



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**PRAVDĚPODOBNOSTI PORUŠENÍ KERAMICKÉ
SOUČÁSTI S VYUŽITÍM WEIBULLOVY TEORIE
NEJSLABŠÍHO ČLÁNKU**

FAILURE PROBABILITY OF THE CERAMICS PART USING WEIBULL WEAKEST LINK THEORY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Jaroslav Kovář

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

BRNO 2018



Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Bc. Jaroslav Kovář**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a kkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Pravděpodobnosti porušení keramické součásti s využitím Weibullový teorie nejslabšího článku

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pravděpodobnost porušení s využitím Weibullový teorie nejslabšího článku může být určována s uvažováním buď jen jednoho hlavního napětí nebo s uvažováním všech tří hlavních napětí. Náplní práce je posoudit, kdy je možné uvažovat jen jedno hlavní napětí a kdy je třeba do výpočtu zahrnout kompletní napjatost v součásti.

Cíle diplomové práce:

1. Vytvoření modelů v systému ANSYS a výpočet napjatosti a deformace.
2. Sestavení algoritmu pro výpočet pravděpodobnosti porušení pro případy uvažující jen jedno hlavní napětí a pro případ uvažující všechna tři hlavní napětí.
3. Srovnání a analýza výsledků.

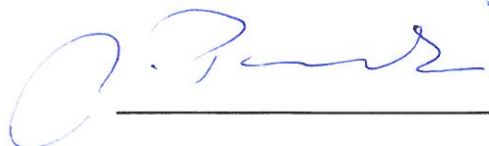
Seznam doporučené literatury:

BUSH, D. R. Designing Ceramic Components for Structural Applications. Journal of Materials Engineering and Performance, Vol. 2, ASM International pp. 851-862, 1993 .

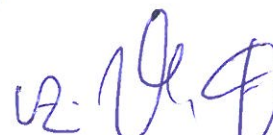
MÁLEK, M. Spolehlivostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 75 s.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 26. 10. 2017



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá porovnáním Weibullové teorie nejslabšího článku se zahrnutím jednoho a všech tří hlavních napětí. Napětí potřebná pro tuto teorii jsou určována pomocí metody konečných prvků.

V úvodu práce je provedena rešerše, která se zabývá keramickými materiály, Weibullovou teorií nejslabšího článku, Gaussovou integrací přes sférickou plochu a keramickou hlavicí kyčelní endoprotézy. Teoretická část se dále používá pro výpočty pravděpodobností porušení.

Prvními výpočty je posuzována pravděpodobnost porušení keramického prutu namáhaného čtyřbodovým ohybem. Poté je tato úloha řešena jako kontaktní. Další část práce se zabývá výběrem vhodné metody numerické integrace pro výpočet se zahrnutím všech tří hlavních napětí. Výsledky výpočtu jsou porovnány s výsledky výpočtu se zahrnutím pouze prvního hlavního napětí. Toto je provedeno nejprve na válcovém tělese a později aplikováno na hlavici kyčelní endoprotézy. V poslední části je určena pravděpodobnost porušení hlavice kyčelní endoprotézy se zahrnutím odchylky od nominální kuželovitosti.

Abstract

This thesis compares Weibull weakest link theory with inclusion of one and all three principal stresses. Principal stresses needed for this theory were calculated with finite element method.

The informational research is in the introduction of this thesis. It includes ceramic materials, Weibull weakest link theory, Gaussian quadrature over spherical surface and ceramic head of hip joint endoprosthesis. Theoretical part is used for next calculations of probability of failure.

The probability of failure of ceramic rod loaded by four-point bending is calculated in first calculations. This task is solved as contact in the next step. Next part of this thesis is about selection of suitable method of numerical integration. This method will be used in the calculation with all three principal stresses. The results of calculation with all three principal stresses are compared with the results of the calculation which includes only first principal stress. Firstly, this is done for cylindrical body and then used on head of hip joint endoprosthesis. In the last part of this thesis, probability of fracture of head hip joint endoprosthesis with shape deviation of nominal conicity is calculated.

Klíčová slova

keramika, Weibullova teorie nejslabšího článku, Weibullovo rozdělení, Gaussova integrace přes sférickou plochu, válcové těleso, čtyřbodový ohyb, hlavice endoprotézy kyčelního kloubu

Key words

ceramics, Weibull weakest link theory, Weibull distribution, Gaussian quadrature over spherical surface, cylindrical body, four-point bending, head of hip joint endoprosthesis

Bibliografická citace

KOVÁŘ, J. *Pravděpodobnosti porušení keramické součásti s využitím Weibullový teorie nejslabšího článku*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 105 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D..

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci na téma Pravděpodobnosti porušení keramické součásti s využitím Weibullový teorie nejslabšího článku vypracoval samostatně s pomocí vedoucího práce a uvedených zdrojů.

V Brně dne:.....

.....

Bc. Jaroslav Kovář

Poděkování

Těmito slovy bych rád poděkoval vedoucímu práce doc. Ing. Vladimíru Fuisovi, Ph.D. za ochotu, konzultace, rady a připomínky při tvorbě této práce.

Dále bych rád poděkoval prof. RNDr. Miloslavu Druckmüllerovi, Csc. za ochotu ke konzultaci ohledně Gaussovy integrace.

Rád bych poděkoval rodičům za podporu při studiu.

OBSAH

OBSAH.....	9
1 ÚVOD.....	12
2 POPIS PROBLÉMOVÉ SITUACE	13
3 FORMULACE PROBLÉMU A CÍLŮ ŘEŠENÍ	14
3.1 Formulace problému.....	14
3.2 Cíle řešení	14
4 REŠERŠE.....	15
4.1 Použitá literatura.....	15
4.2 Keramické materiály.....	15
4.2.1 Druhy keramických materiálů	16
4.2.2 Výroba keramických součástí.....	17
4.2.3 Zkouška tahem.....	18
4.2.4 Zkouška ohybem	19
4.2.5 Zkoušky lomové houževnatosti	19
4.2.6 Mechanické vlastnosti keramických materiálů	20
4.2.7 Lom keramických materiálů	21
4.3 Weibullova teorie nejslabšího článku.....	21
4.3.1 Weibullovo rozdělení	21
4.3.2 Vztah pro výpočet pravděpodobnosti porušení	22
4.3.3 Obecné vztahy pro jednoosou napjatost	24
4.3.4 Pravděpodobnost porušení prutu namáhaného prostým ohybem	24
4.3.5 Výpočet pro trojosou napjatost.....	25
4.4 Gaussova integrace	27
4.4.1 Gaussova integrace pro funkci jedné proměnné.....	27
4.4.2 Gaussova integrace přes sférickou plochu.....	28
4.5 Hlavice kyčelního kloubu.....	29
4.5.1 Endoprotéza	29
4.5.2 Zkouška ISO 7206	30
5 ANALÝZA PROBLÉMU	31
5.1 Systém podstatných veličin	31
5.2 Volba metody	33
5.3 Software a hardware	33

6 VÝPOČET PRO JEDNOOSOU NAPJATOST	34
6.1 Výpočtový model	34
6.2 Určení napjatosti	35
6.2.1 Analytický výpočet napjatosti	35
6.2.2 Výpočtový model pro výpočet pomocí MKP	36
6.2.3 Výsledná napětí určená pomocí MKP	37
6.2.4 Vliv odchylky od prutových předpokladů	38
6.3 Script pro výpočet pravděpodobnosti porušení	40
6.3.1 Vytvoření scriptu	40
6.3.2 Ověření správnosti scriptu pro výpočet pravděpodobnosti porušení	40
6.4 Výpočet pravděpodobnosti porušení	42
6.5 Posouzení vlivu vazeb pomocí kontaktní úlohy	43
6.5.1 Výpočet pomocí Hertzovy teorie	43
6.5.2 Vytvoření výpočtového modelu pro výpočet pomocí MKP	45
6.5.3 Výsledné hodnoty napětí	47
6.5.4 Výpočet pravděpodobnosti porušení	48
6.6 Výpočet pravděpodobnosti porušení pro prostorový model	49
6.6.1 Vytvoření prostorového výpočtového modelu součásti	49
6.6.2 Výsledná napětí pro prostorový model	50
6.6.3 Výpočet pravděpodobnosti porušení	51
7 VÝPOČET PRO TROJOSOU NAPJATOST	52
7.1 Weibullova teorie nejslabšího článku pro trojosou napjatost	52
7.2 Volba vhodné metody numerické integrace	52
7.2.1 Výpočet integrálu pomocí funkce quad2D	52
7.2.2 Výpočet pomocí Gaussovy integrace do řádu 5	53
7.2.3 Výpočet pomocí Gaussovy integrace vyššího řádu	55
7.2.4 Ověření správnosti výpočtu	56
7.3 Výpočet pravděpodobnosti porušení při trojosé napjatosti	58
7.3.1 Výpočtový model	58
7.3.2 Analytický výpočet napětí	59
7.3.3 Výpočtový model pro výpočet pomocí MKP	60
7.3.4 Výsledné hodnoty napětí	61
7.3.5 Výpočet pravděpodobnosti porušení	62

7.4 Porovnání výpočtů při různých znaménkách hlavních napětí	63
8 PRAVDĚPODOBNOST PORUŠENÍ HLAVICE	66
8.1 Výpočet napětí	66
8.1.1 Vytvoření modelů	66
8.1.2 Vytvoření sítě	68
8.1.3 Nastavení penetrace	70
8.1.4 Výpočet napětí při různých hustotách sítě	71
8.2 Výpočet pravděpodobnosti porušení pro jednotlivé sítě	75
8.3 Úprava sítě a výpočtu	76
8.4 Porovnání výsledků s jedním a třemi hlavními napětími	77
8.4.1 Porovnání deformačního a silového zatížení	77
8.4.2 Porovnání výsledků se zahrnutím jednoho a všech hlavních napětí	78
9 VÝPOČET PRO HLAVICI S IMPERFEKČÍ	81
9.1 Hlavice s otvorem s menším vrcholovým úhlem	81
9.1.1 Výpočtový model	81
9.1.2 Průběh napětí	82
9.1.3 Pravděpodobnost porušení	84
9.2 Hlavice s otvorem s větším vrcholovým úhlem	86
9.2.1 Výpočtový model	86
9.2.2 Průběh napětí	86
9.2.3 Pravděpodobnost porušení	88
9.3 Porovnání všech variant	91
9.3.1 Porovnání závislostí posuv - výsledná styková síla	91
9.3.2 Porovnání S-křivek	92
10 ZÁVĚR	94
SEZNAM ZDROJŮ	96
SEZNAM OBRÁZKŮ	100
SEZNAM TABULEK	103
SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK	104
SEZNAM PŘÍLOH	105

1 ÚVOD

V dnešní době dochází k poptávce po rozvoji nových materiálů. V souladu s tímto trendem jsou stále častěji využívány keramické materiály. Keramika je jako materiál využívána již od pravěku. V posledních desetiletích dochází k rozvoji technické keramiky.

Technická keramika je zajímavá pro další užívání díky svým vlastnostem, například nízké hmotnosti, vysoké pevnosti v tlaku, odolnosti vůči abrazi nebo odolnosti vůči vysokým teplotám, při kterých již není možné používat tradiční kovové materiály. Některé druhy keramiky jsou také biotolerantní a je tedy možné je použít i pro výrobu implantátů.

Největším problémem pro další rozvoj keramických materiálů je mechanismus jejich porušování při tahovém zatížení. Při tomto zatížení dochází k porušování keramických materiálů křehkým lomem. Dalším problémem pro výrobu keramických součástí je jejich citlivost na rychlé změny teploty. [1]

I přes tyto vlastnosti je keramika stále častěji využívaným materiálem, a pro další rozvoj jejího využití je potřebné umět popsat, zda při daném zatížení dojde k jejímu lomu. Pro popis pravděpodobnosti porušení keramických součástí se používá Weibullova teorie nejslabšího článku. Tato teorie umožňuje určit pravděpodobnost porušení součástí z těchto materiálů, u kterých lze výskyt lomu statisticky popsat pomocí Weibullova rozdělení pravděpodobnosti. Na následujícím obrázku jsou znázorněny některé výrobky z technické keramiky.



Obrázek 1.1: Výrobky z technické keramiky [2]

2 POPIS PROBLÉMOVÉ SITUACE

V minulém století dospěl technický pokrok do stavu, kdy bylo potřebné začít používat nové nebo do té doby méně používané materiály. Jedním z materiálů, jehož využití začalo růst, byla i technická keramika. Při výrobě keramických součástí není možné zamezit vzniku trhlin. Tyto trhliny způsobují porušování keramiky křehkým lomem. Z experimentů vyplývá, že k lomu dojde u stejných vzorků ze stejného materiálu, vždy při jiném napětí. Tato skutečnost je způsobena již zmíněnými trhlinami. Jejich vzniku není možné zabránit a navíc, vzhledem k jejich počtu, náhodné orientaci, tvaru a velikosti, nelze určit trhlínu, která způsobí lom.

Ve 30. letech minulého století se podařilo švédskému matematiku W. Weibullovi rozpracovat teorii, která toto chování popisuje. Protože parametry trhliny, která způsobí lom, mají stochastický charakter, bylo nutné chování keramických součástí popsat pomocí pravděpodobnosti. Tato teorie zahrnuje buď jedno nenulové hlavní napětí, nebo dvě nenulová hlavní napětí. Jednoduchou modifikací bylo možné rozšířit teorii i na součásti, které mají všechna tři hlavní napětí nenulová. Vzhledem k výpočetní náročnosti ovšem nebylo v té době možné složitější úlohy řešit.

Ve druhé polovině minulého století došlo k velkému rozvoji numerických metod souvisejícímu s rozvojem výpočetní techniky. Nejvýznamnější metodou pro určování deformace a napjatosti se stala metoda konečných prvků, která umožnila určit průběhy napětí i ve složitějších případech.

Nabízí se proto kombinace těchto dvou metod, která umožňuje určit pravděpodobnost porušení téměř všech keramických součástí, jejichž lom v závislosti na napětí nastává podle Weibullova rozdělení. Tento postup byl již dříve použit pro výpočty pravděpodobností porušení keramických hlavic kloubních náhrad, při kterém bylo ovšem uvažováno pouze jedno hlavní napětí. Ostatní, která byla převážně tlaková, nebyla uvažována. Nabízí se proto rozšíření tohoto postupu i pro další dvě hlavní napětí.

Výpočet pravděpodobnosti porušení uvažující všechna tři hlavní napětí byl již dříve použit v diplomové práci Ing. Málka [3]. Objevil se zde ovšem problém s dobou trvání numerické integrace, a proto byl použit pouze na jednotkové krychli. Pokud by se podařilo najít vhodný způsob numerické integrace, který by snížil dobu výpočtu, bylo by možné použít tento postup i pro výpočet pravděpodobnosti porušení složitějších součástí.

3 FORMULACE PROBLÉMU A CÍLŮ ŘEŠENÍ

3.1 Formulace problému

Problém je určit pravděpodobnost porušení keramické součásti, pokud je uvažováno jedno nebo všechna tři hlavní napětí, z průběhu napjatosti získaného metodou konečných prvků. Toto chování je nutné ověřit na jednoduchých součástech s jednoosou nebo víceosou napjatostí, poté rozšířit na složitější součásti a posoudit, kdy je nutné zahrnout do výpočtu všechna tři hlavní napětí. Protože je předpokládána znalost vstupních údajů a budou zjišťovány výstupní veličiny, jedná se o přímý příčinný problém.

Protože je teorie popisující pravděpodobnost lomu keramických součástí známá a je znám i postup řešení, jedná se tedy o úkol typu úlohy, ve které bude nutné vyřešit dílčí problémy. Nejvýznamnější dílčí problém se objevuje při výpočtu s uvažováním všech tří hlavních napětí, kdy je nutné normálové napětí integrovat v Heighově prostoru přes polokouli a bude tedy nutné zvolit vhodnou, rychlou metodu numerické integrace, protože ta probíhá při výpočtu pro každý uzel každého prvku samostatně. Dalším dílčím problémem bude posoudit potřebnou kvalitu sítě pro výpočet pravděpodobnosti porušení.

3.2 Cíle řešení

Základní cíle řešení problému jsou tedy následující.

1) Vytvoření modelů v systému ANSYS a výpočet deformace a napjatosti

V tomto bodě bude nutné zvolit vhodné součásti, jejichž chování bude odpovídat takovým předpokladům, aby bylo možné z výsledků vyvodit závěry. Výsledná napjatost bude použita jako vstup pro další výpočty.

2) Sestavení algoritmu pro výpočet pravděpodobnosti porušení pro případy uvažující jen jedno hlavní napětí a pro případ uvažující všechna tři hlavní napětí

V tomto bodě bude s ohledem na diskretizaci použitou při výpočtu napětí sestaven algoritmus pro výpočet pravděpodobnosti porušení podle Weibullové teorie nejslabšího článku. Pomocí tohoto algoritmu bude pro jednotlivé součásti určena pravděpodobnost porušení.

3) Srovnání a analýza výsledků

V tomto bodě budou porovnány jednotlivé výsledky. Bude posouzena citlivost výsledků na kvalitu sítě a rozdíl mezi výsledky s uvažováním jednoho nebo všech tří hlavních napětí. Dále bude verifikován výpočet s uvažováním všech tří hlavních napětí tak, že u vzorku s jednoosou napjatostí budou jeho výsledky porovnány s výsledky výpočtu pravděpodobnosti porušení, který uvažuje pouze jedno hlavní napětí.

4 REŠERŠE

4.1 Použitá literatura

Většina této rešeršní části vychází z následující literatury.

a) MENČÍK, Jaroslav. *Pevnost a lom skla a keramiky* [4]

Tato kniha se věnuje obecným vlastnostem keramických a skleněných materiálů. Kromě toho obsahuje část o výpočtu pravděpodobnosti porušení keramických materiálů.

b) WEIBULL, Wallodi. *A statistical theory of the strength of materials* [5]

Jedná se o původní článek W. Weibulla ve kterém je popsána teorie potřebná k výpočtu pravděpodobnosti porušení. Kromě vzorců pro výpočet pravděpodobnosti porušení součásti obecného tvaru, jsou zde odvozeny i speciální případy, ve kterých je možné pravděpodobnost porušení určit analytickým výpočtem.

c) BUSH, D. R. *Designing Ceramic Components for Structural Applications* [6]

Tento článek se zabývá určením pravděpodobnosti porušení keramického prutu namáhaného čtyřbodovým ohybem.

d) GEORGIADIS, Constantinos. *Probability of failure models in finite element analysis of brittle materials* [7]

Tato literatura se zabývá určováním pravděpodobnosti porušení z dat získaných pomocí metody konečných prvků. Kromě toho se zabývá určováním pravděpodobnosti porušení při uvažování všech tří hlavních napětí. Navíc jsou zde uvedeny body a váhy pro Gaussovu integraci do řádu 5.

e) BAŽANT, Zdeněk P. a B. H. OH. *Efficient Numerical Integration on the Surface of a Sphere* [8]

Jedná se o článek, ve kterém jsou pomocí nekonečných řad odvozeny body a váhy pro vyšší řády Gaussovy integrace, pokud je integrační oblastí sférická plocha.

4.2 Keramické materiály

Keramické materiály je možné charakterizovat následovně: „Pojmem keramika rozumíme pevné anorganické nekovové polykrystalické látky, připravené slinováním práškových surovin za vysokých teplot.“ [4] Historicky se jedná o nejstarší konstrukční materiály. Dnes se používají kvůli některým dobrým vlastnostem. Kromě některých mechanických vlastností, které budou popsány dále, to může být vysoká odolnost vůči creepu nebo malá teplotní roztažnost. Z pohledu magnetických vlastností jsou to látky diamagnetické, z pohledu elektrických se jedná o elektrické izolanty. Obvykle mají keramické materiály dobrou chemickou odolnost.

4.2.1 Druhy keramických materiálů

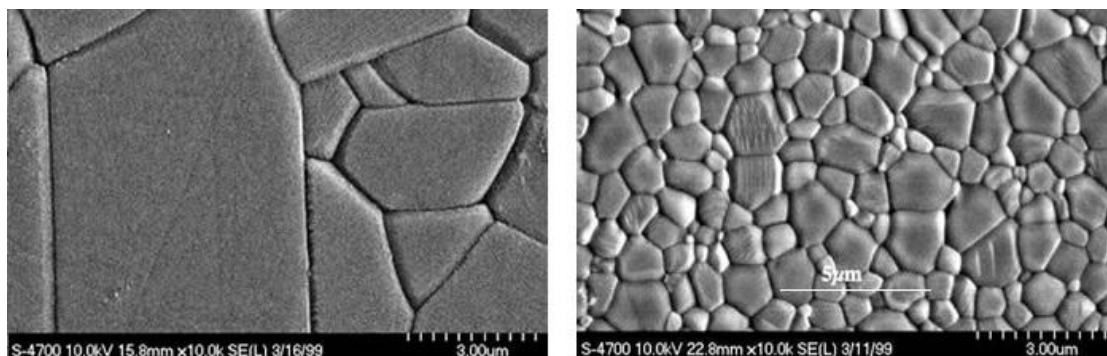
Keramické materiály je možné dělit do 4 hlavních skupin. [1] První skupina je tzv. Užitná keramika. Pevnostní vlastnosti v této skupině nejsou příliš významné. Z těchto materiálů se vyrábějí nejčastěji ozdobné předměty apod. Druhou velkou skupinou keramických materiálů jsou stavební materiály. U těchto materiálů je naopak kladen důraz na jejich pevnostní vlastnosti.

Vzhledem k velké odolnosti keramických materiálů vůči abrazi, se velmi často používají pro výrobu nástrojů. Obráběcí nástroje z keramiky umožňují použití vysokých řezných rychlostí při dlouhé výdrži nástroje.

Poslední skupinou keramických materiálů jsou konstrukční keramiky. Tyto materiály se obvykle používají pro malé a lehké konstrukce. Konstrukční keramiky se mohou používat při vysokých teplotách. Některé z těchto materiálů jsou biotolerantní, ty se označují jako biokeramika a používají se pro výrobu implantátů.

Vlastnosti keramiky vycházejí z jejího chemického, fázového složení a charakteru vazeb. [9] Podle druhu vazeb rozdělujeme keramiku na kovalentní, tedy tu, u které převládají kovalentní vazby a iontovou, u které převládají iontové vazby. Dále je možné keramické materiály dělit podle chemického složení na keramiky oxidové, neoxidové a směsné.

Oxidové keramické materiály jsou obvykle tvořeny jedním, v některých případech i více oxidy. Nejvíce používanou oxidovou keramikou je keramika na bázi slinutého korundu Al_2O_3 . Tato keramika se používá pro výrobu bioimplantátů, otěruvzdorných součástí, řezných nástrojů, jader rezistorů a dalších výrobků. Díky svojí chemické stálosti se dále využívá v chemickém průmyslu. Na následujícím obrázku je znázorněna struktura hrubozrnná a jemnozrnná keramiky Al_2O_3 .



Obrázek 4.1: Hrubozrnná a jemnozrnná keramika Al_2O_3 pod mikroskopem [9] (upraveno)

Kromě Al_2O_3 je také často používanou keramikou ZrO_2 . Tato keramika má lepší mechanické vlastnosti než Al_2O_3 , kromě vyšší lomové houževnatosti má také vyšší odolnost vůči otěru. Další využití vyplývá z vysoké teploty tání, která je 2710°C [10] a možnosti transformačního zpevnění, kdy při ochlazování dochází ke změně krystalické mřížky.

Jak již název napovídá, u neoxidových keramik nepřevažují ve složení oxidy. Často se jedná o karbidy a nitridy. Nitridové keramiky se používají pro jejich odolnost vůči teplotním šokům. Nejtvrdší keramický materiál, který má výborné mechanické

vlastnosti je karbid křemíku SiC. [10] Tento materiál má výbornou odolnost vůči abrazi a korozi. Na obrázku 4.2 jsou znázorněna keramická ložiska vyrobená z SiC.



Obrázek 4.2: Keramická ložiska vyrobená z SiC [11]

Mezi další používané neoxidové keramiky patří například cermety, které jsou složeny z keramických částic spojených kovovým pojivem. Obvykle se využívají pro výrobu řezných nástrojů. Pro vysokoteplotní aplikace se používá keramika označovaná jako SiAlON.

Poslední skupina keramik je keramika směsná, která vzniká smíšením oxidické a neoxidické keramiky. Tato keramika se často používá pro výrobu obráběcích nástrojů. [10]

4.2.2 Výroba keramických součástí

Keramické součásti se nejčastěji vyrábějí z tzv. plastických surovin, které se dělí na jílovité a zrnité. Pro lepší vlastnosti se do směsi těchto surovin přidávají ostřiva a taviva. [12]

Pro tradiční použití keramiky dochází k mletí této směsi. Při mletí nevyplňují částice prostor pravidelně, dochází ke vzniku pórů, které negativně ovlivňují výsledné vlastnosti výrobku. Velikost zrna ovlivňuje mechanické vlastnosti keramiky. Pokud se mletí používá pro konstrukční keramiku, používají se speciální mletá tělesa. [10]

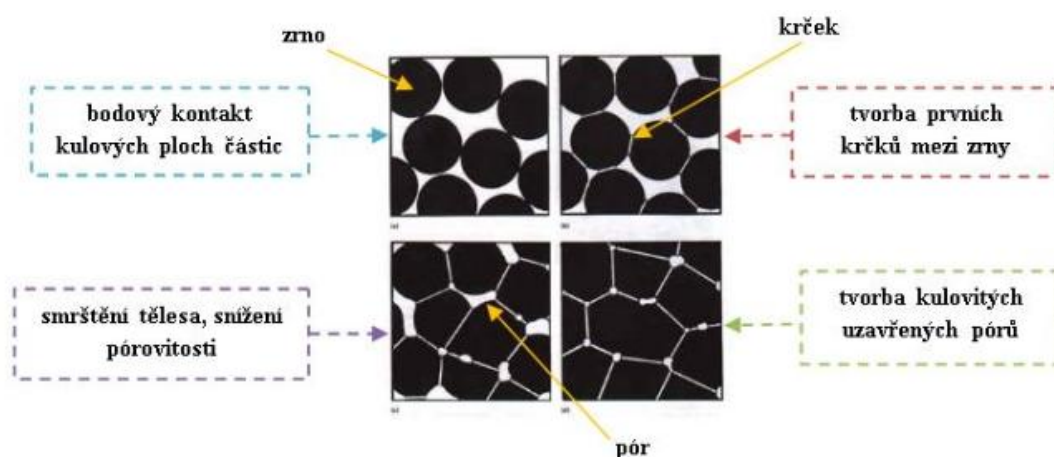
Dále dochází ke tvarování keramického polotovaru. To je možné rozdělit na suché nebo mokré. Pro suché tvarování se nejčastěji používají granulované prášky, které se lisují do forem. Tento způsob výroby je často používán pro ploché výrobky. Při mokrému tvarování se používá tzv. keramické břечka. Tato hmota se postupně odlévá do forem. [10]

Dále dochází k sušení keramiky. Cílem sušení je odstranit z keramiky vodu, dochází přitom ke změnám výsledných rozměrů. Důležité je, aby sušení probíhalo pomalu. Pokud tomu tak není, dochází k tomu, že povrch je již vysušen, zatímco vnitřní objem materiálu ještě ne. Na povrchu dojde k většímu smrštění součásti než ve vnitřním objemu, což způsobí vznik napětí, jehož důsledkem může být vznik trhlin. Ke vzniku trhlin navíc může docházet také vlivem samotného smršťování polotovaru při sušení. [13]

Při sušení a následném odstraňování pojiva a dalších pomocných látek, dochází ke vzniku největšího množství defektů. Tyto defekty výrazně ovlivňují mechanické vlastnosti výsledné součásti. Protože proces sušení je pro výrobu keramických součástí nutný, není možné zamezit jejich vzniku. Po vysušení keramiky dochází k odstranění pojiva.

Následně se provádí slinování keramiky, kdy za vysokých teplot dochází ke spojování hranic zrn. Při pohybu hranic zrn dochází k přenosu materiálu. Tento pohyb je způsoben difúzí, která může probíhat buď celým objemem zrn, nebo po jejich hranicích. Literatura [10] rozděluje proces slinování na několik stádií.

Na začátku slinování dochází k tzv. nultému stádiu slinování, kdy ještě nedochází ke změně teploty, avšak částice jsou již v kontaktu. V první fázi slinování dochází k natáčení částic, které se vzájemně dotýkají. V místě dotyku dojde ke vzniku krčku. Ve druhé fázi dochází k výraznému smrštění součásti a k růstu krčku. Po uzavření pórů v rozích částic nastává třetí fáze slinování. V této fázi jsou uzavírány další póry. Pokud by tato fáze trvala dlouho nebo by teploty při slinování byly příliš vysoké, mohlo by dojít k nežádoucímu zhrubnutí zrna. Po této fázi zůstávají v materiálu uzavřené póry, obvykle kulového tvaru. Tyto póry negativně ovlivňují výsledné mechanické vlastnosti keramických materiálů. Průběh jednotlivých fází je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 4.3: Fáze slinovacího procesu [10]

4.2.3 Zkouška tahem

Keramické materiály jsou obvykle křehké, k jejich porušování tedy dochází křehkým lomem. Lom je způsoben nestabilním šířením trhliny, která je obsažena v materiálu obvykle již od výroby. Protože rozevírání trhliny je obvykle způsobeno tahovým napětím, je pevnost v tahu výrazně nižší než pevnost v tlaku. Dle literatury [8] je pevnost v tahu nižší až $15 \times$. Z tohoto důvodu se pro keramické materiály provádí obvyklá tahová zkouška jen výjimečně. Pokud se zkouška tahem provádí, používá se plochý vzorek, který je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 4.4: Vzorek pro zkoušku tahem [14]

Zkušební tyč je upravena tak, aby při zatěžování byla hlava tyče namáhána tlakem. V této části tedy nedochází k růstu trhlin. Naměřená pevnost je ovlivněna nejdelší trhlinou kolmo orientovanou na působící napětí, která se nachází v tahem namáhané části vzorku.

4.2.4 Zkouška ohybem

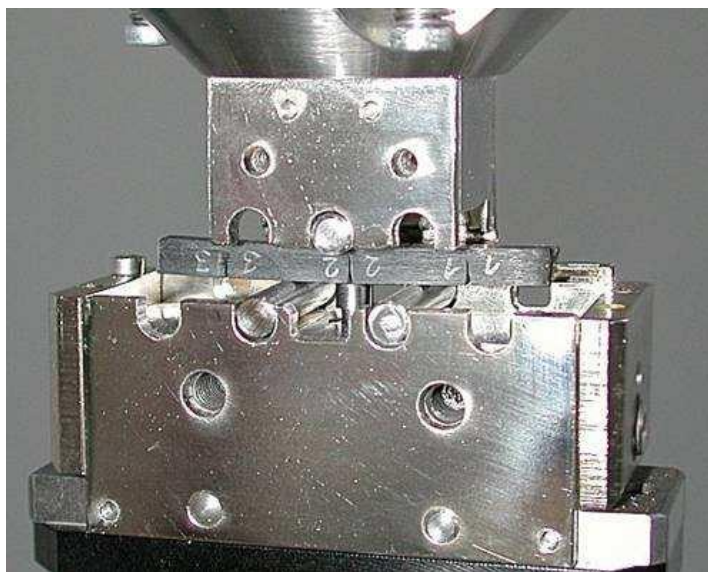
Častěji než zkouška tahem se provádí zkouška ohybem. Obvykle se používá tří nebo čtyřbodový ohyb. Při těchto zkouškách se často používá plochý vzorek s průřezem 4×3 mm a sraženými hranami. Kvalita povrchu má velký vliv na výsledky, a proto musí být povrch vzorku zrcadlově lesklý.

Protože při zkoušce ohybem působí maximální tahové napětí jen na jednom povrchu vzorku, zatímco při zkoušce tahem v celém objemu vzorku, je obvykle naměřená pevnost v ohybu přibližně $1,7 \times$ větší než pevnost v tahu. [15] Výsledky při jednotlivých měřeních se ovšem výrazně mění kvůli stochastické povaze lomu. Z toho vyplývá, že podmínky, při kterých dojde k lomu, nezávisí pouze na maximálním tahovém napětí, ale ovlivňuje je i objem v jakém tahová napětí působí.

4.2.5 Zkoušky lomové houževnatosti

Lomová houževnatost popisuje odolnost materiálu vůči šíření trhliny. Pro určení lomové houževnatosti keramických materiálů se používá několik metod. Buď jsou to metody indentační, kdy je do keramiky vtisknut indentor nebo se jedná o ohybové zkoušky trámečků se zárodečným defektem (viz obrázek 4.5).

Kromě těchto metod se pro určení lomové houževnatosti používá zkouška excentrickým tahem tělesa s vrubem typu chevron. Pokud je potřeba určit lomovou houževnatost při víceosé napjatosti, používá se tzv. ring on ring test, kdy na vzorek, který má tvar rotačně symetrické desky působí zatěžovací prstenec tak, aby se na vzorku vytvořila víceosá napjatost.



Obrázek 4.5: Zkouška lomové houževnatosti tříbodovým ohybem [14]

4.2.6 Mechanické vlastnosti keramických materiálů

Tahový diagram keramických materiálů je obvykle lineární. Z toho vyplývá, že je téměř nemožné vytvoření plastických deformací. Na konci hookovy přímky dochází k lomu, který je vzhledem k velmi omezené plastické deformaci lomem křehkým.

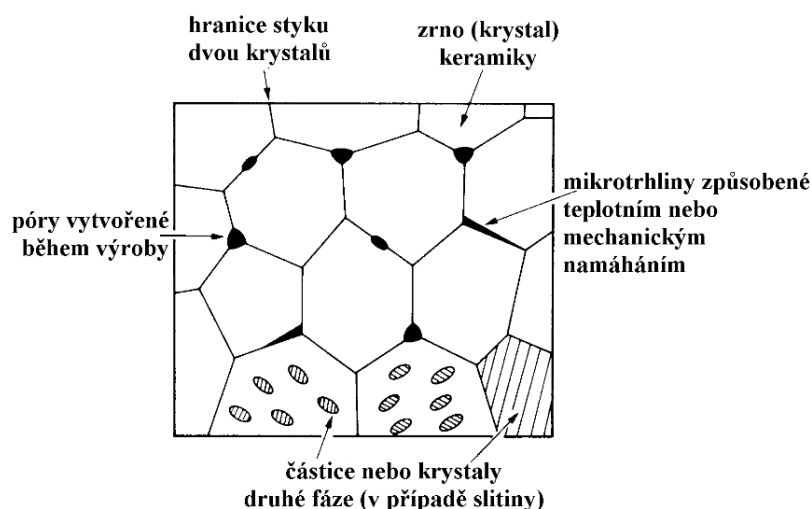
Keramické materiály se tedy obvykle chovají téměř lineárně, elasticky. Iontové i kovalentní vazby, které jsou mezi atomy keramických materiálů, jsou výrazně pevnější než vazba kovová, a proto mají keramické materiály výrazně vyšší hodnotu modulu pružnosti v tahu než oceli.

Kromě toho, že jsou keramické materiály pevné, jsou také velmi tvrdé. [15] Jedná se o jedny z nejpevnějších a nejtvrdších materiálů co existují. Další výbornou vlastností je jejich nízká hustota. Keramické výrobky jsou tedy obvykle pevnější a lehčí než výrobky z oceli.

Předchozí vlastnosti předurčují keramiku jako dobrý konstrukční materiál. Většímu rozšíření keramických materiálů ve výrobě ovšem brání jejich, již dříve zmíněná, křehkost. Další problém je stochastické lomové chování, kdy nelze přesně určit, zda při daném zatížení dojde nebo nedojde k lomu, protože nejsou známy parametry defektu, který způsobí lom. Porušování šířením trhlin také způsobuje, již dříve zmíněnou, vyšší pevnost v ohybu než v tahu a výrazně vyšší pevnost v tlaku než v tahu. Vzhledem ke stochastičnosti lomu závisí mechanické vlastnosti na objemu součásti, kdy s rostoucím objemem roste pravděpodobnost výskytu většího defektu, který způsobí lom.

Zlepšení mechanických vlastností je možné buď zvyšováním odolnosti vůči lomu, nebo snižováním počtu defektů, popřípadě jejich zmenšením, čehož lze docílit zjemněním zrna při výrobě. Dále lze defekty omezit vysokou čistotou prostředí, ve kterém jsou keramické součástky vyráběny, což ovlivňuje hlavně povrchové defekty. Tyto defekty jsou obvykle nebezpečnější než defekty uvnitř objemu, protože lom obvykle vychází z povrchu. [4]

Zmenšováním přítomných vad je tedy možné zlepšovat vlastnosti keramických materiálů. Tyto vady ovšem není možné odstranit úplně. Na následujícím obrázku jsou znázorněny nejčastější vady ve struktuře keramických materiálů.



Obrázek 4.6: Vady ve struktuře keramických materiálů [1]

4.2.7 Lom keramických materiálů

Jak již bylo řečeno, k lomu keramické součásti dochází z důvodu nestabilního šíření trhliny, která je v materiálu obvykle již od výroby. Popisem součásti s trhlinou se zabývá lomová mechanika. Na čele trhliny dochází k obtížně popsatelnému stavu napjatosti, protože trhlina tvoří koncentrátor napětí a navíc vytváří nespojitost. [15] Teoreticky se napětí na čele trhliny při použití Hookova modelu materiálu blíží k nekonečnu. U pružně-plastického modelu materiálu dojde v kořeni trhliny k vytvoření lokální plastické deformace, která ztěžuje další šíření trhliny. Keramické materiály nemají téměř žádnou schopnost plastické deformace, a proto u nich dochází ke křehkému chování.

Vzhledem k počtu trhlín není možné určit velikost, tvar a orientaci trhliny, která lom způsobí, a proto není pro určení napětí, při kterém dojde k lomu, možné použít lomovou mechaniku. Toto napětí je tedy stochastické, a pro výpočet pravděpodobnosti porušení keramické součásti se využívá popis pomocí pravděpodobnosti podle Weibullovy teorie nejslabšího článku.

4.3 Weibullova teorie nejslabšího článku

4.3.1 Weibullovo rozdělení

Weibullovo rozdělení se v literatuře vyskytuje ve dvou podobách. Buď jako tříparametrové $W(b, c, \delta)$ nebo jako dvouparametrové $W(b, \delta)$. Dvouparametrové Weibullovo rozdělení je speciálním případem tříparametrového, kdy parametr $c = 0$. [16]

Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení má podle [17] tento tvar.

$$f(x) = \frac{b}{\delta} \left(\frac{x-c}{\delta} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x-c}{\delta} \right)^b} \quad (1)$$

Tento vztah platí pouze tehdy, pokud náhodná veličina $x \in \langle 0; \infty \rangle$. Pokud je x záporné, je hustota pravděpodobnosti rovna nule. Weibullovo rozdělení má obecně 3 parametry.

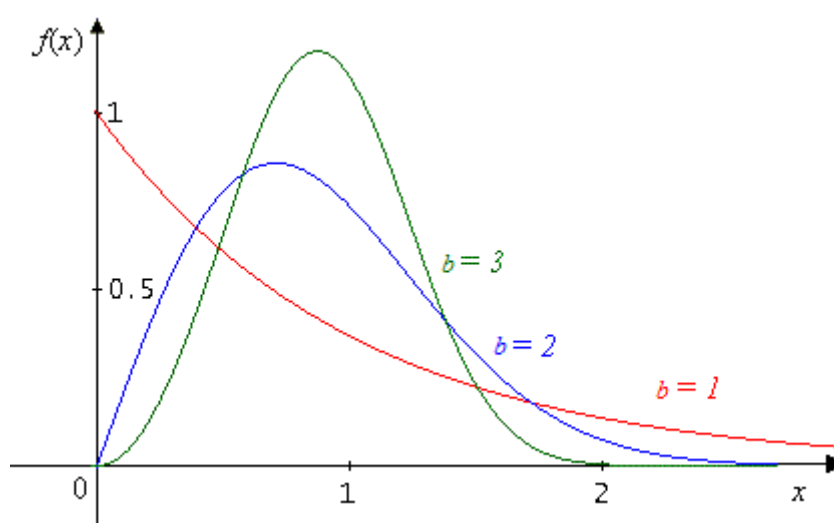
Parametr b , který je vždy větší než nula se nazývá parametr tvaru. Tento parametr významně ovlivňuje tvar grafu hustoty pravděpodobnosti. V případě, že $b = 1$ přechází Weibullovo rozdělení v rozdělení exponenciální a při hodnotě $b = 3,6$ aproximuje Weibullovo rozdělení rozdělení normální. [17][18] S jeho rostoucí velikostí se funkce hustoty pravděpodobnosti stává více strmou (viz obrázek 4.7).

Parametr c je parametr polohy. Pro hodnoty náhodné veličiny menší než tento parametr je hustota pravděpodobnosti nulová.

Poslední parametr je parametr δ . Tento parametr je vždy větší než nula a nazývá se parametr měřítka. Na obrázku 4.7 jsou uvedeny grafy hustoty pravděpodobnosti pro různé hodnoty parametru b , kdy $\delta = 1$ a $c = 0$.

Integrací hustoty pravděpodobnosti je možné určit následující vztah pro distribuční funkci.

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-c}{\delta} \right)^b} \quad (2)$$



Obrázek 4.7: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení v závislosti na parametru b [19] (upraveno)

4.3.2 Vztah pro výpočet pravděpodobnosti porušení

Teorie zmíněná v této kapitole vychází z [5]. Z pohledu spolehlivosti Weibullova teorie říká, že k poruše dojde, pokud selže alespoň jeden článek systému. Nejslabší článek, který má největší pravděpodobnost poruchy, tedy nejvíce ovlivňuje výslednou pravděpodobnost poruchy. Jedná se o systém v sériovém zapojení, u kterého platí, že pravděpodobnost poruchy celého systému lze vyjádřit podle následujícího vztahu, kde P_s vyjadřuje spolehlivost systému.

$$P_f = 1 - P_s \quad (3)$$

Spolehlivost celého systému je v případě sériového zapojení možné určit ze spolehlivostí jednotlivých prvků následovně.

$$P_s = \prod_{i=1}^N P_{si} \quad (4)$$

S využitím rovnice (3) je možné přepsat vztah (4) do následujícího tvaru.

$$1 - P_f = \prod_{i=1}^N 1 - P_{fi} \quad (5)$$

Necht' P_{fi} odpovídá pravděpodobnosti porušení jednotkového objemu. Dále je uvažováno těleso, jehož každý jednotkový objem má stejnou pravděpodobnost porušení (například prut namáhaný tahem). Pravděpodobnost porušení tohoto tělesa je možné určit podle rovnice (5). Celkový objem V se tedy skládá z V jednotkových objemů, a protože je pravděpodobnost porušení pro všechny jednotkové objemy stejná, lze tento vztah upravit takto.

$$1 - P_f = (1 - P_{fi})^V \quad (6)$$

Zlogaritmováním rovnice (9) lze dostat následující vztah.

$$\ln(1 - P_f) = V \ln(1 - P_{fi}) \quad (7)$$

Označme nyní $-\ln(1 - P_f)$ jako riziko porušení B. Z této rovnosti lze určit pravděpodobnost porušení systému.

$$P_f = 1 - e^{-B} \quad (8)$$

Aby bylo možné určit pravděpodobnost porušení součásti, zbývá tedy určit riziko porušení B. To je možné dosazením do rovnice (7).

$$B = -V \ln(1 - P_{fi}) \quad (9)$$

Dosud platil předpoklad, že P_{fi} je v celém objemu V konstantní. Pravděpodobnost porušení jednotkového objemu závisí na působícím napětí. To se může v objemu postupně měnit a s ním se mění i pravděpodobnost porušení. Protože je materiál uvažován jako izotropní, lineární, elastické kontinuum, je možné přejít od konečného vyjádření k vyjádření pro nekonečně malý prvek. Poté je tedy možné vyjádřit B následovně.

$$B = \int_V -\ln(1 - P_{fi}) dV \quad (10)$$

Pravděpodobnost porušení jednotkového objemu je neznámá funkce, ovšem musí být závislá pouze na napětí, a proto je možné zjednodušit zápis integrálu pomocí substituce. Tímto zjednodušením přejde rovnice v rovnici (11). Integrovanou funkci je možné vyjádřit pro různé druhy napjatostí v různých tvarech, které jsou různě vhodné pro danou aplikaci.

$$B = \int_V n(\sigma) dV \quad (11)$$

V některých případech může, vzhledem k šíření trhlin, vykazovat materiál jiné vlastnosti na povrchu a uvnitř materiálu. Poté je možné riziko porušení vyjádřit podle rovnice (12). Tato skutečnost není v následujících výpočtech uvažována. Předpokládá se, že uvnitř materiálu i na jeho povrchu vznikají stejné defekty, které stejně ovlivňují pravděpodobnost porušení.

$$B = \int_V n_1(\sigma) dV + \int_S n_2(\sigma) dS \quad (12)$$

4.3.3 Obecné vztahy pro jednoosou napjatost

Porušování keramických materiálů se obvykle chová podle Weibullova rozdělení. V souladu s touto skutečností bylo riziko porušení pro jednoosou napjatost s využitím dvoupárametrového Weibullova rozdělení vyjádřeno pomocí následujícího vztahu.

$$B = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (13)$$

Podle literatury [5] odpovídají výsledky získané tímto vztahem výsledkům získaným experimentálně. S uvažováním tříparametrového Weibullova rozdělení přejde vztah pro výpočet rizika porušení v následující rovnici.

$$B = \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (14)$$

Výsledná rovnice pro výpočet pravděpodobnosti porušení formálně odpovídá rovnici (2), jedná se tedy o distribuční funkci Weibullova rozdělení pravděpodobnosti. Parametry Weibullova rozdělení jsou pro jednotlivé materiály určovány experimentálně a je možné je interpretovat následovně.

σ_u - hodnota napětí, pod kterou nedochází k porušování materiálu

m - Weibullův modul, tato hodnota určuje, jak moc se mění pravděpodobnost porušení v závislosti na působícím napětí. Pro vysoké hodnoty Weibullova modulu nabývá hustota pravděpodobnosti vysokých hodnot, ale pouze v malém intervalu napětí. Z toho vyplývá, že při malé změně napětí dojde k velké změně pravděpodobnosti porušení. Od určité hodnoty je tato změna již tak velká, že by bylo možné neurčovat pravděpodobnost porušení ale uvažovat hodnoty napětí, při kterých dojde k porušení jako deterministické

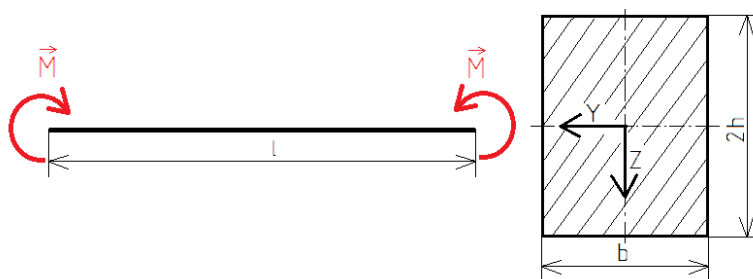
σ_0 - normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu. Pokud by působilo napětí v jednotkovém objemu a mělo hodnotu rovnou hodnotě tohoto parametru, byla by pravděpodobnost porušení tohoto objemu 63 %. [5] Toto platí pouze při rovnosti číselných hodnot, protože tento parametr má jinou jednotku než působící napětí a navíc musí být $\sigma_u = 0$ MPa.

Pomocí vztahů (13) a (14) je tedy možné určit pravděpodobnost porušení pro součást namáhanou jednoosou napjatostí. V některých speciálních případech je možné tuto pravděpodobnost určit analyticky, jindy je nutné použít numerické metody.

4.3.4 Pravděpodobnost porušení prutu namáhaného prostým ohybem

Prostý ohyb je speciální případ jednoosé napjatosti, kdy je prut na obou koncích zatížen stejným momentem. Jediným nenulovým VVU je tedy ohybový moment, který je po celém prutu konstantní. V případě, že má prut kruhový nebo obdélníkový příčný průřez, je možné pravděpodobnost porušení tohoto prutu určit analyticky výpočtem podle [5].

Pro další výpočet je uvažován prut délky l s obdélníkovým příčným průřezem šířky b a výšky $2h$, namáhaný prostým ohybem (viz následující obrázek).



Obrázek 4.8: Prut namáhaný prostým ohybem

Pro výpočet je možné použít vztah pro riziko porušení z předchozí kapitoly. Pro dvoupárametrové Weibullové rozdělení je tedy výchozí vztah (13).

Polovina příčného průřezu je namáhána tlakovým napětím, v tomto místě je tedy přírůstek pravděpodobnosti porušení nulový. Po šířce prutu je vzhledem k namáhání ohybem napětí konstantní a vzhledem ke konstantnímu ohybovému momentu je konstantní i napětí po délce prutu. Vztah (13) je s využitím těchto skutečností možné upravit následovně.

$$B = \frac{b l}{\sigma_0^m} \int_0^h \sigma^m dz \quad (15)$$

Průběh napětí po příčném průřezu je lineární, a proto je možné ho vyjádřit takto.

$$\sigma = \frac{\sigma_{max}}{h} z \quad (16)$$

Protože h i σ_{max} jsou konstanty, přejde po dosazení vztah (18) v následující tvar.

$$B = b l \left(\frac{\sigma_{max}}{h \sigma_0} \right)^m \int_0^h z^m dz \quad (17)$$

Po integraci a dosazení za $b l h = V/2$, kde V je objem celého prutu, je možné odvodit následující vztah, kterým lze analyticky určit riziko porušení pro prostý ohyb prutu s obdélníkovým příčným průřezem.

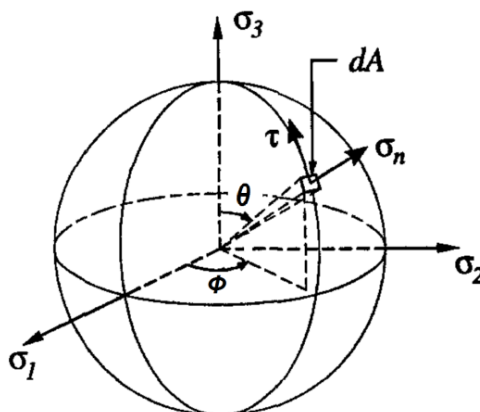
$$B = \frac{V}{2(m+1)} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \right)^m \quad (18)$$

Obdobným způsobem je podle [5] možné určit riziko porušení při namáhání tahem a pro prut s kruhovým příčným průřezem namáhaný tahem, ohybem nebo krutem.

4.3.5 Výpočet pro trojosou napjatost

Weibullovu teorii nejslabšího článku je možné použít i tehdy, pokud je součást namáhána trojosou napjatostí. Protože je uvažován normálový mód, kdy je trhлина rozevírána,

má rozhodující vliv normálové napětí, pokud je tahové. Normálové napětí působí kolmo na trhlinu a dále ji rozevívá. Velikost normálového napětí se mění vzhledem k jeho orientaci v prostoru, a proto se pro výpočet rizika porušení používá integrace přes kulovou plochu o jednotkovém poloměru [3]. Tato plocha je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 4.9: Normálové napětí na kouli s jednotkovým poloměrem [20] (upraven souřadný systém)

Vzhledem k integraci přes sférickou plochu je výhodné použít sférické souřadnice. Normálové napětí lze pomocí tří hlavních napětí a dvou úhlů, které ho orientují v prostoru, vyjádřit následujícím vztahem.

$$\sigma_n = (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta \quad (19)$$

Pravděpodobnost porušení ovšem ovlivňují pouze tahové hodnoty normálového napětí, a proto se pro výpočet pravděpodobnosti porušení používá tzv. ekvivalentní napětí. [20] Hodnota tohoto napětí je stejná jako hodnota normálového napětí, pokud je toto napětí kladné. Pokud je normálové napětí záporné, je hodnota ekvivalentního napětí rovna nule. Platí tedy následující předpis.

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_n & \sigma_n > 0 \\ 0 & \sigma_n \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

Riziko porušení je tedy možné vyjádřit podle [5] [21] v souladu se vztahem (14) takto.

$$B = \int_V k \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^m \sin \theta \, d\theta \, d\Phi \right) dV \quad (21)$$

Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je symetrická [21], je integrační oblastí pouze polovina kulové plochy. Konstanta k byla podle [5] odvozena tak, aby při jednoosé napjatosti dával model stejné výsledky, jako model odvozený pro jednoosou napjatost. Poté je tedy možné tuto konstantu vyjádřit následovně.

$$k = \frac{2m + 1}{2\pi} \quad (22)$$

Pomocí těchto vztahů je možné určit pravděpodobnost porušení tělesa namáhaného obecnou trojosou napjatostí. Problém nastává při výpočtu integrálu přes polokouli. Vzhledem ke tvaru integrované funkce je nutné použít pro výpočet numerickou integraci.

4.4 Gaussova integrace

4.4.1 Gaussova integrace pro funkci jedné proměnné

Gaussova integrace je metoda numerické integrace, která je založena na nahrazení integrálu sumou. Integrovaná funkce se vyhodnocuje v několika bodech, jejichž počet se mění podle řádu integrace a tato hodnota je dále vynásobena váhovým koeficientem w_i .

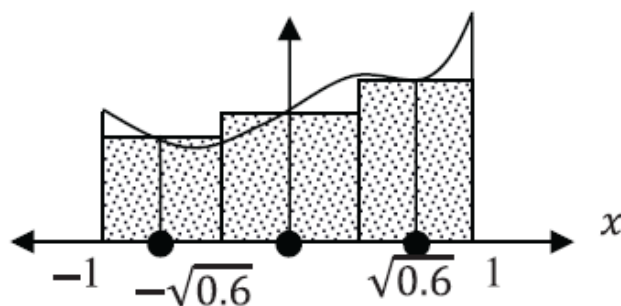
Body Gaussovy integrace a k nim přiřazené váhové koeficienty se odvozují pomocí ortogonálních polynomů [22] tak, aby v případě jedné proměnné platilo, že formule řádu n integruje přesně polynomy do stupně $2n - 1$.

Pokud je integrovaná funkce funkcí jedné proměnné, jsou body a váhové koeficienty odvozeny pro interval $\langle -1; 1 \rangle$. V případech, kdy funkce náleží jinému intervalu, je nutné nejprve provést transformaci souřadnic a převést funkci na tento interval. [22] Poté je Gaussova integrace dána tímto předpisem. [23]

$$\int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i \Phi(\xi_i) \quad (23)$$

Na následujícím obrázku je znázorněna Gaussova integrace řádu 3. Tato formule dokáže přesně zintegrovat maximálně polynom stupně 5, který je na tomto obrázku taktéž znázorněn. Tato integrační formule využívá 3 integrační body, které jsou znázorněny tečkami. Samotný předpis integrace je uveden nad obrázkem.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f(\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}) \quad (24)$$



Obrázek 4.10: Gaussova integrace řádu 3

Předchozí vztahy platí pro funkci jedné proměnné. Pro funkci dvou proměnných je možné použít následující vztah.

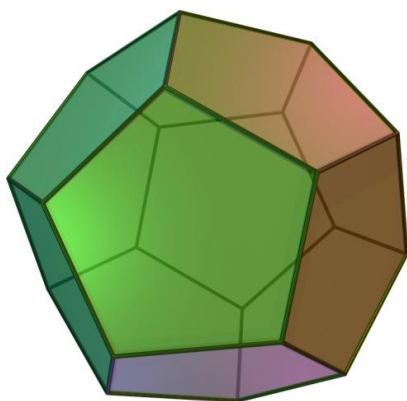
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \Phi(\xi_i, \eta_j) \quad (25)$$

Obdobně je možné rozšířit tento vztah pro tři proměnné. Kromě tohoto vztahu jsou pro speciální typy integrace odvozeny i jiné, přesnější a méně výpočtově náročné formule.

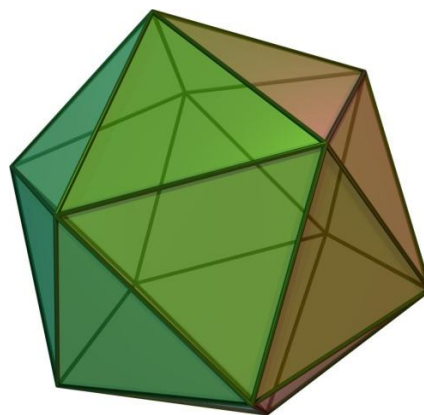
4.4.2 Gaussova integrace přes sférickou plochu

K řešení mnoha fyzikálních problémů je nutné určit hodnotu nějakého integrálu přes povrch koule. [24] Protože je tento případ poměrně častý, byly pro něj odvozeny speciální formule Gaussovy integrace. Není tedy nutné používat formuli popsanou rovnicí (25). To umožňuje vyjadřovat hodnotu integrálu pomocí méně bodů a přesto s dostatečnou přesností.

Aby byly integrační body rovnoměrně rozděleny po povrchu, jsou obvykle voleny jako vrcholy nebo středy stěn pravidelných mnohostěnů, které jsou opsány nebo vepsány kouli. [8] Nejsložitější známé pravidelné mnohostěny mají ovšem pouze 20 stěn a 12 vrcholů nebo 12 stěn a 20 vrcholů (viz obr. 4.11 a 4.12). Body odvozené pomocí těchto těles odpovídají řádu integrace 5.



Obrázek 4.11: Pravidelný dvanáctistěn [25]



Obrázek 4.12: Pravidelný dvacetistěn [26]

Souřadnice bodů Gaussovy integrace je možné převést do sférických souřadnic. Poté je tedy možné vyřešit integrál přes sférickou plochu následujícím vztahem.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\Phi, \theta) \sin \Phi d\Phi d\theta \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\Phi_i, \theta_i) \quad (26)$$

Již zmíněný způsob odvozování bodů pro Gaussovu integraci není dostatečný, protože složitější pravidelná tělesa, která by zaručovala přesnější výsledek, nejsou známa, a proto se integrační body odvozují pomocí dalších přístupů, kdy dochází ke snaze rozdělit body po ploše co nejrovnoměrněji. Formule, která byla využita pro výpočty do řádu 5, vznikla podle [7] rozšířením formule, která vznikla pro trojúhelníkovou oblast. Literatura [8], která byla použita pro výpočty s využitím vyšších řádů, uvádí odvození

bodů pomocí Taylorova rozvoje. V těchto případech platí, že řád formule odpovídá řádu funkce dvou proměnných, který je schopna formule přesně zintegrovat [8].

4.5 Hlavice kyčelního kloubu

4.5.1 Endoprotéza

Endoprotézy, které se používají při výměně kyčelního kloubu, se skládají z 3 částí a vyrábějí se v několika velikostech. Na dřívku, který je nejčastěji vyroben z titanu nebo oceli je nasazená hlavice, která je vyrobena buď z oceli, titanu, slitiny CoCrMo nebo z keramiky. [27] Hlavice je nasazena do jamky, která je voperována do pánevní kosti. Na následujícím obrázku je znázorněn model endoprotézy.



Obrázek 4.13: Model endoprotézy [28]

Podle počtu nahrazených ploch se endoprotézy dělí na totální a částečné. Totální endoprotézy nahrazují všechny kloubní plochy, kdežto částečné nahrazují jen některé, poškozené plochy. [27]

Podle způsobu fixace do kosti se vyrábějí endoprotézy cementové, necementové nebo smíšené. Cementové endoprotézy jsou do kosti zajištěny pomocí speciálního kostního cementu. Necementové endoprotézy jsou navrženy tak, aby nebylo nutné cement využívat. Povrch implantátu je u těchto náhrad upraven tak, aby do něj mohla prorůst kost. [29] Hybridní náhrada oba tyto typy kombinuje, kdy jedna část, obvykle jamka, je připevněna bez cementu a druhá část je připevněna cementově. [29]

Keramické hlavice se nejčastěji vyrábějí o průměrech 28 nebo 32 mm. [30] Obdobně jako u ostatních výrobků není možné zajistit absolutní přesnost výroby, a proto při výrobě těchto hlavic dochází k výrobním odchylkám. Nejčastější problémy jsou spojeny s odchylkou od nominální kuželovitosti a odchylkami od kruhovitosti. [31] Na následujícím obrázku je keramická hlavice, využívaná pro tyto endoprotézy.

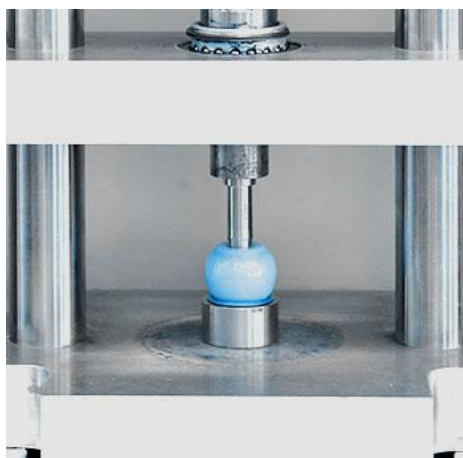


Obrázek 4.14: Hlavice [32] (upraveno)

4.5.2 Zkouška ISO 7206

Aby mohla být endoprotéza využita, musí splňovat normu ISO. Norma ISO 7206 definuje zkoušku hlavice endoprotézy, kdy je hlavice nasazena na dřík a následně zatížena silou. Tato norma neuvažuje pouze tlakové zatížení keramické hlavice. Jiné části normy ISO 7206 definují zkoušku pro torzní zatížení nebo cyklické zatížení, kdy se posuzuje mezní stav únavové pevnosti.

Aby byla síla po obvodu hlavice rozdělena rovnoměrně, používá se pro zkoušku zatěžující kužel. Tento kužel má vrcholový úhel 100° . Při zkoušce je dřík upevněn na support, který umožňuje pohyb tak, aby zatížení hlavice probíhalo v jednom směru. Zařízení pro tuto zkoušku je znázorněno na následujícím obrázku.



Obrázek 4.15: Testovací zařízení pro zkoušky hlavic [33]

5 ANALÝZA PROBLÉMU

5.1 Systém podstatných veličin

Pravděpodobnosti porušení se zahrnutím jednoho nebo všech tří hlavních napětí budou určovány pro několik součástí. V první fázi bude určena pravděpodobnost porušení keramického prutu namáhaného čtyřbodovým ohybem. Prutová součást byla zvolena z toho důvodu, že pouze jedno hlavní napětí je u ní vždy nenulové. Navíc je možné určit pravděpodobnost porušení části prutu analytickým vztahem odvozeným v práci W. Weibulla a ověřit tak správnost výpočtu.

Pomocí tohoto výpočtového modelu, byl dále verifikován výpočet se zahrnutím všech tří hlavních napětí. Chování pravděpodobnosti porušení při změně znamének hlavních napětí bylo dále popsáno na tlustostěnném válcovém tělese.

Poznatky získané z těchto jednoduchých modelů byly následně využity při posuzování pravděpodobnosti porušení hlavice endoprotézy kyčelního kloubu a následném porovnání výpočtů se zahrnutím jednoho a všech tří hlavních napětí. Pro jednotlivé výpočty byl vytvořen následující systém podstatných veličin.

Okolí entity - Prutové a válcové těleso jsou modelové objekty, u kterých není uvažováno žádné okolí. Pro keramickou hlavici bude modelována zkouška ISO 7206, která probíhá za standardních podmínek a tedy ani v tomto případě není uvažováno, že by okolí mohlo ovlivnit výslednou pravděpodobnost porušení.

Geometrie a topologie entity - Prutové těleso je uvažováno jako přímý prut obdélníkového příčného průřezu s rozměry volenými tak, aby byly splněny prutové předpoklady. Jeho geometrii tedy určuje délka střednice a rozměry příčného průřezu. Obdobně i válcové těleso odpovídá předpokladům pro použití modelu tlustostěnného válcového tělesa. Toto těleso je rotačně symetrické, jeho rozměry jsou dány vnitřním, vnějším poloměrem a délkou. Rozměry obou těles byly voleny jako deterministické.

Hlavice kyčelního kloubu je zkoušena při zkouškách, kdy je nasazena na dřík, který je spojen se supportem. Na hlavici je nasazen zatěžující kužel s vrcholovým úhlem 100°. Geometrie hlavice byla převzata z výrobních výkresů, v těchto výkresech není přesně zakótován přechod mezi kuželovitým otvorem a otvorem v hlavici. Geometrie přechodu byla modelována proložením několika naměřených bodů, které byly převzaty z práce Ing. Vargy [34]. Protože hlavním cílem je porovnat výsledky výpočtu s uvažováním jednoho a všech tří hlavních napětí, není případná odchylka tohoto postupu od skutečné geometrie přechodu podstatná, protože ovlivní výsledky obou teorií.

I u ostatních rozměrů dochází kvůli výrobním nepřesnostem ke stochastickému chování. Protože dosud neexistuje stochastická varianta MKP, která by tyto odchylky dokázala zahrnout, budou rozměry uvažovány jako deterministické. Pouze vliv odchylky od nominální kuželovitosti, který může být podstatný pro výslednou pravděpodobnost porušení, bude posouzen samostatným výpočtem. Hlavice kyčelního kloubu vykazuje rotační symetrii. Důležité rozměry jsou poloměr hlavice, její výška a vrcholový úhel kuželového otvoru pro dřík. Geometrie a topologie se v čase nemění, a proto je možné ji považovat za statickou.

Vazby entity na okolí - Vazby na prutovém tělese odpovídají čtyřbodovému ohybu, kdy je těleso položeno na dvou ocelových válcích. Tyto válce zamezují jeho posuvu v jednom směru.

U válcového tělesa je předpokládáno, že je zatíženo tak, aby se nacházelo ve statické rovnováze. Vazby u tohoto tělesa nebyly uvažovány. Vzhledem k numerickému řešení byly použity pouze vazby vycházející ze symetrie tělesa.

Dřík je upevněn na supportu, který umožňuje jeho pohyb v horizontálních směrech, a proto má zamezen pouze posuv ve vertikálním směru. Na dříku je nasazena hlavice kyčelního kloubu, na které je nasazen zatěžující kužel. Všechny vazby jsou uvažovány jako statické.

Aktivace entity - Prutové těleso je při čtyřbodovém ohybu zatěžováno dvěma válci se známými posuvy. Válcové těleso bylo zatěžováno plošným zatížením na jednotlivé plochy.

Hlavice kyčelního kloubu je aktivována pomocí zatěžujícího kužele. Vzhledem k tomu, že se jedná o kontaktní úlohu, bylo využito deformační zatížení. Zatížení vlastní tíhou je nepodstatné, vzhledem k malé hmotnosti součásti. Hlavice kyčelního kloubu jsou při použití zatěžovány dynamicky, protože ovšem není znám popis chování pravděpodobnosti porušení při dynamickém zatěžování, bylo zatížení uvažováno jako statické a deterministické.

Ovlivňování entity - Pravděpodobnost porušení prutového tělesa ovlivňuje poloměr podpory. U válcového tělesa není ovlivnění okolím předpokládáno, protože se jedná o modelové těleso.

Pravděpodobnost porušení keramické hlavice je ovlivněna jejími případnými tvarovými odchylkami, například již zmíněnou odchylkou od nominální kuželovitosti.

Oborové vlastnosti entity - Pro všechna tělesa jsou to jejich rozměry, které již byly popsány v podmnožině geometrie a topologie entity. S rozměry souvisí objem součásti, který ovlivňuje výslednou pravděpodobnost porušení. Součásti jsou vyrobeny z keramiky. Ta byla modelována jako lineární izotropní kontinuum, jehož chování popisují modul pružnosti v tahu a poissonův poměr. Pro popis tření v kontaktní oblasti je potřeba znát součinitel tření. Chování keramického materiálu je popsáno Weibullovým rozdělením, které má obecně tři parametry - Weibullův modul, parametr měřítka a napětí, pod které nedochází k porušení součásti.

Procesy a stavy na entitě - Při zatěžování keramických součástí dochází ke vzniku a růstu jejich deformace a napjatosti. Při určitém napětí, které se u jednotlivých kusů daných součástí liší, dojde k nestabilnímu šíření některé z trhlin a ke křehkému lomu. Úloha je řešena na úrovni makromechaniky kontinua, procesy, které probíhají ve struktuře materiálu, není možné popsat, a proto je tato množina prázdná. Protože tyto procesy jsou ovšem podstatné pro chování keramické součásti, budou popsány pomocí pravděpodobnosti.

Projevy entity do okolí - U všech keramických součástí dochází k jejich deformaci. U prutového tělesa dochází k jeho průhybu, u válcového tělesa k jeho protažení a deformaci v radiálním směru. U keramické hlavice k jejímu stlačení, deformaci v radiálním směru a k jejímu pohybu po dříku. Deformace zapříčiňuje vznik napjatosti, prutové u prutového tělesa, trojosé u válcového tělesa a hlavice. Normálové tahové napětí

způsobuje rozevírání trhlin, které jsou v materiálu, což se projevuje růstem pravděpodobnosti porušení. V místě vazeb dochází k přenosu zatížení do okolí.

Důsledky projevů do okolí - Důsledkem růstu napjatosti je růst pravděpodobnosti porušení a tedy velmi pravděpodobný lom při vysokém napětí. Dále to může být nepřípustně velká hodnota deformace, která může způsobit mezní stav deformace. Vzhledem k vysokému modulu pružnosti keramiky je deformace malá. Případný mezní stav deformace neovlivňuje pravděpodobnost porušení, a proto nebude při dalších výpočtech uvažován, protože jeho posouzení není cílem této práce.

5.2 Volba metody

Pro výpočet bude v prvním kroku nutné určit deformaci a napjatost. Všechny podstatné veličiny, které jsou popsány v systému podstatných veličin, umožňuje zahrnout metoda konečných prvků. Tato metoda umožňuje také nelineární řešení kontaktní úlohy. Dle geometrie součástí, budou pro prutové těleso použity rovinné prvky PLANE s předpokladem rovinné napjatosti. Prutové prvky nebudou použity, protože neumožňují v dalším kroku určit pravděpodobnost porušení. Pro ostatní výpočty budou použity objemové prvky SOLID. Pro kontaktní úlohu budou použity prvky CONTA a TARGE.

Nabízí se otázka, zda použít lineární nebo kvadratické prvky. Kvadratické prvky umožňují přesněji popsat napjatost i při menším počtu prvků. Ovšem vztahy pro výpočet pravděpodobnosti porušení přebírají tuto diskretizaci a při některých výpočtech může být, vzhledem k diskretizaci objemu, výhodnější použití méně přesných lineárních prvků při hustější síti. Toto bude v následujících výpočtech ověřeno.

Metoda konečných prvků nedokáže zahrnout vliv trhlin, které jsou v keramickém materiálu, protože jejich geometrie a topologie není známá. Jejich vliv je popsán pomocí Weibullový teorie nejslabšího článku. Protože napětí bylo pro tento výpočet určeno pomocí diskretizace, bude tato diskretizace využita i pro nahrazení integrálních vztahů sumou.

Pro verifikaci výpočtů by bylo vhodné provést experimentální ověření, zejména pro výpočet pravděpodobnosti porušení s uvažováním všech hlavních napětí, kdy tato napětí jsou nenulová. U ostatních variant bude provedena alespoň verifikace pomocí kombinace různých postupů. Experiment, který by vedl k ověření výpočtů, ovšem není cílem práce a podmínky nutné pro jeho provedení přesahují možnosti řešitele.

5.3 Software a hardware

Pro výpočty pomocí metody konečných prvků byl použit program ANSYS Mechanical APDL 18 a pro další zpracování dat MATLAB 14. Výpočty byly prováděny na počítačové učebně ústavu mechaniky těles.

Některé výpočty byly prováděny na notebooku Acer s parametry: Procesor: Intel Core i7-4720HQ s frekvencí 2,6GHz, RAM: 8GB, Operační systém: Windows 8.1.

6 VÝPOČET PRO JEDNOOSOU NAPJATOST

Pro výpočet pravděpodobnosti porušení součásti namáhané jednoosou napjatostí je možné podle [5] využít následující vztah.

$$P_f = 1 - e^{-\int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m dV} \quad (27)$$

Pokud je pro výpočet napětí v součásti použita metoda konečných prvků, pak integrál přes objem součásti přejde v sumu přes jednotlivé uzly jednotlivých prvků.

V každém uzlu se stýká několik prvků a napětí v tomto uzlu nemusí být pro všechny prvky stejné. Toto je způsobeno případnou nespojitostí derivací aproximačních funkcí. Proto bylo napětí vyhodnocováno v každém uzlu, pro každý prvek zvlášť a poté k němu byla přiřazena daná část objemu prvku. Tato část objemu byla volena jako podíl objemu prvku a počtu jeho uzlů. Poté je tedy možné upravit vzorec pro výpočet pravděpodobnosti porušení takto.

$$P_f = 1 - e^{-\sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{\sigma_{ij} - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m \Delta V_{ij} \right]} \quad (28)$$

Platí, že N - počet prvků

M - počet uzlů jednotlivých prvků

σ_{ij} - napětí v j-tém uzlu i-tého prvku

ΔV_{ij} - část objemu i-tého prvku přiřazená j-tému uzlu

m - Weibullův modul

σ_0 - normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu

σ_u - napětí, pod které nedochází k porušení

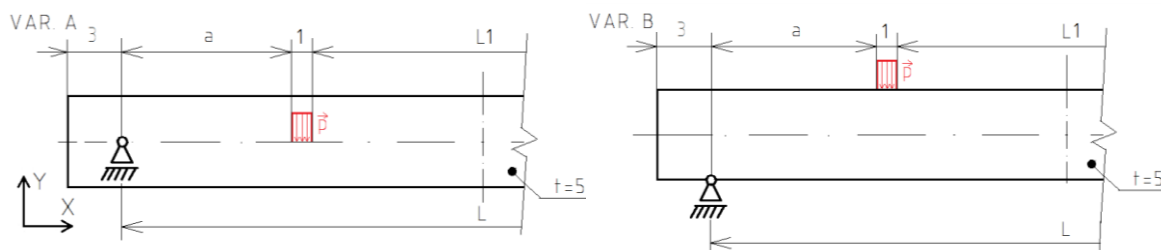
Hodnoty m, σ_0 a σ_u jsou parametry Weibullova rozdělení pravděpodobnosti porušení.

K lomu keramiky dochází pouze při působení tahového napětí. Navíc platí, že přírůstek pravděpodobnosti porušení způsobí jen to napětí, které je větší než σ_u . V opačném případě je přírůstek pravděpodobnosti porušení v daném uzlu roven nule.

Výpočty a výsledky uvedené v kapitolách 6.1 - 6.5 byly publikovány ve sborníku z konference Engineering Mechanics 2017 pořádané ve Svatce viz [35].

6.1 Výpočtový model

Pravděpodobnost porušení byla určena pro keramický vzorek namáhaný čtyřbodovým ohybem. Pro výpočet byly použity 2 varianty. Varianta A uvažuje, v souladu s prutovou teorií, vazby a zatížení na střednici. Naopak varianta B je uvažuje v místech, kde skutečně působí. Obrázek 6.1 tyto varianty porovnává.



Obrázek 6.1: Uvažované varianty výpočtu [35]

Model geometrie - Pro výpočet byl uvažován vzorek, který je znázorněn na obr. 6.1. Rozměry byly voleny jako: $L1 = 19 \text{ mm}$, $a = 9,5 \text{ mm}$. Výška i tloušťka vzorku byly 5 mm .

Model zatížení - Součást byla zatížena silou 500 N . Protože bodové zatížení není reálně možné, bylo toto zatížení při některých výpočtech pro menší ovlivnění výsledků rozděleno na plochu o délce 1 mm a šířce rovné celé šířce prutu, tedy nahrazeno tlakovým zatížením $p = 100 \text{ MPa}$ (viz obr. 6.1).

Model vazeb - Součást byla na obou stranách podepřena. V místě podpory bylo zamezeno posuvu ve směru osy Y . Při výpočtu pomocí MKP bylo využito symetrie prutu. Pro výpočet tedy byla použita pouze jeho polovina se zamezenými posuvy ve směru osy X na ose symetrie.

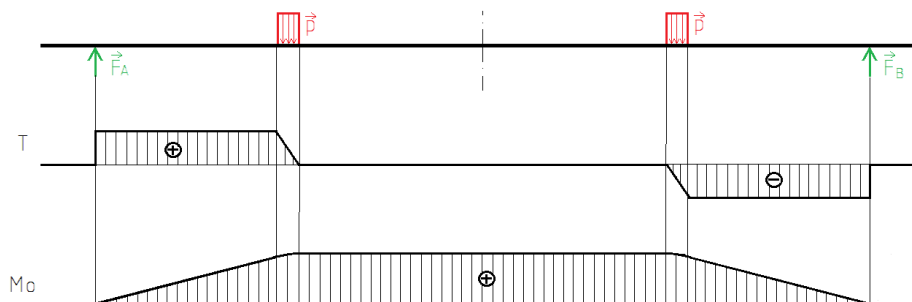
Model materiálu - Jako materiál byla uvažována keramika Al_2O_3 . Bylo předpokládáno, že materiál je izotropní, lineární, elastický s elastickými konstantami $E = 390 \text{ GPa}$, $\mu = 0,24$. [4] Pro výpočet pravděpodobnosti porušení bylo nutné znát parametry Weibullova rozdělení, ty byly uvažovány jako $m = 7,19$, $\sigma_0 = 473,8 \text{ MPa mm}^{\frac{3}{7,19}}$, $\sigma_u = 0 \text{ MPa}$. [31]

6.2 Určení napjatosti

Napjatost pro výpočet pravděpodobnosti porušení byla určena pomocí metody konečných prvků. Správnost tohoto výpočtu byla ověřena analytickým výpočtem.

6.2.1 Analytický výpočet napjatosti

Analytický výpočet napjatosti byl proveden pro variantu A. Tato varianta má vazby i zatížení na střednici, což je ve shodě s prutovými předpoklady a umožňuje tedy provedení analytického výpočtu. Na obr. 6.2 je znázorněno úplné uvolnění prutu.



Obrázek 6.2: Úplné uvolnění a průběh výsledných vnitřních účinků

Protože se jedná o soustavu sil na rovnoběžných nositelkách a neznámé jsou dvě síly, je úloha staticky určitá. Z rovnic rovnováhy dále platí, že

$$F_A = F_B = p \cdot 1 \cdot 5 = 500 \text{ N} \quad (29)$$

Dále je možné určit výsledné vnitřní účinky (viz obr. 6.2). Z VVÚ vyplývá, že kritické místo je mezi zatíženími, kde je následující hodnota ohybového momentu.

$$M_{\max} = p \cdot t(a + 0,5) = 5\,000 \text{ Nmm} \quad (30)$$

Protože prut má čtvercový průřez s délkou hrany $h = 5 \text{ mm}$, tak kvadratický moment k ose Y, která je zároveň osou symetrie průřezu má následující hodnotu.

$$J_y = \frac{h^4}{12} = 52,083 \text{ mm}^4 \quad (31)$$

Poté již byla určena maximální hodnota napětí v místě mezi zatíženími.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_o}{J_y} \frac{h}{2} = 240 \text{ MPa} \quad (32)$$

Pro výpočet pravděpodobnosti porušení je uvažována jednoosá napjatost. Aby tento předpoklad platil, není uvažováno smykové napětí od posouvající síly. Toto napětí nemusí být uvažováno, protože je prut štíhlý a tedy platí, že výška prutu je větší než vzdálenost mezi zatížením a vazbou. Pak je možné ztotožnit napětí σ s prvním hlavním napětím, které je jediné nenulové hlavní napětí. Tento výpočet neplatí v okolí zatížení a vazeb, kde je reálná napjatost jiná.

6.2.2 Výpočtový model pro výpočet pomocí MKP

Pomocí MKP bylo provedeno několik výpočtů. Varianty A a B (viz obr. 6.1) byly modelovány jako rovinné. Protože je součást symetrická, byla modelována vždy pouze polovina součásti. Protože se jedná o prut namáhaný ohybem, je vzhledem k zatížení možné očekávat, že se napětí ve směru tloušťky nebude měnit a jeho hodnota bude 0. V tomto případě je možné předpokládat rovinnou napjatost.

Pro diskretizaci byly použity rovinné prvky PLANE 182. Geometrie prvků umožňuje vytvořit téměř pravidelnou síť, což snižuje numerické chyby při výpočtu.

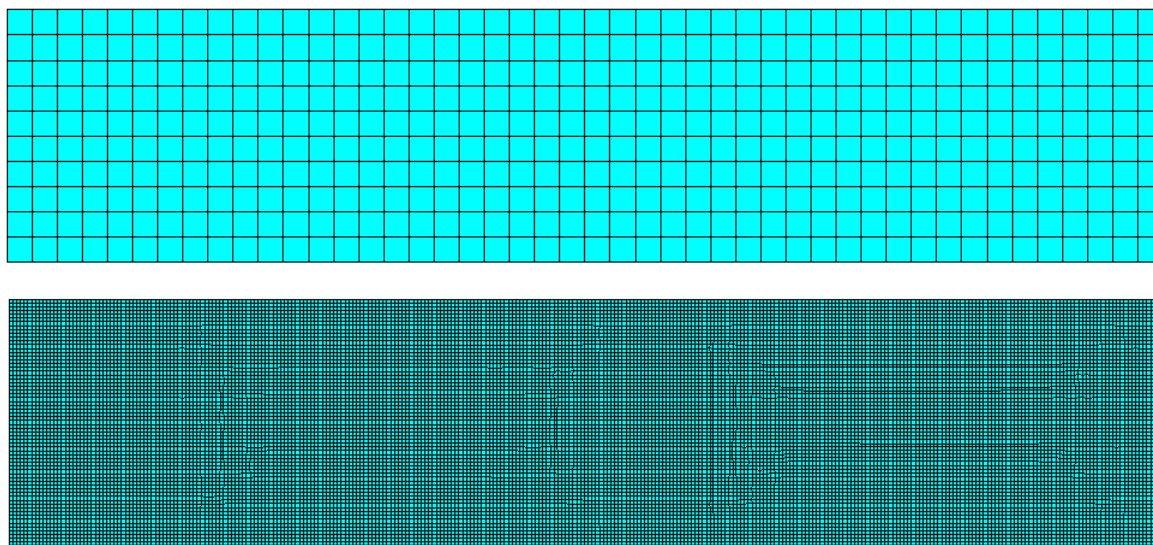
Zatížení a materiál byly modelovány podle předchozích modelů. Platí tedy, že zatížení bylo aplikováno jako liniové na čáru o délce 1 mm. U varianty A leží tato oblast na střednici, u varianty B působí tlak na povrchu tělesa.

Materiál byl modelován jako izotropní, lineární, elastický s elastickými konstantami uvedenými v kapitole 6.1.

Vazby byly modelovány tak, že v místě podpory byl zamezen posuv uzlu ve směru osy Y a na ose symetrie byl ve všech uzlech zamezen posuv ve směru osy X. Tímto byl model pevně určen v prostoru a nemohlo dojít k jeho pohybu jako tuhého celku, což je nutná podmínka pro konvergenci MKP.

Pro výpočet byly použity čtyři hustoty diskretizace. Na následujícím obrázku jsou znázorněny sítě pro variantu s nejnižší a nejvyšší hustotou diskretizace. Pro varianty A a B

byly sítě stejné, lišily se pouze umístěním zatížení a vazby. Ostatní diskretizace byly vytvořeny obdobně pouze s jiným počtem prvků.



Obrázek 6.3: Porovnání diskretizace A (nejnižší hustota) a diskretizace D (nejvyšší hustota)

6.2.3 Výsledná napětí určená pomocí MKP

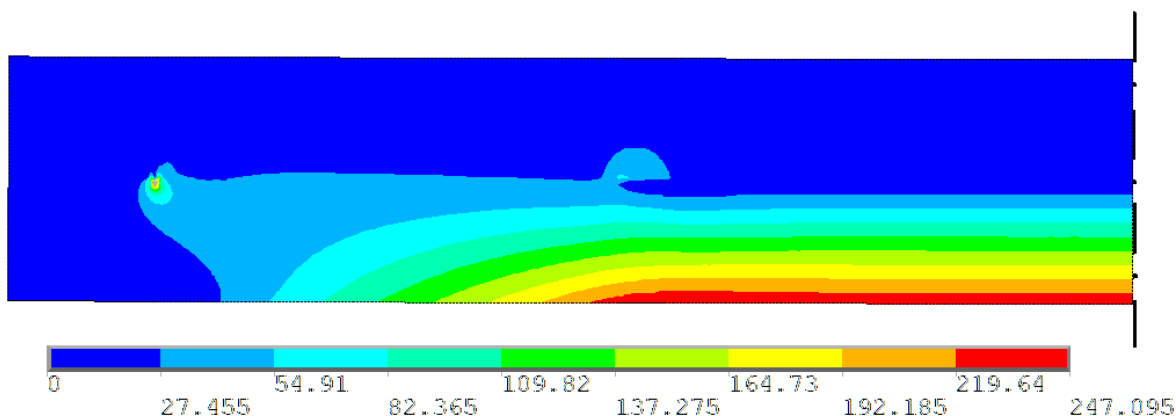
V tabulce 6.1 je uvedeno porovnání maximálních hodnot prvních hlavních napětí a maximálních hodnot prvních hlavních napětí na ose symetrie pro varianty A a B v závislosti na různých diskretizacích. Velikost prvku, která je uvedena v tabulce uvádí velikost prvku v místě, kde je možné vytvořit mapovanou síť. Vzhledem k nutnosti existenci uzlů v místech pro vazby a zatížení na střednici, nebylo možné vytvořit mapovanou síť po celém modelu pro všechny diskretizace. Jak znázorňuje předchozí obrázek, jsou však i tyto sítě téměř pravidelné.

Tabulka 6.1: Porovnání maximálních hodnot napětí a maximálních hodnot napětí na ose symetrie pro různé hustoty diskretizace pro varianty A a B

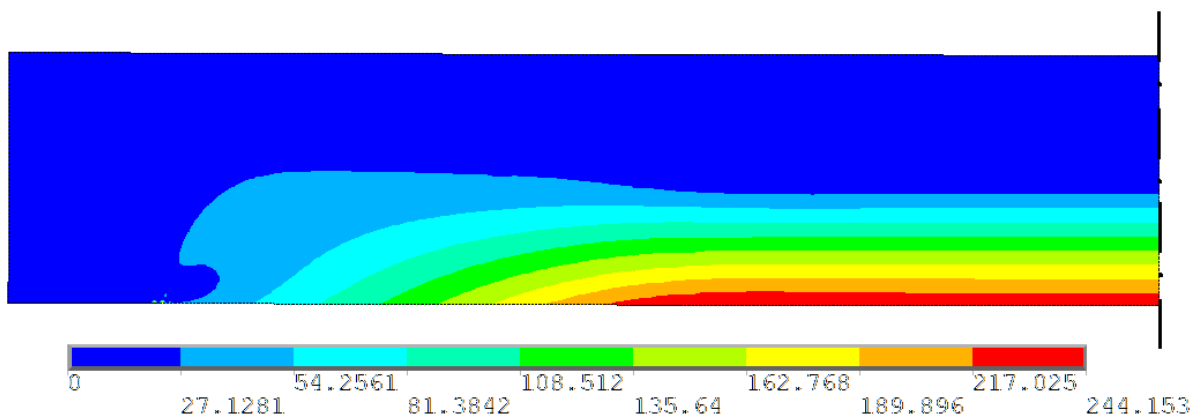
Diskretizace	A	B	C	D
Velikost prvku [mm]	0,5	0,25	0,1	0,076
Počet prvků [-]	460	1840	7360	20 064
$\sigma_{1\max A}$ [MPa]	246,1	247,0	247,1	247,1
$\sigma_{1\max A-osa}$ [MPa]	240,8	240,6	240,3	240,2
$\sigma_{1\max B}$ [MPa]	244,1	244,3	244,3	244,2
$\sigma_{1\max B-osa}$ [MPa]	240,7	240,3	240,3	240,2

Z tabulky 6.1 vyplývá, že s rostoucí hustotou diskretizace dochází u obou variant jen k malé změně napětí. Do této tabulky nebylo zahrnuto napětí v místech vazeb, kde dochází k nereálné koncentraci napětí kvůli zamezení posuvu uzlu.

Maximální hodnoty napětí na ose symetrie, která je již dostatečně vzdálená od zatížení, jsou tedy přibližně stejné jako hodnoty získané analytickým výpočtem. Na následujících obrázcích jsou znázorněny průběhy prvních hlavních napětí pro variantu A a variantu B, vždy při nejhustější diskretizaci (diskretizace D).



Obrázek 6.4: Průběh prvního hlavního napětí varianty A, diskretizace D [35]



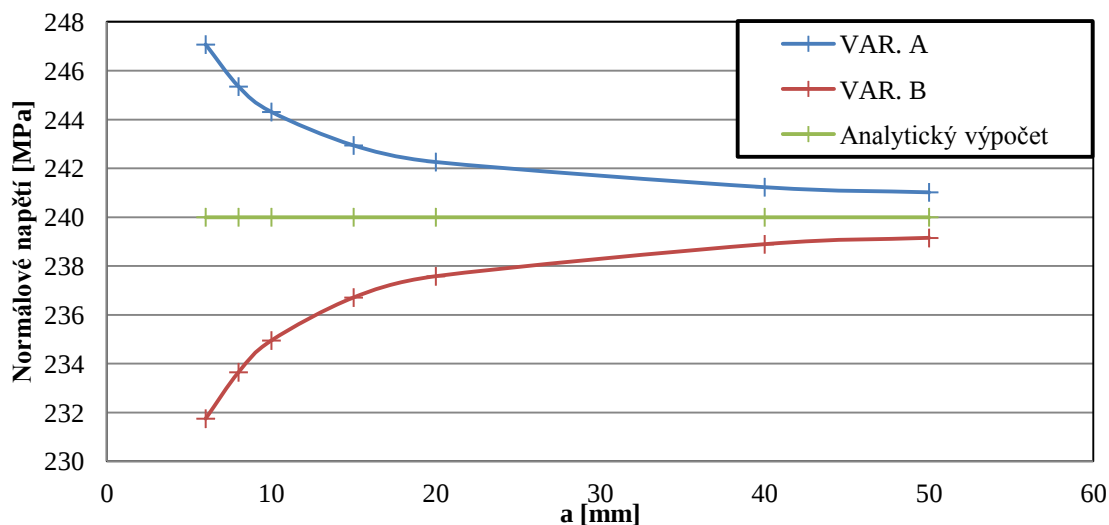
Obrázek 6.5: Průběh prvního hlavního napětí varianty B, diskretizace D

6.2.4 Vliv odchylky od prutových předpokladů

Jak již bylo zmíněno, analytický výpočet neplatí v místech zatížení a vazeb. Výpočet pomocí MKP toto dokáže lépe vystihnout, i když v blízkosti uzlu se zamezeným posuvem dochází k nereálné koncentraci napětí. Pro tento výpočet bylo místo tlakového zatížení použito zatížení silou, staticky ekvivalentní s dříve použitým tlakem. Postupně byla měněna délka a velikost zatěžující síly tak, aby byl maximální ohybový moment stále stejný. Pro obě varianty výpočtu bylo zjišťováno maximální napětí na okraji příčného průřezu, ve kterém působí zatěžující síla a to vyneseno do obr. 6.6.

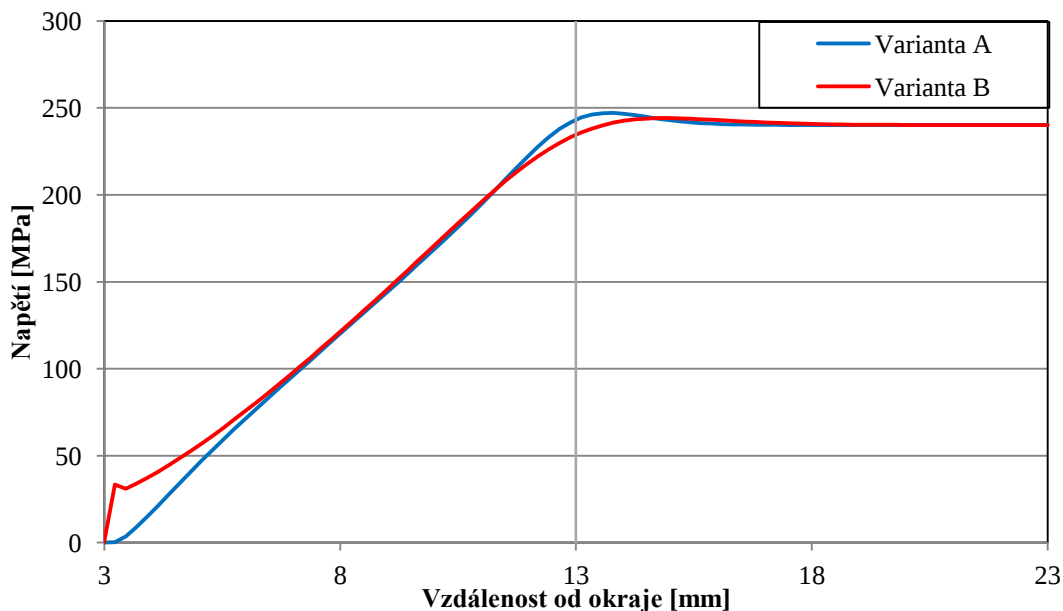
Z obr. 6.6 tedy vyplývá, že s rostoucí délkou a se hodnoty v tomto místě postupně blíží k maximální hodnotě napětí z analytického výpočtu, což je způsobeno větší štíhlostí prutu. Pokud jsou vazby umístěny na střednici, tak se hodnoty blíží k teoretické hodnotě shora

a naopak, pokud jsou vazby v místech, kde reálně působí zatížení, blíží se hodnoty napětí zdola.



Obrázek 6.6: Maximální hodnoty napětí v příčném průřezu, kde působí zatěžující síla v závislosti na délce a (konstantní ohybový moment) [35]

Dále byl pro obě varianty vykreslen průběh napětí po cestě, která byla ztotožněna se spodní hranou, tedy místem, kde se objevuje největší tahové napětí (viz obr. 6.7). Toto bylo provedeno pro modely s původní délkou $a = 9,5$ mm.



Obrázek 6.7: Průběh napětí po cestě pro varianty A a B

Z tohoto grafu vyplývá, že u obou variant je v místech mimo vazby napětí téměř stejné. U varianty B (vazba na povrchu), se objevuje výrazná změna napětí ve vzdálenosti od okraje 3 mm. Tento skok je způsoben zamezením posuvu uzlu v tomto místě, reálné napětí je zde jiné. K další odchylce obou grafů dochází ve vzdálenosti 13 mm (na grafu vyznačena svislou šedou čarou). To je oblast, kde kvůli působícímu zatížení dochází k odchylce od prutových předpokladů. Z obrázku vyplývá, že napětí pro variantu A

je větší než 240 MPa a naopak pro variantu B je napětí menší než tato hodnota. Toto je v souladu s výsledky uvedenými v obr. 6.6. Při dalším vzdalování se od okraje dochází k překmitnutí napětí, kdy u obou variant napětí roste nad teoretickou hodnotu 240 MPa a poté se k této hodnotě blíží shora. Tyto odchylky mohou způsobit různou pravděpodobnost porušení součásti i přesto, že jejich hodnoty jsou malé.

6.3 Script pro výpočet pravděpodobnosti porušení

6.3.1 Vytvoření scriptu

Pokud jsou pro daný materiál známy všechny parametry Weibullova rozdělení, pak je možné určit pravděpodobnost porušení pomocí rovnice (28). Vzhledem k počtu prvků použitých při výpočtu pomocí MKP, bylo nutné provést výpočet pravděpodobnosti porušení pomocí počítače.

Obrázek 6.8 popisuje část scriptu, který provádí výpočet sumy v exponentu. Pro tento výpočet, byly předpokládány prvky PLANE 182, které mají 4 uzly. Dále byl tento script upraven tak, aby dokázal rozlišit, zda se jedná o čtyřúhelníkový nebo trojúhelníkový prvek. Tato úprava spočívá pouze ve změně počtu uzlů a tedy i části objemu přiřazené danému uzlu.

```
%Vypocet sumy v exponentu
for i=1:pocet_prvku
    for j=1:4
        sigma=pole{i}(2,j);
        if sigma>sigmaau
            suma=suma+pole{i}(7,j)*(((sigma-sigmaau)/sigma0)^m);
        end
    end
end
```

Obrázek 6.8: Výpočet sumy v exponentu pro čtyřuzlové prvky

Při převádění dat do Matlabu byly vstupní údaje uloženy do jednotlivých polí a tedy výraz $\text{pole}\{i\}(2,j)$ určuje hodnotu prvního hlavního napětí v daném uzlu a $\text{pole}\{i\}(7,j)$ objem, který byl k danému uzlu přiřazen, zde tedy čtvrtina objemu prvku.

Pokud byla při výpočtu napětí pomocí MKP využita symetrie, je vzhledem k předpokládané symetrii výsledků možné tuto symetrii využít i při výpočtu pravděpodobnosti porušení a to tak, že suma, která vznikne součtem přírůstků pravděpodobnosti porušení v jednotlivých uzlech, se vynásobí počtem symetrických částí. Pokud je tedy využita jedna osa symetrie, pak je výsledná suma dvojnásobná. Takto vytvořený script byl dále využit k následujícím výpočtům.

6.3.2 Ověření správnosti scriptu pro výpočet pravděpodobnosti porušení

Protože teorie vztahující se k výpočtu pravděpodobnosti porušení součásti byla upravena tak, aby bylo možné použít napětí vypočítané pomocí MKP, došlo k vnesení numerické

chyby do výpočtu. Funkčnost scriptu vytvořeného v předchozí kapitole a ověření toho, že numerické chyby nejsou příliš vysoké, byly otestovány pomocí následujícího postupu.

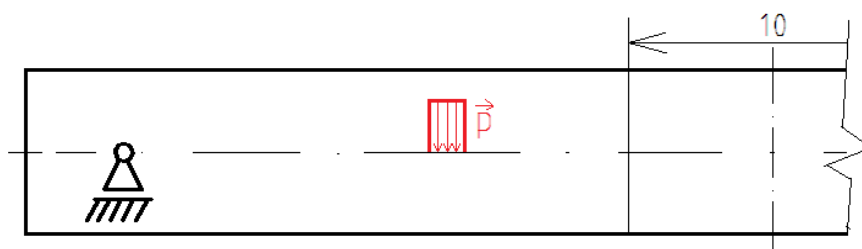
Pro výpočet pravděpodobnosti porušení součásti namáhané prostým ohybem byl odvozen následující vztah. [5]

$$P_f = 1 - e^{-B} \quad (33)$$

Kde riziko porušení B lze pro prostý ohyb prutu s obdélníkovým příčným průřezem vyjádřit následovně.

$$B = \frac{V}{2(m+1)} \cdot \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \right)^m \quad (34)$$

Protože tento výpočet je možný pouze pro prostý ohyb, není možné ho použít pro celý prut, ale pouze pro část mezi zatíženími. Aby byl eliminován vliv chyby, která je v místě zatížení, byla pro tento výpočet vybrána oblast vzdálená do 5 mm na obě strany od osy symetrie (viz následující obrázek).



Obrázek 6.9: Prut s vyznačenou částí, na které je počítána pravděpodobnost porušení

Objem vybrané části je $V = 250 \text{ mm}^3$, a protože maximální hodnota napětí podle analytického výpočtu je 240 MPa, lze riziko rušení vyjádřit takto.

$$B = \frac{V}{2(m+1)} \cdot \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \right)^m = 0,1148 \quad (35)$$

Poté je tedy možné vyjádřit pravděpodobnost porušení.

$$P_f = 1 - e^{-B} = 10,84 \% \quad (36)$$

Pro porovnání byly vybrány pouze prvky ve vybrané oblasti (viz obr. 6.9) a pro ně byl proveden výpočet pravděpodobnosti porušení pomocí scriptu v Matlabu. Pro výpočet s hustotou diskretizace C vychází pravděpodobnost porušení.

$$P_{fMKP} = 11,01 \% \quad (37)$$

Relativní chyba pravděpodobnosti porušení vztažená k analytickému výpočtu je tedy 1,51 %. Pravděpodobnost vypočítaná pomocí MKP je mírně vyšší, což souhlasí s tím, že výsledky MKP ukazují mírně vyšší napětí než analytický výpočet. Diskretizaci D nebylo možné pro tento výpočet použít, protože hranice vybrané oblasti, pro kterou

se počítala pravděpodobnost porušení, prochází prvky. Výsledky zjištěné pomocí scriptu se tedy blíží výsledkům určeným analytickým způsobem.

6.4 Výpočet pravděpodobnosti porušení

Po ověření správnosti výpočtového modelu byla pomocí vytvořeného scriptu určena pravděpodobnost porušení součásti. Výpočet byl proveden pro obě varianty (A i B). Aby bylo možné posoudit přesnost, byl výpočet proveden pro všechny diskretizace.

Protože v místě vazby dochází vlivem singularity k nereálné koncentraci napětí, byl proveden výpočet pravděpodobnosti porušení pro součást s těmito prvky a také byla vypočítána pravděpodobnost porušení součásti, ve které nebyly prvky v blízkosti vazby do výpočtu zahrnuty. V tabulce 6.2 jsou porovnány jednotlivé výsledky pro obě varianty (varianta A - vazby na střednici, varianta B - vazby mimo střednici) se zahrnutím nebo bez zahrnutí prvků v blízkosti vazeb.

Tabulka 6.2: Porovnání výsledků výpočtu pravděpodobnosti porušení součásti [35]

Diskretizace	A	B	C	D
Počet prvků [-]	460	1840	7360	20 064
$P_{f \text{ varA-s vazbami}} [\%]$	27,5	24,7	34,6	90,7
$P_{f \text{ varA-bez vazeb}} [\%]$	27,5	24,4	23,6	23,4
$P_{f \text{ varB-s vazbami}} [\%]$	27,1	24,0	23,2	23,2
$P_{f \text{ varB-bez vazeb}} [\%]$	27,1	24,0	23,2	23,1

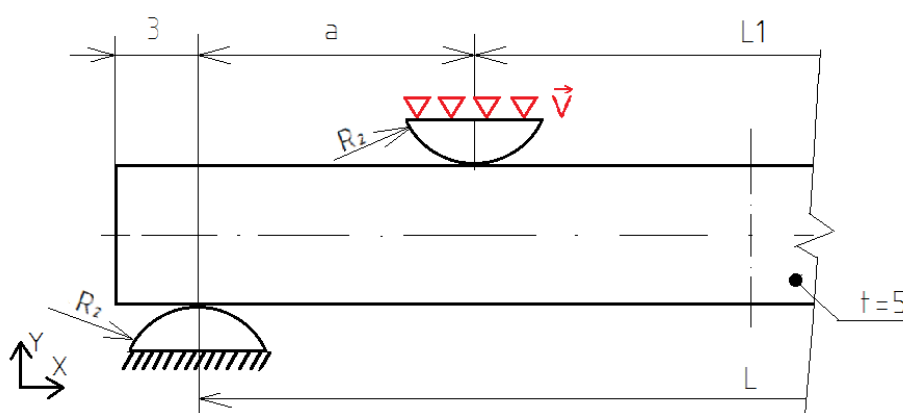
Pokud jsou u varianty A uváženy i prvky v blízkosti vazeb, u kterých dochází s rostoucí hustotou diskretizace k růstu napětí kvůli singularitě, tak od určité hustoty diskretizace převládá vliv těchto prvků nad vlivem ostatních prvků. Pravděpodobnost porušení se tedy s rostoucí hustotou diskretizace blíží k 100 %. U varianty B jsou napětí v místě vazby mnohem menší, singularita tedy mnohem méně ovlivňuje výslednou napjatost. S rostoucí hustotou diskretizace i zde napětí v místě vazby roste a postupně dochází ke zvyšování pravděpodobnosti porušení. První náznak tohoto děje je možné vidět v rozdílu pravděpodobností porušení u diskretizace D. Při odstranění prvků v okolí vazeb konverguje pravděpodobnost porušení k ustálené hodnotě.

Přesto, že pro všechny varianty byla vypočtená napětí realistická a jejich průběhy dobře popisovaly napjatost (viz tab. 6.1), tak mezi variantami A a B dochází k větší změně pravděpodobnosti porušení a její změny se zmenšují až u dalších diskretizací. Toto může být způsobeno tím, že ve výrazu pro výpočet pravděpodobnosti porušení se vyskytuje objem části prvku. Proto je pro výpočet pravděpodobnosti porušení nutné volit vyšší hustoty diskretizace.

Pravděpodobnost porušení součásti vychází u varianty A mírně vyšší než u varianty B. Tato skutečnost odpovídá již dříve uvedeným výsledkům napjatosti, kdy u varianty A vychází mírně vyšší hodnoty maximálního napětí.

6.5 Posouzení vlivu vazeb pomocí kontaktní úlohy

Při předchozích výpočtech docházelo v místech vazeb ke koncentraci napětí, která zkreslovala vypočítané výsledky. Pro lepší určení pravděpodobnosti porušení bylo nutné modelovat úlohu jako kontaktní. Vazby a zatížení byly nahrazeny částmi ocelových válců o různých poloměrech, konkrétně $R_2 = 0,5; 1; 2; 4 \text{ mm}$. Obrázek 6.10 znázorňuje výpočtový model použitý pro kontaktní úlohu.



Obrázek 6.10: Výpočtový model pro kontaktní úlohu, vazby jsou modelovány jako části dvou ocelových válců

Pro ověření správného nastavení kontaktní dvojice byl kromě numerického výpočtu také proveden analytický výpočet pomocí Hertzovy teorie.

6.5.1 Výpočet pomocí Hertzovy teorie

Hertzova teorie umožňuje určit průběhy napětí v kontaktní oblasti. Pro ověření správnosti numerického výpočtu budou ověřeny kontaktní tlaky a polovina šířky kontaktní oblasti. Předpoklady pro využití Hertzovy teorie jsou následující.

- Stýkající se povrchy mají speciální tvary, v tomto případě se jedná o styk válce s rovinou
- Materiály stýkajících se těles jsou lineární elastické, zanedbává se tedy vliv plastické deformace
- Nejsou uvažovány pasivní odpory

Pro výpočet byly uvažovány následující parametry. Při výpočtu kontaktních tlaků bylo vycházeno z [36].

Parametry keramické součásti

$$E_1 = 390 \text{ GPa}$$

$$\mu_1 = 0,24$$

$$R_1 = \infty$$

$$l = 5 \text{ mm}$$

Parametry ocelového válce

$$E_2 = 210 \text{ GPa}$$

$$\mu_2 = 0,33$$

$$R_2 = 0,5; 1; 2; 4 \text{ mm}$$

$$l = 5 \text{ mm}$$

Poloměr keramické součásti je roven nekonečnu, protože se jedná o typ kontaktu, kdy se dotýká válec roviny. Dále je pro výpočet nutné znát výslednou stykovou sílu. V tomto případě je velikost této síly rovna zatěžující síle a tedy $F = 500 \text{ N}$.

Z těchto parametrů je možné následujícím vztahem určit povinu šířky kontaktní oblasti.

$$b = \sqrt{\frac{2 F}{\pi l} \frac{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}}} \quad (38)$$

Poté co je známa polovina šířky kontaktní oblasti, je možné určit kontaktní tlak.

$$p_{max} = \frac{2 F}{\pi b l} \quad (39)$$

V následující tabulce jsou uvedeny výsledky pro různé poloměry podpory.

Tabulka 6.3: Výsledky výpočtu podle Hertzovy teorie [35]

R_2 [mm]	0,5	1	2	4
b [mm]	0,026	0,029	0,041	0,058
p_{max} [MPa]	-3 091,8	-2186,2	-1545,9	-1093,8

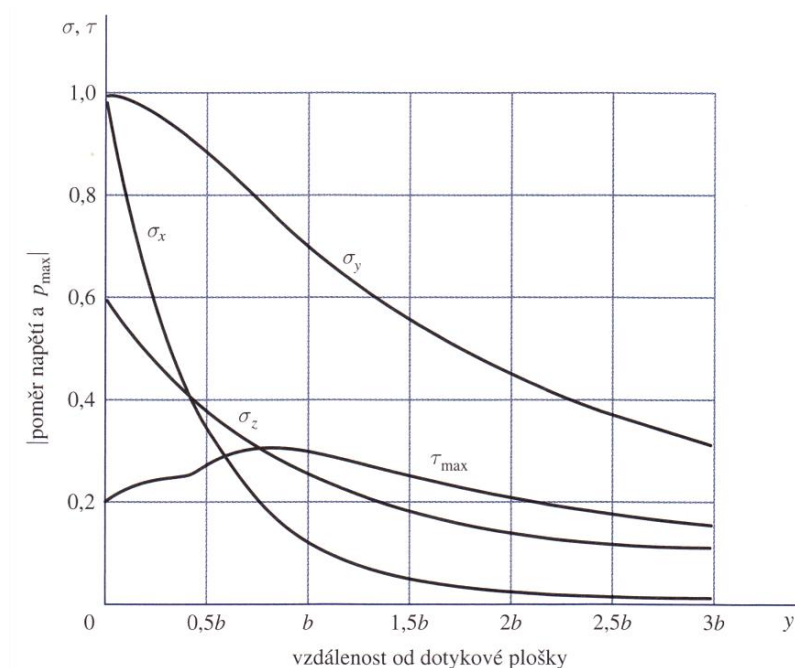
Dále je možné podle následujících vztahů určit průběhy napětí na ose kontaktu v jednotlivých směrech.

$$\sigma_x = -p_{max} \left(\frac{1 + 2 \left(\frac{y}{b} \right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b} \right)^2}} - 2 \left| \frac{y}{b} \right| \right) \quad (40)$$

$$\sigma_y = \frac{-p_{max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b} \right)^2}} \quad (41)$$

$$\sigma_z = -2\mu p_{max} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y}{b} \right)^2} - \left| \frac{y}{b} \right| \right) \quad (42)$$

Teoretické hodnoty průběhů napětí, určené pomocí těchto vztahů, jsou uvedeny na následujícím obrázku



Obrázek 6.11: Průběh napětí na ose kontaktu [36] (osy byly upraveny podle použitého souřadného systému)

Z tohoto obrázku tedy vyplývá, že napětí ve směru os X a Y by v místě kontaktu měla být stejná a rovna kontaktnímu tlaku. Do vzdálenosti $0,436b$ je prvním hlavním napětím napětí v ose Z. Toto napětí je tlakové, a proto při výpočtu uvažujícím jedno hlavní napětí neovlivňuje pravděpodobnost porušení. Poté je první hlavní napětí rovno napětí v ose Y.

6.5.2 Vytvoření výpočtového modelu pro výpočet pomocí MKP

Součást byla opět modelována jako rovinná. Toto zjednodušení, jak již bylo řečeno, je nedokonalé v tom, že v nejbližší oblasti kontaktu se objevuje napětí v ose Z, které výpočet nedokáže vystihnout. Napětí v ose Z v blízkosti kontaktu je ovšem tlakové, a proto je možné toto zjednodušení provést.

Dále byla vzhledem k symetrii modelována pouze polovina součásti.

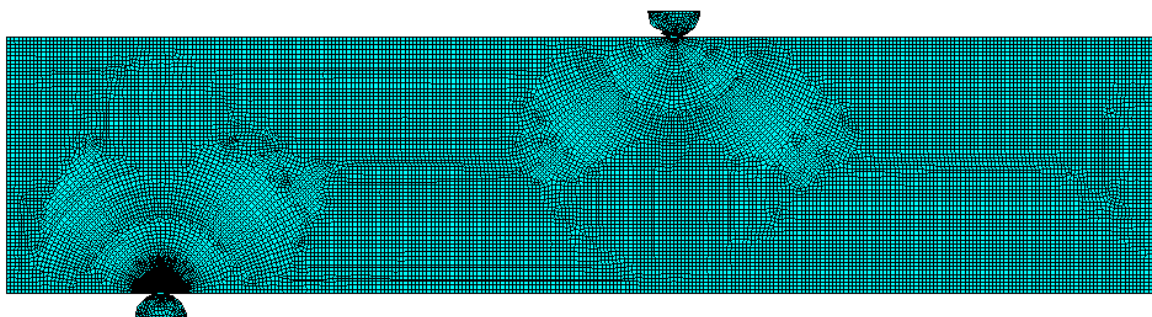
Model materiálu byl použit stejný jako v předchozích případech, tedy lineární, izotropní, elastický pro keramickou součást i pro modelování podpor, které byly předpokládány jako ocelové.

U součásti bylo na ose symetrie zamezeno posuvům ve směru osy X. Zbývajících stupeň volnosti byl zamezen kontaktní dvojicí, kde dochází ke kontaktu podpory a součásti. Podpory pro tento výpočet byly modelovány jako části kruhů, které byly na spodní hraně vetknuty do základového tělesa.

Silové zatížení, bylo nahrazeno deformačním, tedy posuvem v ose Y aplikovaným na horní čáru částí kruhů. Toto zatížení bylo voleno tak, aby se součet výsledných stykových sil jednotlivých uzlů rovnal hodnotě, která platí pro analytický výpočet, tedy $F = 500 \text{ N}$.

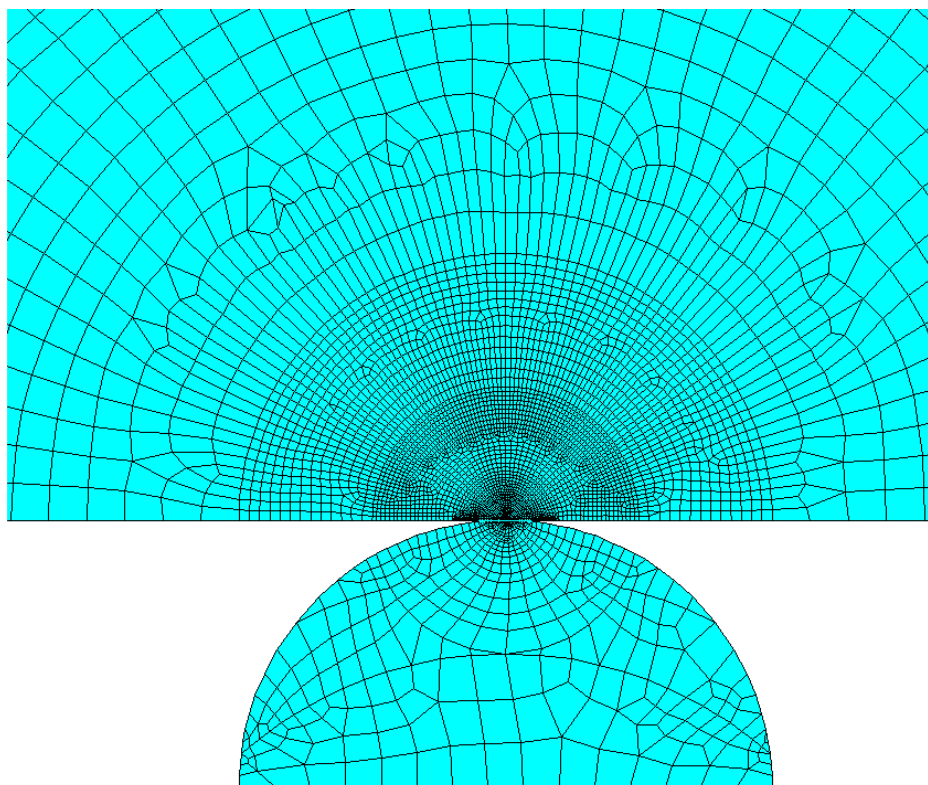
Při tvorbě sítě bylo vycházeno z diskretizace D z předchozího výpočtu, aby ovlivnění výsledků sítě bylo co nejmenší. Pro diskretizaci součást byly použity prvky PLANE 182 s předpokladem rovinné napjatosti. V místě kontaktu válců se součástí byla síť zjemněna, aby zde bylo vystiženo napětí, které s blížícím se kontaktem prudce roste. Při této změně diskretizace se v několika místech objevil trojúhelníkový prvek. Tyto prvky se nenacházely v místech, kde by docházelo k prudké změně napětí, které by ovlivnilo výslednou pravděpodobnost porušení, a proto byly v modelu ponechány i přesto, že v daném místě snižují přesnost výsledků.

Realizace samotného kontaktu proběhla tak, že v kontaktní oblasti byly použity kontaktní prvky. Protože pro tvorbu sítě byly použity čtyřuzlové rovinné prvky, byly pro výpočet kontaktu použity jim odpovídající prvky TARGE 169 a CONTA 172. Prvky TARGE byly použity na oblast kontaktu na modelu součásti a kontaktní prvky CONTA na povrch podpor. Síť pro všechny varianty byly vytvořeny podobným způsobem. Na následujícím obrázku je znázorněna síť pro poloměr válců $R_2 = 0,5 \text{ mm}$ a na obr. 6.13 je znázorněn detail kontaktní oblasti.



Obrázek 6.12: Síť pro výpočet kontaktní úlohy

Protože při zatěžování bude docházet ke změně kontaktní plochy, je nutné řešit úlohu jako nelineární. Pro výpočet byla použita nejčastěji užívaná metoda augmented Lagrange method, která by měla zajistit dostatečně přesné výsledky a malé hodnoty penetrací. Pro výpočet kontaktu o poloměru $R_2 = 4 \text{ mm}$ musela být upravena hodnota faktoru tolerance penetrace, protože docházelo k vyšším hodnotám penetrace, což ovlivňovalo výsledky.



Obrázek 6.13: Síť pro výpočet kontaktní úlohy - detail kontaktu

6.5.3 Výsledné hodnoty napětí

Pro všechny poloměry podpory byl tedy proveden výpočet napjatosti. Výsledky a jejich porovnání s hodnotami určeným podle Hertzovy teorie jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 6.4: Porovnání výsledků kontaktních úloh

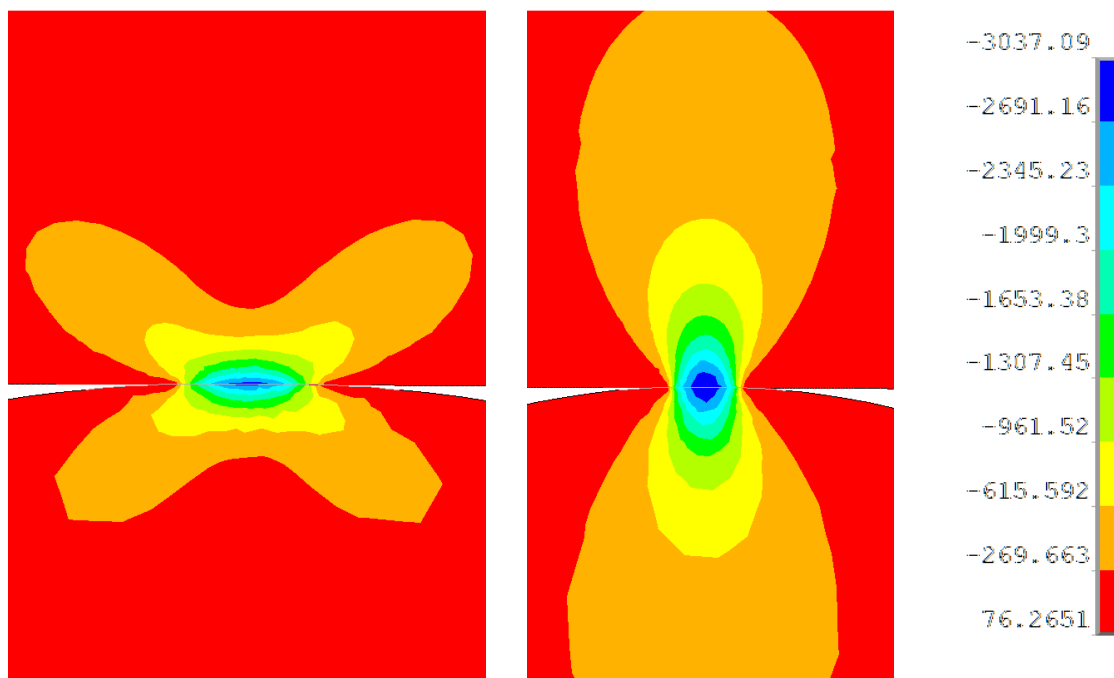
R_2 [mm]	0,5	1	2	4
Styková síla [N]	500,07	500,06	500,05	500,02
$p_{\max\text{HERTZ}}$ [MPa]	-3091,8	-2 186,2	-1545,9	-1 093,8
$\sigma_{x\max}$ [MPa]	-2 887,8	-2 044,1	-1 437,7	-1 017,4
$\sigma_{y\max}$ [MPa]	-3 037,1	-2 127,6	-1 497,9	-1 068,6
b_{teor} [mm]	0,026	0,029	0,041	0,058
b_{MKP} [mm]	0,023	0,026	0,039	0,061

Výsledky tedy přibližně splňují očekávání. Deformační zatížení bylo voleno tak, aby výsledná styková síla byla, co nejblíže hodnotě 500 N. Odchytky od této hodnoty jsou tak malé, že změny napjatosti, které způsobí, nemají významný vliv na výsledek výpočtu.

Maximální hodnoty napětí v osách X a Y jsou podle Hertzovy teorie stejné a rovné kontaktnímu tlaku. Hodnoty napětí v ose Y toto splňují lépe, pravděpodobně proto, že napětí v ose X má v kontaktní oblasti strmější gradient (viz obr. 6.11), a proto je pro jeho přesnější určení nutná vyšší hustota diskretizace.

Hodnoty poloviny šířky kontaktní oblasti určené pomocí MKP a Hertzovy teorie se přibližně shodují.

Na následujícím obrázku je uveden průběh napětí v osách X a Y pro kontakt s nejmenším poloměrem $R_2 = 0,5$ mm. Obdobné průběhy avšak s jinými hodnotami napětí se objevují i u ostatních variant.



Obrázek 6.14: Průběh napětí v ose X a ose Y v kontaktní oblasti pro poloměr podpor $R_2=0,5$ mm

6.5.4 Výpočet pravděpodobnosti porušení

U předchozích modelů se ukázalo, že v kontaktní oblasti převažují tlaková napětí. Tato napětí by neměla ovlivnit pravděpodobnost porušení, protože trhliny v materiálu jsou těmito napětími zavírány.

U jednotlivých modelů dochází k jiné šířce kontaktní plochy kvůli jinému poloměru podpory. Navíc vzhledem ke geometrii dochází k prohnutí součásti a malé změně kontaktní oblasti. Tato změna mírně zkracuje rameno ohybového momentu a ovlivňuje tedy výsledné vnitřní účinky. Malá změna ohybového momentu tedy způsobí malou změnu napětí, která se projeví v hodnotách pravděpodobnosti porušení součásti. V následující tabulce jsou porovnány maximální napětí a pravděpodobnosti porušení pro jednotlivé poloměry podpor.

Tabulka 6.5: Pravděpodobnosti porušení v závislosti na poloměru podpory

R_2 [mm]	0,5	1	2	4
$\sigma_{1\max}$ [MPa]	243,8	243,7	243,6	243,2
$\sigma_{1\max-\text{osa}}$ [MPa]	239,7	239,6	239,5	239,1
P_f [%]	22,83	22,79	22,70	22,47

S rostoucím poloměrem podpory dochází k poklesu maximálních, ale i ostatních hodnot prvního hlavního napětí, což způsobuje mírný pokles pravděpodobnosti porušení. Naopak pro zmenšující se poloměry podpory se výsledky blíží k hodnotě, která byla určena pro případ, kdy byla vazba modelována zamezením posuvu uzlu. V tomto případě byla $P_f = 23,1$ %.

6.6 Výpočet pravděpodobnosti porušení pro prostorový model

6.6.1 Vytvoření prostorového výpočtového modelu součásti

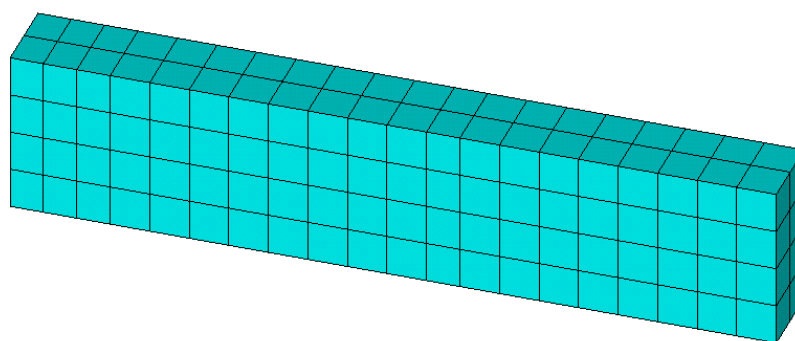
Pro další výpočty byla stejná součást modelována v ANSYSu pomocí prostorového modelu. Výsledky napětí určené z tohoto výpočtu umožní výpočet pravděpodobnosti porušení, kde objem přiřazený ke každému uzlu bude menší, protože po tloušťce modelu je více prvků. Navíc bude na tento model možné použít výpočet zahrnující všechna tři hlavní napětí a verifikovat tak jeho správnost. Modelována byla varianta B, tedy ta, kde jsou vazby a zatížení na vnějších površích.

Vzhledem ke dvěma rovinám symetrie byla modelována pouze čtvrtina součásti, což umožňuje snížit počet prvků. Na plochách řezů bylo zamezeno posuvům kolmým na tyto plochy a v místě vazby, bylo zamezeno posuvu čáry ve směru osy Y. Tyto vazby zamezují pohybu tělesa jako tuhého celku.

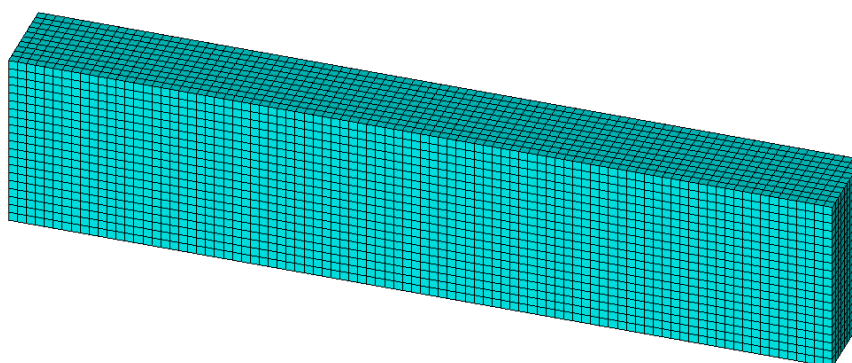
Zatížení bylo aplikováno jako tlak na plošku o délce 1 mm po celé šířce součásti. Model materiálu zůstal stejný jako v předchozím případě.

Pro výpočet byly použity prostorové prvky, konkrétně prvky SOLID 186. Při použití prvků SOLID 185 docházelo u spodní vrstvy prvků (u té která má největší napětí) k menšímu přírůstku napětí, než u ostatních prvků. Průběh napětí po příčném průřezu byl tedy lineární, ovšem u posledních prvků došlo ke změně směrnice a výsledná napětí byla menší, než bylo očekáváno podle analytického výpočtu. Proto byly zvoleny prvky SOLID 186, které lépe aproximují napětí, a tato skutečnost u nich nenastávala.

Aby bylo možné ověřit konvergenci pravděpodobnosti porušení, bylo vytvořeno několik modelů diskretizace. Po šířce prutu byla zvolena větší délka prvků, protože v tomto směru nedochází podle prutové teorie ke změně napětí, což umožňuje snížit jejich počet. Tento počet prvků byl volen tak, aby nedošlo k ovlivnění výsledků špatným poměrem stran. Na následujících obrázcích jsou opět znázorněny diskretizace s nejnižším a nejvyšším počtem prvků.



Obrázek 6.15: Diskretizace A pro prostorový model

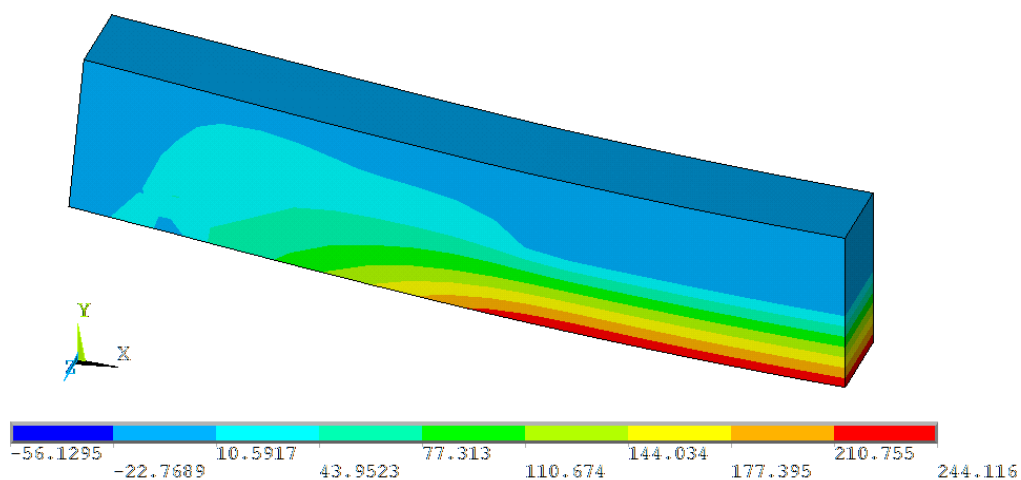


Obrázek 6.16: Diskretizace E pro prostorový model

6.6.2 Výsledná napětí pro prostorový model

Průběh napětí přibližně odpovídá tomu, který byl určen na rovinném modelu. K rozdílům dochází pouze v místě vazby. V tomto místě ale výsledky stejně neodpovídají reálným hodnotám.

Na následujícím obrázku je znázorněn průběh prvního hlavního napětí pro nejnižší hustotu diskretizace. Z obrázku vyplývá, že i při hrubé síti již výsledné napětí odpovídá očekávaným hodnotám. Konkrétní maximální hodnoty napětí a maximální hodnoty napětí na ose symetrie jsou uvedeny v tabulce 6.6.



Obrázek 6.17: Průběh napětí na prostorovém modelu

6.6.3 Výpočet pravděpodobnosti porušení

Dále byl upraven script pro výpočet pravděpodobnosti porušení tak, aby umožnil zahrnout prostorové prvky, které mají 8 uzlů. Pomocí tohoto scriptu byly vypočítány pravděpodobnosti porušení součásti pro jednotlivé hustoty diskretizace. Při výpočtu byly kvůli koncentraci napětí opět odstraněny prvky v okolí vazby. Výsledky výpočtu jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 6.6: Výpočet na prostorovém modelu

Diskretizace	A	B	C	D	E
Počet prvků	160	2300	4864	18 400	32 256
$\sigma_{1\max}$ [MPa]	244,1	244,4	244,4	244,4	244,4
$\sigma_{1\max-osa}$ [MPa]	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0
P_f [%]	42,22	26,87	24,54	23,98	23,67

Zjištěné výsledky odpovídají očekávaným hodnotám. S rostoucí hustotou diskretizace se pravděpodobnost porušení blíží ke stejným hodnotám jako u rovinného modelu.

Opět se zde ukazuje nutnost vyšší hustoty diskretizace. I přesto, že hodnoty napětí se u jednotlivých hustot diskretizace téměř nemění, tak pravděpodobnost porušení pro variantu A je téměř dvojnásobná. Toto je velmi pravděpodobně způsobeno nahrazením integrálu sumou, kdy v sumě vystupuje člen zahrnující objem části prvku. Tento problém se již vyskytl u rovinného modelu.

7 VÝPOČET PRO TROJOSOU NAPJATOST

7.1 Weibullová teorie nejslabšího článku pro trojosou napjatost

Weibullovu teorii nejslabšího článku je možné použít i pro součásti namáhané trojosou napjatostí. Pro výpočet bylo předpokládáno, že pravděpodobnost porušení je ovlivňována normálovým napětím a to jen tehdy, pokud je toto napětí kladné. Proto bude pro výpočet použito tzv. ekvivalentní napětí, které tuto skutečnost zahrnuje.

$$\sigma_e = \begin{cases} (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta & \sigma_n > 0 \\ 0 & \sigma_n \leq 0 \end{cases} \quad (43)$$

Pravděpodobnost porušení je možné určit již dříve zmíněným vztahem.

$$P_f = 1 - e^{-B} \quad (44)$$

Riziko porušení B lze získat pomocí integrace ekvivalentního napětí přes povrch jednotkové polokoule v Haighově prostoru (viz kapitola 4.3.5). Vzhledem k oblasti, přes kterou je integrováno, je výhodné vyjádřit riziko porušení ve sférických souřadnicích. Poté tedy platí následující rovnice [5][3], která byla upravena podle zvolených sférických souřadnic.

$$B = \int_V \frac{2m+1}{2\pi\sigma_0^m} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^m \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \right) dV \quad (45)$$

Pokud je výpočet hlavních napětí proveden pomocí MKP, je možné v rovnici (45) nahradit integrál přes objem pomocí sumy přes uzly jednotlivých prvků, obdobně jako v předchozí kapitole. Tímto způsobem byl získán následující vztah.

$$P_f = 1 - e^{-\sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^M \frac{2m+1}{2\pi\sigma_0^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma_{eij})^m \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \Delta V_{ij} \right]} \quad (46)$$

Aby bylo možné určit hodnotu pravděpodobnosti porušení, zbývá určit hodnotu integrálu přes polokouli. Tento integrál se musí řešit v každém uzlu každého prvku, navíc integrovaná funkce není hladká a není ani vyjádřena jedním výrazem, pouze předpisem podle rovnice (43), což komplikuje výpočet.

7.2 Volba vhodné metody numerické integrace

7.2.1 Výpočet integrálu pomocí funkce quad2D

Vzhledem k počtu prvků a obtížnosti řešeného integrálu, bylo nutné výpočet pravděpodobnosti porušení provést numericky. Výpočet byl proveden v MATLABu.

Obdobným způsobem jako v předchozím případě byl vytvořen script, který z výsledkových souborů získaných pomocí ANSYSu zjistí hodnoty tentokrát všech hlavních napětí a objemů prvků. Poté se obdobně jako v předchozích případech provede

sumace přes všechny prvky a jejich uzly. Zde ovšem dochází k problému s integrací přes povrch polokoule. Při prvních výpočtech bylo vycházeno z [3], kde je ekvivalentní napětí vyjádřeno následujícím způsobem.

$$\sigma_e = \frac{\sigma_n + |\sigma_n|}{2} \quad (47)$$

Pokud je normálové napětí kladné, je ekvivalentní napětí rovno normálovému a pokud je záporné, tak má tato funkce hodnotu nula. Tato úprava tedy vyhovuje předpisu podle (43). Dosazením za ekvivalentní napětí je možné určit pravděpodobnost porušení. Pro její určení bylo nutné pro každý uzel každého prvku vyjádřit tento integrál.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma_{nij} + |\sigma_{nij}|}{2} \right)^m \sin \theta \, d\theta \, d\Phi \quad (48)$$

Protože Weibullův modul má v tomto případě hodnotu 7,19 a napětí je obecně v řádech stovek MPa, je integrovaná funkce strmá a její integrál má vysokou hodnotu. Numerická integrace takovéto funkce je obtížná. Jediná numerická integrace v MATLABu, která tuto funkci zvládla integrovat v čase, při kterém se dala použít pro více prvků, byla funkce quad2D, která slouží k numerické integraci přes obdélníkovou plochu, což je po transformaci souřadnic splněno. I přesto byl výpočet pro více prvků dlouhý (viz kapitola 7.2.4).

Další úpravou integrovaného výrazu se podařilo tuto integraci urychlit. Do jmenovatele integrovaného výrazu byla přidána konstanta σ_0^m , která byla v předchozím případě vytknuta před integrálem. Tato úprava způsobila velmi významné urychlení výpočtu. Pravděpodobně to bylo způsobeno tím, že konstanta má řádově stejné hodnoty jako integrovaná funkce, po vydělení tedy nabývá integrovaná funkce mnohem nižších hodnot a její numerická integrace při předem zvolené přesnosti je proto snazší.

7.2.2 Výpočet pomocí Gaussovy integrace do řádu 5

Druhá možnost výpočtu integrálu v rovnici (20) je použití Gaussovy integrace. Integrace přes polokouli je poměrně častý problém, a proto byly pro tuto integraci odvozeny body a k nim přiřazeny váhy pro Gaussovu integraci. [7][8]

Pro tuto integraci nemusí být ekvivalentní napětí vyjádřeno pomocí absolutní hodnoty, ale je možné použít původní vztah (43). Pokud v daném integračním bodě bude hodnota normálového napětí vycházet záporná, bude ekvivalentní napětí rovno nule, a tedy celý přírůstek rizika porušení bude nulový.

Pro výpočet byly vyzkoušeny různé řády integrace. Do řádu 5 bylo vycházeno z [7]. Protože integrovaná funkce je podle [7] symetrická, je možné povést následující zjednodušení, při kterém je integrál přes polokouli upraven na integrál přes její čtvrtinu.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma_{eij}(\Phi, \theta)}{\sigma_0} \right)^m \sin \theta \, d\theta \, d\Phi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma_{eij}(\Phi, \theta)}{\sigma_0} \right)^m \sin \theta \, d\theta \, d\Phi \quad (49)$$

Gaussova integrace má pro tento případ následující předpis. [7]

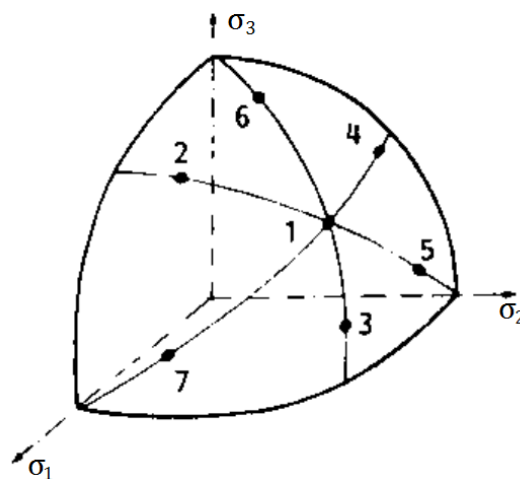
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma_{eij}(\Phi, \theta)}{\sigma_0} \right)^m \sin \theta \, d\theta \, d\Phi = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^P \left(\frac{\sigma_{eij}(\Phi_k, \theta_k)}{\sigma_0} \right)^m w_k \quad (50)$$

$\sigma_{eij}(\Phi_k, \theta_k)$ - ekvivalentní napětí vyjádření v k-tém bodě Gaussovy integrace pro j-tý uzel i-tého prvku

w_k - váha k-tého bodu Gaussovy integrace

P - počet bodů Gaussovy integrace

Jednotlivé body pro Gaussovu integraci jsou odvozeny v [7]. Pro 5. řád integrace jsou integrační body znázorněny na následujícím obrázku a uvedeny v tabulce 7.1.



Obrázek 7.1: Body Gaussovy integrace pro 5. řád [7]

Tabulka 7.1: Body a váhy pro Gaussovu integraci 5. řádu [7]

Bod	Φ_k [°]	θ_k [°]	w_k [-]
1	45,000	60,000	0,225
2	7,578	45,251	0,132
3	45,000	84,626	0,132
4	82,422	45,251	0,132
5	76,889	77,219	0,126
6	45,000	18,232	0,126
7	13,111	77,219	0,126

Pro výpočet pravděpodobnosti porušení při trojosé napjatosti byl vytvořen script v MATLABu. Část scriptu, která provádí výpočet rizika porušení je znázorněna na následujícím obrázku.

```

25 - for i=1:pocet_prvku
26 -     for j=1:8
27 -         %Urcení s1-s3 pro vypocet
28 -         s1=pole{i}(2,j);
29 -         s2=pole{i}(3,j);
30 -         s3=pole{i}(4,j);
31 -         objem=pole{i}(7,j);
32 -         sigma_n=@(fi,theta) sin(theta)*sin(theta).*(s1.*cos(fi).*cos(fi)
33 -             +s2.*sin(fi).*sin(fi))+s3.*cos(theta).*cos(theta);
34 -         vyraz_upraveny=@(fi,theta) (((sin(theta)*sin(theta).*(s1.*cos(fi).*cos(fi)
35 -             +s2.*sin(fi).*sin(fi))+s3.*cos(theta).*cos(theta))/sigma_0)^m);
36 -
37 -         %%Gaussova integrace
38 -         Gaus5=0;
39 -         for k=1:7
40 -             if sigma_n(body5(1,k),body5(2,k))<=0
41 -                 Integ=0;
42 -             end
43 -             if sigma_n(body5(1,k),body5(2,k))>0
44 -                 Integ=vyraz_upraveny(body5(1,k),body5(2,k))*vahy5(k);
45 -             end
46 -             Gaus5=Gaus5+4*pi/2*Integ;
47 -         end
48 -
49 -         %%Přičtení přírůstku
50 -         suma=suma+Gaus5*objem*ko;
51 -     end
52 - end

```

Obrázek 7.2: Část scriptu provádějící Gaussovu integraci řádu 5

Řádky 25 a 26 provádějí cyklus přes všechny prvky a jejich uzly (zde pro prvky s osmi uzly). V tomto cyklu jsou zjišťovány hodnoty hlavních napětí v daném uzlu a části objemu prvku, která je k tomuto uzlu přiřazena. Ze zjištěných hodnot se vyjádří normálové napětí a integrovaný výraz.

Samotná Gaussova integrace začíná na řádce 39. Program postupně prochází cyklus přes jednotlivé body Gaussovy integrace. Pro řád 5 je těchto bodů 7. Dále je posuzováno, jaká je hodnota normálového napětí v daném integračním bodě. Pokud je tato hodnota záporná, je přírůstek roven nule. Pokud je kladná, je proveden výpočet přírůstku výsledné hodnoty v daném integračním bodě. Nakonec je hodnota integrálu uložena v proměnné Gaus5. Proměnná suma odpovídá riziku porušení, které se postupně sčítá pro jednotlivé uzly tak, že hodnota integrálu je vynásobena přiřazenou částí objemu prvku a konstantou před integrálem, která je ve scriptu označena jako ko.

7.2.3 Výpočet pomocí Gaussovy integrace vyššího řádu

Podle [20] je pro dostatečnou přesnost nutné použít Gaussovu integraci řádu alespoň $(m+1)/2$. Pro vyšší hodnoty Weibullova modulu by tedy řád 5 nemusel být ještě dostatečně přesný. Proto byly pro výpočty použity body Gaussovy integrace odvozené ve zdroji [8].

V tomto zdroji jsou odvozeny body a váhy pro Gaussovu integraci pro řády 9, 11 a 13. Na kouli jsou body Gaussovy integrace rozmístěny vždy symetricky, a jelikož bylo potřeba integrovat pouze přes polokouli, byl integrál určen jen pro polovinu bodů. Toto bylo

zkontrolováno s výpočtem pro všechny body na celé kouli, kde vyšla podle očekávání dvojnásobná hodnota integrálu.

Integrační body byly odvozeny v kartézských souřadnicích. Souřadný systém byl pro výpočet pravděpodobnosti porušení otočen tak, aby integrační body ležely na té polokouli, přes kterou bylo integrováno. Poté byly podle následujících vztahů všechny body převedeny do sférického souřadného systému. Protože se jedná o jednotkovou polokouli, platí, že $R = 1$ mm.

$$\Phi = \arctg 2(x, y) \quad (51)$$

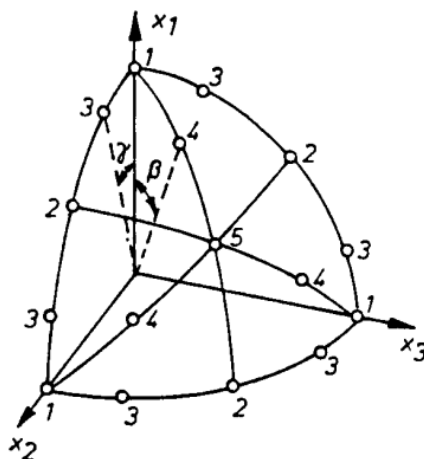
$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \quad (52)$$

Vzhledem k výchozímu vztahu pro odvození integračních bodů, byl výsledný integrál určen pomocí následujícího vzorce.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma_{eij}(\Phi, \theta)}{\sigma_0} \right)^m \sin \theta \, d\theta \, d\Phi = 4\pi \sum_{i=1}^P \left(\frac{\sigma_{eij}(\Phi_i, \theta_i)}{\sigma_0} \right)^m w_i \quad (53)$$

Vztah (53) se od vztahů (49) a (50) liší o konstantu 2. Tato konstanta je zahrnuta ve vahách pro jednotlivé body, kdy součty vah pro řády 9 - 13 jsou poloviční než v předchozím případě.

S rostoucím řádem Gaussovy integrace roste i počet integračních bodů. Pro řád 9 je při integraci přes polokouli nutné vyjádřit hodnotu funkce v 21 bodech, pro řád 11 je bodů 33 a pro poslední použitý řád 13 je nutné použít 37 integračních bodů. Na následujícím obrázku jsou znázorněny integrační body na osmině koule pro 13. řád.



Obrázek 7.3: Integrační body pro 13. řád [8]

7.2.4 Ověření správnosti výpočtu

Správnost scriptu a přesnost jednotlivých typů integrace byla ověřena na prostorovém modelu čtyřbodového ohybu (viz kapitola 6.6). Pravděpodobnost porušení byla tentokrát počítána pomocí výpočtu pro trojosou napjatost. Protože v modelu převládá jednoosá

napjatost, měly by být vypočítané pravděpodobnosti porušení stejné. Malý rozdíl by mohlo způsobit napětí od posouvající síly, které jednoosou napjatost porušuje, jeho hodnota je ovšem výrazně menší než hodnoty normálového napětí.

Kromě pravděpodobnosti porušení byla určena i doba potřebná pro jednotlivé výpočty na notebooku s procesorem Intel Core i7-4720HQ o taktu 2,6 GHz, přičemž podle využitých prostředků bylo pro výpočet využíváno pouze jedno jádro procesoru.

Pro výpočet nebyla použita nejvyšší hustota diskretizace, pouze diskretizace označená jako C, protože u jedné varianty výpočtu probíhal výpočet velmi dlouhou dobu. Po odstranění prvků v blízkosti vazeb byl výpočet proveden pro 4836 prvků. V následující tabulce jsou porovnány pravděpodobnosti porušení určené pomocí různých způsobů integrace s pravděpodobnostmi určenou při uvažování pouze jednoho hlavního napětí.

Tabulka 7.2: Výsledky výpočtů a odchylka od výsledku při uvažování pouze prvního hlavního napětí

Parametry výpočtu	Uvažování prvního hlavního napětí	Výpočet uvažováním všech třech hlavních napětí							
		Integrace - Matlab		Gaussova integrace - řád					
		σ_0^m mimo integrál	σ_0^m v integ.	3	4	5	9	11	13
Čas [s]	<1	1:18 hod	64	14	15	16	17	19	20
P_f [%]	24,54	24,54	24,55	9,97	20,24	23,54	25,97	24,64	24,55
Relativní chyba [%]	---	0	0,04	59,4	17,5	4,07	5,83	0,41	0,04

Z výsledků pro jednotlivé výpočty vyplývá, že hodnoty pravděpodobnosti porušení podle teorie pro jednoosou a trojosou napjatost jsou v tomto případě téměř stejné. Vliv posouvající síly je tedy podle očekávání zanedbatelný.

Při integraci pomocí funkce quad2D, by vzhledem k přednastavené toleranci, měl být o něco přesnější ten výsledek, při jehož výpočtu je konstanta σ_0^m mimo integrál, protože hodnota tohoto integrálu je v řádech milionů a vyšších. Vzhledem k přísně zvolené toleranci ovšem výpočet trvá velmi dlouho. Pro součásti s vyšším počtem prvků je tedy nevhodný.

Malou změnou, při které byla přesunuta konstanta σ_0^m do integrálu, došlo k tomu, že integrovaná funkce nabývala mnohonásobně menších hodnot. Takto určená hodnota pravděpodobnosti porušení byla stále velmi přesná a navíc došlo k výraznému urychlení výpočtu.

Druhá použitá metoda byla Gaussova integrace. Jak již bylo řečeno, podle [20] je doporučeno používat řád alespoň $(m+1)/2$. Protože materiál použitý pro výpočty měl hodnotu Weibullova modulu 7,19, byl doporučený řád integrace alespoň 5. Výsledky získané pomocí Gaussovy integrace tomu odpovídají. Nižší řády vystihly pravděpodobnost porušení pouze velmi nedokonale.

U řádu 9 je vyšší odchylka pravděpodobnosti porušení než u řádu 5. Tento řád je první, kdy byla použita integrace přes celou polokouli, na které je 21 integračních bodů. U řádu 5 bylo integrováno přes osminu koule, na které bylo 7 integračních bodů. Více bodů na osmině koule tedy dokázalo pravděpodobnost porušení lépe popsat i přesto, že je formule označena jako nižší řád.

Další řády se s přesností integrace postupně blížily hodnotám pravděpodobnosti porušení, která byla určena ostatními výpočty. S rostoucí přesností roste počet integračních bodů a tedy i čas potřebný pro řešení. Pro výpočet s vysokými počty prvků se Gaussova integrace jeví jako lepší varianta, protože výpočet s ní byl rychlejší. Nicméně změnou požadované přesnosti integrace v MATLABu a zahrnutím symetrie integrované funkce by bylo možné výpočet pomocí funkce quad2D urychlit. Pro další výpočty se tedy obě varianty integrace jeví podobně vhodné.

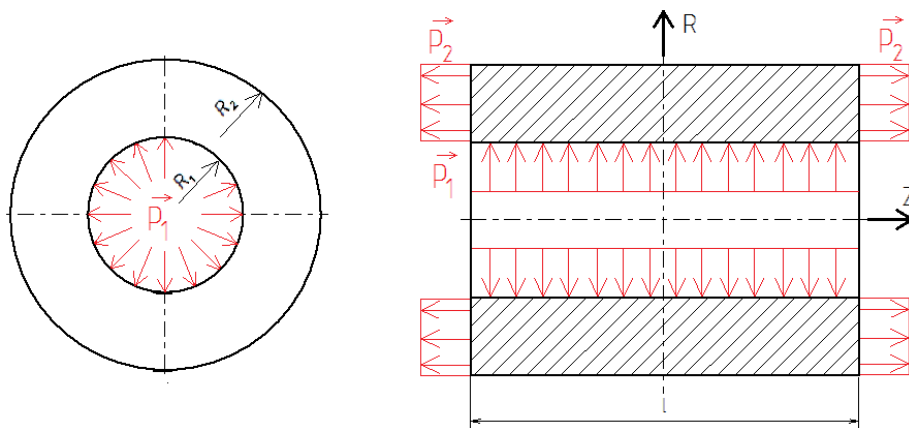
Při vhodně zvolené integraci se u součásti namáhané jednoosou napjatostí výsledky výpočtů získané pomocí teorie uvažující jedno nebo všechna hlavní napětí téměř shodují.

7.3 Výpočet pravděpodobnosti porušení při trojosé napjatosti

Po ověření správnosti programu na modelu součásti s jednoosou napjatostí, byl dále program vyzkoušen pro válcové těleso, které je namáháno trojosou napjatostí.

7.3.1 Výpočtový model

Pro výpočet bylo uvažováno válcové těleso namáhané trojosou napjatostí podle následujícího obrázku.



Obrázek 7.4: Válcové těleso

Model geometrie - Jedná se o válcové těleso s následujícími rozměry

$$R_1 = 20 \text{ mm}$$

$$R_2 = 40 \text{ mm}$$

$$l = 100 \text{ mm}$$

Protože tloušťka stěny řádově odpovídá poloměrům, je možné uvažovat toto těleso jako tlustostěnné.

Model materiálu - Jako materiál byla stejně jako v předchozích případech uvažována keramika Al_2O_3 . Materiál byl uvažován jako izotropní, lineární, elastický s elastickými konstantami $E = 390 \text{ GPa}$ a $\mu = 0,24$. Pro výpočet pravděpodobnosti porušení byly uvažovány tyto parametry dvouparametrového Weibullova rozdělení: $m = 7,19$, $\sigma_0 = 473,8 \text{ MPa mm}^{\frac{3}{7,19}}$.

Model zatížení - Na vnitřní válcovou plochu působí tlak $p_1 = 30 \text{ MPa}$. Na obou koncích je součást namáhána tahovým zatížením $p_2 = 20 \text{ MPa}$. Zatížení bylo voleno tak, aby ve válci vznikla trojosá napjatost.

Model vazeb - Protože je působící zatížení symetrické a součást je tedy ve statické rovnováze, nebyly vazby uvažovány.

Napětí pro výpočet pravděpodobnosti porušení bylo opět určeno pomocí MKP a zkontrolováno analytickým výpočtem.

7.3.2 Analytický výpočet napětí

Pro analytický výpočet napětí bylo nutné znát hodnotu Lamého konstanty a modulu pružnosti ve smyku, které byly určeny z následujících vztahů.

$$\lambda = \frac{E \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = 145\,161,3 \text{ MPa} \quad (54)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = 157\,258,1 \text{ MPa} \quad (55)$$

Při výpočtu napětí bylo vycházeno z rovnic pro válcové těleso. [15] Do těchto vztahů je nutné dosadit následující okrajové podmínky.

$$r = R_1 \dots \sigma_r = -p_1 \quad (56)$$

$$r = R_2 \dots \sigma_r = 0 \quad (57)$$

$$z = 0 = l \dots \sigma_z = p_2 \quad (58)$$

Okrajové podmínky byly dosazeny do rovnic pro jednotlivá napětí ve válcovém tělese. Takto byla získána následující soustava rovnic.

$$-p_1 = A - \frac{B}{R_1^2} + \lambda \varepsilon_z \quad (59)$$

$$0 = A - \frac{B}{R_2^2} + \lambda \varepsilon_z \quad (60)$$

$$p_2 = 2\mu A + (2G + \lambda) \varepsilon_z \quad (61)$$

Z této soustavy byly určeny hodnoty konstant A, B a přetvoření v ose válce.

$$A = 0,62 \text{ MPa} \quad B = 16\,000 \text{ N} \quad \varepsilon_z = 6,462 \cdot 10^{-5} \quad (62)$$

Hodnoty radiálního napětí na okrajích odpovídají okrajovým podmínkám. Napětí v ose válce je v každém průřezu konstantní a jeho hodnota je rovna působícímu zatížení. Dále byly určeny hodnoty napětí v tečném směru. Na vnitřním a vnějším poloměru má toto napětí následující hodnoty.

$$\sigma_t(R_1) = 50 \text{ MPa} \quad (63)$$

$$\sigma_t(R_2) = 20 \text{ MPa} \quad (64)$$

Podle očekávání platí, že radiální a obvodové napětí jsou symetrické vzhledem k následující hodnotě.

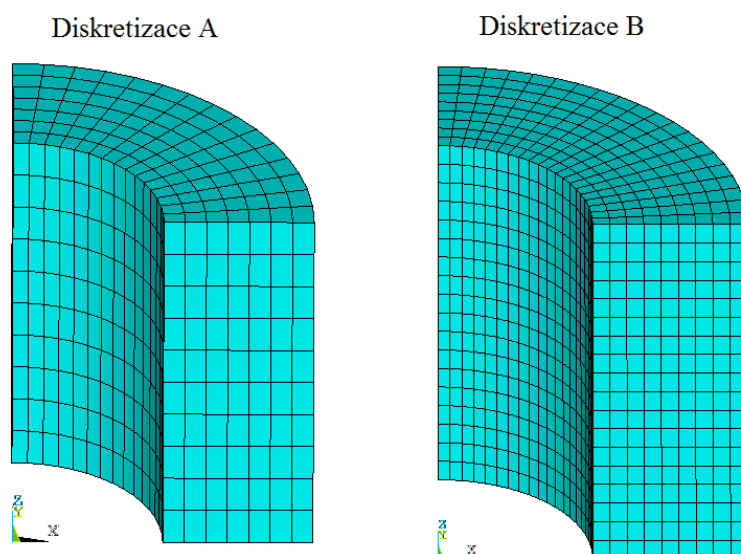
$$A + \lambda \varepsilon_z = 10 \text{ MPa} \quad (65)$$

7.3.3 Výpočtový model pro výpočet pomocí MKP

Vzhledem k symetrii modelů geometrie, materiálu, zatížení, vazeb a předpokládané symetrii výsledků bylo možné modelovat pouze osminu válce. Na jednotlivých plochách, které vznikly řezy rovinami symetrie, bylo zamezeno posuvům ve směrech kolmých na tyto řezy. Tímto byl model pevně určen v prostoru, což je nutné pro výpočet pomocí MKP.

Protože se jedná o prostorový model, byly pro výpočet využity prostorové prvky SOLID 186. Kvadratické prvky umožňují přesnější výpočet napětí, což by mělo při menším počtu prvků zpřesnit také výpočet pravděpodobnosti porušení. Pro výpočet byly použity dvě hustoty diskretizace. Pro diskretizaci A bylo použito 1050 prvků a pro diskretizaci B to bylo 3240 prvků. Na obr. 7.5 jsou znázorněny výsledné sítě.

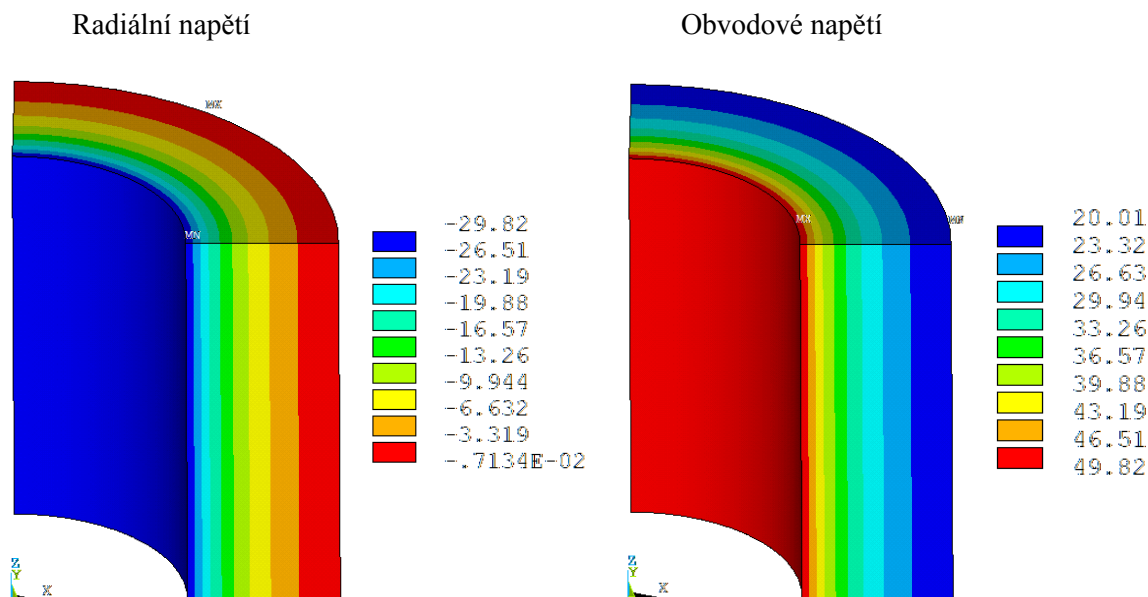
Zatížení bylo aplikováno jako tlak na jednotlivé plochy, kde tlak působí podle obr. 7.4. Materiál byl volen jako lineární elastický s již dříve zmíněnými elastickými konstantami.



Obrázek 7.5: Porovnání diskretizace A a B

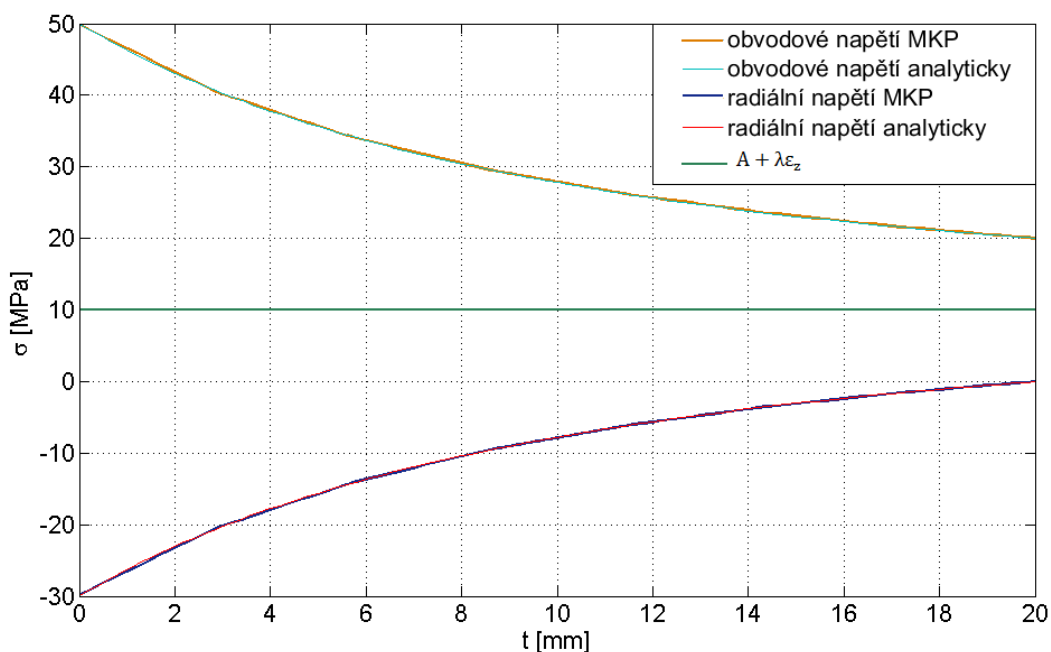
7.3.4 Výsledné hodnoty napětí

Pro tyto sítě byl proveden výpočet pomocí MKP. Na následujícím obrázku je znázorněn průběh radiálního a obvodového napětí pro diskretizaci A.



Obrázek 7.6: Průběh radiálního a obvodového napětí

Z obrázků vyplývá, že i pro nižší hustotu diskretizace již výsledky napětí odpovídají hodnotám, které byly určeny pomocí analytického výpočtu, což dále dokazuje následující obrázek, kde jsou porovnány průběhy radiálního a obvodového napětí určeného analyticky a výpočtem pomocí MKP po tloušťce válce. Navíc z tohoto obrázku vyplývá i to, že napětí jsou podle očekávání symetrická k hodnotě $A + \lambda \varepsilon_z$.



Obrázek 7.7: Porovnání radiálního a obvodového napětí určených analyticky a pomocí MKP

7.3.5 Výpočet pravděpodobnosti porušení

Vzhledem k počtu prvků byla pravděpodobnost porušení opět určena pomocí počítače s využitím scriptu, který byl popsán v kapitole 7.2. Protože pro výpočet pomocí MKP byla využita symetrie součástí, bylo nutné výslednou sumu v exponentu vynásobit $8 \times$. Pro výpočet byly opět použity všechny varianty integrace a byl určen vliv druhu integrace na výslednou pravděpodobnost porušení.

Pravděpodobnost porušení byla určena také s uvažováním pouze prvního hlavního napětí, tedy modelem z předchozí kapitoly. Pro obě hustoty diskretizace jsou výsledky uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 7.3: Výsledky pro válcové těleso, odchylka je vztažena k numerické integraci podle funkce quad2D

			$P_{f-diskA}$ [%]	Odchylka [%]	$P_{f-diskB}$ [%]	Odchylka [%]
Uvažování pouze prvního hlavního napětí			0,312	15,4	0,295	16,2
Výpočet s uvažováním třech hlavních napětí	Integrace pomocí Matlabu	σ_0^m mimo integrál	0,368	---	0,351	---
		σ_0^m v integrálu	0,368	---	0,351	---
	Gaussova integrace - řád	3	0,113	69,3	0,109	68,9
		4	0,329	10,6	0,314	10,5
		5	0,362	1,63	0,345	1,71
		9	0,379	2,99	0,361	2,85
		11	0,374	1,63	0,357	1,71
		13	0,364	1,09	0,347	1,14

Výsledky odpovídají tomu, co bylo předpokládáno. Opět se zde ukazuje, že pro přesné určení pravděpodobnosti porušení je nutná hustější diskretizace než pro výpočet napětí. I když prvky dokázaly napětí dostatečně přesně popsat, u pravděpodobnosti porušení stále docházelo ke změně hodnoty při zvyšující se hustotě diskretizace. S rostoucí hustotou diskretizace i zde došlo k poklesu pravděpodobnosti porušení. Tato skutečnost se ukázala již při výpočtech pro jednoosou napjatost.

Výpočet pravděpodobnosti porušení s uvažováním pouze prvního hlavního napětí ukazuje v tomto případě nižší hodnotu pravděpodobnosti porušení, přibližně o 16 %. Toto je způsobeno trojosou napjatostí, kdy i druhé hlavní napětí je kladné.

Výsledky získané pomocí integrace matlabovskou funkcí quad2D vychází v obou případech stejné. Ze všech druhů integrací by vzhledem ke zvolené přesnosti

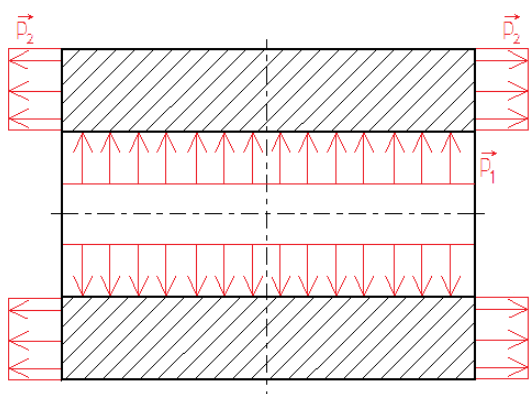
numerické integrace měly být nejpřesnější, což dokazuje i to, že výsledky Gaussovy integrace se k těmto výsledkům postupně blíží.

Opět se ukázalo, že výpočet s konstantou σ_0^m v integrálu je výrazně rychlejší. Vzhledem k nižšímu počtu prvků zde byly doby výpočtu kratší než v předchozím případě. Poměry těchto dob mezi sebou však zůstávají přibližně stejné.

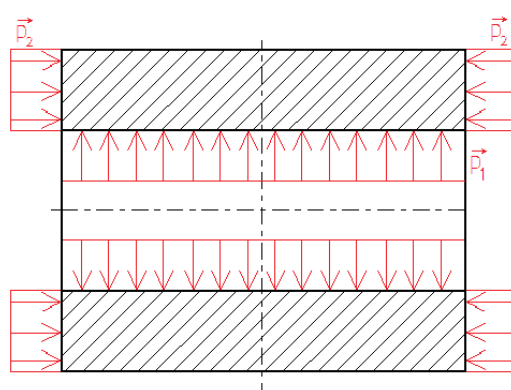
Pokud je požadována vyšší přesnost, zdá se nejvýhodnější integrace pomocí funkce quad2D se σ_0^m uvnitř integrálu. Pokud je požadována kratší doba výpočtu i za cenu mírného snížení přesnosti, jeví se jako lepší varianta použití Gaussovy integrace.

7.4 Porovnání výpočtů při různých znaménkách hlavních napětí

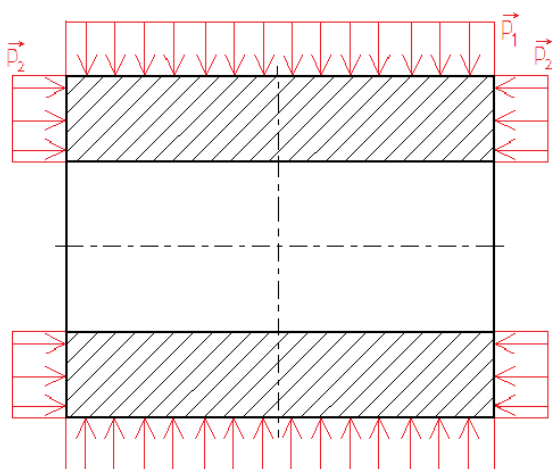
Z předchozího výpočtu vyplývá, že při kladných dvou hlavních napětích dochází k výrazné odchylce výsledku výpočtu uvažujícího jedno hlavní napětí od toho, který uvažuje všechna hlavní napětí nenulová. Pro určení, kdy je nutné do výpočtu zahrnout jedno a kdy všechna tři hlavní napětí, byl předchozí výpočet proveden pro několik druhů zatížení, která byla volena tak, aby jednotlivá hlavní napětí měla vždy jiná znaménka. Jednotlivé varianty, které byly uvažovány pro výpočet, jsou znázorněny na obrázcích 7.8 a - d.



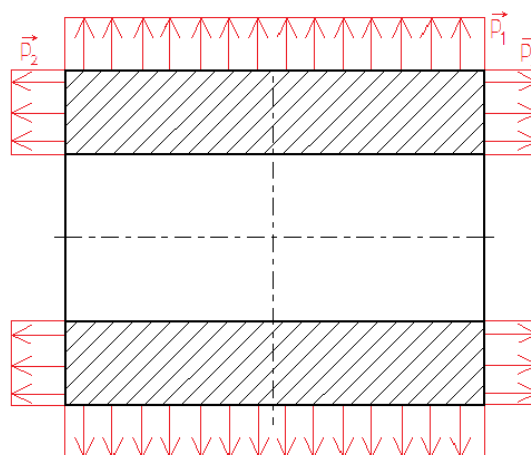
Obrázek 7.8a: Zatížení A



Obrázek 7.8b: Zatížení B



Obrázek 7.8c: Zatížení C



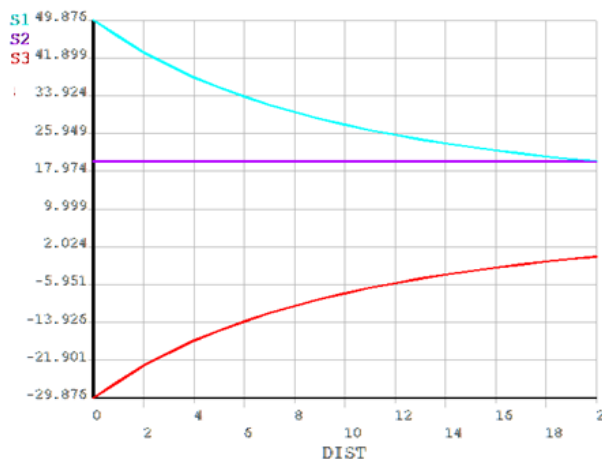
Obrázek 7.8d: Zatížení D

Hodnoty zatížení jsou stejné jako v předchozím případě, tedy $p_1 = 30$ MPa a $p_2 = 20$ MPa.

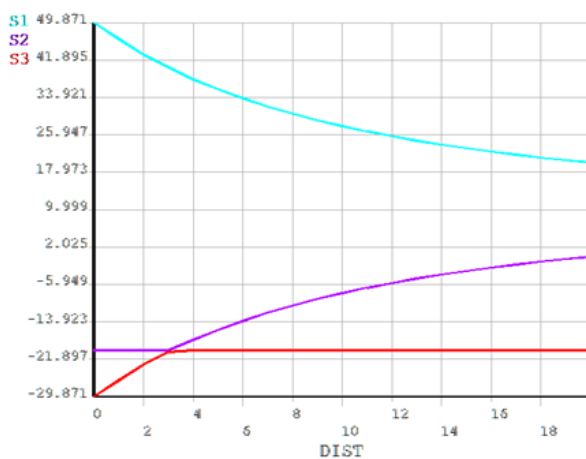
Ve všech případech byla zvolena diskretizace B z minulého výpočtu, která umožňuje určit výsledné pravděpodobnosti porušení s dostatečnou přesností. Pro výpočet integrálu byla použita Gaussova integrace 13. řádu, která v předchozím výpočtu dávala dostatečně přesné výsledky.

Varianta A odpovídá předchozímu výpočtu. V této variantě jsou nenulová první dvě hlavní napětí. U varianty B je kladné pouze první hlavní napětí a ostatní jsou záporná. Další dvě varianty byly voleny tak, aby všechna hlavní napětí byla buď záporná (varianta C), nebo kladná (varianta D).

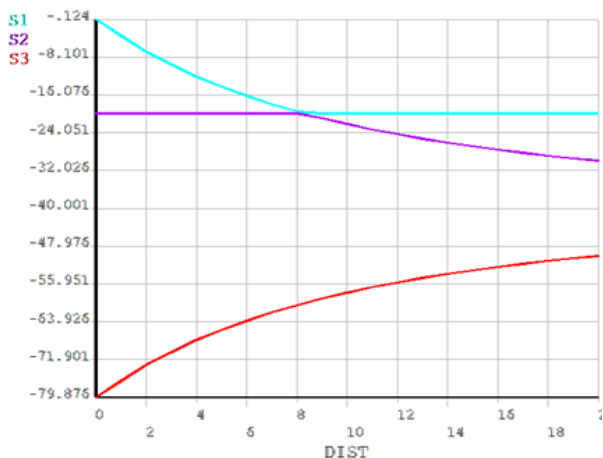
Pro všechny tyto varianty byl proveden výpočet napjatosti pomocí metody konečných prvků. Průběhy hlavních napětí po tloušťce válce jsou pro všechny případy znázorněny na následujících obrázcích.



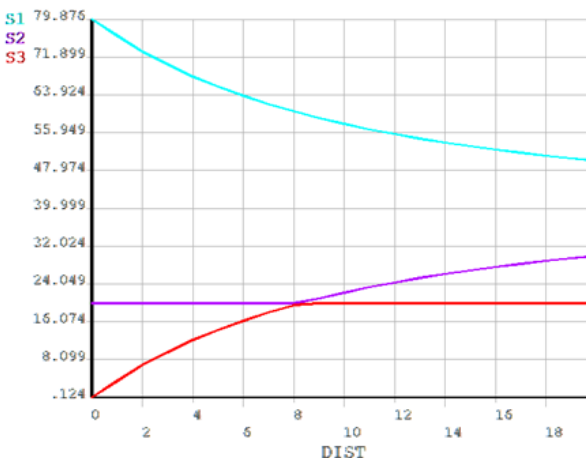
Obrázek 7.9a: Průběhy hlavních napětí [MPa] po tloušťce [mm] u varianty A



Obrázek 7.9b: Průběhy hlavních napětí [MPa] po tloušťce [mm] u varianty B



Obrázek 7.9c: Průběhy hlavních napětí [MPa] po tloušťce [mm] u varianty C



Obrázek 7.9d: Průběhy hlavních napětí [MPa] po tloušťce [mm] u varianty D

Pomocí takto určených průběhů napětí byla obdobně jako v předchozím případě určena pro jednotlivé varianty pravděpodobnost porušení. Protože hodnoty jednotlivých napětí se liší, lze očekávat pro každou variantu jinou pravděpodobnost porušení. Důležité ovšem bude porovnání výsledků s uvažováním jednoho nebo všech tří hlavních napětí. Získané výsledky spolu s relativním rozdílem pravděpodobností porušení s uvažováním jednoho nebo všech hlavních napětí jsou uvedeny v následující tabulce. Relativní rozdíl je určen jako rozdíl pravděpodobností porušení se zahrnutím jednoho a všech hlavních napětí, vztažen k výpočtu se zahrnutím všech tří hlavních napětí.

Tabulka 7.4: Porovnání pravděpodobností porušení se zahrnutím jednoho a všech tří hlavních napětí

Variantá	A	B	C	D
$P_{f-1 \text{ hl.nap.}} [\%]$	0,295	0,295	0	15,81
$P_{f-3 \text{ hl.nap.}} [\%]$	0,347	0,193	0	21,89
Relativní rozdíl [%]	-15,0	52,8	---	-27,8

Z předchozích výpočtů tedy vyplývá, že výsledky obou teorií se shodují pouze v případě, kdy jsou dvě hlavní napětí nulová. I přesto, že tlakové napětí nezpůsobuje podle Weibullovy teorie při jednoosé napjatosti porušení součásti, dochází při zatížení, kdy jsou dvě hlavní napětí tlaková k poklesu pravděpodobnosti porušení, oproti výpočtu uvažujícímu jen jedno hlavní napětí (varianta B).

V případě, že jsou všechna hlavní napětí tlaková, vykazují oba modely nulovou pravděpodobnost porušení. Pokud jsou naopak všechna napětí tahová, je jasné, že model zahrnující pouze jedno hlavní napětí nedokáže vystihnout pravděpodobnost porušení a jeho rozdíl poroste s rostoucími hodnotami druhého a třetího hlavního napětí.

8 PRAVDĚPODOBNOST PORUŠENÍ HLAVICE

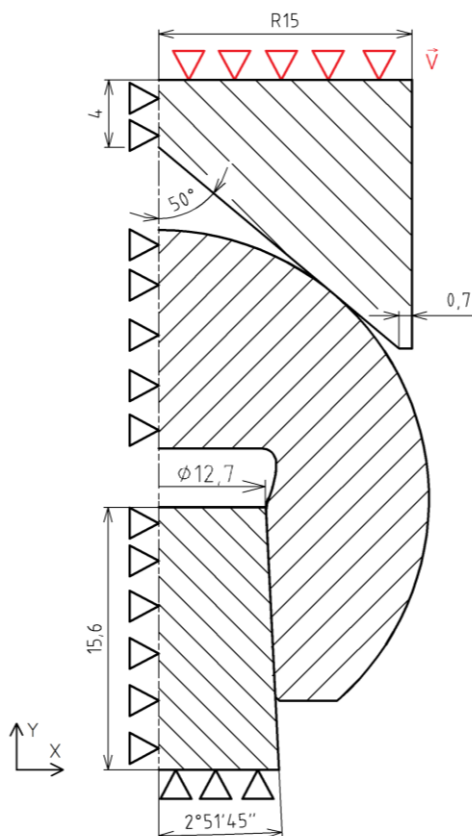
Protože výsledky získané v předchozích kapitolách odpovídají předpokladům, je možné tyto postupy použít pro reálnou aplikaci. V této kapitole bude určena pravděpodobnost porušení keramické hlavice náhrady kyčelního kloubu při uvažování jednoho a všech tří hlavních napětí. Tyto výsledky budou následně porovnány. Protože modelovat hlavici při její aplikaci by bylo velmi obtížné, bude modelována zkouška ISO 7206-4.

8.1 Výpočet napětí

8.1.1 Vytvoření modelů

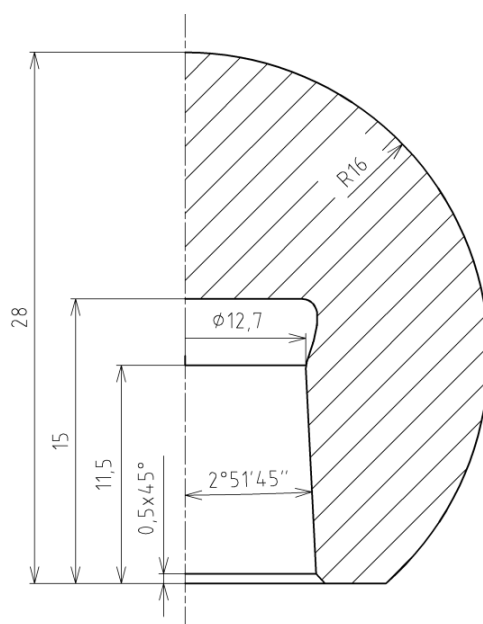
Napětí bylo určováno pomocí MKP. Při prvních výpočtech nebyly uvažovány tvarové odchylky od nominálních hodnot. Pro tento výpočet bylo nutné vytvořit následující modely geometrie, materiálu, zatížení a vazeb.

Model geometrie - Při zkoušce podle ISO je keramická hlavice nasazena na dřík, který je upevněn na supportu. Na hlavici je nasazen zatěžující kužel, který slouží k tomu, aby hlavice byla po obvodu zatížena rovnoměrně. Model topologie je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 8.1: Model topologie s vyznačenými místy vazeb a zatížení

Pro výpočet byla předpokládána hlavice o průměru 32 mm. Všechny rozměry jsou znázorněny na následujícím obrázku.

**Obrázek 8.2:** Geometrie hlavice

Geometrii přechodu za kuželovitým otvorem nebylo možné přesně určit, navíc při výrobě dochází k velkým odchylkám ve tvaru přechodu. Pro výpočet byly použity naměřené hodnoty podle [34] a ty následně proloženy křivkou, u které byla nastavena v koncovém bodu tečna tak, aby výsledný tvar přechodu byl hladký a neobjevila se zde singularita. Poloměry přechodu v závislosti na vzdálenosti od jeho spodní hrany jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 8.1: Geometrie přechodu [34]

Vzdálenost [mm]	Poloměr[mm]
0	6,35
1,2	6,75
2,1	6,95
2,8	6,95
3,5	6,7

Protože hlavice kyčelního kloubu je rotačně symetrická, byla modelována pouze její čtvrtina, aby došlo ke snížení potřebného počtu prvků. Rotační symetrie nebylo možné využít kvůli následnému výpočtu pravděpodobnosti porušení.

Při zatěžování bude docházet ke kontaktu hlavice s dříkem, kde je nutné vytvořit kontaktní oblast. Ke druhému kontaktu dochází mezi hlavicí a zatěžujícím kuzelem. V tomto případě je kontaktní oblast velmi malá a vzhledem k diskretizaci je možné, že výsledky v této oblasti budou nepřesné.

Model materiálu - Keramická hlavice je vytvořena z již dříve předpokládané keramiky Al_2O_3 . Ta byla modelována jako izotropní, lineární, elastický materiál s materiálovými charakteristikami $E = 390 \text{ GPa}$, $\mu = 0,24$. [4] Pro následující výpočet pravděpodobnosti porušení byly předpokládány parametry Weibullova rozdělení jako $m = 7,19$, $\sigma_0 = 473,8 \text{ MPa mm}^{\frac{3}{7,19}}$, $\sigma_u = 0 \text{ MPa}$. [31]

Zatěžující kužel i dřík jsou vyrobeny z oceli, jejíž chování bylo předpokládáno také izotropní, lineární, elastické s materiálovými charakteristikami $E = 210 \text{ GPa}$, $\mu = 0,33$.

Model zatížení - Hlavice kyčelního kloubu je zatěžována zatěžujícím kuželem. Vzhledem k tomu, že se jedná o kontaktní úlohu, bylo pro výpočet použito deformační zatížení posuvem $v = 0,065 \text{ mm}$ na horní ploše zatěžujícího kužele (viz obr.8.1).

Model vazeb - Dřík je umístěn na supportu, který umožňuje jeho posuvy v horizontálních směrech, a proto bylo zamezeno pouze posuvu ve směru osy Y (viz obr. 8.1). Další vazby vycházely ze symetrie, kdy bylo na všech rovinách symetrie zamezeno posuvům na ně kolmým.

8.1.2 Vytvoření sítě

Aby mohla být porovnána závislost výsledků na hustotě diskretizace, bylo pro výpočet vytvořeno několik sítí. Jednotlivé sítě jsou značeny písmeny A - E a jsou znázorněny na následujících obrázcích. Sítě byly vytvořeny z prostorových prvků SOLID.

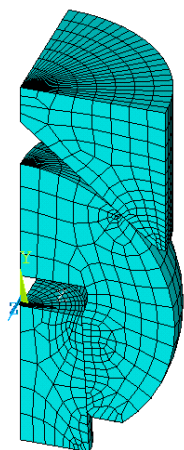
Vzhledem ke geometrii hlavice, která je z části kulová se nabízí využití kvadratických prvků, které lépe vystihnou tvar této plochy a dávají přesnější hodnoty napětí i při menším počtu prvků. Do vzorce pro výpočet pravděpodobnosti porušení se přebírá tato diskretizace a dále se využívá objem prvků. Je tedy možné, že větší objemy, které vzniknou použitím kvadratických prvků, mohou způsobit nepřesnost při výpočtu této pravděpodobnosti.

Protože výhodnější varianta výpočtu není jasná, byly použity jak lineární prvky SOLID 185, tak kvadratické prvky SOLID 186 a porovnány výsledky jednotlivých diskretizací a počty uzlů, které obsahovala řešená úloha. Jednotlivé sítě, které byly vytvořeny z obou typů prvků, jsou znázorněny na obrázcích 8.3 a - f.

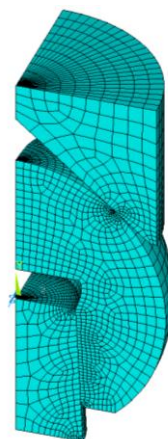
Výsledná síť byla vytvořena jako mapovaná pomocí funkce sweep, zjemněná v kontaktních oblastech a ve vrubech. Použití funkce sweep způsobí ten problém, že je obtížné dostatečně zjemnit síť v tečném směru v místě kontaktu hlavice a kužele. Výsledky v tomto místě mohou být nepřesné. V této oblasti je ovšem možné předpokládat, že všechna hlavní napětí jsou záporná, proto tyto oblasti nemají vliv na pravděpodobnost porušení a při jejím výpočtu nebudou prvky v okolí kontaktu uvažovány.

V kontaktních oblastech byly použity prvky CONTA 174 a TARGE170. V kontaktu kužele a hlavice byla jako kontaktní plocha volena plocha hlavice a jako cílová plocha plocha kužele. Tyto plochy byly takto voleny, protože kontaktní plocha hlavice je vypuklá a kužele rovinná.

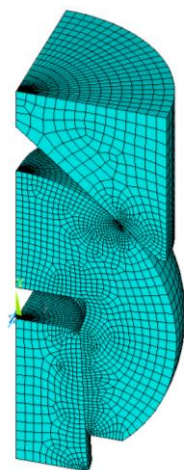
Jako kontaktní plocha hlavice s dříkem byla volena plocha dříku a jako cílová plocha plocha hlavice. Tyto plochy byly takto voleny vzhledem ke tvaru kontaktních ploch. Navíc je cílová plocha tužší, což souhlasí s předpoklady podle [37].



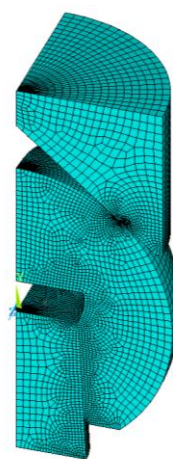
Obrázek 8.3a: Diskretizace A



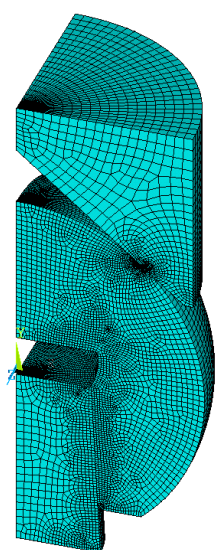
Obrázek 8.3b: Diskretizace B



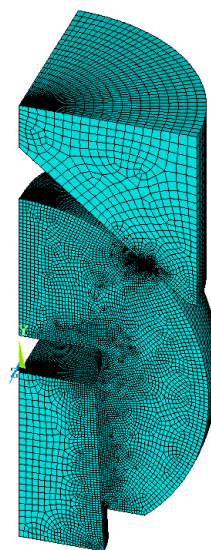
Obrázek 8.3c: Diskretizace C



Obrázek 8.3d: Diskretizace D



Obrázek 8.3e: Diskretizace E



Obrázek 8.3f: Diskretizace F

8.1.3 Nastavení penetrace

Protože se jedná o kontaktní úlohu, byl výpočet proveden jako iterační. Zatížení bylo rozděleno na 13 substepů, kdy postupně docházelo k zatěžování součásti. Použité deformační zatížení zrychlí tento výpočet a zlepší jeho konvergenci.

Při výpočtech bylo zjištěno, že přesnost výsledné pravděpodobnosti porušení závisí na hodnotě dovolené penetrace. Při přednastavené hodnotě docházelo k již poměrně přesnému výpočtu hlavních napětí. Maxima těchto napětí se ovšem objevují v místě, kde končí kontakt hlavice s dříkem a jejich hodnoty mohou být zkresleny. Pro porovnání byly uvažovány také výsledné stykové síly v dříku a výsledné pravděpodobnosti porušení.

Tento výpočet byl proveden pro prvky SOLID 186 a síť B. Jedná se o poslední výpočet, kdy bylo dostatečné množství paměti RAM a výpočet byl tedy oproti výpočtům s jemnějšími sítěmi výrazně rychlejší.

V následující tabulce jsou uvedeny složky stykových sil ve směru osy Y na celém dříku (čtyřnásobek vypočítaných hodnot kvůli symetrii součásti) a výsledné pravděpodobnosti porušení, při penetracích, jejichž hodnoty byly postupně snižovány. První hodnota penetrace v následující tabulce je hodnota, která byla nastavena ANSYSem.

Tabulka 8.2: Určení maximální dovolené penetrace

Penetrace [mm]	$2,14 \cdot 10^{-3}$	$5,82 \cdot 10^{-4}$	$3,40 \cdot 10^{-4}$	$8,55 \cdot 10^{-5}$	$4,49 \cdot 10^{-5}$
Počet iterací	28	27	31	45	59
$\sigma_{1-\max}$ [MPa]	107,1	117,1	118,8	119,7	119,9
Styková síla [N]	5879,2	6277,2	6346,4	6402	6374,4
$P_{f-1 \text{ hl.nap.}}$ [%]	0,133	0,220	0,236	0,246	0,248
$P_{f-3 \text{ hl.nap.}}$ [%]	0,104	0,173	0,186	0,195	0,196

Z tabulky vyplývá, že původně zvolená penetrace dokáže popsat napětí s malou přesností. Hodnoty pravděpodobnosti porušení jsou při této penetraci ovšem výrazně jiné. S klesající penetrací dochází k růstu pravděpodobnosti porušení, která se při nízkých hodnotách postupně ustaluje.

Jak již bylo zmíněno, výpočet pro hustší síť trvá již poměrně dlouho, protože se úloha nevejde do operační paměti, a proto byla pro další výpočty volena maximální přípustná hodnota penetrace $3,4 \cdot 10^{-4}$ mm. Při nižších hodnotách již dochází jen k malé změně pravděpodobnosti porušení, ovšem dochází k růstu počtu potřebných iterací a tedy i výpočtové náročnosti. Při některých výpočtech se podařilo dosáhnout i výrazně nižší hodnoty penetrace a tedy by výsledky měly být přesnější.

8.1.4 Výpočet napětí při různých hustotách sítě

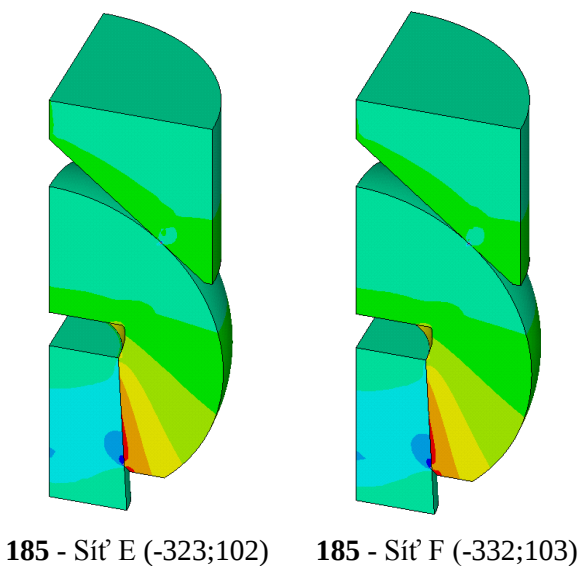
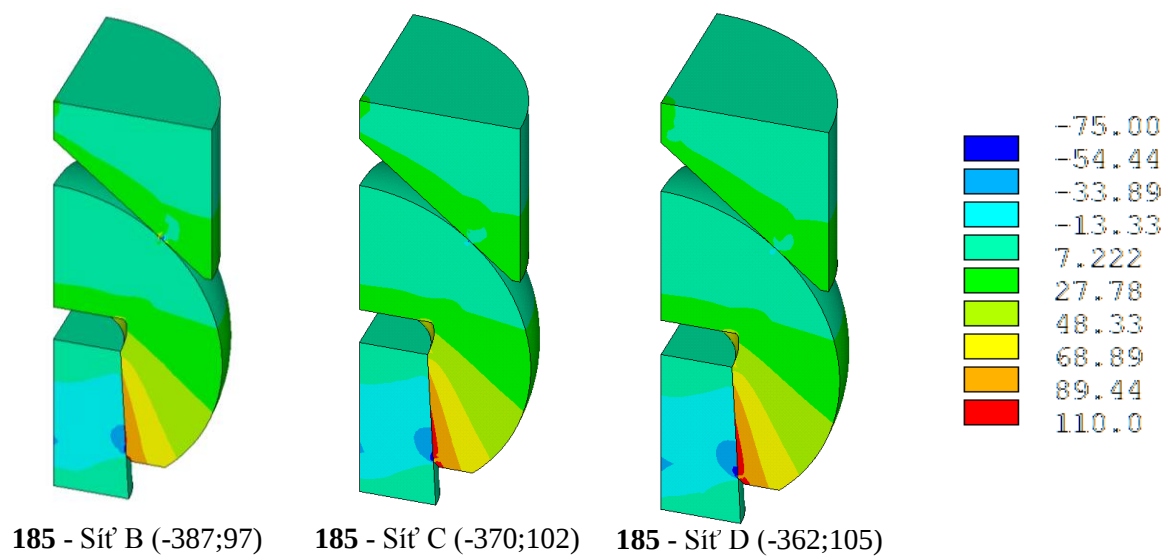
V následujícím kroku tedy byly určeny napětí pro oba typy prvků a pro všechny sítě. Maximální hodnoty těchto napětí jsou, jak již bylo zmíněno, ovlivněny koncem kontaktní oblasti. Vzhledem k tomu, že odchylky těchto napětí jsou v jednotkách MPa, je chyba způsobená touto odchylkou malá. Navíc, pokud se zde objevují, jsou tyto odchylky na několika málo prvcích, které jsou velmi malé a protože při výpočtu rizika porušení dochází k násobení částí objemu prvku, je ovlivnění těmito napětími zanedbatelné.

Výpočet pro prvky SOLID 186 byl proveden pouze pro síť A - D, protože výpočtová náročnost pro tyto prvky velmi rychle roste a pro hustší síť je výpočet již velmi časově náročný. Na následujících obrázcích jsou znázorněna první hlavní napětí pro jednotlivé sítě.

Pro prvky SOLID 185 nedošlo u sítě A k realizaci kontaktu, pravděpodobně kvůli velmi hrubě definované kontaktní oblasti, a proto výsledky pro tuto síť nejsou uvedeny. Z následujících výsledků vyplývá, že tato síť by nebyla dostatečně jemná.

Dále z těchto výsledků byly pro výpočet pravděpodobnosti porušení odebrány prvky v kontaktní oblasti hlavice - kužel. Všechna tři hlavní napětí v těchto oblastech jsou záporná, a proto neovlivňují pravděpodobnost porušení. Ovšem v některých případech docházelo u méně hustých sítí k numerickým chybám, kdy se v této oblasti objevila tahová napětí, která byla nereálná.

Z obrázků 8.4 - 8.6 tedy vyplývá, že pro hustší síť se napětí již výrazně nemění. V předchozích případech byla pravděpodobnost porušení výrazněji citlivá na hustotu sítě, než napětí a lze tedy předpokládat, že tomu tak bude i v tomto případě. Ona citlivost je pravděpodobně způsobena zvoleným materiálem, který má hodnotu Weibullova modulu 7,19. Každá malá chyba v napětí je při výpočtu umocněna tímto exponentem, a proto dochází k velkým relativním chybám v pravděpodobnosti porušení i v případech, kdy změna napětí je již malá.

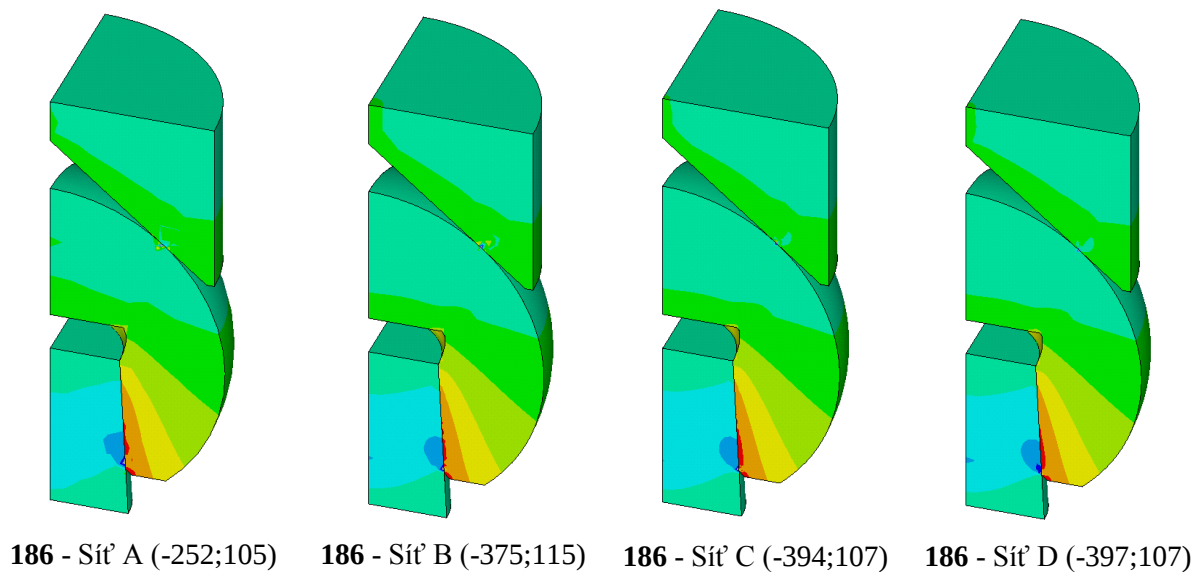


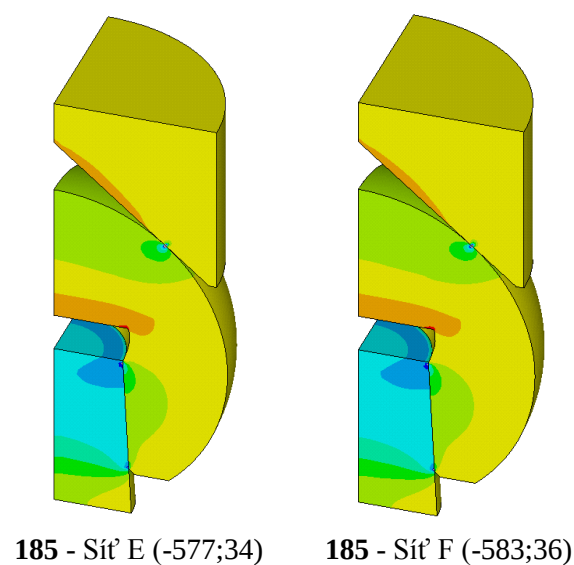
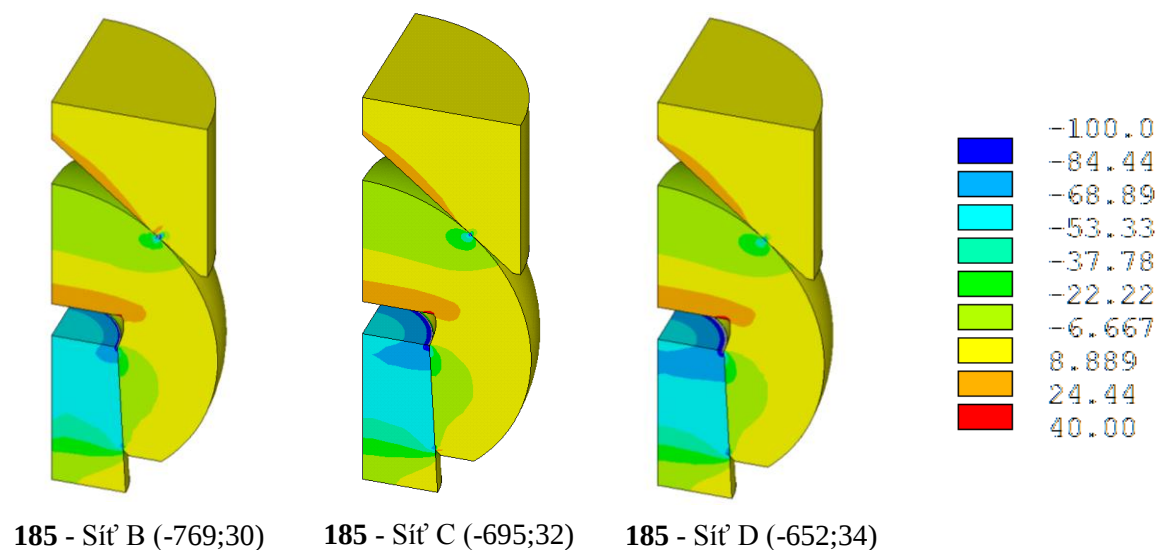
Obrázek 8.4: Porovnání prvních hlavních napětí pro jednotlivé sítě [MPa]

Sítě byly vytvořeny z prvků SOLID, jejichž číslo je uvedeno u každého obrázku.

V závorkách je uvedena hodnota minimálního a maximálního napětí [MPa] pro danou síť.

U hrubších sítí dochází k numerické chybě, kdy se maximální napětí objeví v kontaktní oblasti hlavice-kužel. Toto napětí zde není uvedeno.

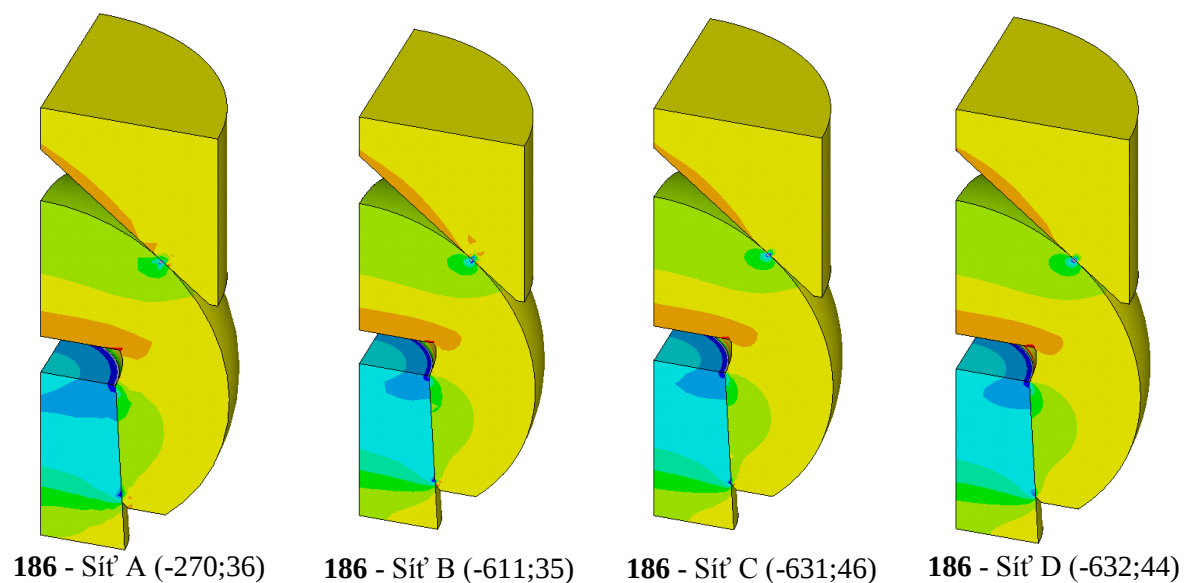


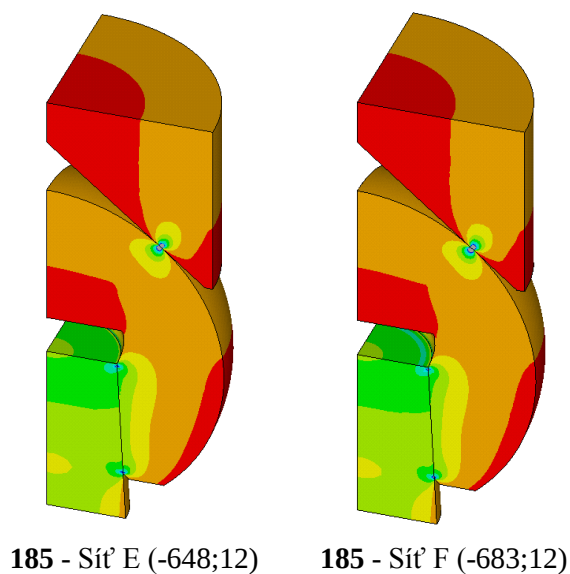
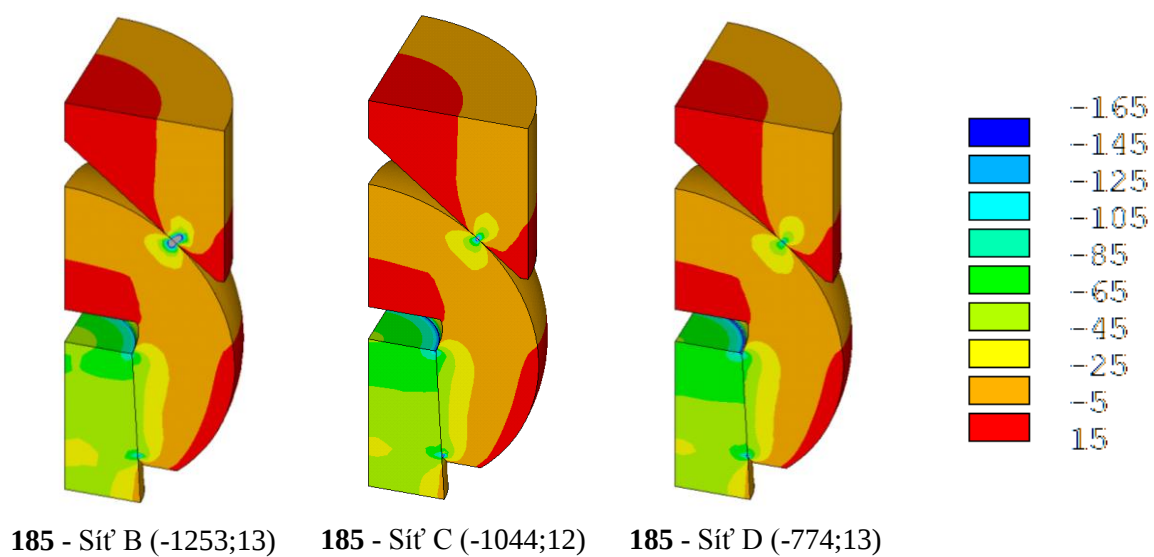


Obrázek 8.5: Porovnání druhých hlavních napětí pro jednotlivé sítě [MPa]

Sítě byly vytvořeny z prvků SOLID, jejichž číslo je uvedeno u každého obrázku.

V závorkách je uvedena hodnota minimálního a maximálního napětí [MPa] pro danou síť.

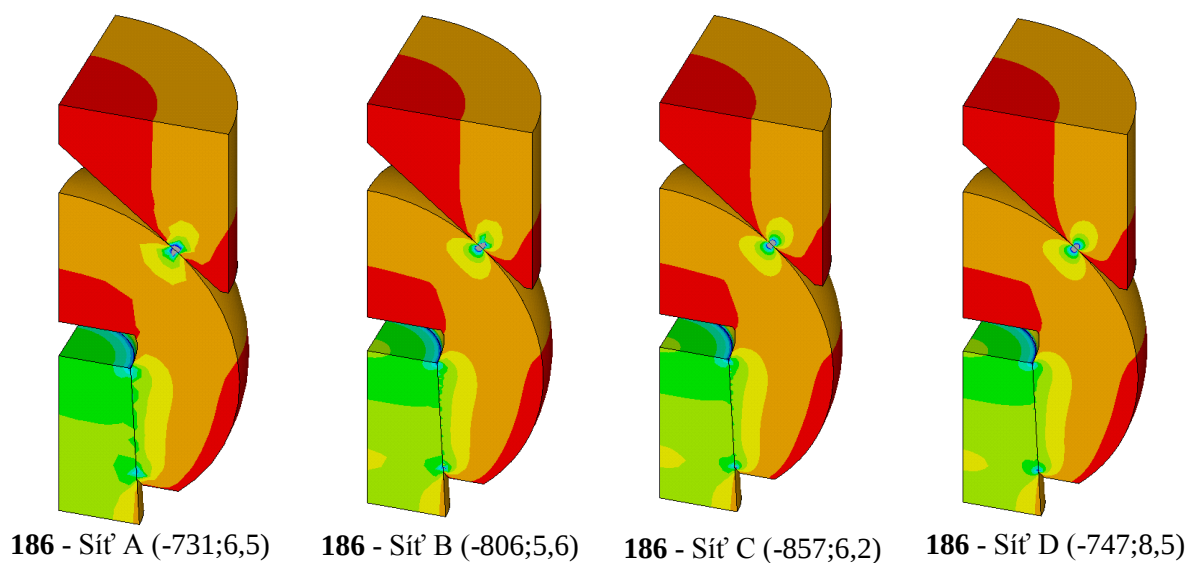




Obrázek 8.6: Porovnání třetích hlavních napětí pro jednotlivé sítě [MPa]

Sítě byly vytvořeny z prvků SOLID, jejichž číslo je uvedeno u každého obrázku.

V závorkách je uvedena hodnota minimálního a maximálního napětí [MPa] pro danou síť.



8.2 Výpočet pravděpodobnosti porušení pro jednotlivé sítě

Z napětí určených v předchozí kapitole, bylo pro jednotlivé sítě možné určit pravděpodobnosti porušení.

Protože úloha obsahuje v blízkosti osy symetrie degenerované prvky tvaru dortového řezu, byl skript pro výpočet této pravděpodobnosti upraven tak, aby umožnil zahrnout všechny typy prvků, ne jenom šestistěny jako doposud. Úprava spočívala pouze v tom, že celkový objem prvku byl rozdělen na počet uzlů, které měl daný prvek. V následující tabulce jsou určeny pravděpodobnosti porušení se zahrnutím jednoho i všech tří hlavních napětí. Relativní rozdíl je rozdíl pravděpodobností porušení s uvažováním jednoho a všech hlavních napětí, vztažen k výpočtu se zahrnutím všechna tři hlavních napětí.

Tabulka 8.3: Porovnání všech variant, relativní rozdíl je vztažen k $P_{f-3hl.nap.}$

Prvek	Sít'	A	B	C	D	E	F
Solid 185	Penetrace [$10^5 \cdot \text{mm}$]	---	3,48	6,61	5,95	7,27	6,41
	Styková síla [N]	---	6008,8	6443,6	6669,2	6485,6	6506
	$\sigma_{1-\max}$ [MPa]	---	96,7	102,0	104,8	102,3	103,3
	$P_{f-1 \text{ hl.nap.}}$ [%]	---	0,170	0,291	0,322	0,268	0,264
	$P_{f-3 \text{ hl.nap.}}$ [%]	---	0,130	0,224	0,244	0,203	0,200
	Relativní rozdíl [%]	---	30,8	29,9	32,0	32,0	32,0
Solid 186	Penetrace [$10^5 \cdot \text{mm}$]	1,18	8,55	4,08	5,85	---	---
	Styková síla [N]	6540,8	6402,0	6410,8	6501,6	---	---
	$\sigma_{1-\max}$ [MPa]	104,8	114,6	106,5	106,6	---	---
	$P_{f-1 \text{ hl.nap.}}$ [%]	0,332	0,246	0,276	0,257	---	---
	$P_{f-3 \text{ hl.nap.}}$ [%]	0,258	0,195	0,212	0,195	---	---
	Relativní rozdíl [%]	28,7	27,7	30,2	31,8	---	---

Z tabulky jasně vyplývá, že i zde je výpočet pravděpodobnosti porušení citlivější na hustotu diskretizace, než výpočet napětí. Pro odhad pravděpodobnosti se jako přesnější jeví kvadratické prvky, které při všech výpočtech ukazují hodnotu pravděpodobnosti porušení blízkou reálné. S požadovanou vyšší přesností výsledné pravděpodobnosti porušení se ovšem jako výhodnější jeví použití lineárních prvků, protože se zjemňující

se sítě dochází u kvadratických prvků k velmi rychlému růstu počtu uzlů a tedy i výpočtové náročnosti.

Obdobně jako u válcového tělesa se i zde objevuje ta skutečnost, že pravděpodobnost porušení při uvažování všech tří hlavních napětí je nižší, než při uvažování pouze jednoho hlavního napětí. Toto je způsobeno tlakovým druhým a třetím hlavním napětím, které tuto pravděpodobnost snižují. Relativní rozdíl vztažený k pravděpodobnosti porušení uvažující všechna tři hlavní napětí je v tomto případě přibližně 32 %.

U obou typů prvků výsledky oscilují na obě strany a jako dostatečně ustálené se jeví u sítě D z kvadratických prvků a u sítě E a F z lineárních prvků. Protože síť E má nejméně uzlů a výpočet je v tomto případě nejrychlejší, bude tato síť použita pro další výpočty.

Protože původní penetrace byla ověřena pro síť, která ještě vykazuje nepřesné výsledky, byla i pro síť E spočítána hodnota pravděpodobnosti porušení při nižší hodnotě penetrace. Při penetraci $3,91 \cdot 10^{-5}$ mm vzrostla pravděpodobnost porušení při uvažování jednoho hlavního napětí na 0,272%. Relativní chyba oproti původní hodnotě je 1,5 % a tedy dostatečně malá, aby bylo možné tuto síť s původní penetrací použít i pro další výpočty.

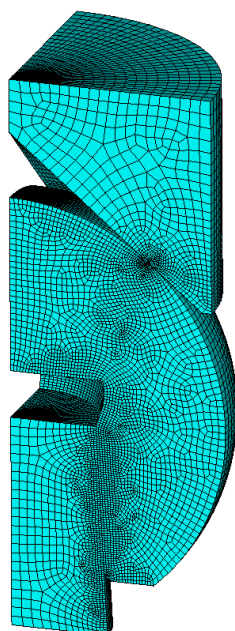
8.3 Úprava sítě a výpočtu

Cílem dalších výpočtů bylo vykreslit průběh pravděpodobnosti porušení v závislosti na zatížení. Při tomto výpočtu se vyskytly dva problémy, které bylo nutné vyřešit.

První problém nastal při vyšších hodnotách zatížení. V tomto případě docházelo při posuvu kužele o 0,12 mm k problémům s konvergencí. Kvůli tomuto problému byly změněny kontaktní tuhosti a povolené penetrace tak, aby výsledná penetrace splňovala požadovanou hodnotu. V kontaktních oblastech byla síť upravena tak, aby se zde neobjevovaly prvky, které vykazují špatný poměr stran. Poslední úprava byla provedena v kontaktní oblasti, kde se do kontaktu dostávají dřík a hlavice. Zde byla prohozena kontaktní a cílová plocha. U takto upraveného modelu se již nevyskytovaly problémy s konvergencí, navíc došlo ke snížení počtu potřebných iterací. Výsledná síť je znázorněna na obrázku 8.7.

Druhý problém se vyskytl při vykreslování S-křivky, kdy jeden bod vycházel mírně odchýlený od ostatních. Tento bod se opět nacházel v oblasti, kde docházelo k problémům s konvergencí, ale chyba se zde objevovala i na upravené síti. Oproti očekávanému trendu byla výsledná styková síla odchýlena přibližně o 1 % svojí hodnoty, a proto bylo upraveno silové konvergenční kritérium obsažené v ANSYSu, kdy byla jeho hodnota snížena na 10^{-4} . Po této úpravě již přestalo docházet k odchylování tohoto bodu. Chyba tedy byla pravděpodobně způsobena numerickou chybou, která je spjata s řešením metodou konečných prvků.

Při posuvu stejném jako v předchozím případě, tedy o 0,065 mm došlo zvýšením přesnosti výpočtu k poklesu výsledné stykové síly na 6442 N. Pravděpodobnost porušení s uvažováním jednoho hlavního napětí je v tomto případě 0,268 % a s uvažováním všech hlavních napětí 0,203 %. Relativní rozdíl je tedy 31,9 %. Úpravou sítě a konvergenčního kritéria tedy nedošlo k ovlivnění pravděpodobnosti porušení. Došlo ovšem k mírně přesnějšímu výpočtu výsledné stykové síly.

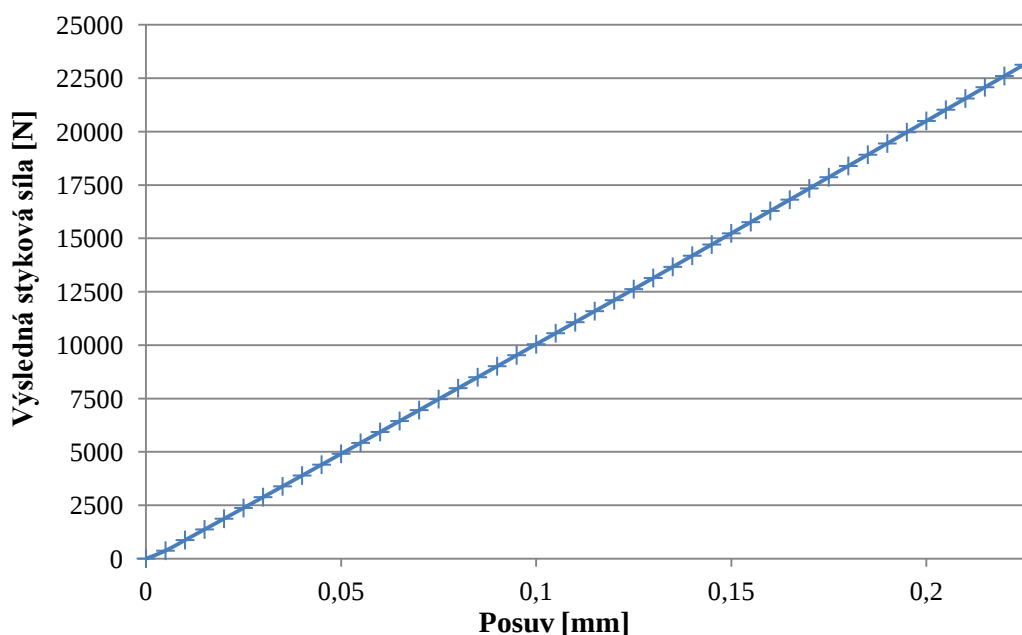


Obrázek 8.7: Upravená diskretizace E použitá pro další výpočty

8.4 Porovnání výsledků s jedním a třemi hlavními napětími

8.4.1 Porovnání deformačního a silového zatížení

Porovnání výsledků obou teorií bylo provedeno pro upravenou síť E s lineárními prvky (viz předchozí kapitoly). Výpočet napětí pro určení pravděpodobnosti porušení byl obdobný jako v předchozím případě. Tentokrát byl ovšem rozdělen na 45 substepů, kdy v každém substepu došlo k posuvu zatěžujícího kužele o 0,005 mm. Na následujícím grafu je znázorněn vztah mezi posuvem a výslednou stykovou silou v dřívku.



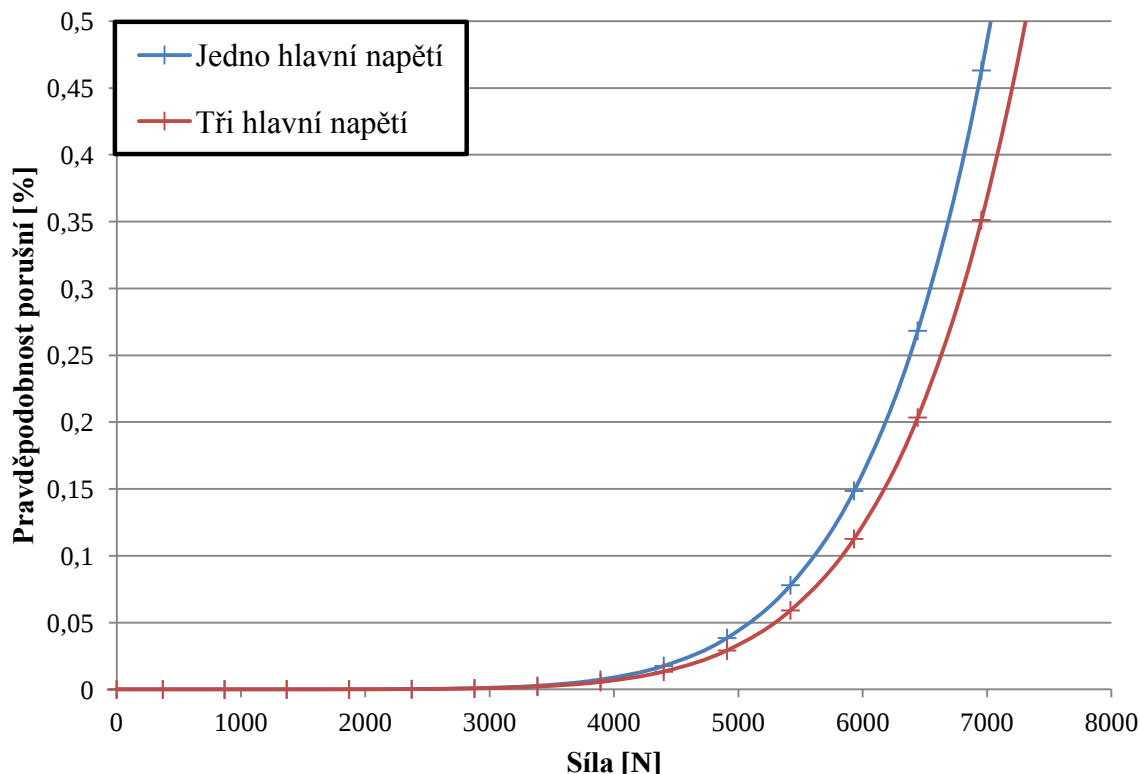
Obrázek 8.8: Závislost síly na posuvu

Vztah mezi posuvem a výslednou stykovou silou je tedy lineární. Jediná menší odchylka od tohoto trendu se objevuje v prvním substepu, kdy dosedá zatěžující kužel na hlavici. Toto by šlo dále zpřesnit úpravou modelu tak, aby kontaktní plochy lépe dosedly. Protože vztah mezi deformací a výslednou stykovou silou je lineární, nedojde při nahrazení deformačního zatížení v následujícím grafu k žádnému zkreslení. Pro lepší představivost bude tedy v následujících grafech uvažováno silové zatížení.

8.4.2 Porovnání výsledků se zahrnutím jednoho a všech hlavních napětí

Obdobným způsobem jako v předchozích případech byly při různých zatíženích určeny pravděpodobnosti porušení při uvažování jednoho a všech hlavních napětí.

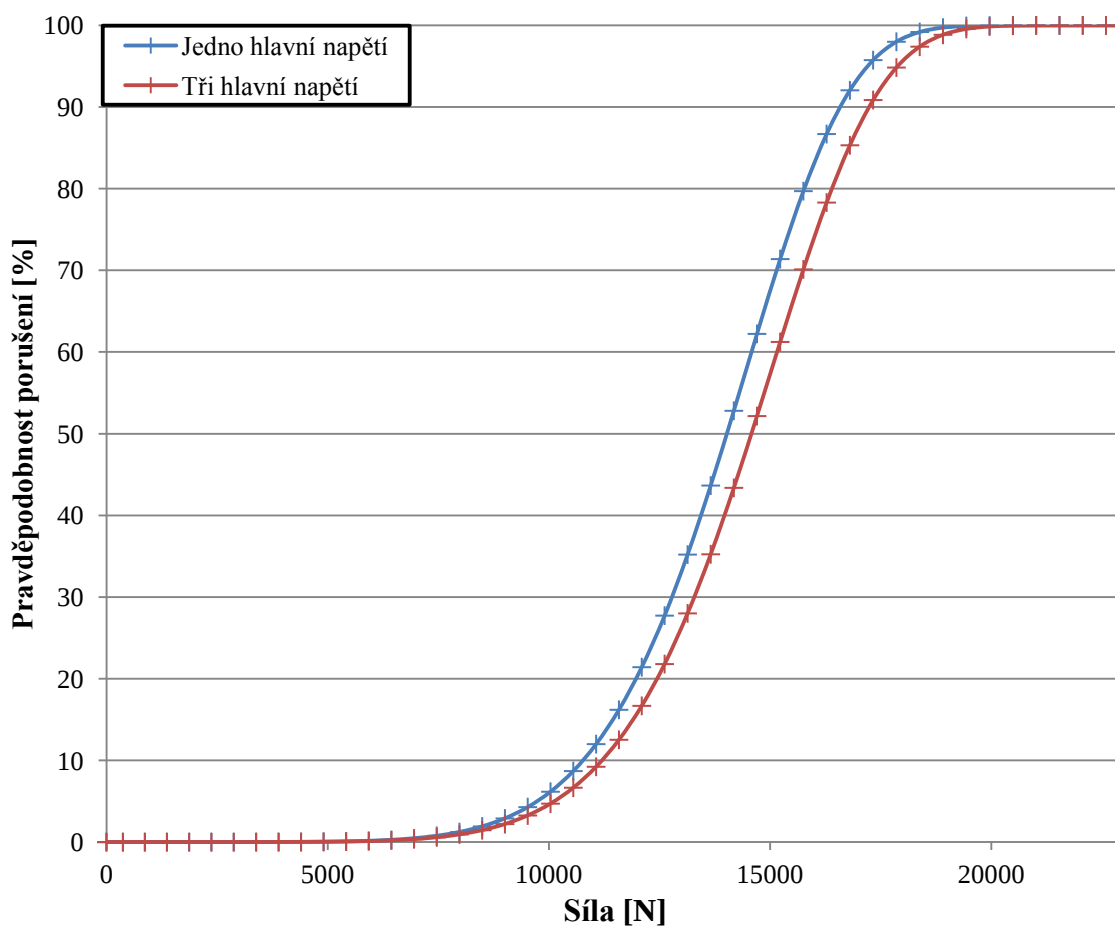
Pro reálné aplikace je významná oblast s nízkou pravděpodobností porušení. Tato oblast je znázorněna na následujícím obrázku.



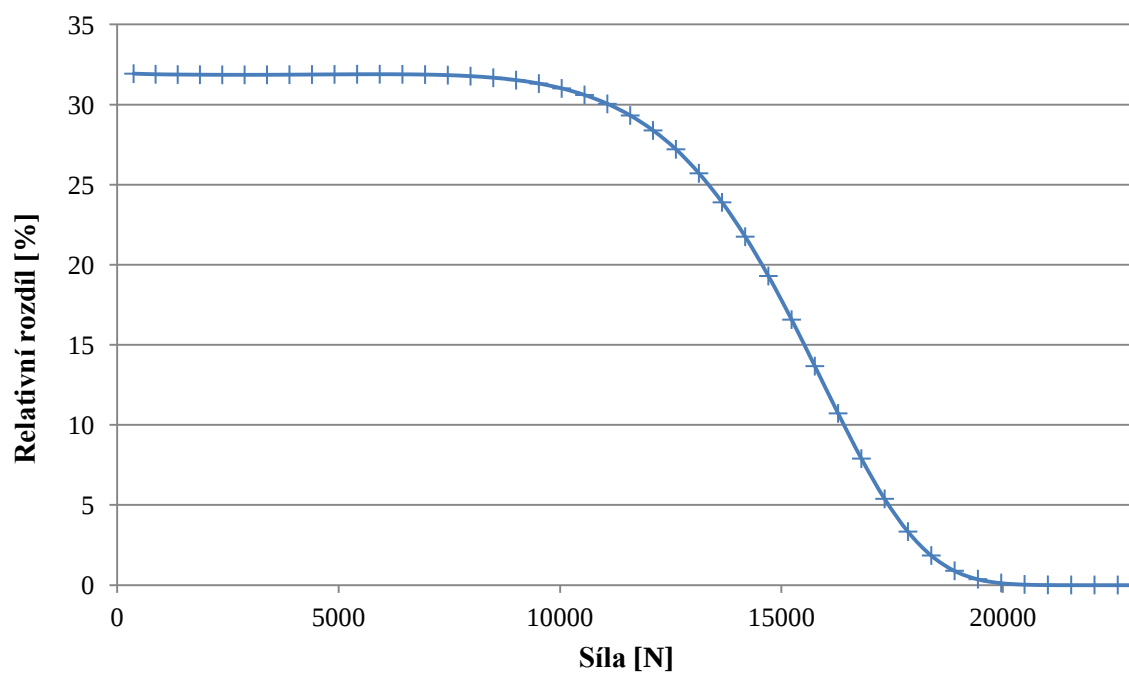
Obrázek 8.9: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení

Na obrázcích 8.10 a 8.11 jsou znázorněny celé S-křivky obou pravděpodobností porušení v závislosti na zatížení a dále je zde znázorněn průběh relativního rozdílu.

Z výsledků je jasné patrné, že pravděpodobnost porušení se zahrnutím všech tří hlavních napětí je nižší než při uvažování pouze prvního hlavního napětí. Obě pravděpodobnosti porušení se zvyšujícím se zatížením rostou. Zakřivení křivky v oblasti nižších pravděpodobností je nižší než v oblasti vysokých pravděpodobností. To vyhovuje hustotě pravděpodobnosti Weibullova rozdělení, kdy je na straně s větší křivostí nabývá hustota pravděpodobnosti vyšších hodnot a hodnoty distribuční funkce zde tedy rostou rychleji.



Obrázek 8.10: S-křivky

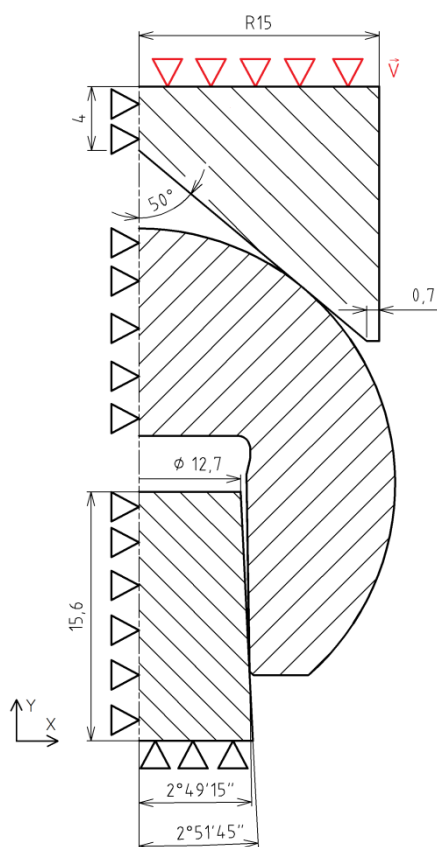


Obrázek 8.11: Průběh relativního rozdílu

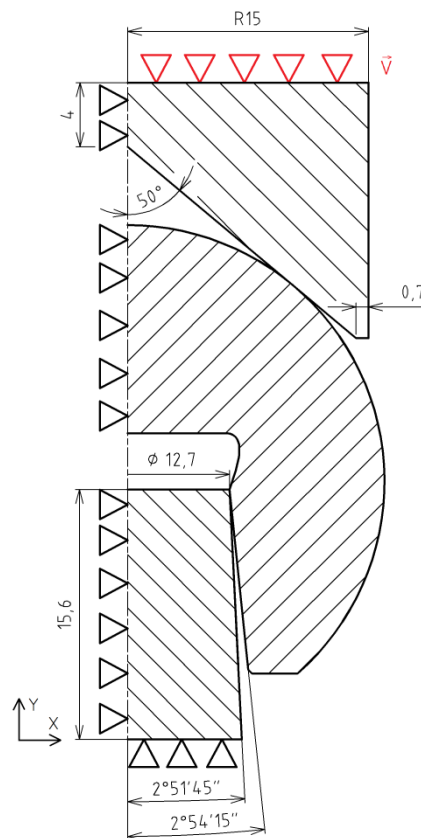
Z průběhu relativního rozdílu jednoznačně vyplývá, že při nízkých hodnotách zatížení je relativní rozdíl při použití pravděpodobnosti porušení s uvažováním pouze prvního hlavního napětí oproti výpočtu s uvažováním všech hlavních napětí přibližně 32 %. S rostoucím zatížením dochází k růstu obou pravděpodobností, což způsobuje, že relativní rozdíl klesá. Při vysokých zatíženích se relativní rozdíl blíží k nule, protože obě teorie vykazují téměř 100% pravděpodobnost porušení.

9 VÝPOČET PRO HLAVICI S IMPERFEKČÍ

V předchozích výpočtech byla uvažována hlavice, která je vyrobena bez tvarových odchylek. Při výrobě vždy dochází k výrobním nepřesnostem. V této kapitole bude posouzen vliv odchylek tvaru od ideální kuželovitosti otvoru hlavice. Tyto odchylky jsou dvojího druhu. Buď je vrcholový úhel otvoru v hlavici menší než vrcholový úhel dřívku a poté dochází v nezatíženém stavu ke kontaktu pouze na dolním poloměru kontaktní oblasti (Imperfekce A) nebo naopak je tento úhel větší než úhel dřívku a poté dochází ke kontaktu na horním poloměru (Imperfekce B). Tyto varianty jsou znázorněny na následujících obrázcích. V obou případech byla volena stejná hodnota imperfekce 5'.



Obrázek 9.1: Imperfekce A



Obrázek 9.2: Imperfekce B

9.1 Hlavice s otvorem s menším vrcholovým úhlem

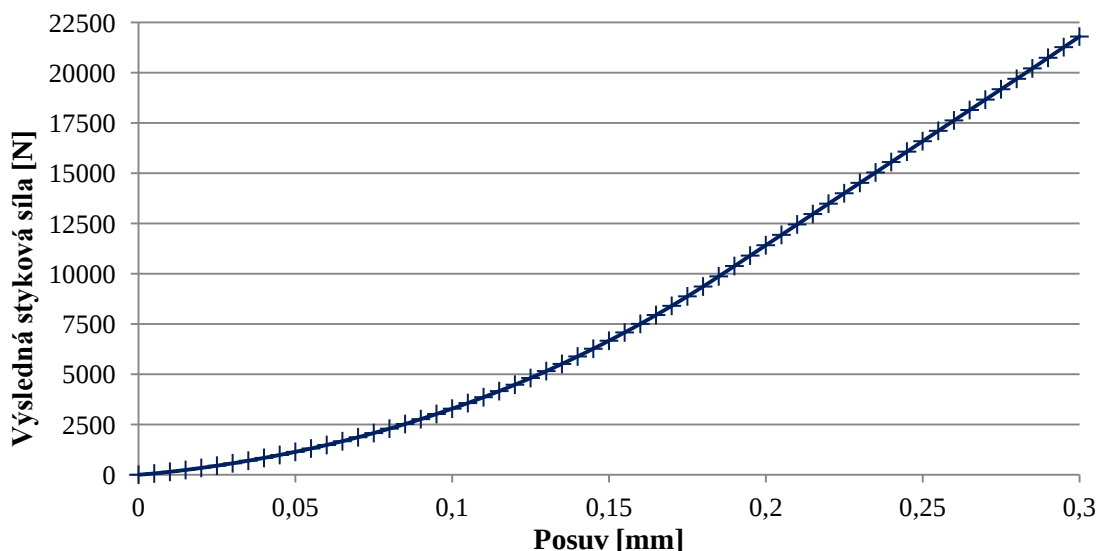
9.1.1 Výpočtový model

Výpočtový model vychází z předchozího výpočtového modelu, pouze zde došlo k úpravě horního poloměru hlavice tak, aby byla do modelu vnesena odchylka od nominální kuželovitosti. Vzhledem k symetrii součásti byl bod na horním poloměru posunut tak, aby se vrcholový úhel poloviny kužele zmenšil o 2,5'.

Sít' pro výpočet byla vytvořena podle stejných pravidel jako upravená sít' E v předchozím případě. Výpočet probíhal obdobným způsobem, pouze bylo aplikováno větší zatížení, aby výsledná S-křivka byla vykreslena celá.

9.1.2 Průběh napětí

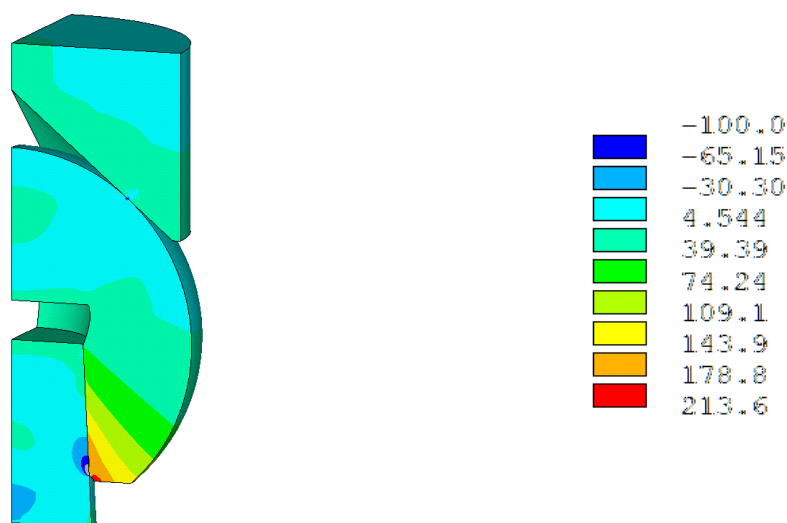
Obdobně jako v předchozím případě bylo zatížení aplikováno jako deformační. Průběh výsledné stykové síly v závislosti na posuvu kužele je znázorněn na následujícím obrázku.



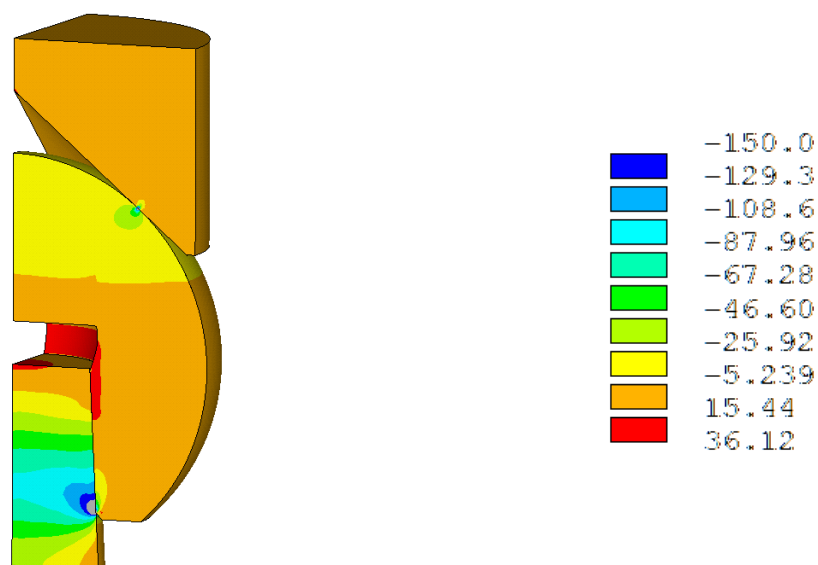
Obrázek 9.3: Průběh výsledné stykové síly - Imperfekce A

V průběhu zatěžování dochází k růstu kontaktní oblasti. Tato skutečnost způsobuje nelineární vztah mezi silou a posuvem. Poté, co dojde k vymezení vůle v kontaktní oblasti, stane se závislost mezi silou a posuvem lineární obdobně jako v předchozím případě.

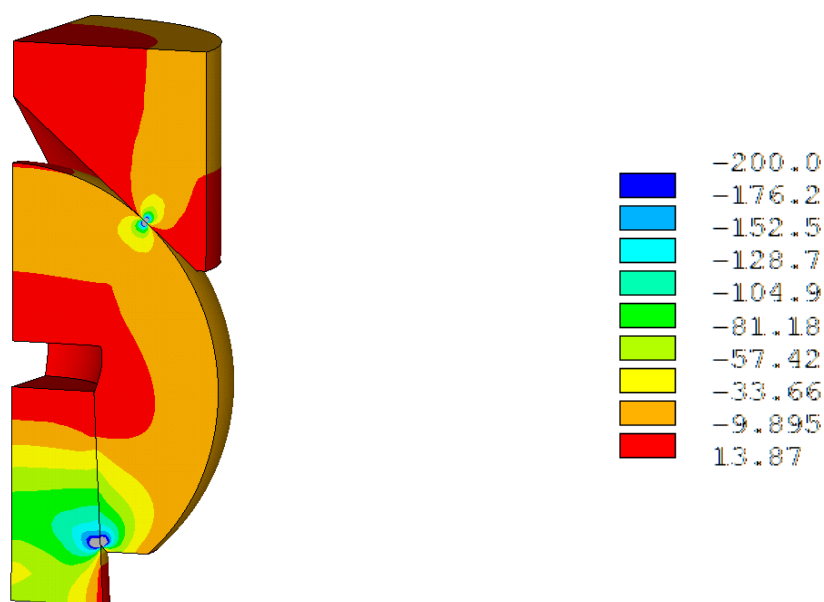
Z grafu je také patrné, že při stejném posuvu zatěžujícího kužele dochází k výrazně menšímu zatížení hlavice než v předchozím případě. Na následujících obrázcích jsou znázorněny průběhy všech tří hlavních napětí při deformačním zatížení 0,15 mm odpovídajícímu stykové síle 6671,2 N. Tento substep byl volen, protože stykové síly jsou při něm nejbližší silám, při kterých byly vykresleny výsledky v kapitole 8.1.4.



Obrázek 9.4: Průběh prvního hlavního napětí [MPa] - Imperfekce A (-366;214)



Obrázek 9.5: Průběh druhého hlavního napětí [MPa] - Imperfekce A (-526,36,1)



Obrázek 9.6: Průběh třetího hlavního napětí [MPa] - Imperfekce A(-722;13,9)

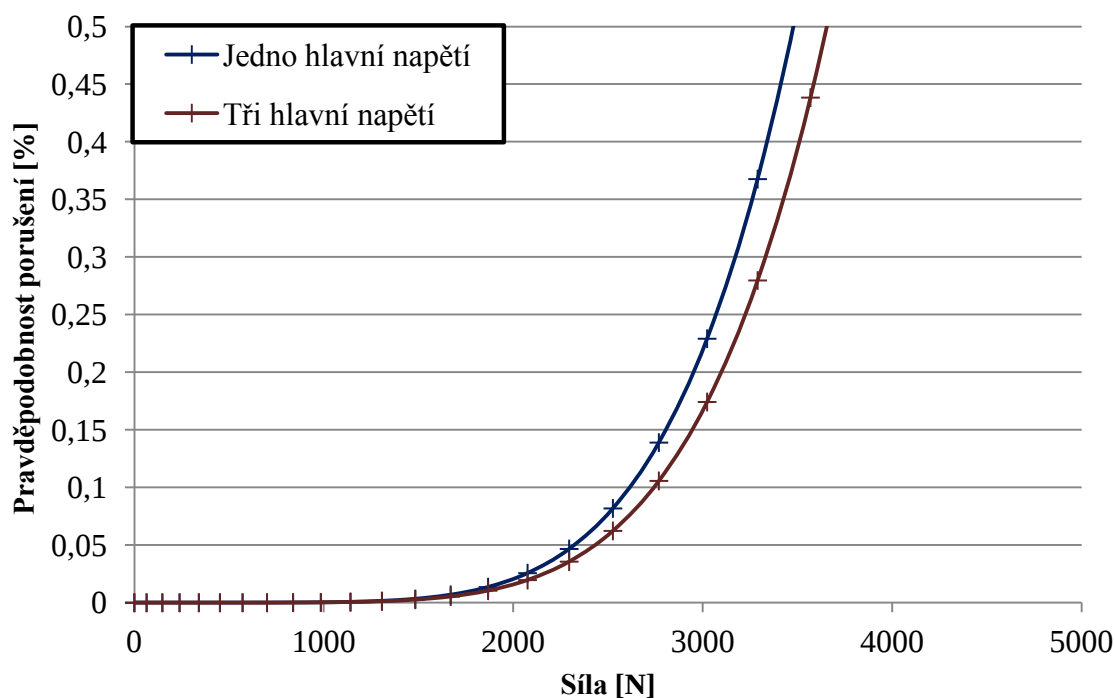
Oproti modelu bez imperfekce dochází k výraznému nárůstu prvního hlavního napětí, navíc vzrostl objem, ve kterém toto napětí působí. V kontaktní oblasti dochází také k růstu záporných hodnot třetího hlavního napětí, ovšem zmenšuje se zde oblast, ve které toto napětí působí.

9.1.3 Pravděpodobnost porušení

Obdobně jako v předchozím případě byly z hlavice odebrány prvky v blízkosti kontaktní oblasti hlavice s kuzelem a z ostatních byla určena pravděpodobnost porušení s uvažováním jednoho i všech tří hlavních napětí.

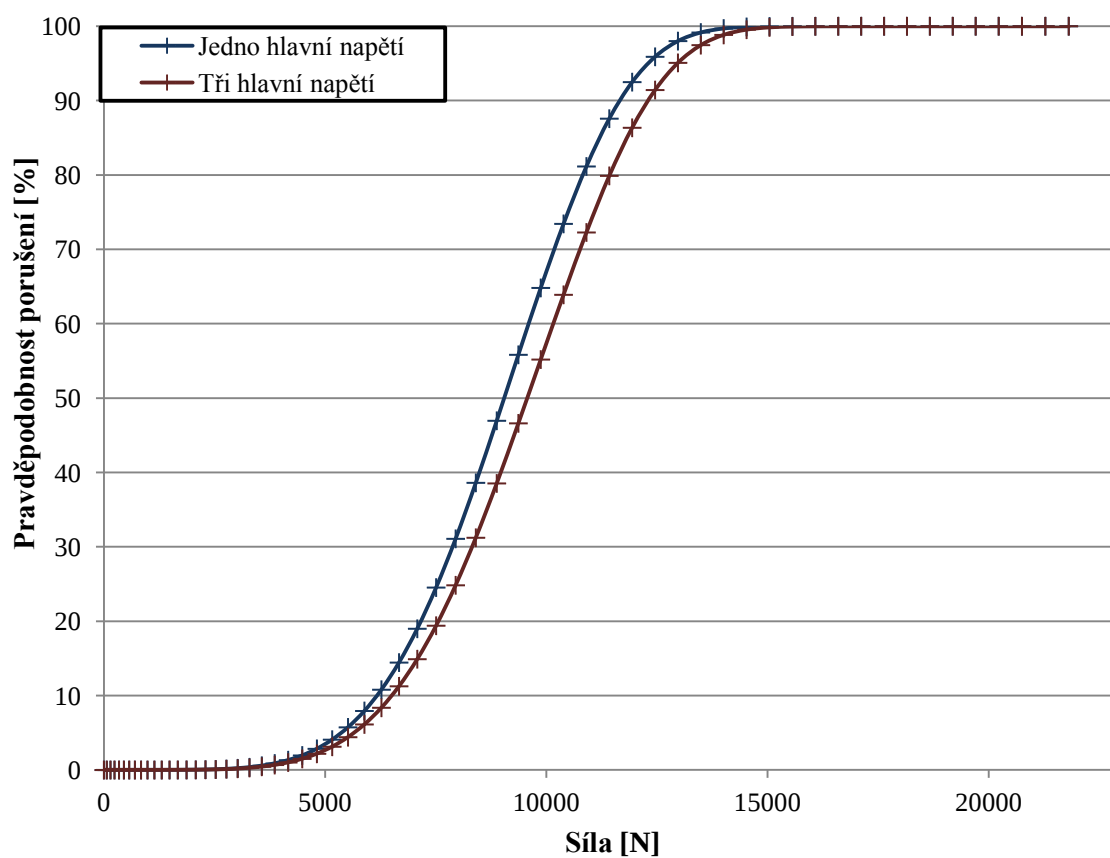
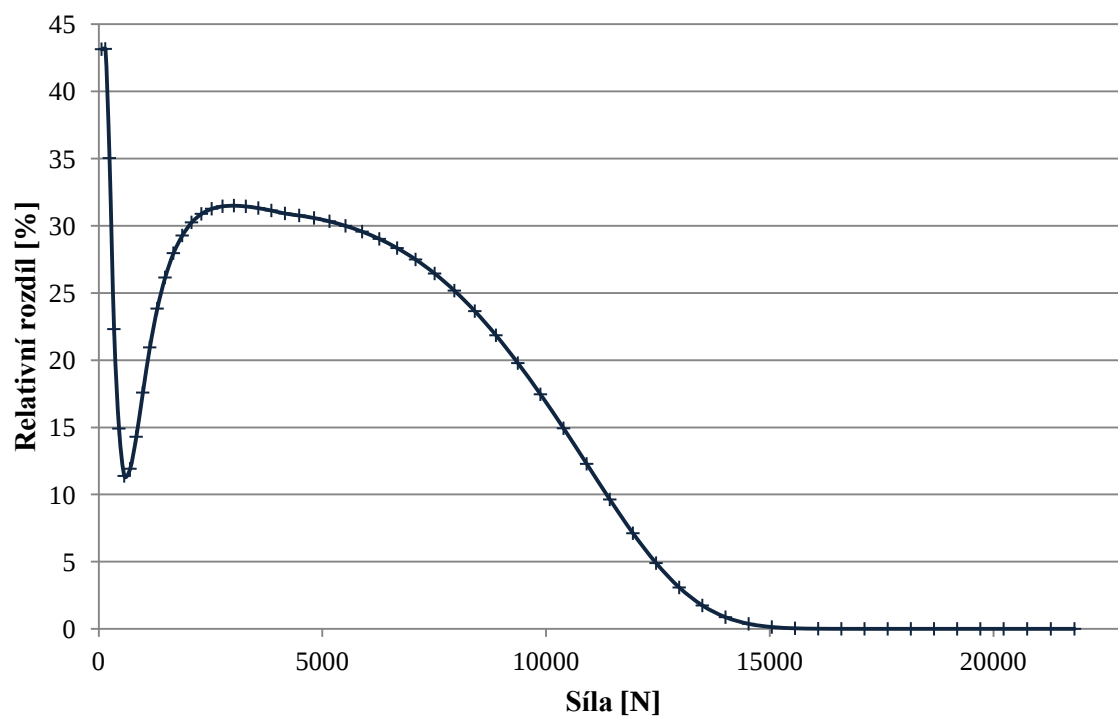
Pro lepší porovnání s předchozími výsledky byla použita lineární interpolace. Při silovém zatížení 6442 N je tedy pravděpodobnost porušení 12,35 % při uvažování pouze jednoho hlavního napětí a 9,59 % při uvažování všech hlavních napětí. Relativní rozdíl je tedy 29 %. Maximální hodnota prvního hlavního napětí je 209 MPa. Při této imperfekci tedy došlo k růstu maximální hodnoty prvního hlavního napětí, což odpovídá i růstu pravděpodobnosti porušení. Pravděpodobnost porušení se zahrnutím všech tří hlavních napětí je tedy opět nižší

Detail oblasti nízkých pravděpodobností porušení je znázorněn na obr. 9.7.



Obrázek 9.7: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení - Imperfekce A

Na obrázcích 9.8 a 9.9 je znázorněna S-křivka popisující průběh pravděpodobnosti porušení obou variant a jejich relativní rozdíl.

*Obrázek 9.8: S-křivky - Imperfekce A**Obrázek 9.9: Relativní rozdíl - Imperfekce A*

Průběh relativního rozdílu je výrazně odlišný než v předchozím případě. Při velmi malých zatíženích se objevuje vysoká hodnota tohoto rozdílu, která rychle klesá. To je pravděpodobně způsobeno numerickou chybou související s diskretizací, kdy kvůli imperfekci dochází ke kontaktu pouze prvků na spodním poloměru hlavice. Napětí na těchto prvcích jsou v absolutních hodnotách malá, ovšem oproti ostatním prvkům výrazně vyšší a nejvíce ovlivní pravděpodobnost porušení. Konkrétně při prvním substepu jsou hodnoty hlavních napětí $\sigma_{1\max} = 11,5$ MPa, $\sigma_{2\min} = -23,7$ MPa, $\sigma_{3\min} = -76,3$ MPa. Z toho jasně vyplývá, že třetí hlavní napětí je velmi nízké a tato skutečnost způsobí velkou odchylku pravděpodobností porušení. Při dalším zatížení se do kontaktu dostává více prvků a relativní rozdíl začne klesat. Zjemněním sítě by bylo možné určit přesnější hodnoty, ovšem další zjemnění sítě by také způsobilo růst výpočetní náročnosti a vzhledem k povaze úlohy bude vždy v prvním substepu kontaktní oblast velmi malá.

9.2 Hlavice s otvorem s větším vrcholovým úhlem

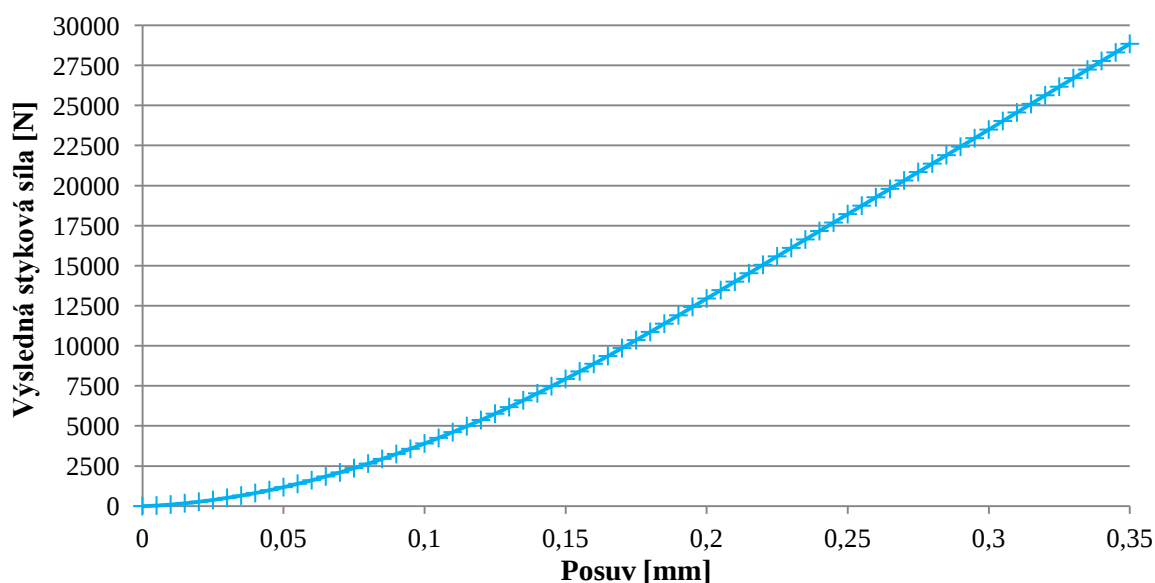
9.2.1 Výpočtový model

Obdobně jako v předchozím případě byl modifikací modelu bez imperfekce vytvořen model s imperfekcí. Tentokrát byl posunut dolní poloměr hlavice tak, aby se vrcholový úhel poloviny kužele zvýšil o $2,5^\circ$.

Síť byla ponechána jako v předchozích případech, pouze byla upravena kontaktní tuhost tak, aby bylo dosaženo lepší konvergence. Hodnoty penetrací zůstaly i po této úpravě v požadovaných mezích.

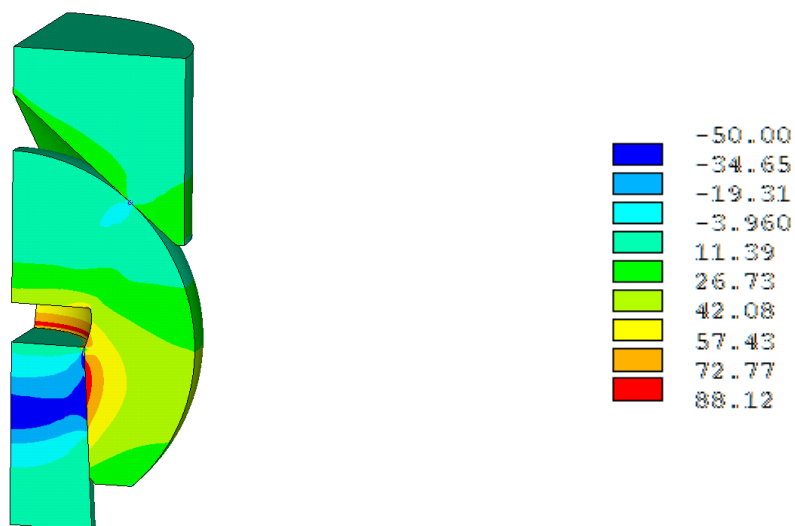
9.2.2 Průběh napětí

Průběh stykové síly v závislosti na zatížení, je podobný průběhu, který byl zjištěn v předchozím případě. Počáteční nelinearita je opět způsobena vymezováním vůle v kontaktní oblasti a po vymezování vůle se průběh stane lineárním.

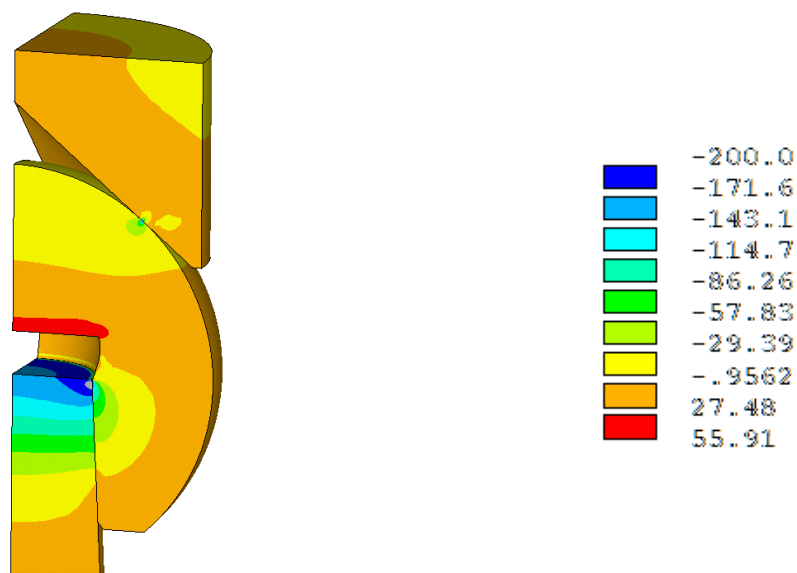


Obrázek 9.10: Průběh výsledné stykové síly – Imperfekce B

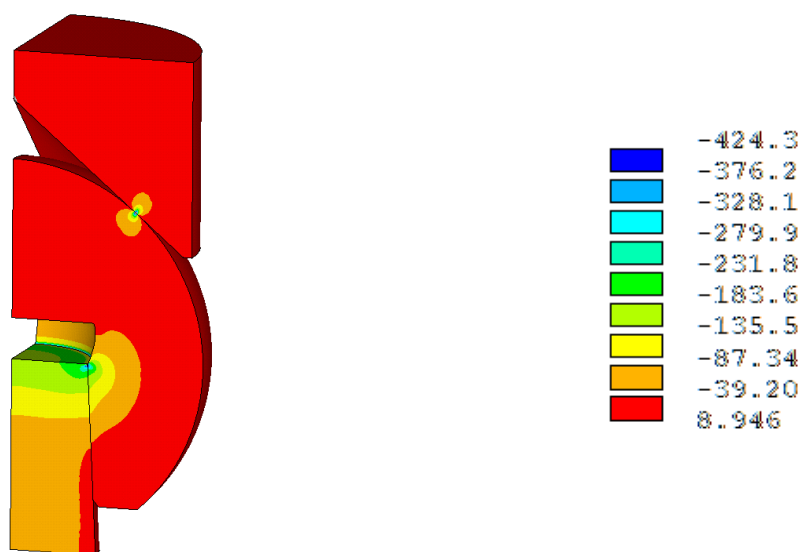
Průběhy napětí byly tentokrát vykresleny při posuvu o 0,135 mm, kdy je hodnota stykové síly 6603 N. V tomto případě je zřejmé, že dochází k výraznější změně průběhu hlavních napětí po hlavici. Maximální hodnota prvního hlavního napětí v tomto případě oproti variantě bez imperfekce poklesla. Objevuje se ta skutečnost, že zatímco maximální hodnota prvního hlavního napětí leží v oblasti mezi poloměry a s postupným zatěžováním se posouvá od horního poloměru k dolnímu, tak minimální hodnoty druhého a třetího hlavního napětí zůstávají v bodech na horním poloměru. Na následujících obrázcích jsou znázorněny průběhy všech tří hlavních napětí.



Obrázek 9.11: Průběh prvního hlavního napětí [MPa] - Imperfekce B(-293;88,1)



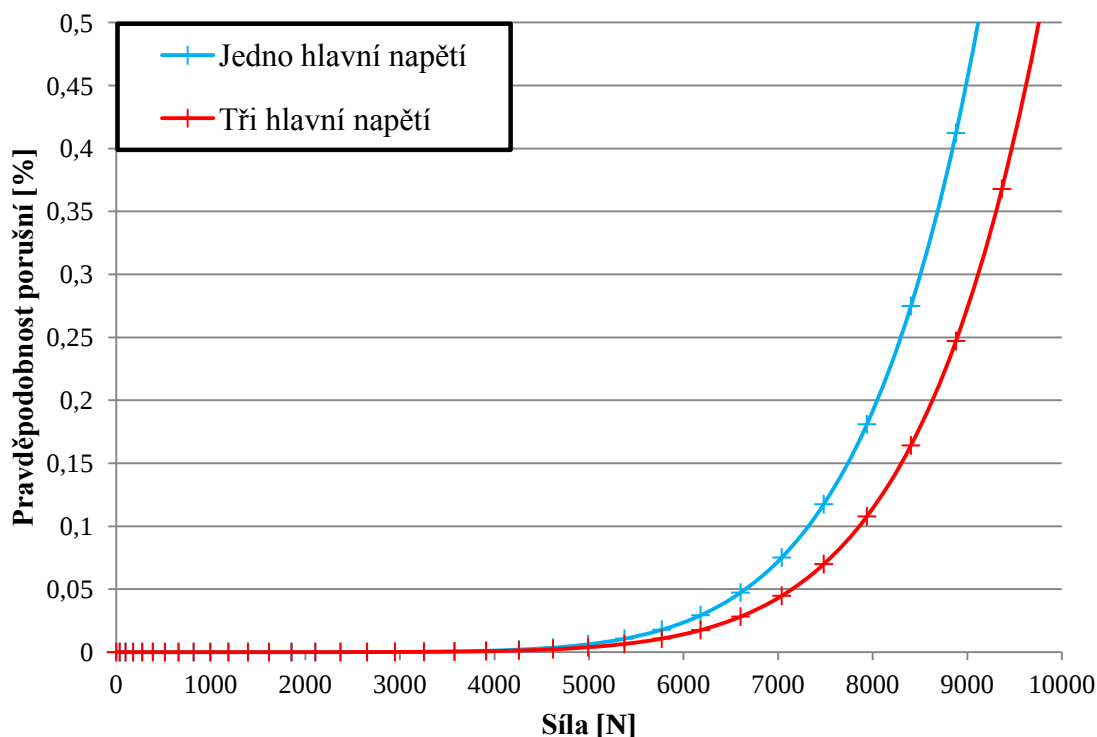
Obrázek 9.12: Průběh druhého hlavního napětí [MPa] - Imperfekce B (-536;55,9)



Obrázek 9.13: Průběh třetího hlavního napětí [MPa] - Imperfekce B (-608;8,95)

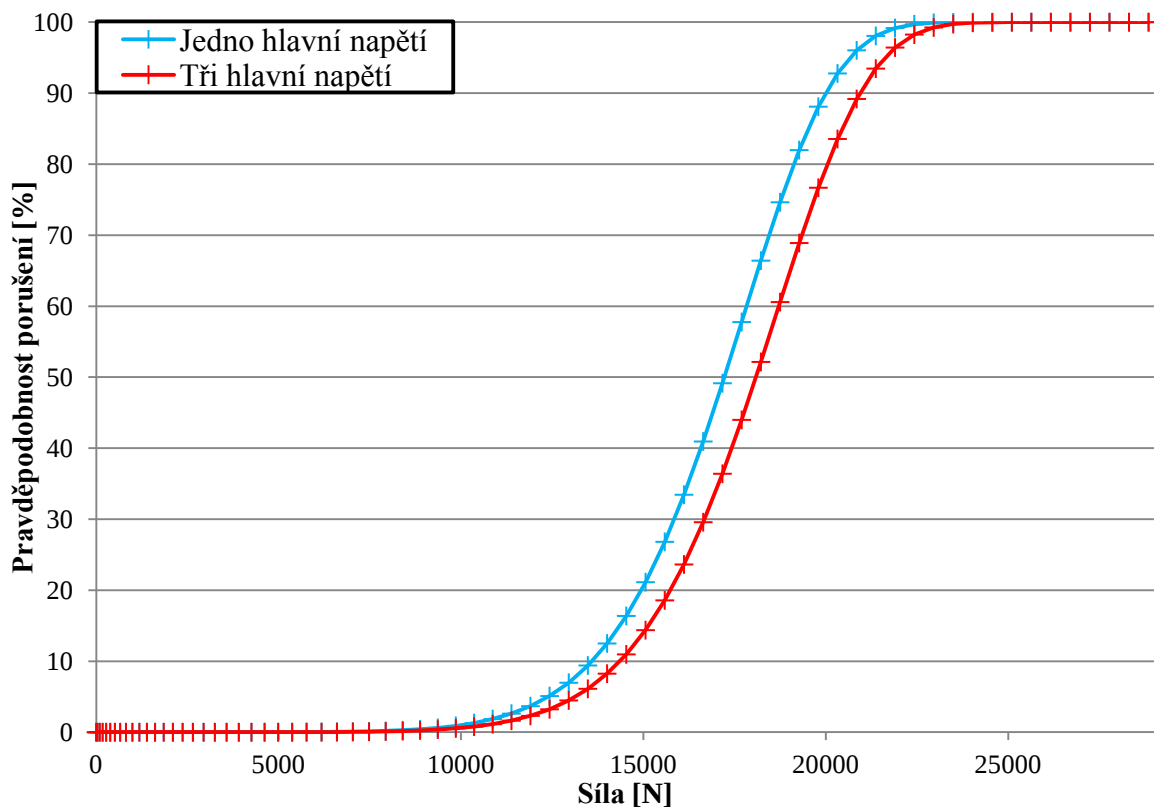
9.2.3 Pravděpodobnost porušení

Výsledky byly opět interpolovány tak, aby mohla být určena pravděpodobnosti porušení při zatížení silou 6442 N. Pravděpodobnost porušení s uvažováním pouze prvního hlavního napětí je 0,0404 % a při uvažování všech hlavních napětí 0,0241 %. Relativní rozdíl je 67 %. Na následujícím obrázku je opět vykreslena oblast nízkých pravděpodobností porušení.

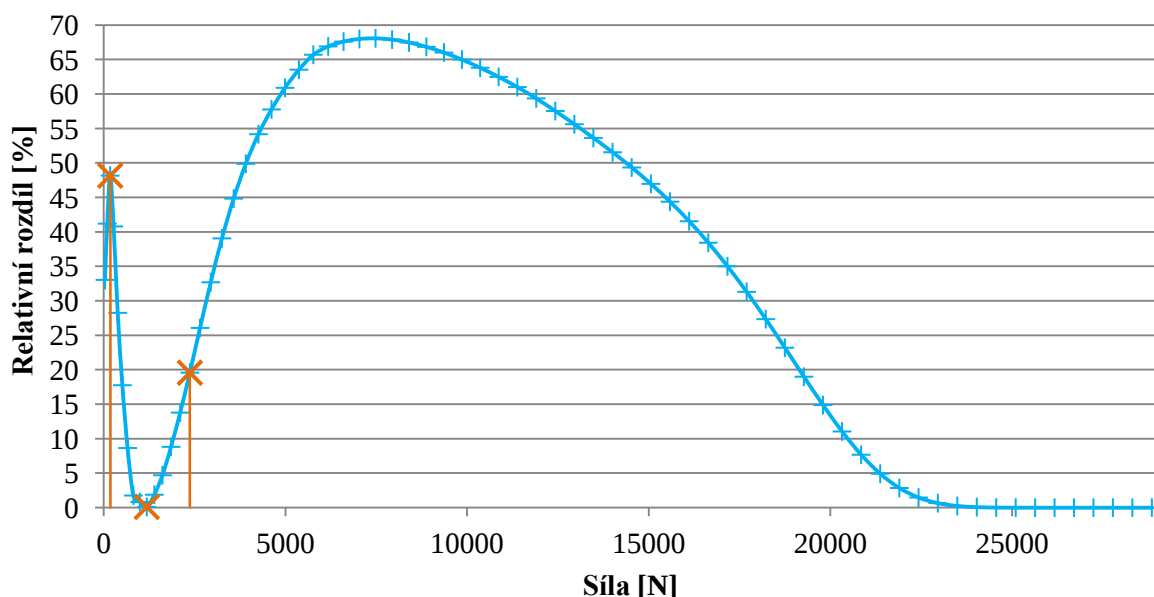


Obrázek 9.14: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení - Imperfekce B

Pro určení průběhu pravděpodobnosti porušení byla opět vykreslena distribuční funkce a průběh relativního rozdílu, které jsou znázorněny na následujících obrázcích.



Obrázek 9.15: S-křivky - Imperfekce B



Obrázek 9.16: Relativní rozdíl - Imperfekce B (vyznačen 3., 10. a 15. substep)

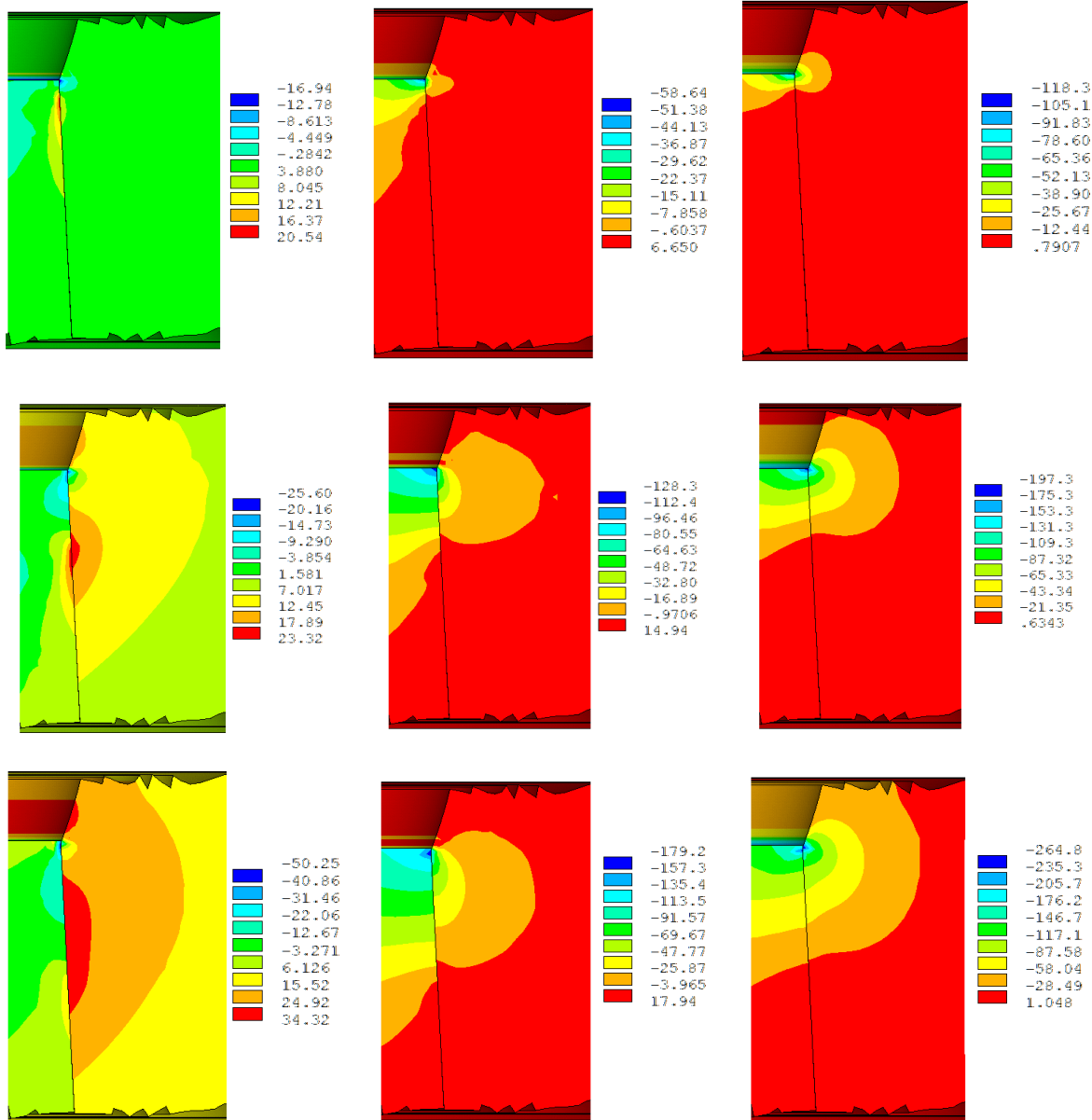
Je zřejmé, že oproti předchozím variantám dochází při této imperfekci k poklesu pravděpodobnosti porušení.

Relativní rozdíl je vyšší než v předchozích případech. Výpočet se zahrnutím všech hlavních napětí vykazuje výrazně nižší pravděpodobnosti porušení. V oblasti s nízkým zatížením se obdobně jako v předchozím případě, opět objevuje chyba způsobená kontaktem pouze prvků na horním poloměru. Poté dochází k poklesu relativního rozdílu až téměř k nule. V této oblasti dochází k tomu, že maximální hodnoty prvního hlavního napětí, které nejvýrazněji ovlivňují pravděpodobnost porušení, jsou níže než minimální hodnoty třetího hlavního napětí. Třetí hlavní napětí tedy ovlivňuje pravděpodobnost porušení v místech, kde je první hlavní napětí malé. Průběhy hlavních napětí v kontaktní oblasti jsou pro 3., 10. a 15. substep znázorněny na následujícím obrázku.

První hlavní napětí

Druhé hlavní napětí

Třetí hlavní napětí



Obrázek 9.17: Porovnání hlavních napětí [MPa] ve 3., 10. a 15. substepu (viz obr. 9.16)

Ve třetím substepu dochází k maximálnímu ovlivnění kvůli malé kontaktní oblasti. V desátém substepu jsou kvůli rozdílným oblastem, kde jednotlivá napětí působí, pravděpodobnosti porušení s uvažováním jednoho i tří hlavních napětí téměř stejné. V 15. substepu, již druhé a třetí hlavní napětí působí i v oblasti maximálního prvního hlavního napětí a ovlivňují pravděpodobnost porušení.

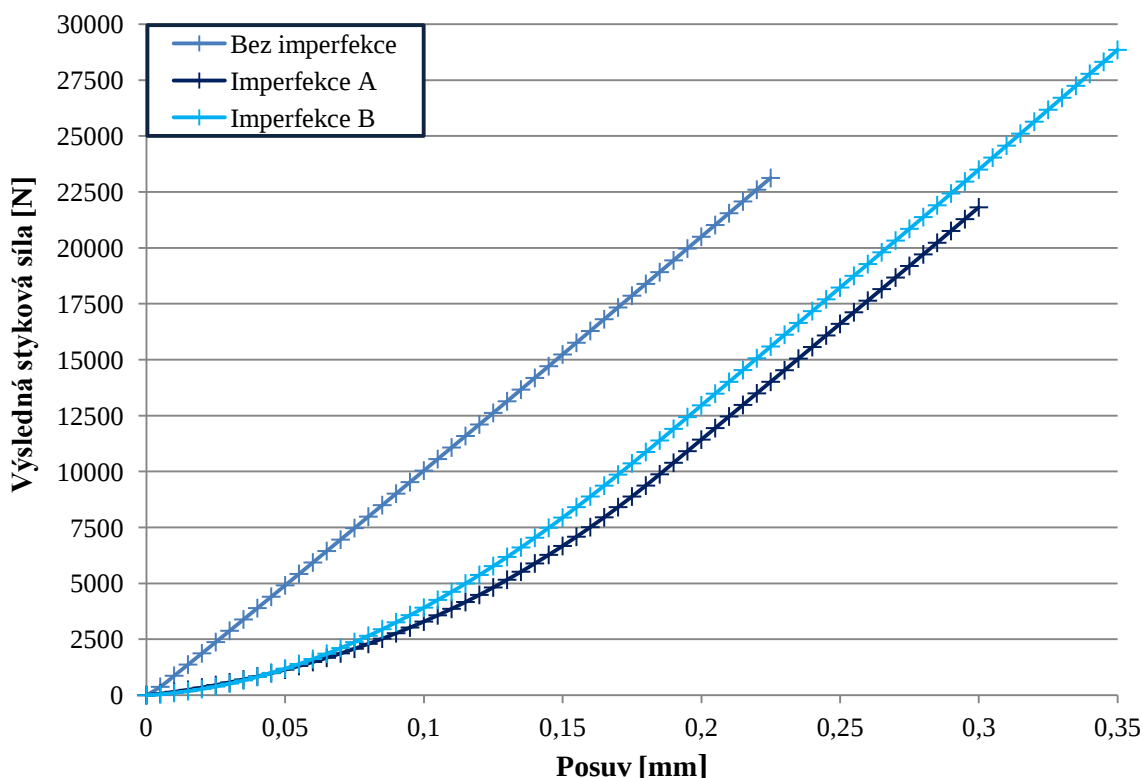
9.3 Porovnání všech variant

V této kapitole budou pro lepší posouzení vlivu imperfekcí na pravděpodobnost porušení porovnány výsledky z předcházejících kapitol.

9.3.1 Porovnání závislostí posuv - výsledná styková síla

Na obrázku 9.18 jsou porovnány průběhy výsledných stykových sil pro různé varianty výpočtu.

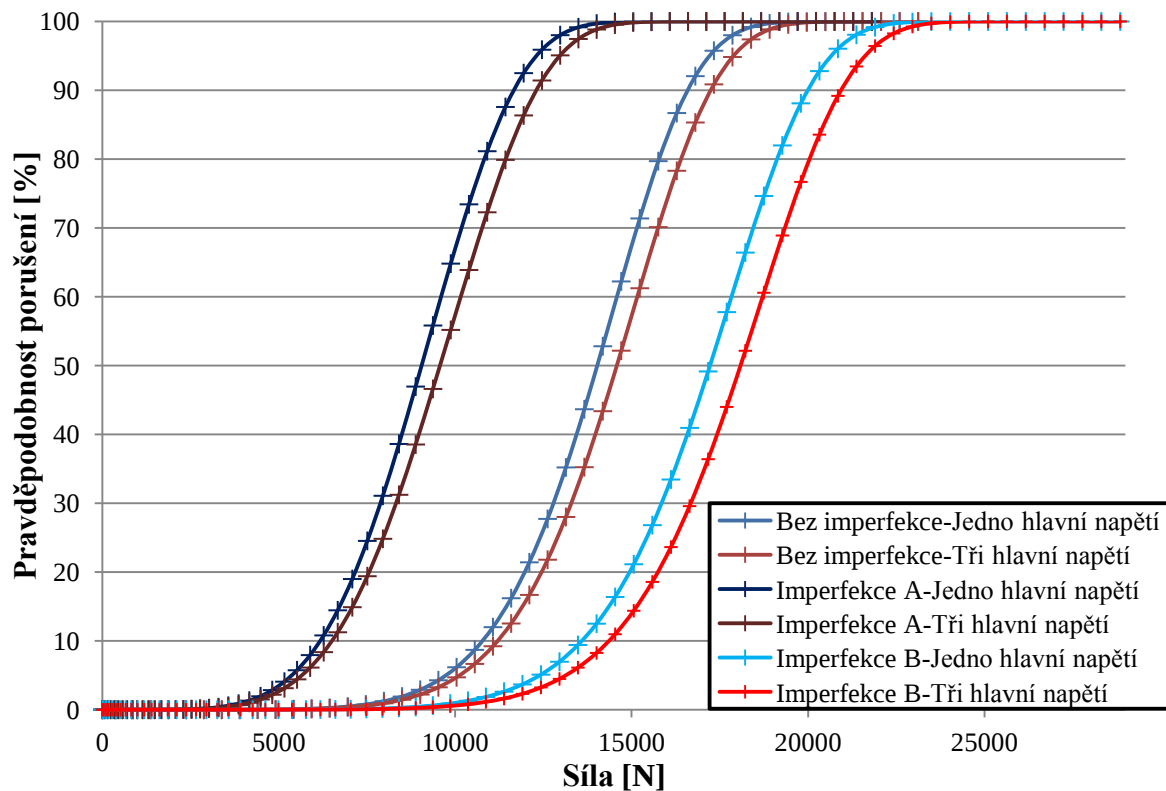
Z grafu vyplývá, že pokud nedochází k rozšiřování kontaktní oblasti, tak je závislost stykové síly na posuvu lineární. Pokud má úloha imperfekci, dochází nejprve k růstu kontaktní oblasti. Tento růst se projevuje nelineárním chováním, kdy je závislost výsledné stykové síly na posuvu také nelineární. Po vymezení vůle v kontaktu jsou průběhy lineární se stejnou směrnici jako v případě bez imperfekce.



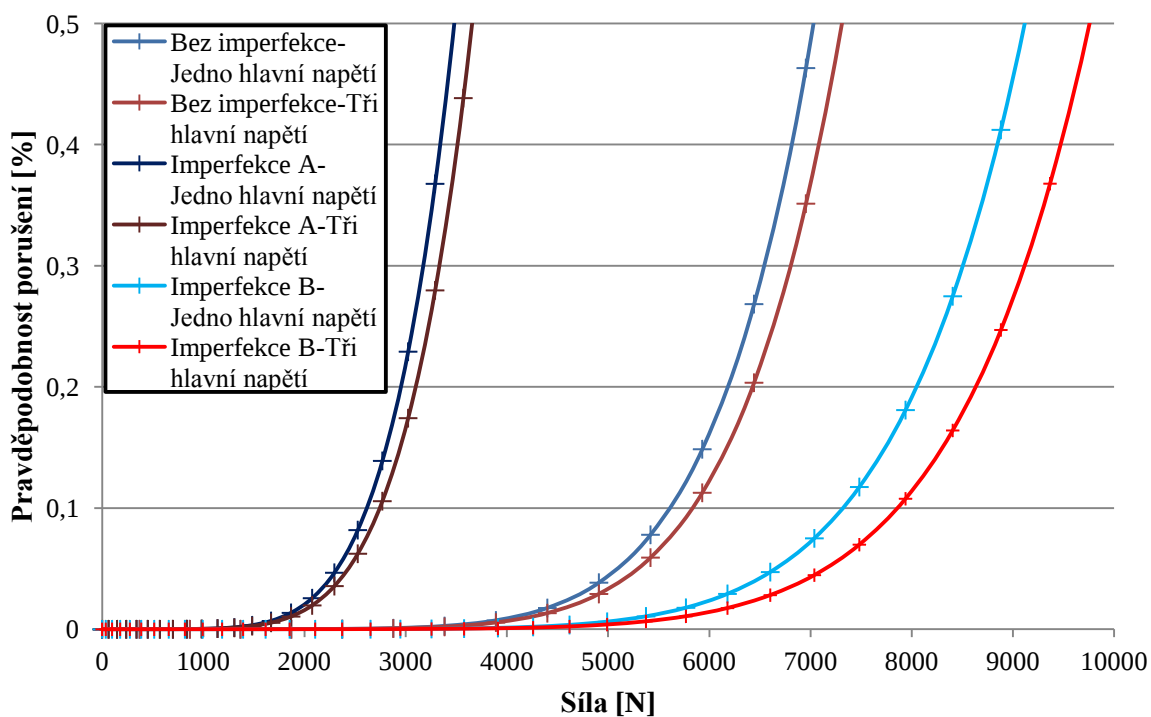
Obrázek 9.18: Porovnání průběhů výsledných stykových sil

9.3.2 Porovnání S-křivek

Na následujících obrázcích jsou porovnány všechny S-křivky.



Obrázek 9.19: S-křivky - porovnání



Obrázek 9.20: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení

Z předchozích obrázků tedy vyplývá, že nejmenší pravděpodobnost porušení nastává u varianty s imperfekcí B.

Pravděpodobnosti porušení s uvažováním všech tří hlavních napětí vychází ve všech variantách nižší, než s uvažováním pouze prvního hlavního napětí, to je způsobeno převážně tlakovým druhým a třetím hlavním napětím. Nejmenší odchylka pravděpodobností porušení se objevuje u imperfekce A a největší u imperfekce B. Zejména v tomto případě je pravděpodobnost porušení s uvažováním pouze jednoho hlavního napětí výrazně na bezpečné straně.

Ze vzájemné polohy S-křivek ovšem vyplývá, že výrazně větší vliv na pravděpodobnost porušení mají tvarové imperfekce, než uvažování druhého a třetího hlavního napětí. V jiných případech by tomu ovšem tak být nemuselo a bylo by nutné uvažovat všechna tři hlavní napětí.

10 ZÁVĚR

Tato práce se zabývá výpočtem pravděpodobnosti porušení keramické součásti s uvažováním jednoho a všech hlavních napětí. Hlavním cílem práce je posoudit, kdy je možné použít teorii, která uvažuje pouze jedno hlavní napětí a kdy je nutné použít teorii zahrnující všechna hlavní napětí. Pravděpodobnost porušení byla určena pro tři typy těles, prutové těleso namáhané čtyřbodovým ohybem, tlustostěnné válcové těleso a reálně používanou keramickou hlavici kyčelní endoprotézy.

Při výpočtech na prutovém tělese byla ověřena možnost určit pravděpodobnost porušení při nahrazení integrálu sumou přes uzly jednotlivých prvků. Pro část prutu namáhanou prostým ohybem je pravděpodobnost porušení určena podle analytického vztahu 10,84 %. Při výpočtu pomocí MKP byla výsledná pravděpodobnost porušení 11,01 %. Odchylka těchto výpočtů je tedy velmi malá.

Dále byla určena pravděpodobnost porušení celého keramického prutu při zkoušce čtyřbodovým ohybem. Pravděpodobnost porušení tohoto prutu byla 23,4 %, pokud byly vazby uvažovány na střednici. Pokud bylo zamezeno posuvu uzlů na povrchu tělesa, klesla pravděpodobnost porušení na 23,1 %.

Vazby tedy dle očekávání mají vliv na výslednou pravděpodobnost porušení, a proto byla v následujícím kroku úloha řešena jako kontaktní. Vazby a zatížení byly modelovány pomocí ocelových válců vtlačovaných do tělesa. Kontaktní tlaky v těchto případech vycházely přibližně stejné jako podle Hertzovy teorie. S rostoucím poloměrem podpory docházelo k mírnému poklesu pravděpodobnosti porušení. V relativních hodnotách byl tento pokles ovšem velmi malý. Pokles je pravděpodobně způsoben poklesem maximálních hodnot prvních hlavních napětí.

Dále byla tato úloha modelována jako prostorová, aby bylo možné ověřit shodu výpočtu s uvažováním jednoho a všech hlavních napětí v případě, že je pouze první hlavní napětí nenulové. Pro diskretizaci C vyšla při uvažování jednoho hlavního napětí pravděpodobnost porušení 24,5 %. Tento výsledek je tedy velice blízký výsledkům získaných pomocí rovinného modelu. S rostoucí hustotou sítě docházelo k poklesu pravděpodobnosti porušení a přibližování se k výsledkům získaných pomocí rovinného modelu. Při uvažování všech tří hlavních napětí byla výsledná pravděpodobnost porušení 24,6 %. Odchylka těchto dvou pravděpodobností může být způsobená chybou numerické integrace a napětím od posouvajících síl, které v předchozích případech nebylo uvažováno. Při vyšších hustotách diskretizace dále pravděpodobnost porušení tohoto prutu klesla na 23,6 % při zahrnutí jednoho hlavního napětí.

Jak již bylo zmíněno, při výpočtu pravděpodobnosti porušení s uvažováním všech tří hlavních napětí je nutné provést numerickou integraci normálového napětí přes jednotkovou polokouli v prostoru hlavních napětí. Jako vhodná metoda byla zvolena Gaussova integrace. Bylo ověřeno, že minimální řád, který je nutný pro správné výsledky je $\frac{m+1}{2}$, kde m je Weibullův modul.

Na válcovém tělese bylo posuzováno chování obou teorií v případě různých znamének hlavních napětí. Dle očekávání dochází k tomu, že pokud jsou všechna hlavní napětí záporná, je pravděpodobnost porušení nulová a naopak, pokud jsou všechna hlavní napětí

kladná, je pravděpodobnost porušení s uvažováním všech hlavních napětí větší než při uvažování pouze jednoho hlavního napětí.

Pokud byla první dvě hlavní napětí kladná a třetí záporné vycházela opět pravděpodobnost porušení s uvažováním všech hlavních napětí větší než při uvažování prvního hlavního napětí. V praxi by ovšem záleželo na hodnotách druhého a třetího hlavního napětí, v některých případech by mohla být pravděpodobnost s uvažováním třech hlavních napětí nižší. Poslední varianta byla předpokládána jako stav, kdy jsou druhé a třetí hlavní napětí záporné a první hlavní napětí kladné. V tomto případě vycházela pravděpodobnost porušení se zahrnutím jednoho hlavního napětí vyšší než při výpočtu uvažujícím všechna tři hlavní napětí.

Dále byla posuzována pravděpodobnost porušení keramické hlavice, která se reálně používá. Při zatížení silou 6442 N byla pravděpodobnost porušení s uvažováním jednoho hlavního napětí 0,268 % a při uvažování všech hlavních napětí 0,203 %. Tyto hodnoty vyplývají z vykreslených S-křivek.

Následně byly určeny pravděpodobnosti porušení keramické hlavice s uvažováním tvarových imperfekcí od kuželovitosti. Při imperfekci, kdy dochází ke kontaktu na spodním poloměru, došlo k výraznému nárůstu pravděpodobnosti porušení, ovšem relativní rozdíl při uvažování obou hlavních napětí klesl. Naopak při imperfekci, kdy dochází ke kontaktu na horním poloměru, došlo k poklesu pravděpodobnosti porušení a relativní rozdíl obou pravděpodobností vzrostl. V tomto případě již tento vliv není úplně zanedbatelný, ovšem tvarové imperfekce způsobují výrazně větší změny pravděpodobnosti porušení než je odchylka obou výpočtů.

Zahrnutí druhého a třetího hlavního napětí tedy ovlivňuje výslednou pravděpodobnost porušení a to i v případě, kdy jsou tato napětí záporná a samotná by způsobovala nulovou pravděpodobnost porušení. Tlakové hodnoty těchto napětí pravděpodobnost porušení snižují a tahové zvyšují. Pokud jsou tedy tato hlavní napětí tahová, je nutné je do výpočtu uvažovat. Pokud jsou záporná a nejsou uvažována, je výpočet pravděpodobnosti porušení na bezpečné straně.

Vzhledem k podstatě tohoto výpočtu není možné do něj zahrnout mechanismus šíření trhlin, protože neznáme jejich velikost, tvar a orientaci. Toto zohledňuje pravděpodobnost porušení. Při výpočtu byla uvažována pouze imperfekce od ideální kuželovitosti. V praxi se ovšem objevují i jiné imperfekce, kromě odchylky od kruhovitosti to mohou být různé výstupky způsobené výrobní technologií atd. Tyto imperfekce mají výrazný vliv na pravděpodobnost porušení, ovšem jejich posouzení nebylo cílem této práce, podrobněji se jimi zabývá např. [38]. Z předchozích výpočtů vyplývá, že výpočet pravděpodobnosti porušení je citlivější na kvalitu sítě než výpočet napětí a proto je nutné použít jemnější síť.

Z výpočtů tedy vyplývá, že se hodnoty pravděpodobností porušení určené podle Weibullový teorie při výpočtech uvažující jedno nebo všechna tři hlavní napětí liší, pokud jsou druhé a třetí hlavní napětí nenulové. V případě, kdy jsou všechna hlavní napětí kladná, je pravděpodobnost porušení při uvažování všech hlavních napětí vyšší než při uvažování jednoho hlavního napětí a je tedy nutné druhé a třetí hlavní napětí zahrnout do výpočtu. K rozdílu dochází i v případě, kdy jsou druhá a třetí hlavní napětí záporná. V tomto případě je pravděpodobnost porušení uvažující všechna tři hlavní napětí nižší než při uvažování jednoho hlavního napětí. V případě, že jsou všechna hlavní napětí záporná, je pravděpodobnost porušení nulová.

SEZNAM ZDROJŮ

- [1] VLACH, Bohumil. *Lomové chování keramiky* [online]. Brno, 2012 [cit. 2018-02-24].
Dostupné z: http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni_stavy/podklady/10%20-%20Keramika.pdf
- [2] NĚMEC, Radek. Výrobky z keramiky. In: *NEOXA* [online]. Brno, 2018 [cit. 2018-04-06]. Dostupné z: <http://www.neoxa.cz/galerie.html>
- [3] MÁLEK, Michal. *Spolehlivostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy*. Brno, 2010. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Vladimír Fuis.
- [4] MENČÍK, Jaroslav. *Pevnost a lom skla a keramiky*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1990, 389 s. : obr., čb. fot., tabulky, grafy. ISBN 80-03-00205-2.
- [5] WEIBULL, Wallodi. *A statistical theory of the strength of materials*. Stockholm: Ingeniörsvetenskapsakademiens, 1939.
- [6] BUSH, D. R. Designing Ceramic Components for Structural Applications. *Journal of Materials Engineering and Performance*, Vol. 2, ASM International pp. 851-862, 1993 .
- [7] GEORGIADIS, Constantinos. *Probability of failure models in finite element analysis of brittle materials* [online]. 1984, **18**(3), 537-549 [cit. 2018-02-24]. DOI: 10.1016/0045-7949(84)90069-5. ISSN 00457949.
Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045794984900695>
- [8] BAŽANT, Zdeněk P. a B. H. OH. Efficient Numerical Integration on the Surface of a Sphere. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* [online]. 1986, **66**(1), 37-49 [cit. 2018-02-24]. DOI: 10.1002/zamm.19860660108. ISSN 00442267.
Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/zamm.19860660108>
- [9] Hrubozrnná a jemnozrnná keramika Al₂O₃ pod mikroskopem. In: *CeramTec* [online]. Šumperk [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://www.ceramtec.com/ceramic-materials/aluminum-oxide/>
- [10] VLČEK, Jozef a Hana OVČAČÍKOVÁ. *Speciální keramické materiály: studijní opory* [online]. Ostrava, 2013 [cit. 2018-02-24]. ISBN 978-80-248-3365-1.
Dostupné z: https://www.fmmi.vsb.cz/export/sites/fmmi/modin/cs/studijni-opory/resitelsky-tym-2-metalurgie/specialni-keramicke-materialy/Ovcacikova_Specialni-keramicke-materialy.pdf

- [11] SiC Keramická ložiska. In: *CEMA Ceramic Bearing* [online]. Zhubei City, 2017 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://www.cemabearing.com/images/SC-zoom.png>
- [12] Jak se keramika vyrábí?. *Asociace sklářského a keramického průmyslu ČR* [online]. Praha, 2018 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://www.askpcr.cz/o-keramice/jak-se-keramika-vyrabi/>
- [13] GREGOROVÁ, Eva a Wili PABST. *Ceramic Technology* [online]. Praha, 2007 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: http://old.vscht.cz/sil/keramika/Ceramic_Technology/SM-Lect-3-C.pdf
- [14] Keramika. In: *Ústav materiálových věd a inženýrství* [online]. Brno, 2012 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni_stavy/prednasky/11_6MS_lomove_chovani_a_zkouseni_keramik.pdf
- [15] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost. II.* Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 262 s. : il. ISBN 80-214-3260-8.
- [16] POPELA, Pavel. *Rozdělení pravděpodobnosti pro aplikace* [online]. Brno, 2006 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Prilohy/sc-1207-sr-1-a-201/default.aspx>
- [17] KRPÍŠEK, Zdeněk. *Teorie spolehlivosti - metody a aplikace* [online]. Brno, 20??n. l. [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/Home/karpisek/soubory-ke-stazeni>
- [18] NOVOTNÝ, Radovan. Weibullovo rozdělení při analýzách bezporuchovosti. *Elektrorevue* [online]. Brno: International Society for Science and Engineering, 2002 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://www.elektrorevue.cz/clanky/02017/index.html#typy>
- [19] OTIPKA, Petr a Vladislav ŠMAJSTRLA. Základní typy rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny. *Technická univerzita Ostrava* [online]. Ostrava, 2008 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP05/PRAV5.HTM>
- [20] LUND, Elsebet. Shape optimization using Weibull statistics of brittle failure. *Structural optimization* [online]. Berlin/Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998, 15(3), 208-214 [cit. 2018-02-24]. DOI: 10.1007/BF01203533. ISSN 0934-4373. Dostupné z: <https://link-springer-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/article/10.1007/BF01203533>
- [21] WACHTMAN a John. B. *Structural ceramics*. Boston: Academic Press, c1989. ISBN 01-234-1829-1.

- [22] DURAI SWAMI, Ramani. Gaussian Quadratures. *Http://www.umiacs.umd.edu* [online]. Maryland [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: http://www.umiacs.umd.edu/~ramani/cmssc460/Lecture16_integration.pdf
- [23] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Brno [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://www.umd.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrsky ch%20vypoctech/RIV.pdf>
- [24] BEENTJES, Casper H. L. *Quadrature on a spherical surface* [online]. Oxford [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <http://people.maths.ox.ac.uk/beentjes/Essays/QuadratureSphere.pdf>
- [25] Dvacetistěn. In: *Wikipedie* [online]. 2017 [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Dvacetist%C4%9Bn#/media/File:120px-Icosahedron-slowturn.gif>
- [26] Dvanáctistěn. In: *Wikipedie* [online]. [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Dvan%C3%A1ctist%C4%9Bn#/media/File:120px-Dodecahedron-slowturn.gif>
- [27] Endoprotéza, endoprotézy, kloubní náhrady. *Lékaři online* [online]. Praha, 2008 [cit. 2018-04-06]. Dostupné z: <https://www.lekari-online.cz/ortopedie/novinky/endoprotezy-nahrady>
- [28] Endoprotéza kyčle. In: *Medixa* [online]. Chomutov, 2012 [cit. 2018-04-06]. Dostupné z: <http://cs.medixa.org/>
- [29] Typy kyčelních náhrad a způsoby jejich upevnění. *Orthes* [online]. Rožnov pod Radhoštěm [cit. 2018-04-06].
- [30] *Náhrady hlavice kyčelního kloubu*. Kladno: Beznoska. Dostupné z: <http://www.beznoska.cz/wp-content/uploads/2013/11/000706.pdf>
- [31] FUIS, Vladimír. *Napjatostní a spolehlivostní analýza keramické hlavice kyčelní endoprotézy*. Brno, 200n. l. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně
- [32] Keramická hlavice. In: *Beznoska* [online]. Kladno [cit. 2018-04-06]. Dostupné z: <http://www.beznoska.cz/product/keramicke-hlavice-pro-tep-kycelniho-kloubu/>
- [33] Zkouška keramické hlavice. In: *ENDOLAB* [online]. Thansau, 2018 [cit. 2018-04-06]. Dostupné z: <https://www.endolab.org/implant-testing.asp?cat1=1&id=4&topic=Femoral%20head%20compression%20test%20PI-14%20/%20ISO%C2%A07206-10&desc=Hip%20implant%20ball%20pull-off%20and%20static%20test&key=hip,%20implant,%20implant%20testing,%20certified,%20accredited,%20ball,%20head,%20pull-off,%20strength,%20static,%20fracture,%20ISO%207206-10>

- [34] VARGA, Jozef. *Napjatostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy zatížené dle ISO 7206-5*. Brno, 2007. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.
- [35] KOVÁŘ, Jaroslav. The influence of contact region on probability of ceramics fracture. In: FUIS, Vladimír. *Engineering mechanics 2017: 23rd international conference* [online]. Svratka, 2017, s. 510-513 [cit. 2018-02-24]. ISBN 978-80-214-5497-2. ISSN 1805-8248.
Dostupné z: http://www.engmech.cz/2017/im/doc/EM2017_proceedings_all.pdf
- [36] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE, Richard Gordon BUDYNAS, Martin HARTL a Miloš VLK. *Konstruování strojních součástí*. V Brně: VUTIMUM, 2010, xxv, 1159 s. : il. ; 26 cm. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [37] Kontaktní úlohy. *Mechanika* [online]. Praha, 2000 [cit. 2018-05-20].
Dostupné z: <http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/examples/kuzel/kontakt.htm>
- [38] FUIS, Vladimír a Přemysl JANÍČEK. Stress Analysis of the Hip Joint Endoprosthesis Ceramic Head for Different Values of Shape Deviations. *Advanced Materials Research*. 2014, **936**, 770-775
Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMR.936.770>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1.1: Výrobky z technické keramiky [2]	12
Obrázek 4.1: Hrubozrnná a jemnozrnná keramika Al_2O_3 pod mikroskopem [9]	16
Obrázek 4.2: Keramická ložiska vyrobená z SiC [11]	17
Obrázek 4.3: Fáze slinovacího procesu [10]	18
Obrázek 4.4: Vzorek pro zkoušku tahem [14]	18
Obrázek 4.5: Zkouška lomové houževnatosti tříbodovým ohybem [14]	19
Obrázek 4.6: Vady ve struktuře keramických materiálů [1]	20
Obrázek 4.7: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení v závislosti na parametru b [19]	22
Obrázek 4.8: Prut namáhaný prostým ohybem	25
Obrázek 4.9: Normálové napětí na kouli s jednotkovým poloměrem [20]	26
Obrázek 4.10: Gaussova integrace řádu 3	27
Obrázek 4.11: Pravidelný dvanáctistěn [25]	28
Obrázek 4.12: Pravidelný dvacetistěn [26]	28
Obrázek 4.13: Model endoprotézy [28]	29
Obrázek 4.14: Hlavice [32]	29
Obrázek 4.15: Testovací zařízení pro zkoušky hlavic [33]	30
Obrázek 6.1: Uvažované varianty výpočtu [35]	35
Obrázek 6.2: Úplné uvolnění a průběh výsledných vnitřních účinků	35
Obrázek 6.3: Porovnání diskretizace A a diskretizace D	37
Obrázek 6.4: Průběh prvního hlavního napětí varianta A, diskretizace D [35]	38
Obrázek 6.5: Průběh prvního hlavního napětí varianta B, diskretizace D	38
Obrázek 6.6: Maximální hodnoty napětí v příčném průřezu, kde působí zatěžující síla v závislosti na délce a [35]	39
Obrázek 6.7: Průběh napětí po cestě pro varianty A a B	39
Obrázek 6.8: Výpočet sumy v exponentu pro čtyřuzlové prvky	40
Obrázek 6.9: Prut s vyznačenou částí, na které je počítána pravděpodobnost porušení	41
Obrázek 6.10: Výpočtový model pro kontaktní úlohu, vazby jsou modelovány jako části dvou ocelových válců	43
Obrázek 6.11: Průběh napětí na ose kontaktu [36]	45
Obrázek 6.12: Síť pro výpočet kontaktní úlohy	46
Obrázek 6.13: Síť pro výpočet kontaktní úlohy - detail kontaktu	47

Obrázek 6.14: Průběh napětí v ose X a ose Y v kontaktní oblasti pro poloměr podpor $R_2=0,5$ mm	48
Obrázek 6.15: Diskretizace A pro prostorový model	50
Obrázek 6.16: Diskretizace E pro prostorový model	50
Obrázek 6.17: Průběh napětí na prostorovém modelu	50
Obrázek 7.1: Body Gaussovy integrace pro 5. řád [7]	54
Obrázek 7.2: Část scriptu provádějící Gaussovu integraci řádu 5	55
Obrázek 7.3: Integrační body pro 13. řád [8]	56
Obrázek 7.4: Válcové těleso	58
Obrázek 7.5: Porovnání diskretizace A a B	60
Obrázek 7.6: Průběh radiálního a obvodového napětí	61
Obrázek 7.7: Porovnání radiálního a obvodového napětí určených analyticky a pomocí MKP	61
Obrázek 7.8a-d: Zatížení A-D	63
Obrázek 7.9a-d: Průběhy hlavních napětí po tloušťce u varianty A-D	64
Obrázek 8.1: Model topologie s vyznačenými místy vazeb a zatížení	66
Obrázek 8.2: Geometrie hlavice	67
Obrázek 8.3a-f: Diskretizace A-F	69
Obrázek 8.4: Porovnání prvních hlavních napětí pro jednotlivé sítě	72
Obrázek 8.5: Porovnání druhých hlavních napětí pro jednotlivé sítě	73
Obrázek 8.6: Porovnání třetích hlavních napětí pro jednotlivé sítě	74
Obrázek 8.7: Upravená diskretizace E použitá pro další výpočty	77
Obrázek 8.8: Závislost síly na posuvu	77
Obrázek 8.9: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení	78
Obrázek 8.10: S-křivky	79
Obrázek 8.11: Průběh relativního rozdílu	79
Obrázek 9.1: Imperfekce A	81
Obrázek 9.2: Imperfekce B	81
Obrázek 9.3: Průběh výsledné stykové síly - Imperfekce A	82
Obrázek 9.4: Průběh prvního hlavního napětí - Imperfekce A	82
Obrázek 9.5: Průběh druhého hlavního napětí - Imperfekce A	83
Obrázek 9.6: Průběh třetího hlavního napětí - Imperfekce A	83
Obrázek 9.7: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení - Imperfekce A ..	84
Obrázek 9.8: S-křivky - Imperfekce A	85

Obrázek 9.9: Relativní rozdíl - Imperfekce A.....	85
Obrázek 9.10: Průběh výsledné stykové síly – Imperfekce B.....	86
Obrázek 9.11: Průběh prvního hlavního napětí [MPa] - Imperfekce B	87
Obrázek 9.12: Průběh druhého hlavního napětí - Imperfekce B.....	87
Obrázek 9.13: Průběh třetího hlavního napětí - Imperfekce B	88
Obrázek 9.14: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení - Imperfekce B	88
Obrázek 9.15: S-křivky - Imperfekce B	89
Obrázek 9.16: Relativní rozdíl - Imperfekce B	89
Obrázek 9.17: Porovnání hlavních napětí ve 3., 10. a 15. substepu.....	90
Obrázek 9.18: Porovnání průběhů výsledných stykových sil	91
Obrázek 9.19: S-křivky - porovnání.....	92
Obrázek 9.20: Porovnání pravděpodobností porušení při nízkém zatížení.....	92

SEZNAM TABULEK

Tabulka 6.1: Porovnání maximálních hodnot napětí a maximálních hodnot napětí na ose symetrie pro různé hustoty diskretizace pro varianty A a B.....	37
Tabulka 6.2: Porovnání výsledků výpočtu pravděpodobnosti porušení součásti [35]	42
Tabulka 6.3: Výsledky výpočtu podle Hertzovy teorie [35]	44
Tabulka 6.4: Porovnání výsledků kontaktních úloh	47
Tabulka 6.5: Pravděpodobnosti porušení v závislosti na poloměru podpory.....	49
Tabulka 6.6: Výpočet na prostorovém modelu	51
Tabulka 7.1: Body a váhy pro Gaussovu integraci 5. řádu [7].....	54
Tabulka 7.2: Výsledky výpočtů a odchylka od výsledku při uvažování pouze prvního hlavního napětí	57
Tabulka 7.3: Výsledky pro válcové těleso, odchylka je vztažena k numerické integraci podle funkce quad2D.....	62
Tabulka 7.4: Porovnání pravděpodobností porušení se zahrnutím jednoho a všech tří hlavních napětí.....	65
Tabulka 8.1: Geometrie přechodu [34]	67
Tabulka 8.2: Určení maximální dovolené penetrace	70
Tabulka 8.3: Porovnání všech variant, relativní rozdíl je vztažen k $P_{f-3hl.nap.}$	75

SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK

Význam	Symbol	Jednotka
Pravděpodobnost porušení	P_f	[%]
Riziko porušení	B	[-]
Ekvivalentní napětí	σ_e	[MPa]
Normálové napětí	σ_n	[MPa]
Část objemu prvku přiřazená uzlu	ΔV	[mm ³]
První/druhé/třetí hlavní napětí	$\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$	[MPa]
Posuv ve směru osy x/y/z	u/v/w	[mm]
Posuv v radiálním/tečném směru	u/v	[mm]
Přetvoření v radiálním/tečném/osovém směru	$\varepsilon_r/\varepsilon_t/\varepsilon_z$	[-]
Napětí v radiálním/tečném/osovém směru	$\sigma_r/\sigma_t/\sigma_z$	[MPa]
Parametr tvaru	b	[-]
Parametr měřítka	δ	[-]
Parametr polohy	c	[-]
Weibullův modul	m	[-]
Napětí, pod které nedochází k porušení	σ_u	[MPa]
Normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu	σ_0	[MPa mm ^{$\frac{3}{m}$}]
Kontaktní tlak podle Hertzovy teorie	p_{HERTZ}	[MPa]
Polovina šířky kontaktní oblasti	b	[mm]
Modul pružnosti v tahu/smyku	E/G	[MPa]
Poissonův poměr	μ	[-]
Lamého konstanta	λ	[MPa]
Počet bodů Gaussovy integrace	P	[-]

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha	Název souboru	Popis
Příloha A	Vysledky_Skrivky.xlsx	Výsledky pro vytvoření S křivek
Příloha B	HLAVICE_MAKRO_sitE.txt	Makro pro výpočet napjatosti hlavice
Příloha C	HLAVICE_MAKRO_sitE_ Imperfekce A.txt	Výpočet napětí hlavice-Imperfekce A
Příloha D	HLAVICE_MAKRO_sitE_ ImperfekceB.txt	Výpočet napětí hlavice-Imperfekce B
Příloha E	Jedno_hlavni_2D.m	Výpočet pravděpodob. poruš. pro 2D modely
Příloha F	Jedno_hlavni_3D.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím jednoho hlavního napětí
Příloha G	Tri_hlavni_quad2D.m	Skript pro výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím tří hlavních napětí pomocí numerické integrace quad2D
Příloha H	Prevod.m	Funkce převádějící souř. bodů pro gauss. integ. z kartézského do sférického souř. sys.
Příloha I1	Tri_hlavni_gauss_3.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím všech hlavních napětí pomocí gauss. integ. řádu 3
Příloha I2	Tri_hlavni_gauss_4.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím všech hlavních napětí pomocí gauss. integ. řádu 4
Příloha I3	Tri_hlavni_gauss_5.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím všech hlavních napětí pomocí gauss. integ. řádu 5
Příloha I4	Tri_hlavni_gauss_9.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím všech hlavních napětí pomocí gauss. integ. řádu 9
Příloha I5	Tri_hlavni_gauss_11.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím všech hlavních napětí pomocí gauss. integ. řádu 11
Příloha J	Tri_hlavni_gauss_13.m	Výpočet pravděpodobnosti porušení se zahrnutím všech hlav. napětí pomocí gauss. integ. řádu 13, lze zahrnout různé typy prvků

Data obsahují také některé soubory s výsledky výpočtů napětí pro výpočet pravděpodobnosti porušení. Do scriptů je nutné vždy napsat počet symetrických částí.