnoty T_{kr} je způsobena také vlivem zaokrouhlování během výpočtu.

Stejně jako v předchozím případě z obrázku 2.5 vidíme, že v prvním a zároveň největším úseku dráhy je rychlost rostoucí a v poslední části jízdy klesající. Přibyla zde jízda s vypnutým motorem, jejíž průběh je lineární, protože k úbytku rychlosti dochází úměrně vlivem odporu.

Porovnáním hodnot z tabulek 2.2 a 2.3 vidíme, že vyšším hodnotám koeficientu odporové funkce C náleží menší rozdíly mezi kritickým a minimálním časem - pro vysoké hodnoty C se zmenšuje interval $T \in [T_{min}, T_{kr}]$, ve kterém se tento model jízdy vlaku může objevit.

Posledním případem je jízda se třemi přepnutími, který nastane za podmínky $T > T_{kr}$ a režim jízdy proti odporu se objevuje vždy. Vlak se rozběhne s maximálním zrychlením a v čase t_1 nastaví takové řízení, aby stačilo k překonávání působícího odporu a udržování



Obrázek 2.6: Fázový portrét pro $T = 3$ ($T \geq T_{kr}$)

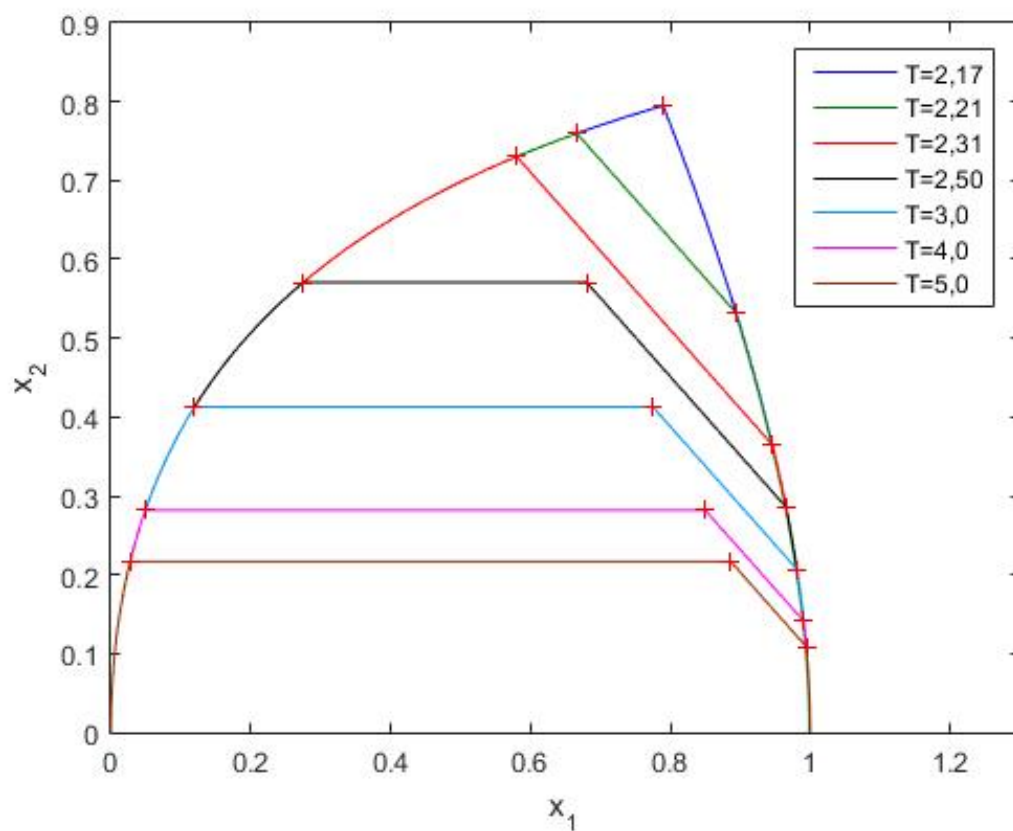
Tabulka 2.4: Numerické výstupy pro $T > T_{kr}$

C	T	t_1	t_2	t_3	J
0,5	3	0,5142	1,3990	2,7853	0,2125
1	3	0,5326	2,1192	2,8123	0,3902
2	3	0,8314	2,4833	2,8299	0,7555

konstantní hodnoty rychlosti. V čase t_2 vypne motor a dál se pohybuje vlivem setrvačných sil. Nakonec v čase t_3 přepne na maximální brzdění a dobrzdí do cílové stanice v předepsaném čase T . Času $T = 3$ odpovídá tabulka 2.4 a obrázek 2.6.

Pro funkcionál J obecně platí, že nižším hodnotám odporu C odpovídá nižší hodnota tohoto funkcionálu (při jízdě po trati s menším odporem spotřebuje vlak méně elektrické energie).

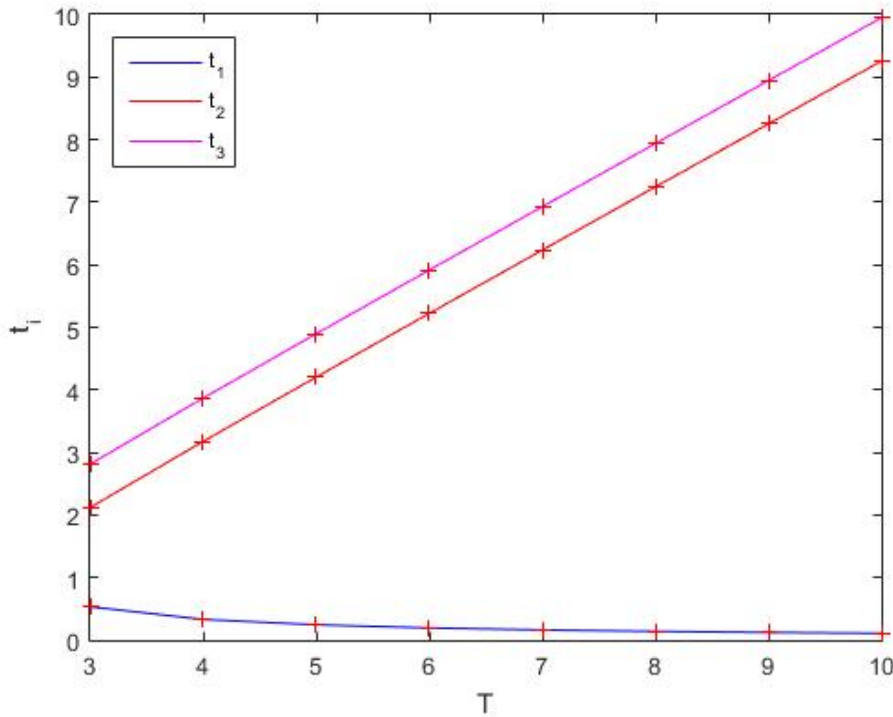
Zaměřme se na poslední uvedený model jízdy pro $C = 1$, jemuž přísluší tabulka 2.5 a obrázek 2.7. Z tabulky 2.5 je patrné, že u jízdních režimů lze najít určitý poměr jejich zastoupení vzhledem k celkové době jízdy. Při zvyšování celkové doby jízdy T připadá největší část jízdy režimu jízdy proti odporu a klesá časový podíl na jízdě všech ostatních režimů. To odpovídá intuitivní fyzikální představě, že za ideálních podmínek během delší doby jízdy vlak tráví většinu času jízdou konstantní rychlostí a změnám rychlosti přísluší jen malá část času z celkové doby jízdy. Podobná úvaha plyne i z obrázku 2.6, v němž



Obrázek 2.7: Fázové trajektorie pro $C = 1$

Tabulka 2.5: Numerické výstupy pro $C = 1$

T	t_1	t_2	t_3	J
2,1701	1,5845	1,5845	1,5845	0,7896
2,21	1,4260	1,4260	1,7804	0,6662
2,317	1,3105	1,3105	2,0065	0,5802
2,5	0,8458	1,5558	2,2489	0,5063
3,0	0,5326	2,1192	2,8123	0,3902
4,0	0,3307	3,1751	3,8683	0,2747
5,0	0,2444	4,2039	4,8971	0,2137
6,0	0,1948	5,2220	5,9152	0,1754
7,0	0,1623	6,2346	6,9278	0,1448
8,0	0,1393	7,2439	7,9370	0,1294
9,0	0,1220	8,2510	8,9442	0,1144
10,0	0,1086	9,2567	9,9498	0,1026

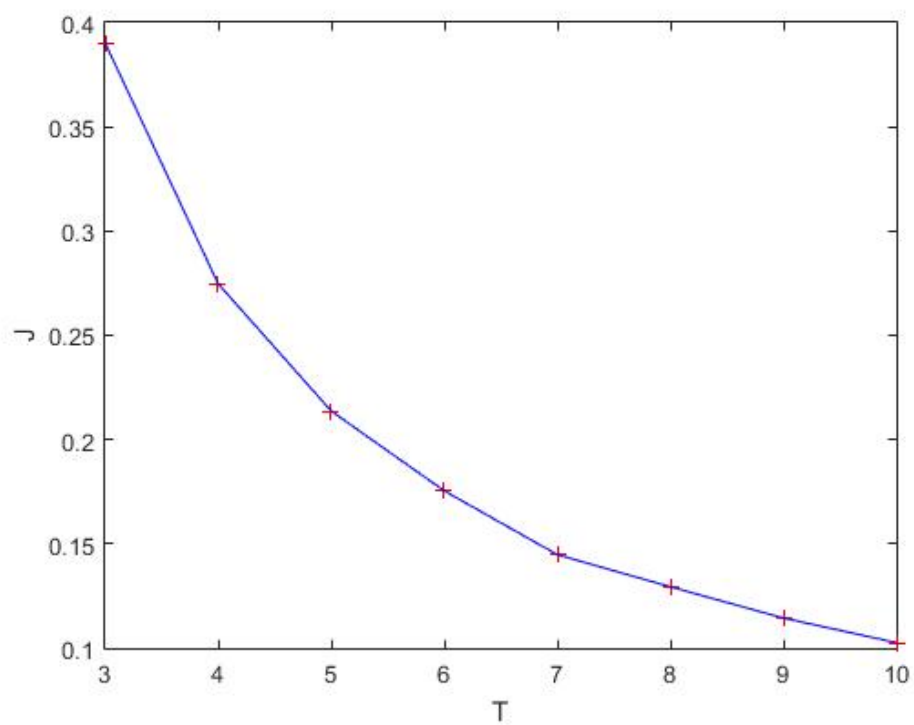


Obrázek 2.8: Závislost času T a časů t_1, t_2, t_3

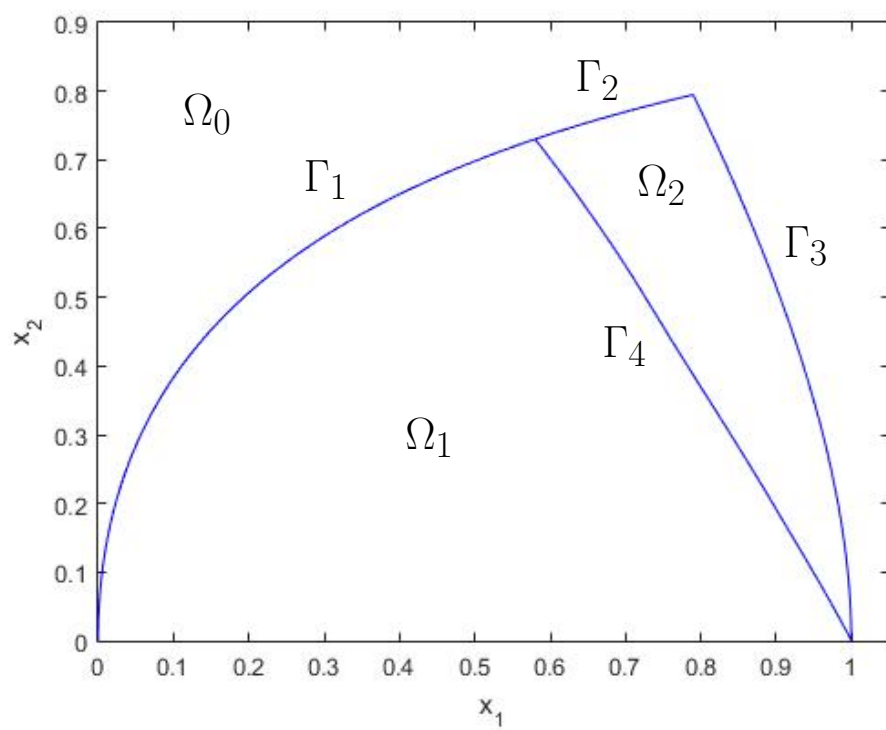
přibyl režim jízdy proti odporu, u kterého je rychlost konstantní a vlak jede tímto režimem většinu dráhy. Podíl jízdy s vypnutým motorem je menší, totéž platí u jízdy s maximálním zrychlením a brzděním. Zajímavé je, že při hodnotách T splňujících podmínku $T > T_{kr}$ se čas strávený jízdou v režimu s vypnutým motorem jeví přibližně konstantní. Tyto uvedené časové závislosti znázorňuje obrázek 2.8. Vykreslení fázových trajektorií pro větší rozsah hodnot času T také ukazuje, že vyšším hodnotám T náleží nižší hodnoty nejvyšší dosažené rychlosti.

Graf na obrázku 2.9 představuje závislost vypočítaných hodnot funkcionálu J na celkovém předepsaném čase T . Pro vyšší hodnoty T klesá hodnota funkcionálu J , což znamená, že časově delší jízda je z energetického hlediska výhodnější. Jelikož vlak jede při delší době jízdy nižší rychlostí, zkracuje se doba režimu jízdy s maximálním zrychlením, která představuje největší energetický výdaj. Ačkoliv doba jízdy proti odporu se prodlužuje, při nižších hodnotách rychlosti se spotřebovaná energie v tomto režimu také značně snižuje. Režimy jízdy s vypnutým motorem a maximálním brzděním nemají na spotřebu energie žádný vliv. Nejvyšší hodnota funkcionálu J přísluší hodnotě $T = T_{min}$, z čehož plyne, že jízda v nejkratším možném čase je nejvýhodnější z časového hlediska, ale nejméně výhodná z hlediska úspory energie.

Na obrázku 2.10 vidíme analýzu obrázku 2.7 s vykreslením přepínacích křivek. Pomocí znalosti souřadnic polohy a rychlosti vlaku můžeme určit, v jakém režimu jízdy se právě nachází. Oblast Ω_0 představuje stavy veličin, kterých vlak v rámci úlohy za předepsaných podmínek během časového ani energetického optimálního řízení nikdy nemůže dosáhnout. Stavy v oblasti Ω_1 odpovídají režimu jízdy konstantní rychlostí proti odporu. V oblasti Ω_2 se vlak pohybuje režimem jízdy s vypnutým motorem. Oblasti Ω_1 a Ω_2 od sebe dělí



Obrázek 2.9: Závislost času T a funkcionálu J



Obrázek 2.10: Přepínací křivky Γ_i a jízdní oblasti Ω_i

přepínací křivka Γ_4 , v bodech této křivky dochází ke změně řízení vlaku z $u = Cx_2$ na $u = 0$. Během zrychlení se stav vlaku vždy pohybuje po křivce Γ_1 a může z ní přejít do oblasti Ω_1 . Pokud se po křivce Γ_1 dostane až na křivku Γ_2 , může stav vlaku přejít do oblasti Ω_2 . Stavů jízdy s brzděním odpovídá křivka Γ_3 . Určení explicitního předpisu křivky Γ_4 by dále rozšířilo komplexnost popisu dané úlohy.

V úloze o energetické jízdě vlaku jsme pomocí principu maxima a dalších vět a vlastností určili předpisy jednotlivých jízdních režimů, kterých vlak během své jízdy nabývá v daném pořadí. Rozbor se týkal časové a energetické optimalizace. Popsali jsme možnosti použití optimalizačního prostředí programu Matlab pro řešení optimalizačních úloh. Pro různé hodnoty T jsme určili příslušné přepínací okamžiky, vykreslili fázové portréty a další časové závislosti. Analýza se týkala vztahů mezi jednotlivými časy, závislosti časů na energetickém funkcionalu a rozdělení stavového prostoru na jednotlivé přepínací křivky a jízdní oblasti.

3. Úloha o energeticky optimální jízdě vlaku s rychlostním omezením

V této kapitole zavedeme v úloze optimální jízdy vlaku takové rozšíření, že maximální možná rychlost vlaku je omezena po celé délce trati, případně na jejích různých úsecích. Úlohu opět vyřešíme v optimalizačním prostředí Matlabu. Detailnější poznatky k řešení úloh s omezeními lze nalézt v [2] a [6].

3.1. Globální rychlostní omezení jízdy

V této podkapitole definujeme obecně zvolené rychlostní omezení a poté je realizujeme v úloze optimální jízdy vlaku. Uvažujeme, že rychlostní omezení představuje podmínku

$$\begin{aligned}x_2(t) &\leq v_o, & v_o &\in \mathbb{R}^+, \\x_1(t) &\in [L_i, L_{i+1}], & t &\in [t_i, t_{i+1}], & i &= 1, \dots, n,\end{aligned}$$

kde v_o představuje předepsanou hodnotu rychlostního omezení. Příirozeně klademe požadavek $v_o \in \mathbb{R}^+$. Podmínka $x_1(t) \in [L_i, L_{i+1}]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ říká, že rychlostní omezení je aktivní na části dráhy $[L_i, L_{i+1}]$ (obecně takových částí může být více) a časy t_i, t_{i+1} představují časy, v nichž poloha vlaku odpovídá krajním bodům omezené části dráhy, platí

$$x_1(t_i) = L_i, \quad x_1(t_{i+1}) = L_{i+1}.$$

Na dráze můžeme mít obecně n úseků, kde na každém z nich je rychlostní omezení. Pokud je rychlost omezena na celém úseku trati, označujeme toto omezení přívlastkem *globální*, v případě omezení na jednotlivých úsecích trati ho označujeme přívlastkem *lokální*. Omezení rychlosti může vycházet z technických omezení na vlakové soupravě či na železničním svršku. Při analýze jízdy vlaku s podmínkami omezení předpokládáme, že jsou omezení zvolena vhodným způsobem tak, aby projetí dráhy vlakem bylo technicky uskutečnitelné. Nadále se zabýváme pouze případem, kdy je na dráze jedna oblast s rychlostním omezením.

Nyní vyjdeme z formulace úlohy v předchozí kapitole. Funkcionál J minimalizujeme z hlediska energetické optimalizace

$$J = \int_0^T u^+(t)x_2(t)dt \rightarrow \min.$$

Zavedením fázových souřadnic $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ transformujeme rovnici (2.1) na systém rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u - r(x_2),\end{aligned}$$

a počáteční (2.2) a koncové (2.3) podmínky úlohy na

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, \\ x_1(T) &= L, & x_2(T) &= 0.\end{aligned}$$

Funkci u^+ definujeme následujícím způsobem

$$u^+(t) = \frac{1}{2}(u(t) + |u(t)|),$$

a platí

$$u^+ = \begin{cases} u, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Na odporovou funkci r stejně jako v předchozím případě klademe požadavky, aby existovala její první a druhá derivace podle $\dot{x}$ a dále platilo

- $r(0) = 0$,
- $r(\dot{x}) > 0$ pro $\forall \dot{x} > 0$,
- $r'(\dot{x}) > 0$ pro $\forall \dot{x} \geq 0$,
- $r''(\dot{x}) \geq 0$ pro $\forall \dot{x} \geq 0$.

Pro jednoduchost a názornost opět pracujeme pouze s lineárním odporem $r(x_2) = Cx_2$, $C \in \mathbb{R}^+$. Dále zavedeme globální rychlostní omezení ve tvaru

$$x_2(t) \leq v_o, \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

kde $v_o \in \mathbb{R}^+$ představuje nejvyšší povolenou rychlost vlaku, které může během své jízdy po celé délce trati dosáhnout.

Cílem úlohy je najít takové optimální řízení vlaku, aby ujel dráhu L (přirozeně $L > 0$) během předem zadaného času T za co nejmenší spotřeby elektrické energie. Souřadnice x_1 a x_2 představují polohu a rychlost vlaku. Dále bez újmy na obecnosti volíme hmotnost vlaku $m = 1$. Během jízdy musí být dodržena podmínka rychlostního omezení (3.2). Jako ilustrační hodnoty opět volíme

$$\alpha = \beta = C = L = 1. \quad (3.3)$$

Při řešení úlohy s rychlostním omezením vycházíme z toho, že vlak může během jízdy jet pouze předem danými čtyřmi jízdními režimy určenými v předchozí kapitole. Prvním krokem je zjistit, zda vlak narazí na rychlostní omezení. To posoudíme na základě výsledku časové optimalizace, během které vlak dosahuje své maximální rychlosti v_{max} pro dané parametry úlohy, které dosáhne v časovém okamžiku odpovídajícímu konci prvního jízdního režimu (v dalších režimech už nedochází ke zrychlení). Hodnotu v_{max} určíme podle vztahu

$$v_{max} = x_2(t_p) = -\frac{\beta}{C}e^{-Ct_p} + \frac{\beta}{C},$$

kde t_p je první přepínací okamžik, viz. analýza (2.34). Pokud platí $v_{max} \leq v_o$, nastavené rychlostní omezení se na jízdu vlaku nijak nepromítne a průběh úlohy je stejný jako v předchozí kapitole. Dále je nutné určit, při jakém čase jízdy T je rychlostní omezení aktivní. Pokud by měl vlak na projetí dráhy dostatečně velký čas T , rychlosti v_o by vůbec nedosáhl. Zavedeme pojem *aktivační čas*, značíme T_A , který představuje takový čas jízdy, pro který platí, že při splnění podmínky $T \leq T_A$ je průběh jízdy ovlivněn rychlostním omezením. V rámci další úvahy uvažujeme pouze případ, že jsou splněny výše uvedené předpoklady a rychlostní omezení se na jízdě vlaku projeví.

Prvním výpočtem je určení minimálního času T_{min} , který představuje nejmenší možný čas, během kterého vlak urazí danou dráhu L s aktivním globálním rychlostním omezením v_o (za předpokladů $v_{max} \geq v_o$, $T_{min} \leq T_A$).

Připomeňme, že v případě časové optimalizace úlohy bez omezení se vlak pohyboval dvěma režimy s jediným přepnutím řízení u v čase t_p

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_p], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_p, T_{min}]. \end{cases}$$

Přesnou posloupnost režimů jízdy s globálním omezením určíme obdobně jako u úlohy bez omezení konstrukcí Hamiltonovy funkce a principu maxima, u nichž navíc aplikujeme poznatky týkající se úloh s omezením. Uvažujme funkci $S(x_1, x_2, t)$, pro kterou platí

$$S(x_1, x_2, t) = x_2(t) - v_o. \quad (3.4)$$

Funkci $S(x_1, x_2, t)$ (3.4) derivujeme podle t tolikrát, dokud se v ní nevyskytne řízení u . V tomto případě u vystupuje v první derivaci

$$S^{(1)}(x_1, x_2, t) = \dot{x}_2(t) = u(t) - r(x_2).$$

Hamiltonova funkce H^* (1.8) je ve tvaru

$$H^* = \psi_0 u^+ x_2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - r(x_2)) + \mu (u - r(x_2)). \quad (3.5)$$

Časové optimalizaci odpovídá případ $\psi_0 = 0$. Adjungovaný systém má tvar

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + \psi_2 r'(x_2) + \mu r'(x_2), \end{aligned}$$

a podmínka maxima

$$\max_{-\alpha \leq u \leq \beta} [\psi_1 x_2 + (\psi_2 + \mu)(u - r(x_2))] = \psi_1 \hat{x}_2 + (\psi_2 + \mu)(\hat{u} - r(\hat{x}_2)), \quad t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

Vynecháním členů nezáviselých na regulaci u upravíme podmínku maxima (3.6)

$$\max_{-\alpha \leq u \leq \beta} [(\psi_2 + \mu)u] = (\psi_2 + \mu)\hat{u}, \quad t \in [0, T].$$

Pro funkci $\mu(t)$ platí, že uvnitř oblasti S nabývá hodnoty $\mu = 0$ a na hranici oblasti S hodnoty $\mu \leq 0$. Pro úplnost uvedeme, že hodnota μ na hranici může být nulová a jednalo by se o speciální případ, který by nastal tehdy, kdyby rychlostní omezení bylo nastavené na takovou hodnotu, že vlak by během jízdy bez omezení v některých úsecích dosáhl právě této hodnoty rychlosti. Dále platí, že pokud se nenacházíme na hranici oblasti S , tak řešíme časovou optimalizaci úlohy bez omezení a podle znaménka výrazu $\psi_2 + \mu$ nabývá regulace u svých krajních hodnot. Zbývá vyšetřit případ, kdy se nacházíme na hranici, na níž platí $\psi_2(t) + \mu(t) = 0$. Pro přehlednost zapisujeme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) > 0, \\ \text{neurčeno} & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) = 0, \\ -\alpha & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) < 0. \end{cases}$$

Předpokládejme, že rovnost $\psi_2(t) + \mu(t) = 0$ platí na netriviálním intervalu. Protože na hranici platí $\mu(t) \leq 0$, můžeme zapsat $\psi_2(t) = -\mu(t)$. Na hranici platí také $x_2(t) = v_o$, to znamená, že předepsaná hodnota řízení u na tomto úseku je $\hat{u} = r(v_o)$. Za podmínky $r'(v_o) > 0$ adjungovaná soustava přejde do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1,\end{aligned}$$

a jejím řešením je soustava

$$\begin{aligned}\psi_1 &= c_1, \\ \psi_2 &= -c_1 t + c_2.\end{aligned}$$

Podobně jako při časové optimalizaci v úloze bez omezení platí, že pro rozjezd vlaku musí být $\psi_2 > 0$, pro dojezd vlaku musí být $\psi_2 \leq 0$. Vzhledem k tvaru a řešení adjungovaného systému platí, že rovnost $\psi_2 = 0$ může nastat pouze v izolovaných časových okamžicích. Tato úvaha poskytuje představu o skladbě jízdních režimů. Hlubší analýzou adjungovaného systému a vzhledem k realizaci skokové podmínky při vstupu na hranici omezení lze dospět k následující finální posloupnosti jízdních režimů při časové optimalizaci

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_1], \\ r(v_o) & \text{pro } t \in [t_1, t_2], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_2, T_{min}]. \end{cases}$$

Další analýza spočívá v rozpracování jednotlivých režimů a vyjádření minimálního času T_{min} . Nejdříve je nutné určit první přepínací čas t_1 , který poskytuje informaci o tom, jak dlouhou dobu stráví vlak v režimu zrychlení. Soustava rovnic pro tento jízdní režim (viz. (2.26)) je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{\beta}{C^2} e^{-Ct} + \frac{\beta}{C} t - \frac{\beta}{C^2}, \\ x_2(t) &= -\frac{\beta}{C} e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Protože v čase t_1 dosáhne vlak rychlostního omezení v_o , dosazením podmínky $x_2(t_1) = v_o$ do (3.7) přejde druhá rovnice této soustavy na tvar

$$v_o = -\frac{\beta}{C} e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}.\tag{3.8}$$

Přepínací čas t_1 můžeme z rovnice (3.8) explicitně vyjádřit

$$t_1 = \frac{\ln \beta - \ln(\beta - C v_o)}{C}.$$

Jako ilustrační hodnotu globálního rychlostního omezení volíme hodnotu $v_o = 0,5$. Z rovnice (3.8) plyne, že daného omezení dosáhne vlak v čase $t_1 = 0,6931$. V úloze bez omezení pro hodnoty (2.24) vyšla maximální rychlost $v_{max} = 0,795$. Protože v posloupnosti jízdních režimů už nedojde znovu k režimu se zrychlením, po zbytek jízdy jede vlak touto

anebo nižší rychlostí a globální omezení rychlosti určitě nebude překročeno. Následujícím jízdním režimem je režim jízdy konstantní rychlostí, kde obecné řešení příslušného systému rovnic je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_2 t + c_1, \\x_2(t) &= c_2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Pro konstantu $c_2 \in \mathbb{R}$ platí $c_2 = v_o$, pro konstantu $c_1 \in \mathbb{R}$ stejně jako v úloze bez omezení spočítáme polohu vlaku v prvním přepínacím čase, tedy $x_1(t_1)$ ze soustavy (3.8) a dosadit do (3.9). Platí

$$c_1 = \frac{\beta}{C} t_1 + \frac{\beta}{C^2} e^{-C t_1} - v_o t_1 - \frac{\beta}{C^2}, \quad c_2 = v_o,$$

a soustava rovnic pro druhý úsek jízdy s konstantní rychlostí je

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v_o t + \frac{\beta}{C} t_1 + \frac{\beta}{C^2} e^{-C t_1} - v_o t_1 - \frac{\beta}{C^2}, \\x_2(t) &= v_o.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Posledním režimem jízdy je jízda s brzděním do cíle, během které dojde k poslednímu přepnutí v čase t_2 . Režim brzdění je popsán rovnicemi (viz. (2.27))

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\alpha}{C^2} e^{C(T_{min}-t)} - \frac{\alpha}{C} t + \frac{\alpha}{C^2} + \frac{\alpha}{C} T_{min} + L, \\x_2(t) &= \frac{\alpha}{C} e^{C(T_{min}-t)} - \frac{\alpha}{C}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Soustavy (3.10) a (3.11) na sebe musí navazovat v čase t_2 , dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých t_2 a T_{min} . Úpravami z nich získáme vyjádření pro t_2

$$t_2 = \frac{-\beta C t_1 - \beta e^{-C t_1} + C^2 v_o t_1 + \beta - C v_o + \alpha \ln\left(\frac{\alpha + v_o C}{\alpha}\right) + C^2 L}{C^2 v_o}$$

a pro T_{min}

$$T_{min} = \frac{1}{C} \ln\left(\frac{v_o C + \alpha}{\alpha}\right) + t_2.$$

Pro hodnoty (3.3) vychází $t_2 = 2,1178$ a $T_{min} = 2,5232$. Všimněme si, že čas T_{min} je větší než čas T_{Kr} v úloze bez omezení. Z toho plyne, že u úlohy s globálním rychlostním omezením pro všechny hodnoty T splňující $T_{Kr} < T$ dojde k jízdě se všemi jízdními režimy.

V případě energetické optimalizace je v Hamiltonově funkci (3.5) člen ψ_0 nenulový, bez újmy na obecnosti položíme $\psi_0 = -1$. Adjungovaný systém má tvar

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= u^+ - \psi_1 + \psi_2 r'(x_2) + \mu r'(x_2).\end{aligned}$$

Podle definice u^+ (3.1) rozlišujeme dva případy. Pro $u \geq 0$ dostaneme výraz

$$\max_{0 \leq u \leq \beta} (\psi_2 + \mu - \hat{x}_2)u = (\psi_2 + \mu - \hat{x}_2)\hat{u}, \quad t \in [0, T],$$

a pro $u < 0$

$$\max_{-\alpha \leq u \leq 0} (\psi_2 + \mu)u = (\psi_2 + \mu)\hat{u}, \quad t \in [0, T].$$

Z uvedených podmínek dostaneme následující vyjádření optimální regulace

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) - \hat{x}_2(t) > 0, \\ \text{neurčeno na } [0, \beta] & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) - \hat{x}_2(t) = 0, \\ 0 & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) - \hat{x}_2(t) < 0, \psi_2(t) + \mu(t) > 0, \\ \text{neurčeno na } [-\alpha, 0] & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) = 0, \\ -\alpha & \text{pro } \psi_2(t) + \mu(t) < 0. \end{cases}$$

Analýzujeme singulární případy. Předpokládejme, že na netriviálním intervalu pro $\hat{u}(t)$ neurčeno na $[-\alpha, 0]$ na hranici platí, že $\mu \leq 0$. V případě $\mu = 0$ platí $\psi_2 = 0$, což vzhledem ke tvaru řešení adjungovaného systému může nastat jen v izolovaných časových okamžicích. V případě $\mu < 0$ máme $\psi_2 > 0$, což nastává jen při kladných hodnotách řízení, čímž dostáváme spor s předpokladem $\hat{u}(t) \in [-\alpha, 0]$.

Podobně postupujeme pro případ $\hat{u}(t)$ neurčeno na $[0, \beta]$. Uvažujeme, že platí $\mu = 0$ pokud se nacházíme mimo hranici omezení, potom platí $\psi_2 = \hat{x}_2 < v_o$, a tedy $\hat{u} = r(\hat{x}_2)$. Na hranici omezení platí $\mu \leq 0$. V případě $\mu = 0$ opět platí $\psi_2 = \hat{x}_2$ a řízení $\hat{u} = r(v_o)$. V případě $\mu < 0$ dostáváme $\psi_2 + \mu = \hat{x}_2 = v_o$ a $\hat{u} = r(v_o)$.

Vzhledem k výše uvedenému a s využitím skokových podmínek (1.10), které v tomto případě jsou tvaru

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1^-) &= \psi_1(t_1^+), \\ \psi_2(t_1^-) &= \psi_2(t_1^+) + \pi, \\ H(t_1^-) &= H(t_1^+), \end{aligned}$$

kde $\pi \in \mathbb{R}$ je parametr skoku, dospějeme analýzou průběhu funkce $\psi_2 + \mu$ k následující energeticky optimální posloupnosti jízdních režimů vlaku při aktivním rychlostním omezení

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_1], \\ r(v_o) & \text{pro } t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{pro } t \in [t_2, t_3], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_3, T]. \end{cases}$$

V případě, že se rychlostní omezení neprojeví, má posloupnost režimů tvar (2.23), kde $\hat{x}_2 < v_o \equiv \text{konst.}$ Oproti časové optimalizaci se zde vyskytuje režim jízdy s vypnutým motorem, který získáme řešením obecné soustavy (2.37), jejíž koeficienty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ určíme ze soustavy (3.10) v bodě $t = t_2$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{v_o}{C}e^{C(t_2-t)} + \frac{\beta}{C^2}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1 - v_o t_1 + v_o t_2 + \frac{v_o}{C} - \frac{\beta}{C^2}, \\ x_2(t) &= v_o e^{C(t_2-t)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

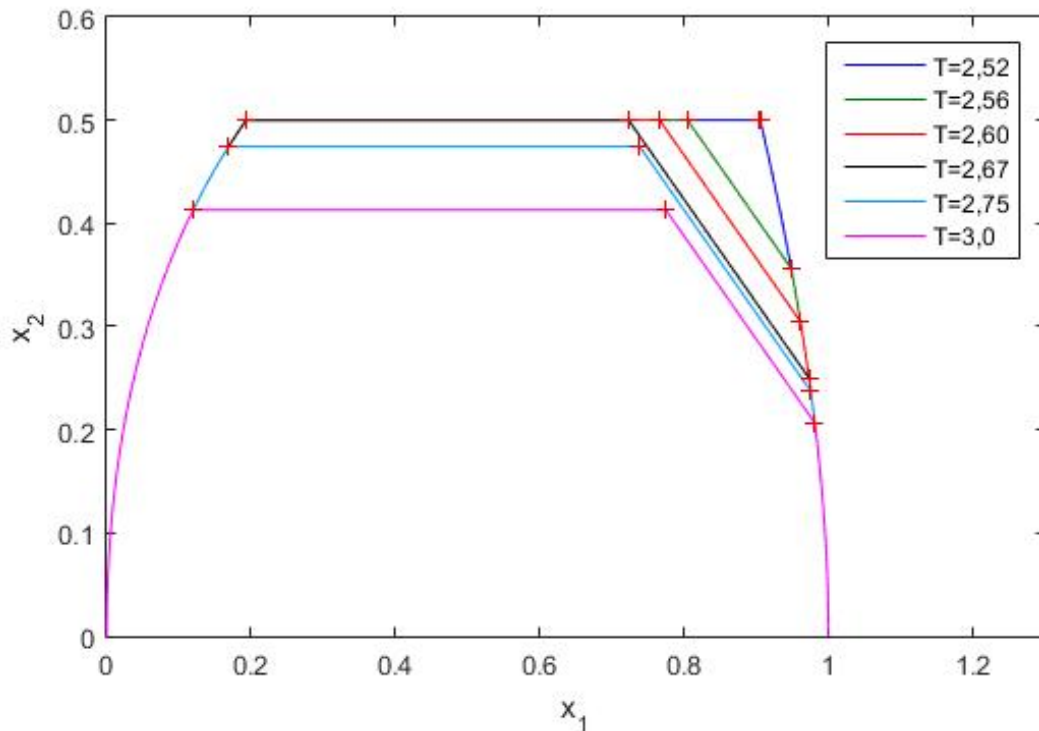
Spojením soustav (3.12) a (3.11) v čase $t = t_3$ získáme dvě podmínky analogicky jako u úlohy bez omezení (viz. (2.41) a (2.42)). Funkcionál J je ve tvaru

$$J = \int_0^T u^+(t)x_2(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{\beta^2}{C}(1 - e^{-Ct})dt + \int_{t_1}^{t_2} C v_o^2 dt \rightarrow \min.$$

Stejně jako v předchozí úloze použijeme dva skripty v optimalizačním prostředí Matlabu. Skript *podminky* obsahuje navíc deklaraci proměnné pro omezení rychlosti v_o a také třetí podmínku ve tvaru rovnosti. V této podmínce je první čas přepnutí $x(1)$ zadán pevně, aby bylo zajištěno, že vlak dosáhne omezené rychlosti. Výpočet časové optimalizace poskytuje hodnoty druhého přepínacího času a minimálního času jízdy T_{min} .

Aktivační čas T_A určíme z tabulky hodnot 2.5 energetické optimalizace u úlohy bez omezení. Cílem je najít takový čas T , kterému odpovídá $t_1 = 0,6931$. Pro hodnoty (3.3) vychází $T_A = 2,681$. Energetickou optimalizací pro hodnoty T z intervalu $[T_{min}, T_A]$ dostáváme tabulku hodnot 3.1 přepínacích okamžiků a funkcionalu J pro jízdu s globálním rychlostním omezením.

Fázovým trajektoriím jízdy s globálním omezením odpovídá obrázek 3.1. Obdobně jako v případě úlohy bez omezení se u úlohy s omezením také s měnícím se celkovým časem jízdy mění zastoupení jízdních režimů. Připomeňme, že energie se spotřebovává pouze u režimu se zrychlením a režimu jízdy konstantní rychlostí. Pokud se celkový čas jízdy zvyšuje a vlak stále naráží na rychlostní omezení, roste podíl režimu s vypnutým motorem a klesá podíl režimu jízdy s konstantní rychlostí, protože energie potřebná na režim zrychlení je konstantní a vlak šetří energii v režimu jízdy konstantní rychlostí. V případě, že vlak nenarazí na rychlostní omezení, je tomu naopak - s rostoucím celkovým časem jízdy roste podíl času stráveného v režimu jízdy konstantní rychlostí.



Obrázek 3.1: Fázové trajektorie pro omezení $v_o = 0,5$

Tabulka 3.1: Numerické výstupy pro omezení $v_o = 0,5$

T	t_1	t_2	t_3	J
2,5232	0,6931	2,1173	2,1180	0,5493
2,56	0,6931	1,9163	2,2553	0,4989
2,6	0,6931	1,8389	2,3340	0,4796
2,64	0,6931	1,7850	2,4009	0,4661
2,67	0,6928	1,7538	2,4469	0,4580
2,7	0,6730	1,7878	2,4809	0,4507
2,75	0,6432	1,8440	2,5372	0,4390
3	0,5326	2,1192	2,8123	0,3902

3.2. Dílčí úlohy s omezením

V této části se věnujeme případu lokálního rychlostního omezení, kdy vlak může v některých částech trati jet libovolnou rychlostí a v jiných částech trati nesmí překročit předepsanou rychlost. Úlohu zatím neřešíme jako celek, ale složením dílčích řešení.

Pro jednoduchost a názornost uvažujme rozdělení trati pouze na dvě části. V první části trati může vlak jet libovolnou rychlostí. V druhé části trati je zavedeno globální rychlostní omezení v_o . Pro rychlost vlaku $x_2(t)$ platí

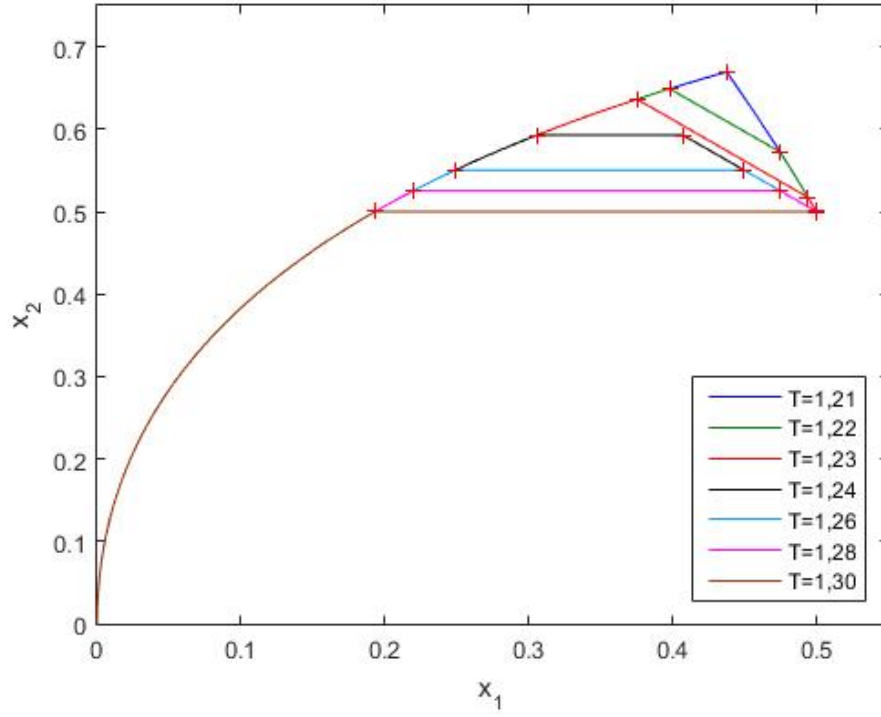
$$\begin{aligned} x_2(t), \quad x_1(t) &\in [0, L_o], \\ x_2(t) &\leq v_o, \quad x_1(t) \in [L_o, L_k], \end{aligned}$$

kde L_o představuje počáteční bod úseku trati s rychlostním omezením a L_k koncový bod úseku trati s rychlostním omezením. Pro ilustraci volíme hodnoty $L_o = 0,5$, $L_k = 1$ a $v_o = 0,5$.

Poznámka. V případě volby globálního omezení po celé délce trati platí $L_o = 0$, $L_k = L$.

Tabulka 3.2: Numerické výstupy pro $x_1(t) \in [0, L_o]$

T_1	t_1	t_2	t_3	J_1
1,2141	1,1070	1,1070	1,1070	0,4348
1,22	1,1047	1,1047	1,1730	0,3980
1,23	1,0115	1,0115	1,2185	0,3752
1,24	0,8985	1,0697	1,24	0,3659
1,26	0,7991	1,1642	1,26	0,3594
1,28	0,7445	1,2312	1,28	0,3536
1,3068	0,6932	1,3067	1,3068	0,3466



Obrázek 3.2: Fázové trajektorie pro $x_1(t) \in [0, L_o]$

V první části řešíme úlohu bez omezení s nenulovými koncovými podmínkami, konkrétně s předepsanou nenulovou hodnotou rychlosti na konci jízdy vlaku. Počáteční a koncové podmínky jsou

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, \\ x_1(T_1) &= L_o, & x_2(T_1) &= v_o, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde čas T_1 představuje celkový čas jízdy v tomto úseku trati. Výsledky numerického řešení jsou v tabulce časů 3.2 a fázové trajektorie na obrázku 3.2.

Omezení se projeví pokud $T_1 \leq T_A$, kde hodnotu T_A lze jednoduše určit jako jízdu s režimy $u = \beta$, $t \in [0, t_1]$ a $u = r(\hat{x}_2(t))$, $t \in [t_1, T_1]$, kde platí $t_2 = t_3 = T_1$ a podmínky (3.13). Pro hodnoty (3.3) vychází $T_A = 1,3068$ a $t_1 = 0,6931$. Z přepínacích časů vidíme, že pokud je rychlost dostatečně velká, po režimu se zrychlením následuje režim jízdy s vypnutým motorem a režim s brzděním. Pro snižující se hodnotu rychlosti klesá podíl režimu s brzděním a kritickým časem T_{kr} označíme nejmenší možný čas, od kterého brzdňý režim vymizí úplně. Pokud platí $T \in [T_{kr}, T_A]$, tak režim s brzděním nenastává a vlak předepsané koncové rychlosti dosáhne v režimu jízdy s vypnutým motorem. Toto chování je hlavním rozdílem v průběhu jízdních režimů oproti úloze s podmínkou nulové konečné rychlosti, ve které k režimu s brzděním došlo vždy.

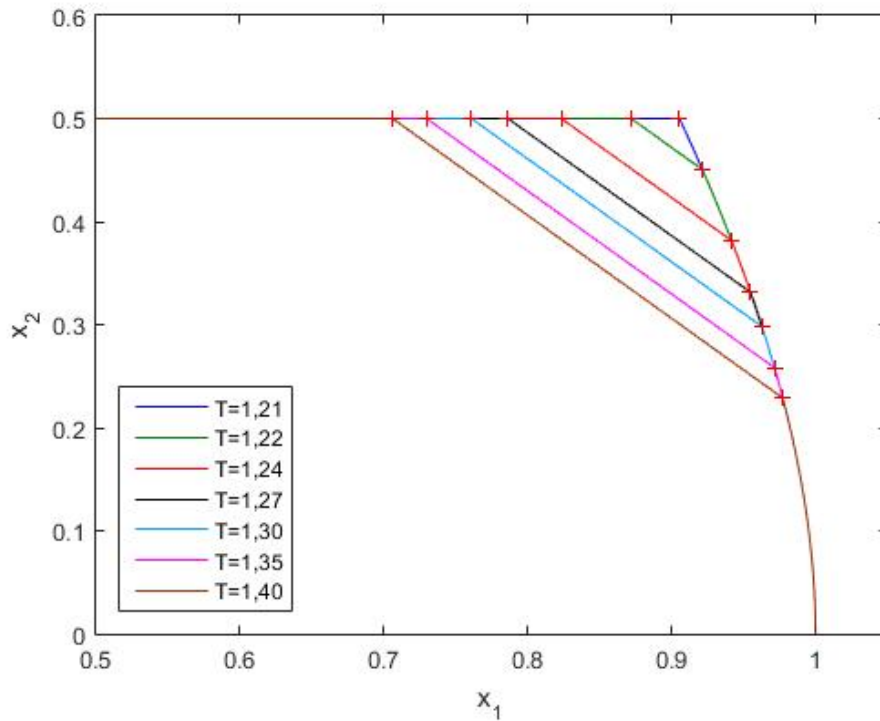
V druhé části jsou počáteční a koncové podmínky

$$\begin{aligned} x_1(0) &= L_o, & x_2(0) &= v_o, \\ x_1(T_2) &= L, & x_2(T_2) &= 0, \end{aligned}$$

kde celkový čas jízdy v druhém úseku značíme T_2 . Oproti úloze bez omezení se liší tím, že rychlost na počátku pohybu není nulová. Řešíme tedy úlohu s globálním rychlostním omezením a nenulovými počátečními podmínkami. Výsledky ukazuje tabulka 3.3 a obrázek 3.3.

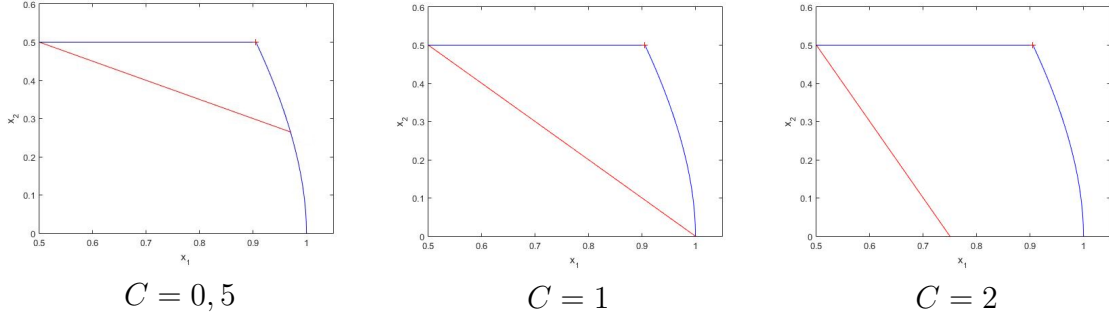
Tabulka 3.3: Numerické výstupy pro $x_1(t) \in [L_o, L_k]$

T_1	t_1	t_2	t_3	J_2
1,2164	0	0,8109	0,8109	0,2021
1,22	0	0,7436	0,8482	0,1859
1,24	0	0,6464	0,9168	0,1616
1,27	0	0,5724	0,9838	0,1431
1,3	0	0,5216	1,0392	0,1304
1,35	0	0,4593	1,1204	0,1148
1,4	0	0,4120	1,1940	0,1030



Obrázek 3.3: Fázové trajektorie pro $x_1(t) \in [L_o, L_k]$

Jelikož vlak na tomto úseku začíná jízdu s rychlostí rovnou předepsané hodnotě rychlostního omezení, režim se zrychlením vůbec nenastává. Pro vyšší hodnoty času jízdy T_2 roste podíl jízdy v režimu s vypnutým motorem a časy strávené jízdou s konstantní rychlostí a brzděním se snižují.



Obrázek 3.4: Průběh režimu s vypnutým motorem pro různé hodnoty C

Na tomto místě je vhodné provést úvahu o vlivu velikosti odporového koeficientu C na řešitelnost úlohy. Tato úvaha se týká i všech výše uvedených úloh.

Tabulka 3.4: Hodnoty v_{kr} pro $L - L_o = 0,5$

$L - L_o$	C	v_{kr}
0,5	0,5	0,25
0,5	1	0,5
0,5	2	1

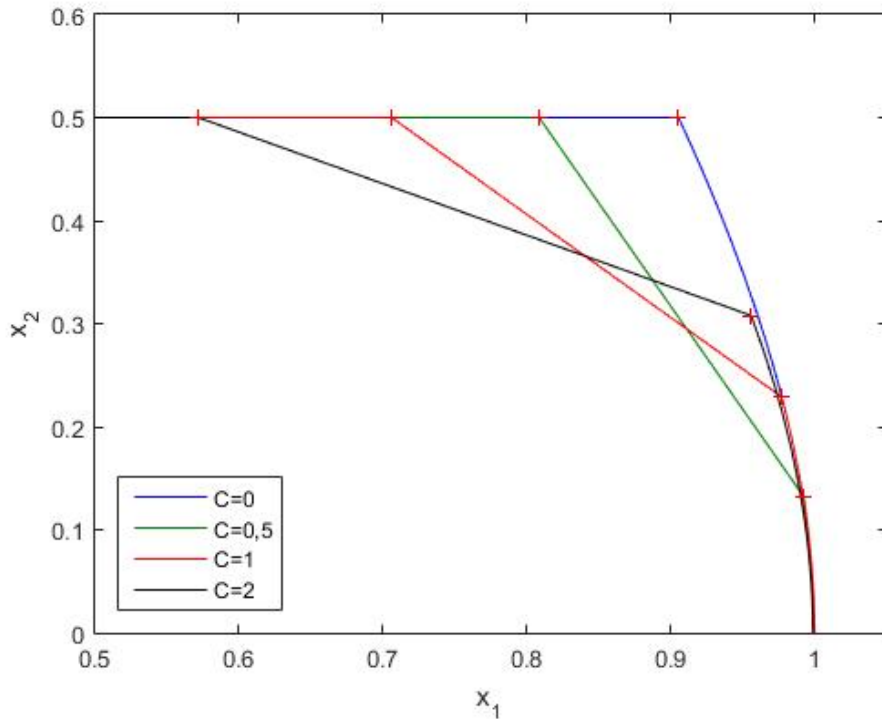
Jak je patrné z obrázku 3.4, průběh režimu jízdy s vypnutým motorem závisí na koeficientu odporu C , kde se pro větší hodnoty odporu zvyšuje úbytek rychlosti. Závislost rychlosti a polohy je v tomto režimu lineární, protože uvažujeme případ lineárního odporu. Uvažujeme případ, že vlak se nachází v části dráhy L_o s počáteční rychlostí v_o a jede v režimu s vypnutým motorem, jehož obecné řešení je soustava (2.37). Dosazením počátečních podmínek $x_1(0) = L_o$, $x_2(0) = v_o$ získáme mezi rychlostí a polohou následující závislost

$$x_2(t) = -Cx_1(t) + CL_o + v_o. \quad (3.14)$$

Při grafickém znázornění tomuto vztahu odpovídá přímka, v jejímž předpisu hodnota $-C$ představuje její směrnici a hodnota $CL_o + v_o$ její posunutí. Může nastat případ, že by koeficient C byl natolik velký, že by vlak nezvládl v předepsaném čase T dojet do cílové stanice. Tomu lze předejít vhodným vyjádřením závislosti mezi veličinami v_o , C , L a L_o . Po dosazení koncových podmínek $x_1(T) = L$, $x_2(T) = 0$ do (3.14) dostaneme vztah

$$v_{kr} = C(L - L_o),$$

v němž jsme hodnotu v_o vyhovující této rovnici přeznačili na v_{kr} . Rozdíl L a L_o je zvolen pevně a ke každé příslušné hodnotě C pak existuje jediná odpovídající rychlost, tuto *kritickou rychlost* značíme v_{kr} . Změnám v_o odpovídají přímky rovnoběžné k přímce (3.14). Vlak zvládne při dané hodnotě odporu C dojet do cíle, pokud platí $v_o > v_{kr}$. Pro $v_o \leq v_{kr}$ úloha nemá řešení. Hodnoty v_{kr} najdeme v tabulce 3.4 a průběh jízdy pro jednotlivé odpory ilustruje obrázek 3.5. Poznamenejme také, že v případě $C = 0$ by nedocházelo ke snížení rychlosti vlivem odporu a režim s vypnutým motorem by nikdy nenastal.



Obrázek 3.5: Fázový portrét režimu s vypnutým motorem pro různé hodnoty C

Vraťme se k diskuzi složení dílčích řešení. Nejmenší možný čas T_{min} v případě časové optimalizace získáme sečtením nejmenších hodnot časů $T_1 + T_2$ z obou tabulek, vychází $T_{min} = 2,4305$. Pro jiné časy z tabulek však nevíme, jak se projeví energetická optimalizace při napojení všech režimů. Poznamenejme také, že stejný vztah platí pro výslednou hodnotu funkcionálu J , tedy součtu dílčích optimalizovaných funkcionálů $J_1 + J_2$ odpovídá hodnota funkcionálu J při složení dohromady, vychází $J = 0,6369$.

Rozdělení na dílčí úlohy a řešení každé z nich zvláště má smysl, jelikož možnost zvolit kombinace řízení z tabulek 3.2 a 3.3 umožňuje řešit další škálu problémů, které se v praxi mohou vyskytovat. Jednalo by se například o situaci, kdy podél trati vlaku vede jiná rovnoběžná trať rovněž spojující stanice A a B , která se s původní tratí protíná v jediném bodě x_o . Po této vedlejší trati jede v opačném směru vlak se zpožděním a musí tedy bodem x_o projet jako první. Na základě informace, kdy dosáhne protijedoucí vlak bodu x_o , můžeme vybrat vhodné řízení původního vlaku z tabulky 3.2 tak, abychom záměrně zvýšili jeho dobu jízdy na prvním úseku dráhy a on neprojel bodem x_o ve stejný moment jako protijedoucí vlak. V druhém úseku se už potom může vlak řídit takovým řízením z tabulky 3.3, aby ujel trať v požadovaném čase.

3.3. Lokální rychlostní omezení jízdy

V této části opět vyjdeme z formulace úlohy uvedené v předchozí kapitole, ve které zavedeme lokální rychlostní omezení.

Uvažujeme případ jednoho lokálního rychlostního omezení ve tvaru

$$x_2(t) \leq v_o, \quad x_1 \in [L_o, L_k],$$

kde v_o představuje omezení rychlosti od bodu L_o až do bodu L_k . Omezení je zavedeno od poloviny dráhy do cílové stanice. Interval $[L_o, L_k]$ lze přeznačit na $[L_o, L]$. Jako parametry úlohy volíme $v_o = 0,5$, $L_o = 0,5$, $L = 1$.

Úlohu řešíme složením dvou dílčích řešení. První dílčí řešení získáme tak, že v první části trati řešíme úlohu jako úlohu bez omezení s jinými zadanými koncovými podmínkami. Na toto řešení navážeme druhém dílčím řešením, které představuje řešení úlohy s globálním omezením ve druhé části trati za jiných počátečních podmínek. Koncové podmínky prvního úseku představují počáteční podmínky druhého úseku. Využijeme toho, že jsme v předchozí analýze pro úlohu bez omezení i pro úlohu s omezením ukázali, jaká je posloupnost režimů pro časovou i energetickou optimalizaci. Počáteční a koncové podmínky úlohy jsou

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, \\ x_1(T) &= L, & x_2(T) &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Koncové podmínky prvního úseku jsou

$$x_1(t_2) = L_o, \quad x_2(t_2) = v_o, \tag{3.16}$$

a pro časovou optimalizaci platí řízení

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_1], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

V druhé části dráhy s počátečními podmínkami (3.16) je aktivní omezení. Odpovídající jízdní režimy jsou

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [t_2, t_3], \\ r(v_o) & \text{pro } t \in [t_3, t_4], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_4, T_{min}]. \end{cases}$$

Obdobným způsobem jako u úlohy bez omezení najdeme příslušné vyjádření pro $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Pro režim $u = \beta$ je soustava

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\beta}{C^2} e^{-Ct} + \frac{\beta}{C} t - \frac{\beta}{C^2}, \\ x_2(t) &= -\frac{\beta}{C} e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}, \end{aligned}$$

a pro režim $u = -\alpha$ s využitím podmínek (3.16)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\alpha + C v_o}{C^2} e^{C(t_2-t)} - \frac{\alpha}{C} t + L_o + \frac{\alpha t_2}{C} + \frac{\alpha}{C^2} + \frac{v_o}{C}, \\ x_2(t) &= \frac{\alpha + C v_o}{C} e^{C(t_2-t)} - \frac{\alpha}{C}. \end{aligned}$$

Tyto soustavy se spojují v bodě $t = t_1$ a z dvou rovnic o dvou neznámých lze dostat explicitní vyjádření přepínacích časů t_1 a t_2 . Po několika úpravách vyjádříme t_2 z rovnice pro rychlost

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{C} \ln \left(\frac{-\beta e^{-Ct_1} + \alpha + \beta}{\alpha + Cv_o} \right),$$

a t_1 z rovnice pro polohu

$$\frac{\alpha + Cv_o}{\exp\left(\frac{C^2 L_o + Cv_o}{\alpha}\right)} (e^{Ct_1})^{\frac{\beta}{\alpha} + 1} - (\alpha + \beta) e^{Ct_1} + \beta = 0. \quad (3.17)$$

V důsledku volby $\alpha = \beta$ můžeme vyjádřit přepínací okamžik t_1 ze vztahu (3.17)

$$t_1 = \frac{1}{C} \ln \left(\frac{\exp\left(\frac{C^2 L_o + Cv_o}{\alpha}\right) \left(2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - (4\alpha Cv_o + 4\alpha^2) \exp\left(-\frac{C^2 L_o + Cv_o}{\alpha}\right)}\right)}{2(\alpha + Cv_o)} \right).$$

Z dvojice možných hodnot přepínacího času t_1 je správným řešením pouze hodnota vyhovující podmínce $t_1 > 0$. Pro hodnoty (3.3) vychází $t_1 = 1,10703$ a $t_2 = 1,214065$. Tímto jsme vyřešili jízdu na úseku dráhy bez omezení.

S využitím počáteční podmínky (3.16) získáme režim s maximálním zrychlením s řízením $u = \beta$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\beta - Cv_o}{C^2} e^{C(t_2 - t)} + \frac{\beta}{C} t + L_o + \frac{\beta - Cv_o}{C^2} - \frac{\beta}{C} t_2, \\ x_2(t) &= -\frac{\beta - Cv_o}{C} e^{C(t_2 - t)} + \frac{\beta}{C}. \end{aligned}$$

Na úseku s omezením na základě podmínky $x_2(t_2) = v_o$ platí rovnost přepínacích časů $t_2 = t_3$. Rovnice pro režim jízdy konstantní rychlostí s řízením $u = r(v_o)$ jsou

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_o t + L_o - v_o t_3, \\ x_2(t) &= v_o. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Posledním režimem je režim s maximálním brzděním s řízením $u = -\alpha$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\alpha}{C^2} e^{C(T_{min} - t)} - \frac{\alpha}{C} t + \frac{\alpha}{C^2} + \frac{\alpha}{C} T_{min} + L, \\ x_2(t) &= \frac{\alpha}{C} e^{C(T_{min} - t)} - \frac{\alpha}{C}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

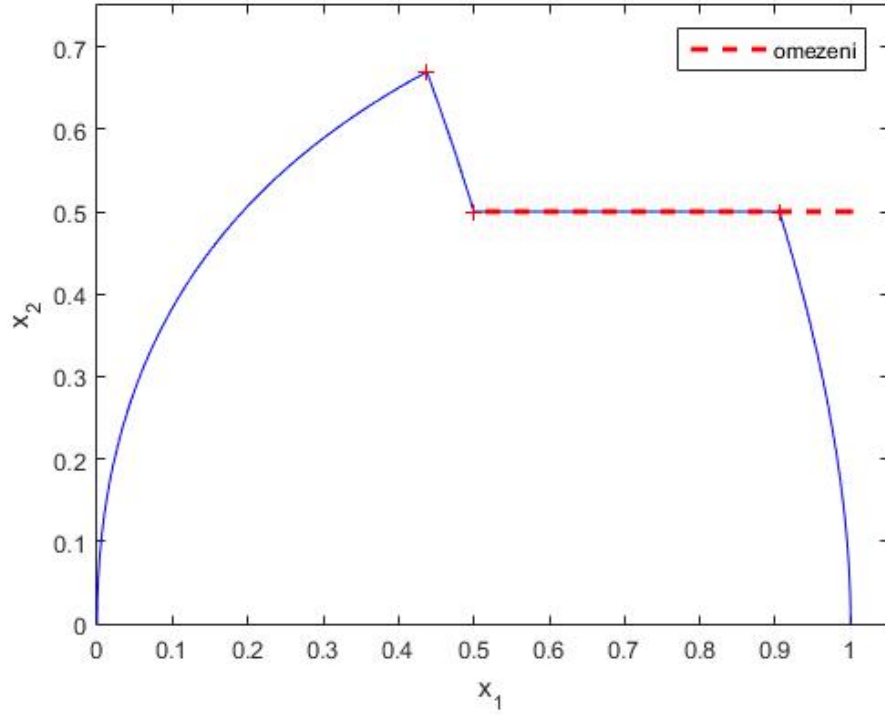
Spojením rovnic pro polohu a rychlost u soustav (3.18) a (3.19) v čase $t = t_4$ získáme předpis času t_4

$$t_4 = t_3 + \frac{1}{v_o} \left(\frac{\alpha}{C^2} \ln \left(\frac{\alpha + Cv_o}{\alpha} \right) - \frac{v_o}{C} + L - L_o \right),$$

a výsledného času T_{min}

$$T_{min} = t_4 + \frac{1}{C} \ln \left(\frac{\alpha + Cv_o}{\alpha} \right).$$

Nyní máme k dispozici předpis pro každý z přepínacích časů. Pro hodnoty (3.3) vychází $t_4 = 2,0249$ a $T_{min} = 2,43046$. Ukázalo se, že v souladu s intuitivní představou je celková



Obrázek 3.6: Fázový portrét pro $T = 2,4305$ ($T = T_{min}$)

doba jízdy T_{min} větší než u případu bez omezení a zároveň menší než u případu s globálním omezením. Fázový portrét pro $T = T_{min}$ je na obrázku 3.6.

Připomeňme, že musíme uvažovat takový čas, během kterého má rychlostní omezení smysl - omezení je platné, pokud platí $T \in [T_{min}, T_A]$. Pro hodnoty (3.3) vychází $T_A = 2,681$. U energetické optimalizace dojde ke skládání režimů v následujícím pořadí

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \beta & \text{pro } t \in [0, t_1], \\ r(\hat{x}_2(t)) \equiv konst & \text{pro } t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{pro } t \in [t_2, t_3], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_3, t_4], \\ \beta & \text{pro } t \in [t_4, t_5], \\ r(v_o) & \text{pro } t \in [t_5, t_6], \\ 0 & \text{pro } t \in [t_6, t_7], \\ -\alpha & \text{pro } t \in [t_7, T], \end{cases}$$

za podmínek (3.15) a s využitím podmínky rychlostního omezení

$$x_1(t_4) = L_o, \quad x_2(t_4) = v_o.$$

Pro jednotlivé časy platí nerovnost

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq t_5 \leq t_6 \leq t_7 < T. \quad (3.20)$$

Nyní následuje předpis každého jízdního režimu, které byly získány analogicky jako v předchozích úlohách. Pro $u = \beta$ na $t \in [0, t_1]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{\beta}{C^2}e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}t - \frac{\beta}{C^2}, \\x_2(t) &= -\frac{\beta}{C}e^{-Ct} + \frac{\beta}{C}.\end{aligned}$$

Pro $u = r(x_2)$ na $t \in [t_1, t_2]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\beta}{C}te^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t + \frac{\beta}{C^2}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} - \frac{\beta}{C^2}, \\x_2(t) &= -\frac{\beta}{C}e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}.\end{aligned}$$

Pro $u = 0$ na $t \in [t_2, t_3]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\beta}{C^2}e^{C(t_2-t)} + \frac{\beta}{C^2}e^{C(t_2-t_1-t)} - \frac{\beta}{C}t_2e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_1e^{-Ct_1} + \frac{\beta}{C}t_2, \\x_2(t) &= \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t)} - \frac{\beta}{C}e^{C(t_2-t_1-t)}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Pro $u = -\alpha$ na $t \in [t_3, t_4]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\alpha t}{C} - \frac{\alpha + Cv_o}{C^2}e^{C(t_4-t)} + L_o + \frac{\alpha t_4}{C} + \frac{\alpha + Cv_o}{C^2}, \\x_2(t) &= -\frac{\alpha}{C} + \frac{\alpha + Cv_o}{C}e^{C(t_4-t)}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Rovnice pro spojení soustav (3.21) a (3.22) v čase $t = t_3$ jsou

$$\begin{aligned}0 &= \beta e^{C(t_2-t_3)} - \beta e^{C(t_2-t_1-t_3)} + \alpha - (\alpha + Cv_o)e^{C(t_4-t_3)}, \\0 &= -\beta e^{C(t_2-t_3)} + \beta e^{C(t_2-t_1-t_3)} - \beta C t_2 e^{-Ct_1} + \beta C t_1 e^{-Ct_1} + \beta C t_2 \\&\quad + \alpha C t_3 + (\alpha + Cv_o)e^{C(t_4-t_3)} - C^2 L_o - \alpha C t_4 - \alpha - Cv_o.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Pro $u = \beta$ na $t \in [t_4, t_5]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\beta - Cv_o}{C^2}e^{C(t_4-t)} + \frac{\beta}{C}t + L_o + \frac{\beta - Cv_o}{C^2} - \frac{\beta}{C}t_4, \\x_2(t) &= -\frac{\beta - Cv_o}{C}e^{C(t_4-t)} + \frac{\beta}{C}.\end{aligned}$$

Pro $u = r(v_o)$ na $t \in [t_5, t_6]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v_o t - v_o t_5 + L_o, \\x_2(t) &= v_o.\end{aligned}$$

Pro $u = 0$ na $t \in [t_6, t_7]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{v_o}{C}e^{C(t_6-t)} + v_o t_6 + L_o - v_o t_5 + \frac{v_o}{C}, \\x_2(t) &= v_o e^{C(t_6-t)}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Pro $u = -\alpha$ na $t \in [t_7, T]$ platí

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{\alpha}{C^2}e^{C(T-t)} - \frac{\alpha}{C}t + \frac{\alpha}{C^2} + \frac{\alpha}{C}T + L, \\x_2(t) &= \frac{\alpha}{C}e^{C(T-t)} - \frac{\alpha}{C}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Rovnice pro spojení soustav (3.24) a (3.25) v čase $t = t_7$ jsou

$$\begin{aligned}0 &= Cv_o e^{C(t_6-t_7)} - \alpha e^{C(T-t_7)} + \alpha, \\0 &= -Cv_o e^{C(t_6-t_7)} + C^2v_o t_6 + C^2L_o - C^2v_o t_5 + Cv_o \\&\quad + \alpha e^{C(T-t)} + \alpha Ct - \alpha - \alpha CT - C^2L.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Funkcionál vyjadřující spotřebu energie je

$$\begin{aligned}J &= \int_0^T u^+(t)x_2(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{\beta^2}{C}(1 - e^{-Ct})dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta^2}{C}(1 - e^{-Ct_1})^2dt \\&\quad + \int_{t_4}^{t_5} \beta \left(-\frac{\beta - Cv_o}{C}e^{C(t_4-t)} + \frac{\beta}{C} \right) dt + \int_{t_5}^{t_6} Cv_o^2 dt.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Minimalizujeme funkcionál (3.27) za podmínek (3.20), (3.23) a (3.26).

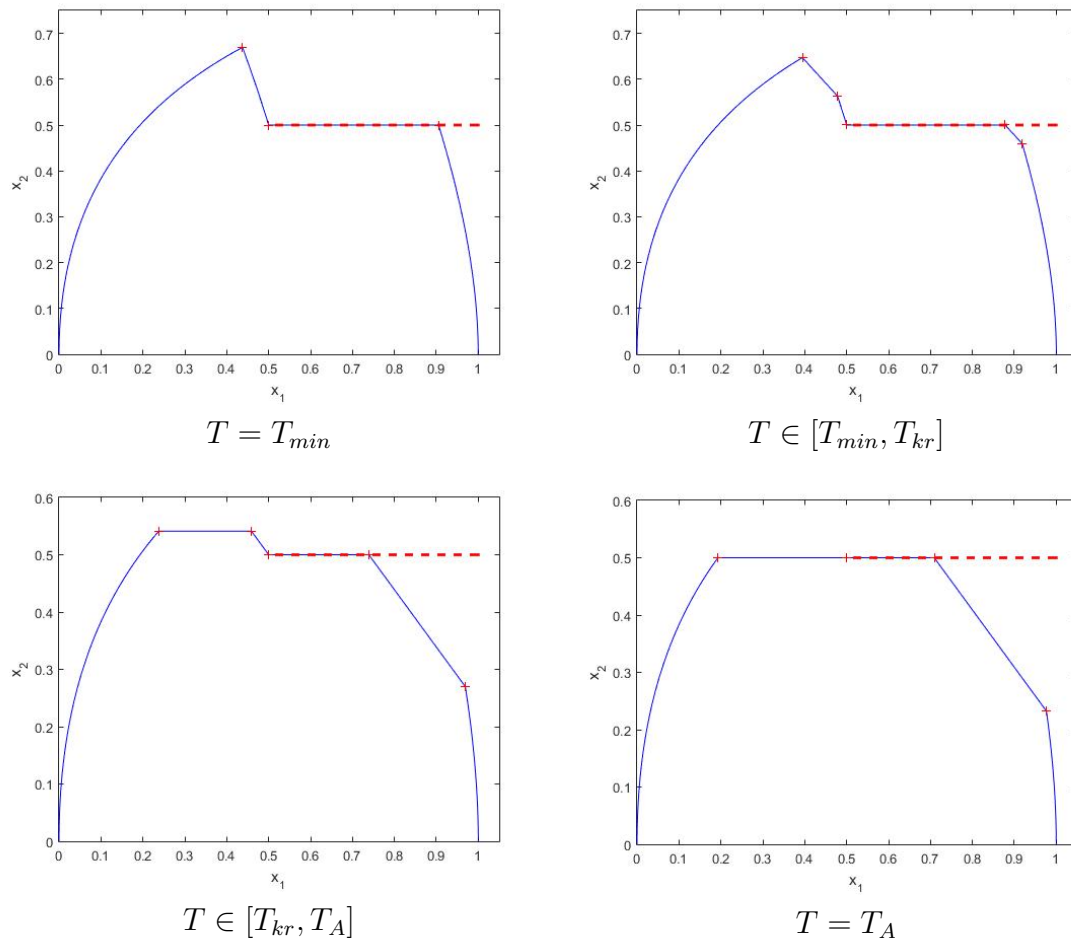
3.4. Analýza výsledků úloh s omezením

Posledním krokem v řešení úlohy je napojení obou scénářů a analýza v Matlabu. Ve skriptu *podminky* pro tento scénář vystupuje osm proměnných, k nimž přísluší osm podmínek nerovností a čtyři podmínky rovností. Optimalizačními metodami v Matlabu získáme numerické hodnoty přepínacích časů a energetického funkcionálu.

Tabulka 3.5: Numerické výstupy pro omezení $L_o = 0, 5$, $v_o = 0, 5$

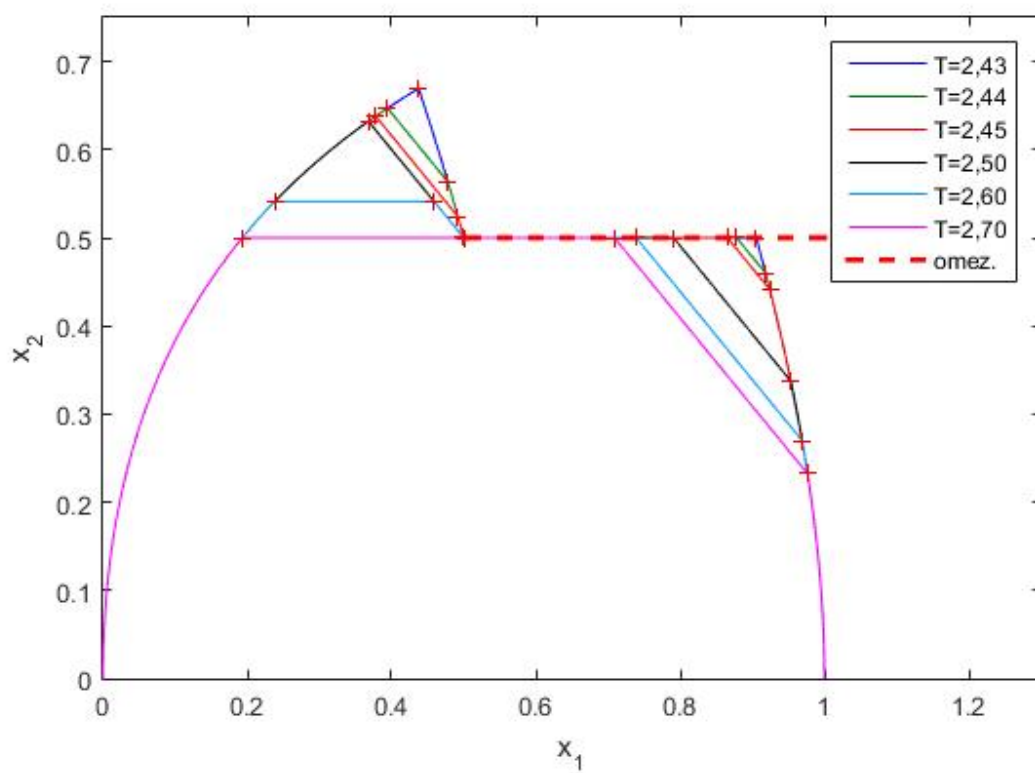
T	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	J
2,4305	1,1070	1,1070	1,1070	1,2141	1,2141	2,0250	2,0250	0,6403
2,44	1,0414	1,0414	1,1799	1,2212	1,2212	1,9771	2,0621	0,5833
2,45	1,0159	1,0159	1,2125	1,2284	1,2284	1,9593	2,0846	0,5607
2,5	1,000	1,000	1,2345	1,2345	1,2345	1,8159	2,2093	0,5132
2,6	0,7791	1,1873	1,2664	1,2664	1,2664	1,7441	2,3612	0,4769
2,7	0,6931	1,3069	1,3069	1,3069	1,3069	1,7247	2,4911	0,4510

Výsledky optimalizačního výpočtu jsou uvedeny v tabulce 3.5. Jak je vidět na obrázku 3.7, v prvním úseku opět existuje kritický čas T_{kr} , který vyjadřuje, jakých jízdních režimů vlak dosáhne. Pokud pro celkový čas platí $T \in [T_{min}, T_{kr}]$, vlak bude zrychlovat, pak pojedí s vypnutým motorem a následně dobrzdí do počátku rychlostního omezení. Pokud však platí $T \in [T_{kr}, T_A]$, vlak po zrychlení pojedí režimem konstantní rychlosti a následně se jízdou s vypnutým motorem dostane do počátku rychlostního omezení.



Obrázek 3.7: Fázové portréty pro omezení $L_o = 0,5$, $v_o = 0,5$

V druhé části je průběh jízdních režimů vždy stejný - režim s konstantní rychlostí, při kterém vlak jede rychlostí rovnou hodnotě omezení, poté jízda s vypnutým motorem a brzdění do cílové stanice. Pokud omezení nevejde v platnost, tedy platí $T \geq T_A$, vlak na omezení nenarazí a průběh jízdy bude totožný s jízdou v úloze bez omezení. Tyto výsledky jsou pro přehlednost znázorněny na obrázku 3.8, který dobře ilustruje vlastnost řešení, že k optimalizaci dochází v obou úsecích trati současně. Další možné modifikace této úlohy spočívají zejména v jinak zavedeném omezení, např. zavedení několika různých omezení na různých úsecích dráhy.



Obrázek 3.8: Fázové trajektorie pro omezení $L_o = 0,5$, $v_o = 0,5$

Závěr

V této práci jsme s použitím principu maxima vyřešili úlohu o energeticky optimální jízdě vlaku. Určili jsme posloupnost jízdních režimů, vyjádřili přepínací časy a popsali jejich vzájemné vztahy. Podařilo se analyzovat průběh úlohy při časech T_{min} a T_{kr} , stavy úlohy rozdělit na oblasti ohraničené přepínacími křivkami a získané závislosti komentovat a vyhodnotit. Prostředí Matlabu umožnilo nejen efektivní numerické řešení optimalizační úlohy různými algoritmy, ale bylo také využito ke grafickému vykreslení všech závislostí a dalším pomocným výpočtům.

Následující analýza se týkala modelu se zavedeným globálním rychlostním omezením. V práci proběhla také analýza dílčích úloh s omezením a vlivu volby odporové funkce na řešení úlohy. Finální analýza se týkala úlohy s lokálním rychlostním omezením, kde bylo stěžejním bodem řešení napojení jízdních režimů při přechodu z části bez omezení do části s omezením. Programy vytvořené v rámci práce a další poznatky lze s úpravami využít pro řešení podobných úloh tohoto typu s jinými parametry (např. jinak zavedené omezení).

Matematický model použitý k řešení úlohy zanedbává některé aspekty, se kterými je nutné počítat při aplikaci výsledků optimalizace. Při reálné jízdě vlaku by celková jízda byla ovlivněna řadou dalších fyzikálních faktorů, např. třením, profilem trati, hmotností vlaku a jeho dalšími technickými parametry, což poskytuje potenciál k formulaci celé řady otevřených problémů. V rámci práce jsme počítali pouze s lineárním odporem, ale odpor může být i kvadratický nebo jinak obecně zadaný. Úsek s rychlostním omezením se může na trati vyskytnout více než jednou, zároveň příslušná rychlostní omezení mohou dosahovat různých hodnot. Častokrát uvažovaná modifikace je zvolení jiného profilu trati než lineárního, např. jízda vlaku do kopce nebo do údolí, kde se v příslušné analýze průběh jízdy vlaku mění na základě gradientu stoupání nebo klesání trati. Dalším problémem může být jízda několika vlaků po stejné trati a hledání takového optimálního řízení, aby nedošlo ke kolizi vlaků, kde navíc každý z nich může mít rozdílné technické specifikace (např. maximální rychlost). Výše uvedené modifikace jsou předmětem intenzivního výzkumu, což dokládá řada článků na toto téma, viz. např. [1], [4], [5], [7], [8], [13]. Snaha o úsporu energie, bezpečnost a pohodlnost v dopravních systémech představuje motivaci pro další studium této problematiky.

Literatura

- [1] ALBRECHT, A. a kol. The key principles of optimal train control—Part 1: Formulation of the model, strategies of optimal type, evolutionary lines, location of optimal switching points. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2016, roč. 94, s. 482-508. ISSN 0191-2615.
- [2] BRYSON, A. E., Jr., HO, Y.-C. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Vyd. 1. USA: Taylor & Francis Group, 1975. 496 s. ISBN 978-0-89116-228-5.
- [3] ČERMÁK, J. *Matematické základy optimálního řízení*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR Real, 1998. 68 s. ISBN 80-214-1255-0.
- [4] GUPTA, S. D., TOBIN, J. K., PAVEL, L. A Two-Step Linear Programming Model for Energy-Efficient Timetables in Metro Railway Networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2016, roč. 93, s. 57-74. ISSN 0191-2615.
- [5] HOWLETT, P. Optimal Strategies for the Control of a Train. *Automatica*, 1996, roč. 32, č. 4, s. 519-532. ISSN 0005-1098.
- [6] HOWLETT, P. G., MILROY, I. P., PUDNEY, P. J. Energy-Efficient Train Control. *Control Engineering Practice*, 1994, roč. 2, č. 2, s. 193-200. ISSN 0967-0661.
- [7] HUANG, Y., YANG, C., GONG, S. Energy Optimization for Train Operation Based on an Improved Ant Colony Optimization Methodology. *Energies*, 2016, roč. 9, č. 8, s. 626. ISSN 1996-1073.
- [8] LI, K.-P., GAO, Z.-Y., MAO, B.-H. Energy-optimal model for train movements. *Chinese Physics*, 2007, roč. 16, č. 2, s. 359-364. ISSN 1009-1963.
- [9] *MATLAB Documentation - MathWorks*. [online]. [cit. 2019-04-13]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/optim/index.html>
- [10] MESSAC, A. *Optimization in Practice with MATLAB: For Engineering Students and Professionals*. Vyd. 1. USA: Cambridge University Press, 2015. 494 s. ISBN 978-1-107-10918-6.
- [11] POKORNÝ, P. *Construction of the Optimal Control Strategy for an Electric-Powered Train*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 52 s. Vedoucí disertační práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.
- [12] PONTRYAGIN, L. S. a kol. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Vyd. 1. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1962. 362 s. ISBN 978-0-470-69381-0.
- [13] TAN, Z. a kol. Adaptive Partial Train Speed Trajectory Optimization. *Energies*, 2018, roč. 11, č. 12, s. 3302. ISSN 1996-1073.

Seznam použitých zkratek a symbolů

X	stavový prostor
x	vektor stavových proměnných
$x(t)$	trajektorie
$u(t)$	regulace
U	obor regulace
E_r	eukleidovský prostor řádu r
a	počáteční stav systému
b	koncový stav systému
$f_0(t)$	účelová funkce
t_0	počáteční čas
t_f	předepsaný koncový čas
T	celkový čas
I	časový interval
$\hat{x}(t)$	optimální trajektorie
$\hat{u}(t)$	optimální regulace
$\hat{T}$	optimální čas
$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$	pomocné proměnné
H, H^*	Hamiltonova funkce
J	optimalizovaný funkcional
$J_1, \dots, J_n$	dílčí optimalizované funkcionaly
M	konvexní množina
V	množina bodů pro přípustné regulace
$V(t, a)$	dosažitelná oblast
U	uzavřený konvexní mnohostěn
s	počet stěn uzavřeného konvexního mnohostěnu
S	hladká varieta
h	epigraf

$S(x, t)$	omezení stavové proměnné
q	řád omezení
$N(x, t)$	derivační podmínky
μ	Lagrangeův multiplikátor
π	vektor skokové podmínky
$x_1(t)$	poloha
$x_2(t)$	rychlost
α	velikost brzdné síly vlaku
β	velikost hnací síly motoru
m	hmotnost vlaku
r	odpor prostředí
C	koefficient odporu
A	počáteční bod trati
B	koncový bod trati
L	délka trati
u	řízení vlaku
u^+	řízení vlaku v úloze energetické optimalizace
c_1, c_2	konstanty z řešení systémů obyčejných diferenciálních rovnic
T_{min}	minimální čas
T_{kr}	kritický čas
$t_1, \dots, t_n$	přepínací časy
$T_1, \dots, T_n$	dílčí časy jízdy
v_{max}	maximální rychlost
$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$	přepínací křivky
$\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n$	jízdní oblasti
L_o	počáteční bod úseku trati s rychlostním omezením
L_k	koncový bod úseku trati s rychlostním omezením
v_o	rychlostní omezení
T_A	aktivační čas
v_{kr}	kritická rychlost

Přílohy

Zpracování úloh v programu Matlab

Tato příloha obsahuje zdrojové kódy obsažené ve skriptech *fcevlak.m*, *podminky.m*, *zadani.m* a *fportret.m*.

fcevlak.m:

```
function J = fcevlak(x)
%konstanty
e=exp(1);
A=1;
B=1;
L=1;
C=1;

%predpis funkcionalu
J=x(4);
%J1=(B^2/C)*(x(2)-x(1))*(1-e^(-C*x(1)))^2;
%J2=(B^2/C^2)*(C*x(1)+e^(-C*x(1))-1);
%J=J1+J2
```

podminky.m:

```
function [c, ceq] = podminky(x)
%konstanty
e=exp(1);
A=1;
B=1;
L=1;
C=1;

%volba typu optimalizace
T=x(4);
%T=2.37;

%podminky ve tvaru nerovnosti
c(1) = -x(1);
c(2) = x(1)-x(2);
c(3) = x(2)-x(3);
c(4) = x(3)-T;

%podminky ve tvaru rovnosti
ceq(1) = A*(e^(C*(T-x(3)))-1)-B*(1-e^(-C*x(1)))*e^(C*(x(2)-x(3)));
ceq(2) = A*(x(3)-T)-C*L+B*(x(2)-x(2)*e^(-C*x(1))+x(1)*e^(-C*x(1)));
```

zadani.m:

```
clc; close all
%tabulka hodnot ziskanych optimalizaci: T, t1, t2, t3, J
values = [2.1701 , 1.5845 , 1.5845 , 1.5845 , 0.7896; %Tmin
          2.21, 1.4260, 1.4260, 1.78040, 0.6662;
          2.317 , 1.3105 , 1.3105 , 2.0065 , 0.5802; %Tkr
          2.5, 0.8458, 1.5558, 2.2489, 0.5063;
          3.0 , 0.5326 , 2.1192 , 2.8123 , 0.3902] ;
C=1; %konstanta pro odpor

%vytvoreni a nastaveni grafu
figure
xlabel('x_1');
ylabel('x_2');
axis([0 1.3 0 0.9]);
box on
hold on

%vybereme rozsah radku z tabulky, ktere chceme vykreslit
kmin=1;
kmax=5;
v=kmax-kmin+1; %pocet scenaru

%inicializace promennych
n=3; %maximalni pocet prepnuti
xx1=zeros(v,n); %vytvori nulove matice pro body prepnuti
xx2=zeros(v,n);
a=1; %pomocna promenna pro zapis vysledku
p=[0,0]; %volba pocatecniho bodu
plops={'b',[0 0.5 0],'r','k',[0 0.6 1],'m',[0.6 0.2 0]}; %soustava barev

%vykreslovani jednotlivych scenaru
for k=kmin:kmax
T=values(k,1); %vyber hodnot z tabulky
t1=values(k,2);
t2=values(k,3);
t3=values(k,4);
plop=plops{k}; %kazdemu scenari priradi jinou barvu
[xx1,xx2]=fportret(xx1,xx2,a,C,t1,t2,t3,T,p,plop);
a=a+1;
end

xx1,xx2 %zobrazeni vysledku
xx1(xx1==p(1,1)) = nan; %prepise p(1,1) na 'NaN'
xx2(xx2==p(1,2)) = nan;
plot(xx1,xx2,'r+') %cervenymi krizky vykresli stavy v prepinacich casech
```

```
legend('T=2,17','T=2,21','T=2,31','T=2,50','T=3,0','T=4,0','T=5,0',
'Location','northeast')
```

fportret.m:

```
%v zavislosti na hodnotach casu t se vykresluje prislusna kombinace
%jizdnich rezimu, vystupem jsou vektory xx1, xx2 souradnic x1, x2
%v prepincich casech
```

```
function [xx1,xx2]=fportret(xx1,xx2,a,C,t1,t2,t3,T,p,plop)
%vykresleni 1. rezimu
%1. rezim
u=1; %nastaveni regulace
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)]; %soustava rovnic
[t,xI]=ode45(f,[0,t1],p); %hodnoty casu t a souradnic x1, x2
%vepise hodnoty souradnic v bodech prepnuti do vektoru
xx1(a,1)=xI(end,1);
xx2(a,1)=xI(end,2);
%vykresluje souradnice x1 a x2
plot(xI(:,1),xI(:,2),'LineStyle','-', 'color',plop)
```

```
%vykresleni 4. rezimu
if t1==t2 && t2==t3
%4. rezim
u=-1;
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)];
[t,xII]=ode45(f,[t3,T],xI(end,:));
plot(xII(:,1),xII(:,2),'LineStyle','-', 'color',plop,
'HandleVisibility','off')
```

```
%vykresleni 3. a 4. rezimu
elseif t1==t2
%3. rezim
u=0;
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)];
[t,xII]=ode45(f,[t2,t3],xI(end,:));
xx1(a,2)=xII(end,1);
xx2(a,2)=xII(end,2);
plot(xII(:,1),xII(:,2),'LineStyle','-', 'color',plop,
'HandleVisibility','off')
%4. rezim
u=-1;
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)];
[t,xIII]=ode45(f,[t3,T],xII(end,:));
plot(xIII(:,1),xIII(:,2),'LineStyle','-', 'color',plop,
'HandleVisibility','off')
```

```

%vykresleni 2., 3. a 4. rezimu
else
%2. rezim
u=C*xI(end,2);
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)];
[t,xII]=ode45(f,[t1,t2],xI(end,:));
xx1(a,2)=xII(end,1);
xx2(a,2)=xII(end,2);
plot(xII(:,1),xII(:,2),'LineStyle','-','color',plop,
'HandleVisibility','off')
%3. rezim
u=0;
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)];
[t,xIII]=ode45(f,[t2,t3],xII(end,:));
xx1(a,3)=xIII(end,1);
xx2(a,3)=xIII(end,2);
plot(xIII(:,1),xIII(:,2),'LineStyle','-','color',plop,
'HandleVisibility','off')
%4. rezim
u=-1;
f=@(t,x) [x(2,:);u-C*x(2,:)];
[t,xIV]=ode45(f,[t3,T],xIII(end,:));
plot(xIV(:,1),xIV(:,2),'LineStyle','-','color',plop,
'HandleVisibility','off')
end

```