



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**MINIMALIZACE ČASU PRŮJEZDU VOZIDLA ZADANOU
TRAJEKTORIÍ**

TIME MINIMIZATION FOR VEHICLES PASSING A GIVEN TRAJECTORY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Jerguš Suja

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Petr Porteš, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Jerguš Suja**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Petr Porteš, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Minimalizace času průjezdu vozidla zadanou trajektorií

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Optimalizace jízdního režimu vozidla s cílem minimalizovat čas jeho průjezdu po zadané dráze.

Cíle diplomové práce:

Student provede rešerši známých řešení optimalizačního problému.

Sestaví zjednodušený matematický model vozidla, který však umožní posouzení vlivu základních parametrů vozidla na čas průjezdu.

Student zvolí vhodnou optimalizační metodu a sestaví algoritmus optimalizační úlohy. Algoritmus aplikuje na výpočty jízdních režimů vozidla jedoucího po zadané trajektorii.

Seznam doporučené literatury:

RAO, S. S. Engineering optimization: theory and practice. 4th ed. Hoboken: Wiley, c2009. ISBN 978-0-470-18352-6.

GILLESPIE, T. D. Fundamentals of vehicle dynamics. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers. c1992. ISBN 15-609-1199-9.

GADOLA, M., VETTURI, D., CAMBIAGHI, D., MANZO, L. A Tool for Lap Time Simulation. SAE 962529. DOUPOVEC, Miroslav. Diferenciální geometrie a tenzorový počet. Brno: PC-DIR, 1999, 83 s. ISBN 80-214-1470-7.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Diplomová práca sa zaoberá dynamikou pohybu automobilu a tvorbou teoretického modelu pre softwarovú simuláciu prejazdu vozidla zadanou trajektóriou, pričom sa zameriava na jazdný režim s cieľom minimalizácie času prejazdu. Simulácia, teda algoritmus výpočtu rýchlostného profilu, je následne aplikovaná na prejazd experimentálneho automobilu po Masarykovom okruhu v Brne. Na záver sú optimalizované vybrané parametre vozidla pomocou optimalizačných algoritmov Multilevel Coordinate Search a Particle Swarm.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

dynamika automobilu, rýchlostný profil, derivative-free optimalizácia

ABSTRACT

The diploma thesis deals with vehicle movement dynamics and defining a theoretical model for software simulation of vehicle passing a given trajectory, while main aim is time minimization driving mode. Simulation (algorithm for computing speed profile) is then applicated for passing experimental vehicle along Masaryk circuit in Brno. At the end, we optimize chosen vehicle parameters with derivate-free algorithms Multilevel Coordinate Search and Particle Swarm.

KEYWORDS

vehicle dynamics, speed profile, derivative-free optimization

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

SUJA, Jerguš. *Minimalizace času průjezdu vozidla zadanou trajektorií*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116702>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí diplomové práce Petr Porteš.

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že táto práca je mojím pôvodným dielom, spracoval som ju samostatne pod vedením doc. Ing. Petra Porteša, Ph.D. a s použitím literatúry uvedenej v zozname.

V Brne dňa 24. mája 2019

.....

Jerguš Suja

POĎAKOVANIE

Veľmi rád by som sa poďakoval všetkým, ktorí mi pomáhali s tvorbou mojej diplomovej práce. Najväčšia vďaka patrí môjmu školiteľovi doc. Ing. Petrovi Portešovi, Ph.D. za jeho odborné vedenie, cenné rady a trpezlivosť, s ktorou ma zasvätil do problematiky dynamiky automobilu. Rovnako sa chcem poďakovať svojim rodičom za finančnú a morálnu podporu počas štúdia a tiež priateľom, ktorí mi v priebehu štúdia pomáhali.

Jerguš Suja

OBSAH

Úvod	9
1 Rešerš	10
2 Model automobilu	11
2.1 Pneumatika.....	11
2.2 Predná náprava.....	13
2.3 Zadná náprava.....	17
2.4 Hnacie ústrojenstvo.....	19
3 Výpočet rýchlostného profilu	22
3.1 Body s maximálnou krivosťou.....	22
3.2 Aproximácia pozdĺžneho zrýchlenia.....	26
3.3 Akcelerácia	27
3.4 Brzdenie	32
3.5 Zhnutie a popis výpočtu rýchlostného profilu.....	34
4 Optimalizácia black-box funkcie.....	37
4.1 MCS (Multilevel Coordinate Search) algoritmus [9]	38
4.2 Particle swarm (roj častíc) algoritmus [11].....	40
4.3 Použitie optimalizačných algoritmov	41
5 Zhnutie výsledkov	44
5.1 Výsledky výpočtu rýchlostného profilu.....	44
5.2 Výsledky optimálnej klopnej tuhosti	48
5.3 Výsledky optimálneho aktívneho diferenciálu	48
Záver	51
Zoznam použitých skratiek a symbolov	54
Zoznam obrázkov	56
Zoznam tabuliek	57
Prílohy	58

ÚVOD

Cieľom tejto práce je zostaviť zjednodušený model vozidla, ktorý bude obsahovať všetky základné parametre ovplyvňujúce dynamiku vozidla a čas prejazdu danou trajektóriou. To znamená, že našou úlohou je implementovať software, ktorého vstupom sú parametre vozidla, trajektória a na základe toho nasimuluje prejazd vozidla, kde výstupom je celkový čas prejazdu, prípadne rýchlostný profil prejazdu. Keďže jazdných režimov prejazdu je nespočetne mnoho, zameriame sa na jeden konkrétny – jazdný režim vozidla s cieľom minimalizovať čas prejazdu. Tento konkrétny jazdný režim je hlavne využívaný v motošporte a nemal by sa realizovať v bežnej premávke, pretože pri minimalizácii času prejazdu sa snažíme automobil neustále držať na jeho hranici možností ovládateľnosti. Software je preto určený pre simulovanie pretekárskych automobilov a tratí.

Samotná simulácia má obrovský význam pre pilotov pretekárskych automobilov, ktorým môže slúžiť ako pomoc k zazjadeniu najlepších časov. Avšak ešte väčší prínos má pre pretekárske inžinierske tímy. Pretekárske automobily sú veľmi komplexné zariadenia s mnohými parametrami, ktoré majú vplyv na dynamiku. Dizajnéri sa spolu s pretekárskymi inžiniermi snažia tieto parametre vyladiť tak, aby vozidlo dosahovalo najlepšie časy. Počas pretekov alebo pri prvotnom návrhu je nemožné zisťovať optimálne hodnoty týchto parametrov testovaním na cvičných jazdách. Špeciálne počas preteku je nemožné na cvičnom vozidle testovať tisícky kombinácií nastavení parametrov podvozku, aerodynamiky alebo hnacieho ústrojenstva. Rovnako sú nepoužiteľné numerické metódy (CAD, FEA, CFD), ktoré síce majú vysokú presnosť pri optimalizácii vysoko-úrovňového dynamického modelu, ale sú výpočtovo veľmi náročné. Nami implementovaný software nedosahuje tak vysokú presnosť ako numerické programy, avšak jeho prednosťou je krátky výpočtový čas. To môže napr. hrať zásadnú rolu pri hľadaní optimálnych hodnôt nastaviteľných parametrov vozidla počas pretekov.

V práci sa ďalej venujeme dvom osobitným úlohám na hľadanie optimálneho nastavenia parametrov. Software pre výpočet rýchlostného profilu upravíme tak, že výstupom bude okrem celkového času prejazdu aj optimálna hodnota hľadaného parametru. Najskôr budeme optimalizovať podvozok a v druhej úlohe budeme hľadať optimálny chod aktívneho diferenciálu.

V kapitole 2 Model automobilu, rozoberieme teoretický základ pre tvorbu modelu automobilu a popis vzťahov dynamiky vozidla, ktorý čerpáme z knihy *Fundamentals of Vehicle Dynamics* [1]. Následne priblížime algoritmus výpočtu minimálneho času prejazdu, ktorý sa opiera o poznatky získane pri riešení úlohy optimálneho riadenia zostavenej v [2] a vysvetlíme softwarovú implementáciu v prostredí MATLAB. Pomocou „*derivative-free*“ algoritmov MCS [9] a Particle Swarm [11] nájdeme optimálne hodnoty niektorých parametrov vozidla. Na záver interpretujeme všetky dosiahnuté výsledky a zhrnieme možnosti ďalšieho rozvoja práce.

1 REŠERŠ

Každá motoristická súťaž, či už ide o Formulu 1, NASCAR, alebo WRC a iné, má rovnaký princíp súťaženia. To vozidlo, ktoré najrýchlejšie prejde určenou traťou, vyhráva. Traťou myslíme cestu určenú okrajmi a so štartovou a cieľovou čiarou. Tu vzniká otázka optimálnej trajektórie, čím myslíme krivku, po ktorej sa má automobil pohybovať za účelom minimálneho času prejazdu traťou. Je dokázané, že optimálna trajektória je najlepší kompromis medzi trajektóriou s najkratšou dĺžkou a tou, ktorá nám umožňuje dosahovať najvyššie rýchlosti (trajektória s najmenšou krivosťou).

Tento problém je možné riešiť čisto z geometrického hľadiska, kde zanedbávame dynamiku vozidla a hľadáme kompromis medzi najkratšou trajektóriou a najmenšou krivosťou. Niektorí autori skúmali túto úlohu v [12], [13], [14] na robotických modeloch automobilov. Avšak tento prístup sa ukázal ako nesprávny, pretože dynamika automobilu je dôležitý váhový koeficient v úlohe hľadania kompromisu. Predstavme si, že máme trajektóriu s najmenšími krivosťami, ktorá nám umožňuje sa pohybovať maximálnou možnou rýchlosťou vzhľadom k zakriveniu. Ale v prípade, že motor neposkytuje dostatočný výkon na to, aby sme dosiahli tieto rýchlosti, radšej zvolíme trajektóriu s kratšou dĺžkou.

Práce [15], [16] sú zamerané práve na kombinovanú úlohu hľadania optimálnej trajektórie s dynamikou vozidla. Vzhľadom k tomu, že obe práce spracovávajú dynamiku vozidla, výstupom implementovaných programov nie je len optimálna trajektória, ale aj optimálny rýchlostný profil. Navyše výstupom práce [15] sú aj optimálne vstupy pre vodiča automobilu, ako napríklad pomerové hodnoty zošliapnutia plynového, brzdneho pedálu alebo uhol natočenia volantu.

Myšlienka oddeliť úlohy hľadania optimálnej trajektórie a rýchlostného profilu bola tiež použitá v [17], [18], avšak s tým rozdielom, že optimálnu trajektóriu vopred poznáme. Tento prístup bol prvotne použitý pre hľadanie rýchlostného profilu špičky robotického ramena, kde trajektória bola vopred daná, vzhľadom k limitom elektrického pohonu ramena. Veľkú pozornosť tomuto problému venovali Velenis a Tsiotras, ktorí dokázali optimálny algoritmus výpočtu rýchlostného profilu na úlohe optimálneho riadenia [2]. Ich cieľom bolo definovať algoritmus s nízkym výpočtovým časom, použiteľný pri real-time simuláciách. Ďalej pokračovali rozširovaním modelu automobilu z hmotného bodu na model polovičného vozidla s prednou a zadnou pneumatikou [19].

2 MODEL AUTOMOBILU

Cieľom tejto práce je pracovať s čo najpresnejším modelom automobilu s ohľadom na výpočtový čas. Je jednoduché si uvedomiť, že medzi presnosťou modelu a výpočtovým časom rýchlostného profilu je priama úmernosť. Z tohto dôvodu pripúšťame v práci niekoľko malých, ale pre náročnosť výpočtu podstatných zjednodušení. Jedným z týchto zjednodušení je použitie ustálených stavov.

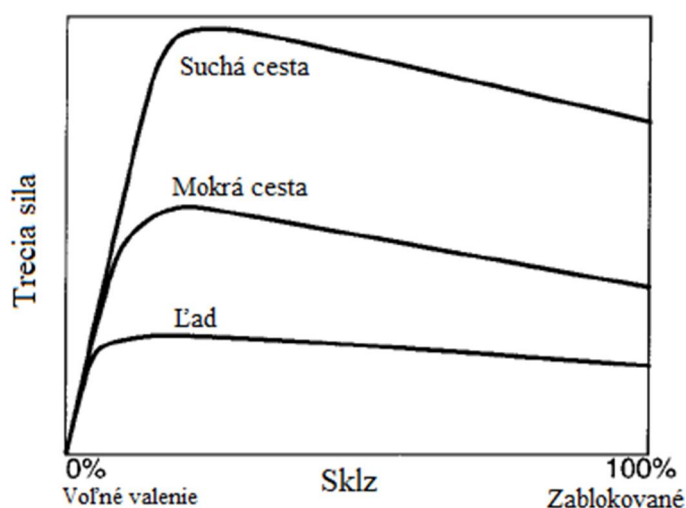
Model zahŕňa tie najdôležitejšie činitele ovplyvňujúce dynamiku vozidla, ktoré budú bližšie popísané v nasledujúcich podkapitolách. Všeobecne možno povedať, že uvažujeme dvojnápravový model automobilu s otvoreným nápravovým diferenciálom a voliteľným pomerom pohonu predných alebo zadných kolies. Model zároveň počíta so špecifickou charakteristikou hnacieho ústrojenstva.

Kvôli prehľadnosti zavedieme indexovú notáciu. Rozlišovať budeme prednú a zadnú nápravu indexmi F – prednú (Front) a R – zadnú (Rear). Rovnako odlíšime vonkajšie (Out) koleso – O a vnútorné (In) koleso – I .

2.1 PNEUMATIKA

Prvým a najdôležitejším činiteľom ovplyvňujúcim dynamiku automobilu sú pneumatiky. Je dôležité poznamenať, že skoro celá interakcia automobilu s okolím je sprostredkovaná práve štyrmi malými kontaktnými plochami nachádzajúcimi sa medzi pneumatikami a vozovkou. Plnia tri základné funkcie:

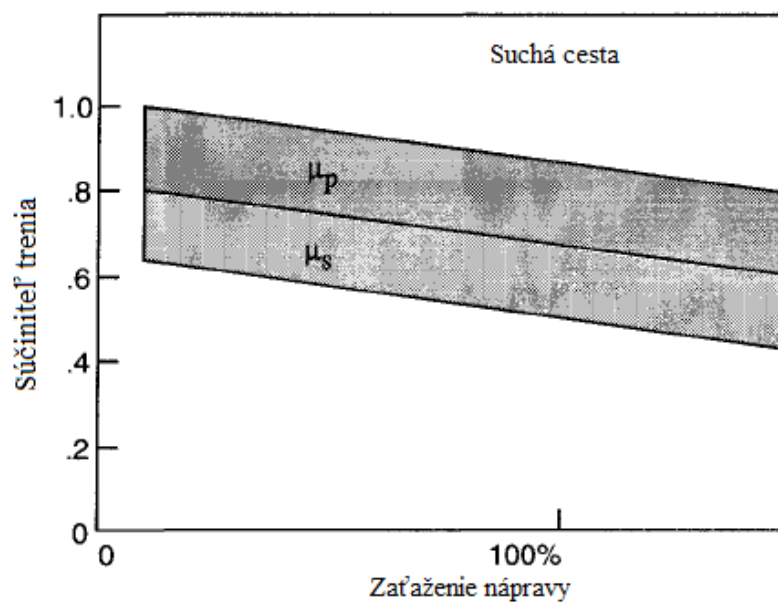
- generujú pozdĺžnu silu pri brzdení a akcelerácii
- generujú dostredivú silu pri prejazde zákrutou
- prenášajú normálovú silu produkovanú gravitáciou a aerodynamickými silami



Obr. 1 Pozdĺžny skľaz [1]

Problematika pneumatík je nesmierne rozsiahla a v súčasnosti sa ňou zaoberá množstvo inžinierov a spoločností. Ide o veľmi nelineárny a komplexný systém, ktorý je ťažko kvantifikovateľný. Tie najdôležitejšie vlastnosti vplývajúce na dynamiku boli popísané pomocou empirických dát.

Vlastnosti pneumatík charakterizujeme v práci premennou súčiniteľ trenia μ . Ako bolo zmienené, pomocou empirických dát sa tiež zistili dve dôležité vlastnosti, ktoré zohľadňujeme pri tvorbe modelu automobilu. Prvou z nich je závislosť hodnoty súčiniteľa trenia na sklzu. Na Obr. 1 je znázornená táto závislosť. Vidíme, že najvyššie hodnoty sú dosahované pri valení. V prípade zablokovania pneumatiky je hodnota súčiniteľa výrazne nižšia. V tomto prípade pod pojmom zablokovania rozumieme, že pneumatika sa po vozovke nevalí, ale kľže.



Obr. 2 Závislosť súčiniteľa trenia [1]

Druhou dôležitou vlastnosťou je lineárna závislosť súčiniteľa trenia na normálovej sile. Na Obr. 2 jasne vidíme túto závislosť. Nutne musíme poznamenať, že táto závislosť platí rovnako pre obe hodnoty súčiniteľa, ako aj pre valenie (index p), tak i pre šmyk (index s).

$$\mu = \mu_0 - kF_z \quad (1)$$

Všetky sily a pôsobiace činitele budeme rozkladať do troch súradnicových ôs. Rovnako to platí aj pre súčiniteľ trenia. Nakoľko v modeli popisujeme veľkosť generovaných síl v rovine xy , budeme rozlišovať len dve jeho zložky. A to zložku μ_x v smere osi x (pozdĺžny smer), a zložku μ_y v smere osi y (priechy smer). Platia nasledovné vzťahy, ktoré analogicky môžeme odvodiť pre zadnú nápravu:

$$\mu_{xFO} = \mu_{x0} - k_x F_{zFO} \quad (2)$$

$$\mu_{yFO} = \mu_{y0} - k_y F_{zFO} \quad (3)$$

$$\mu_{xFI} = \mu_{x0} - k_x F_{zFI} \quad (4)$$

$$\mu_{yFI} = \mu_{y0} - k_y F_{zFI} \quad (5)$$

Posledným aspektom, ktorý v súvislosti s pneumatikami a ich vplyvom na dynamiku preberieme, je trecia elipsa. Ide o vzťah, ktorý popisuje závislosti medzi všetkými troma zložkami síl pôsobiacich v mieste trecej plochy, medzi pneumatikou a vozovkou. Pre názornosť je uvedená trecia elipsa pre predné vonkajšie koleso, zvyšné elipsy sú analogicky odvoditeľné.

$$\left(\frac{F_{xFO}}{\mu_{xFO}F_{zFO}}\right)^2 + \left(\frac{F_{yFO}}{\mu_{yFO}F_{zFO}}\right)^2 \leq 1 \quad (6)$$

Pri splnení tejto nerovnosti máme zaručené, že automobil nedostane šmyk. Tento poznatok je veľmi dôležitý, pretože v celej práci požadujeme pre všetky kolesá a za akýchkoľvek podmienok platnosť nerovnosti trecej elipsy. Dôvod je jednoduchý. Už sme poukázali na to, že pri prekročení tohto limitu dochádza k zmene hodnoty trecieho súčiniteľa. Z empirických dát a testov je dokázané, že jeho hodnota v šmyku je nižšia ako pri valení. Keďže cieľom je minimalizovať čas prejazdu, je nutné aby pneumatiky boli v stave generovať maximálne možné sily.

2.2 PREDNÁ NÁPRAVA

Náprava je súčasť podvozku automobilu a jej hlavnou funkciou je držať kolesá pohromade. Existuje niekoľko druhov náprav s ďalšími možnými funkciami. Pri osobných a pretekárskych autách je predná náprava navyše zodpovedná za zatáčanie (prejazd zákrutami). Nápravy môžu byť tiež hnacie, to znamená, že prenášajú krútiaci moment motoru na kolesá s pneumatikami, čím umožňujú automobilu akcelerovať (zrýchliť). V našom prípade pracujeme s dvojnápravovým modelom a rozlišujeme prednú a zadnú nápravu.

Dôležitou súčasťou nápravy spaľovacích automobilov je diferenciál. Je to mechanické zariadenie pracujúce na princípe planétovej prevodovky a jeho účelom je rozdelenie pomeru otáčok na výstupných hriadeľoch. Opäť existuje niekoľko rôznych druhov diferenciálov, avšak my sa budeme venovať len dvom vybraným. V prvej časti nás samotný diferenciál nebude zaujímať, a preto zvolíme klasický otvorený diferenciál. Ten rozdeľuje vstupný moment na dva rovnako veľké výstupné momenty v pomere 50:50. Našou snahou bude dospieť k optimalizácii aktívneho (torque-vectoring) diferenciálu. Jeho najväčšou výhodou je, že na základe vstupných údajov, ako je napr. miera zošliapnutia plynového pedálu, uhol natočenia volantu, rýchlosť automobilu, atď., zmení pomer výstupných momentov. V praxi to znamená, že napr. pri prejazde zákrutou, kedy sú niektoré pneumatiky odľahčované vplyvom zotrvačných síl, aktívny diferenciál zmení pomer výstupných momentov v prospech tých pneumatík, ktoré dokážu tento moment využiť na akceleráciu. V závere budeme chcieť, aby výsledný moment bol optimálny v zmysle minimalizácie času prejazdu zadanou trajektóriou.

V roku 1893 anglický inžinier Bramah Joseph Diplock si nechal patentovať pohon všetkých štyroch kolies pre parou poháňaný motor. Neskôr v tomto návrhu pokračoval Ferdinand Porsche, avšak pohon sprostredkovali štyri elektromotory. Až na koniec v roku 1903 si bratia Jacobus a Hendrik Jan Spijkerovci pripísali zásluhu za vynález prvého spaľovacieho automobilu s pohonom všetkých štyroch kolies. Vďaka týmto vynálezcom môžeme pracovať s modelom automobilu, ktorý bude mať hnacie obe nápravy. Tak ako pri nápravovom diferenciáli, tak aj pri medzi-nápravovom diferenciáli budeme spočiatku uvažovať pevne zvolený pomer rozdelenia výstupných hnacích momentov medzi prednou a zadnou nápravou. Nakoniec to bude tiež objektom našej optimalizácie. Zavedieme koeficienty *TFDO* (traction front-drive out = koeficient akcelerácie vonkajšej pneumatiky prednej nápravy), *TFDI*

(traction front-drive in), *TRDO* (traction rear-drive out) a *TRDI* (traction rear-drive in). Platia nasledovné rovnosti:

$$TFDI = TFDO$$

$$TRDI = TRDO$$

$$TFDI + TFDO + TRDI + TRDO = 1$$

Podobne ako pri pneumatikách je našou snahou popísať nápravu vzťahom medzi silami pôsobiace na ňu. V prvom rade musíme určiť podiel hmotnosti na jednotlivých nápravách. Kvôli tomu zavedieme hmotnostný koeficient $\psi \in (0, 1)$. Hmotnosť na prednej náprave je:

$$M_F = (1 - \psi)M \quad (7)$$

kde M je celková hmotnosť automobilu. Keďže náprava interaguje s pneumatikami, odvodíme sily pôsobiace na pneumatiku v pozdĺžnom a normálovom smere. Výsledná sila závisí od diferenciálu, preto pozdĺžna sila (v smere osi x) na vonkajšej pneumatike prednej nápravy je:

$$F_{xFO} = TFDO(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (8)$$

Konštanta c_d predstavuje aerodynamický odpor a je závislá na nastavení aerodynamických prvkov generujúcich prítlak. Člen $Mg \sin \theta$ predstavuje zložku gravitačnej sily v smere osi x , tiež označovaný ako odpor stúpania. V podstate môžeme zátvorku $(c_d v^2 + Mg \sin \theta)$ označiť za jazdné odpory. Pri aerodynamickom odpore vidíme závislosť na rýchlosti v . Okrem aerodynamického odporu, máme ešte valivý odpor pneumatík. Ten je už ale zohľadnený v sile F_{xFO} . Hnaciú silu prezentuje člen Ma_x , kde a_x je pozdĺžne zrýchlenie. Podobne pre vnútornú pneumatiku prednej nápravy máme:

$$F_{xFI} = TFDI(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (9)$$

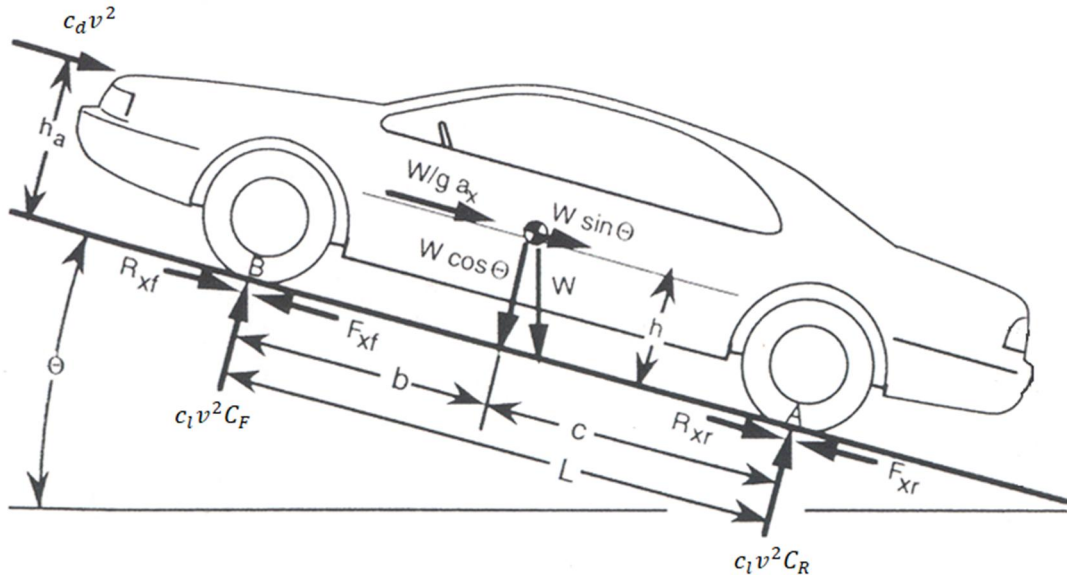
Tak, ako sme odvodili sily pôsobiace v pozdĺžnom smere, vyvodíme aj vzťahy pre normálové sily, čiže sily v smere osi z .

$$F_{zFO} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{c}{L} - Ma_x \frac{h}{L} - Mg \sin \theta \frac{h}{L} - c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_F \right) + \frac{M_F \kappa v^2 h_{rF}}{t_F} + \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa v^2}{t_F} \quad (10)$$

$$F_{zFI} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{c}{L} - Ma_x \frac{h}{L} - Mg \sin \theta \frac{h}{L} - c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_F \right) - \frac{M_F \kappa v^2 h_{rF}}{t_F} - \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa v^2}{t_F} \quad (11)$$

Vyššie uvedené vzťahy vysvetlíme v dvoch etapách. Najskôr sa budeme venovať zátvorkám. Pomôžeme si Obr. 3. Označme $W = Mg$ a predpokladajme rovnosť statických momentov v bode A a B. Chceme určiť výslednú normálovú silu F_{zF} pre ktorú platí:

$$F_{ZF}L = \sum_i M_{iA} \quad (12)$$



Obr. 3 Rozloženie pôsobiacich síl na automobil [1]

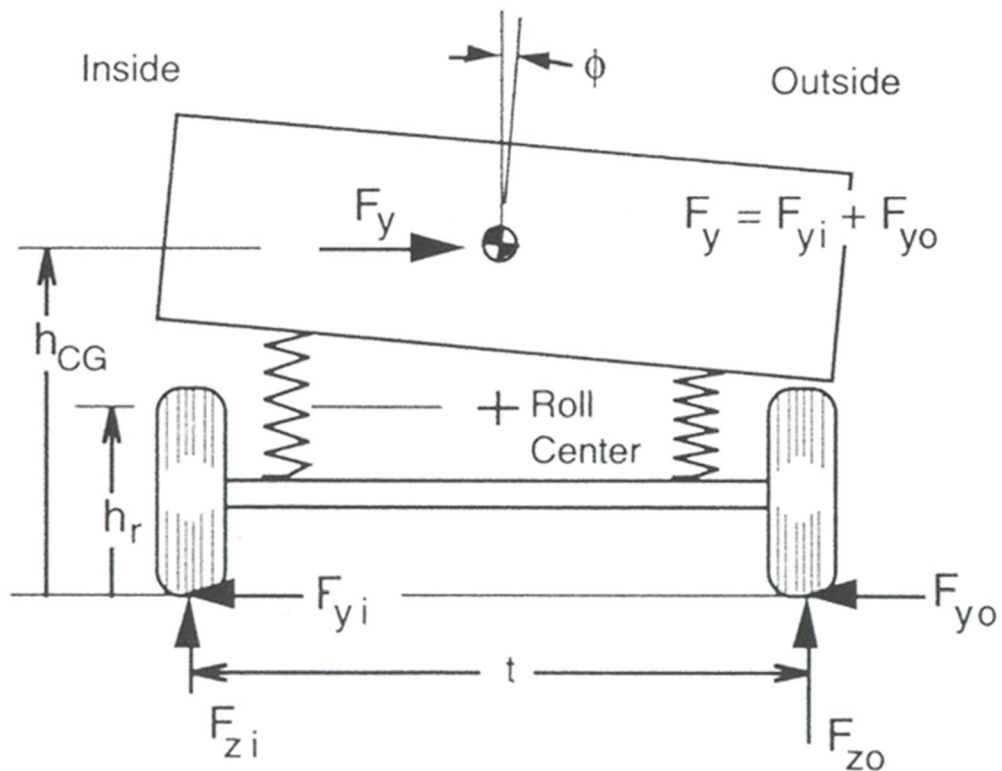
Ak momenty v bode A, ktoré vznikajú pôsobením síl, ako napr.: zložky gravitačnej sily, prítlak, vplyv zrýchlenia a aerodynamický odpor, vydelíme ramenom L , dostaneme výslednú normálovú silu pôsobiacu na prednú nápravu F_{ZF} .

$$F_{ZF} = Mg \cos \theta \frac{c}{L} - Ma_x \frac{h}{L} - Mg \sin \theta \frac{h}{L} - c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_F \quad (13)$$

Cieľom druhej etapy je určiť výslednú normálovú silu na jednotlivých kolesách. V tejto časti musíme spresniť náš model pridaním klopnej tuhosti nápravy. Reálne je táto vlastnosť reprezentovaná odpružením automobilu. Predpokladajme celkovú klopnú tuhosť automobilu K_ϕ . Pomocou koeficientu prerozdelenia klopnej tuhosti určíme výslednú klopnú tuhosť prednej nápravy.

$$K_{\phi F} = (1 - \varphi)K_\phi \quad (14)$$

Práve správna hodnota tohto koeficientu bude neskôr predmetom nášho skúmania. K tomu sa ešte dostaneme, teraz predpokladajme, že poznáme jeho hodnotu. Na Obr. 4 jasne vidno rozloženie síl na náprave a tiež zjednodušený model odpruženia automobilu. Okrem rozdielnych klopných tuhostí medzi prednou a zadnou nápravou, rozlišujeme tiež rozdielne parametre náprav: vzdialenosť osi klopenia od vozovky prednej (resp. zadnej) nápravy h_{rF} (h_{rR}) a rozchod kolies prednej (resp. zadnej) nápravy t_F (t_R).



Obr. 4 Rozloženie síl pôsobiacich na nápravu [1]

Pomocou vzťahu rozdielu zaťaženia kolies na náprave (15), kde ϕ_k je konštanta prevádzajúca odstredivé zrýchlenie $a_y = \kappa v^2$ na uhol naklonenia vozidla ϕ , a vzťahu pre normálovú silu prednej nápravy (13), pre ktorú tiež platí $F_{zF} = F_{zFO} + F_{zFI}$, dostávame rovnice normálových síl vonkajšieho (10) a vnútorného (11) kola.

$$F_{zFO} - F_{zFI} = 2 \frac{M_F \kappa v^2 h_{rF}}{t_F} + 2 \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa v^2}{t_F} \quad (15)$$

Pre úplnosť nám ostáva určiť vzťah odstredivých síl, pôsobiacich v smere osi y . Tu sa ale dostávame do menšieho problému. Explicitne nevieme napísať vzťah odstredivej sily pre každé koleso. Tak, ako je to naznačené na Obr. 4 platí, že suma odstredivých síl kolies sa rovná celkovej odstredivej sile pôsobiacej na nápravu.

$$F_{yFO} + F_{yFI} = M_F \kappa v^2 \quad (16)$$

Keď si zrekapitulujeme vzťahy, ktorými sme sa doteraz zaoberali, zistíme, že neznámymi hodnotami sú F_{yFO} a F_{yFI} . V podkapitole pneumatika sme na konci odvodili vzťah tzv. trecej elipsy. V podstate ide o vzťah spájajúci všetky tri smery pôsobiacich síl (pozdĺžnu, normálovú, odstredivú). Teraz využijeme vzťahy odvodené v tejto kapitole, špeciálne (16) do ktorého dosadíme za neznáme odstredivé sily. Na to nám posluží práve trecia elipsa (6).

$$\sqrt{\left(\mu_{yFO}^2 F_{zFO}^2 - \frac{\mu_{yFO}^2}{\mu_{xFO}^2} F_{xFO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yFI}^2 F_{zFI}^2 - \frac{\mu_{yFI}^2}{\mu_{xFI}^2} F_{xFI}^2\right)} = M_F \kappa v^2 \quad (17)$$

Pre kompletnosť uvedieme zvyšné závislosti členov vyskytujúcich sa v (17).

$$\mu_{xFO} = \mu_{x0} - k_x F_{zFO}$$

$$\mu_{yFO} = \mu_{y0} - k_y F_{zFO}$$

$$\mu_{xFI} = \mu_{x0} - k_x F_{zFI}$$

$$\mu_{yFI} = \mu_{y0} - k_y F_{zFI}$$

$$F_{zFO} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{c}{L} - Ma_x \frac{h}{L} - Mg \sin \theta \frac{h}{L} - c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_F \right) + \frac{M_F \kappa v^2 h_{rF}}{t_F} + \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa v^2}{t_F} \quad (18)$$

$$F_{zFI} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{c}{L} - Ma_x \frac{h}{L} - Mg \sin \theta \frac{h}{L} - c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_F \right) - \frac{M_F \kappa v^2 h_{rF}}{t_F} - \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa v^2}{t_F}$$

$$F_{xFO} = TFDO(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta))$$

$$F_{xFI} = TFDI(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta))$$

Po dosadení všetkých rovníc (18) do vzťahu popisu prednej nápravy (17) získame silne nelineárnu rovnicu, ktorá nám poslúži na popis správania prednej nápravy či už pri akcelerácii, alebo brzdení. Pre pripomenutie ide o model prednej nápravy s otvoreným diferenciálom a odpružením, ktoré charakterizuje klopná tuhosť, s možnosťou nastavenia pomeru pohonu predných kolies (TFDI, TFDO).

2.3 ZADNÁ NÁPRAVA

V podstate pôjde o veľmi podobný myšlienkový tok, ako tomu bolo pri prednej náprave. Keďže výsledné rovnice sú komplexnosťou veľmi rozsiahle a náročné, priblížime si problematiku zadnej nápravy v tejto podkapitole. Funkcia zadnej nápravy nie je v ničom rozdielna od funkcie prednej. Do modelu zahrnieme tiež možnosť pohonu zadných kolies, otvorený diferenciál a odpruženie zadnej nápravy. To nám bude charakterizovať klopná tuhosť zadnej nápravy $K_{\phi R}$.

Prvým krokom bude určenie podielu hmotnosti na zadnej náprave. V predchádzajúcej kapitole sme definovali hmotnostný koeficient ψ , pomocou ktorého sme určili podiel hmotnosti na prednej náprave. Aby platila rovnosť sumy podielov hmotnosti a celkovej hmotnosti, musí byť výsledná hmotnosť na zadnej náprave:

$$M_R = \psi M \quad (19)$$

Ďalším krokom je určiť rovnicu pozdĺžnej sily. Definovali sme si model zadnej nápravy s diferenciálom a možnosťou pohonu zadných kolies, preto výsledné pozdĺžne sily vnútorného a vonkajšieho kolesa majú tvar:

$$F_{x_{RO}} = TRDO(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (20)$$

$$F_{x_{RI}} = TRDI(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (21)$$

Pripomeňme si, že aj pre diferenciál zadnej nápravy spočiatku platí rovnosť výstupných krútiacich momentov prenášaných na pneumatiky. Avšak v rámci úlohy optimalizovania aktívneho diferenciálu, budú koeficienty $TRDO$ a $TRDI$ predmetom skúmania a výpočtov.

Predposledným krokom bude zostaviť rovnice normálových síl, ktorých miestom účinku sú pneumatiky. Podľa Obr. 3 určíme súčet momentov k bodu B a v prípade statickej rovnováhy sa rovnajú momentu, ktorý vytvára nami hľadaná normálová sila pôsobiaca v bode A na ramene dĺžky L . Jednoduchou úpravou dospejeme ku vzťahu pre celkovú normálovú silu zadnej nápravy:

$$F_{z_R} = Mg \cos \theta \frac{b}{L} + Ma_x \frac{h}{L} + Mg \sin \theta \frac{h}{L} + c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_R \quad (22)$$

Aby sme ale určili normálové sily jednotlivých kolies, musíme zistiť hodnotu klopnej tuhosti zadnej nápravy. Aplikujeme skoršie definovaný koeficient prerozdelenia klopnej tuhosti φ . Kvôli zachovaniu rovnosti celkovej klopnej tuhosti K_ϕ a sumy klopnej tuhosti prednej a zadnej nápravy $K_{\phi F} + K_{\phi R}$, stanovíme jej hodnotu týmto spôsobom:

$$K_{\phi R} = \varphi K_\phi \quad (23)$$

Pre výsledný tvar rovníc normálových síl vonkajšieho a vnútorného kolesa zadnej nápravy využijeme Obr. 4 a rozdiel zaťaženia kolies na náprave.

$$F_{z_{RO}} - F_{z_{RI}} = 2 \frac{M_R K v^2 h_{rR}}{t_R} + 2 \frac{K_{\phi R} \phi_k K v^2}{t_R} \quad (24)$$

Rovnako ako pri prednej náprave, tak aj pri zadnej predpokladáme rovnosť celkovej normálovej sily a sumy normálových síl kolies $F_{z_R} = F_{z_{RO}} + F_{z_{RI}}$. To nám dovoľuje konečne napísať rovnice pre jednotlivé kolesá.

$$F_{z_{RO}} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{b}{L} + Ma_x \frac{h}{L} + Mg \sin \theta \frac{h}{L} + c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_R \right) + \frac{M_R K v^2 h_{rR}}{t_R} + \frac{K_{\phi R} \phi_k K v^2}{t_R} \quad (25)$$

$$F_{z_{RI}} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{b}{L} + Ma_x \frac{h}{L} + Mg \sin \theta \frac{h}{L} + c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_R \right) - \frac{M_R K v^2 h_{rR}}{t_R} - \frac{K_{\phi R} \phi_k K v^2}{t_R} \quad (26)$$

Poslednou úlohou je zostaviť celkovú rovnicu popisu správania zadnej nápravy pri akcelerácii alebo brzdení. Opäť využijeme treciu elipsu a predpoklad rovnosti súčtu odstredivých síl kolies a celkovej odstredivej sily na nápravu.

$$\sqrt{\left(\mu_{yRO}^2 F_{zRO}^2 - \frac{\mu_{yRO}^2}{\mu_{xRO}^2} F_{xRO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yRI}^2 F_{zRI}^2 - \frac{\mu_{yRI}^2}{\mu_{xRI}^2} F_{xRI}^2\right)} = M_R \kappa v^2 \quad (27)$$

Spolu so zvyškom odvodených vzťahov dostávame systém rovníc, podobný prednej náprave. Tento systém je žiadaným cieľom nášho postupu odvodzovania vzťahov a závislostí, s ktorým budeme pracovať hlavne v kapitole výpočtu rýchlostného profilu.

$$\mu_{xRO} = \mu_{x0} - k_x F_{zRO}$$

$$\mu_{yRO} = \mu_{y0} - k_y F_{zRO}$$

$$\mu_{xRI} = \mu_{x0} - k_x F_{zRI}$$

$$\mu_{yRI} = \mu_{y0} - k_y F_{zRI}$$

$$F_{zRO} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{b}{L} + Ma_x \frac{h}{L} + Mg \sin \theta \frac{h}{L} + c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_R \right) + \frac{M_R \kappa v^2 h_{rR}}{t_R} + \frac{K_{\phi R} \phi_k \kappa v^2}{t_R} \quad (28)$$

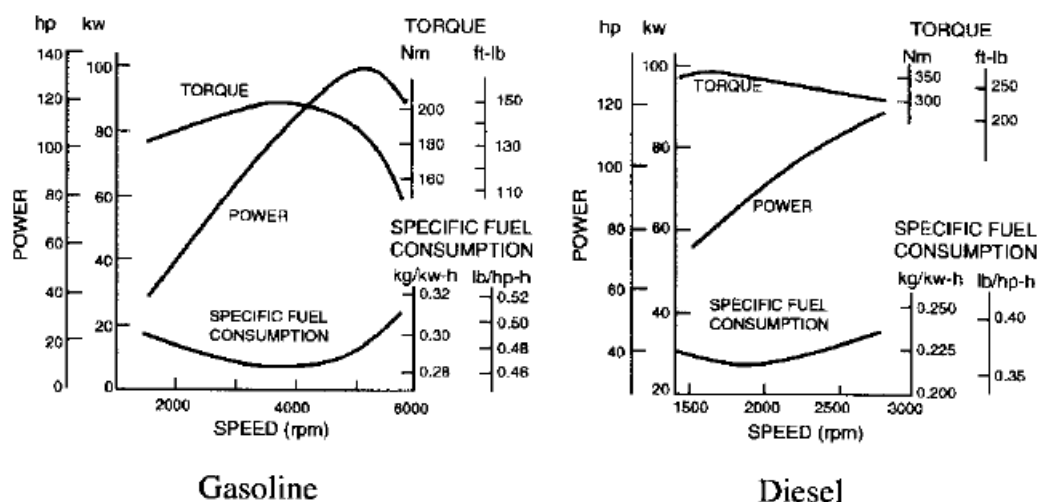
$$F_{zRI} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta \frac{b}{L} + Ma_x \frac{h}{L} + Mg \sin \theta \frac{h}{L} + c_d v^2 \frac{h_a}{L} - c_l v^2 C_R \right) - \frac{M_R \kappa v^2 h_{rR}}{t_R} - \frac{K_{\phi R} \phi_k \kappa v^2}{t_R}$$

$$F_{xRO} = TRDO(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta))$$

$$F_{xRI} = TRDI(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta))$$

2.4 HNACIE ÚSTROJENSTVO

Pod pojmom hnacie ústrojenstvo rozumieme celú sústavu komponent začínajúcu spaľovacím motorom a končiacu hnacími hriadeľmi pripevnenými ku kolesám. V praxi najbežnejšie vyskytujúcimi sa typmi spaľovacích motorov sú dieselové a benzínové motory. Každý má svoje výhody aj nevýhody. Naším cieľom však nie je sústrediť sa na analýzu typov motorov, ale na rozbor závislostí hnacieho ústrojenstva vplývajúcich na dynamiku pohybu automobilu. Najväčší dopad na rýchlosť a všeobecne na dynamiku pohybu má hnacie ústrojenstvo prevažne vo vyšších rýchlostiach. Toto tvrdenie zatiaľ nemáme podložené faktami, ale na záver bude dokázané. Najskôr si ale ukážeme, že väčšina významných charakteristík motora, či už dieselového, alebo benzínového, je závislá na otáčkach motora. Charakteristikami myslíme hlavne krútiaci moment a výkon. Na Obr. 5 je jasne badateľná táto závislosť. Vidíme tiež, že maximum krútiaceho momentu benzínového motora je vo vyšších otáčkach než maximum dieselového motoru.



Obr. 5 Výkonnostné charakteristiky benzínového a dieslového motora [1]

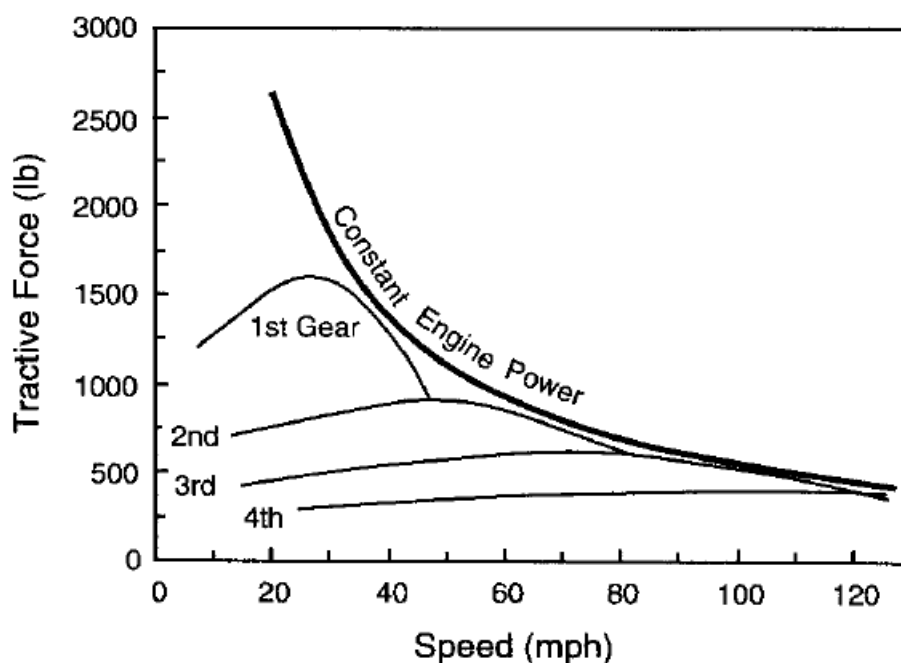
Vstupom pre náš model bude práve charakteristika krútiaceho momentu. Keďže sme doteraz popisovali model pomocou silových vzťahov, inak tomu nebude ani pri hnacom ústrojenstve. Uvedme si najskôr závislosť medzi otáčkami motora n_e a rýchlosťou automobilu v :

$$n_e = v \frac{N_{tf}}{2\pi r} \quad (29)$$

Ďalšie veličiny vystupujúce vyššie sú celkový prevodový pomer prevodovky a rozvodovky N_{tf} a obvod pneumatiky $2\pi r$. Prevodovka a rozvodovka sú tiež komponenty hnacieho ústrojenstva, ktoré majú vplyv na dynamiku. Ostáva nám už len vzťah medzi trakčnou silou a krútiacim momentom T_e . Okrem prevodového pomeru prevodovky a rozvodovky zahrnieme tiež do rovnice ich spoločnú účinnosť η_{tf} .

$$F_x = \frac{T_e N_{tf} \eta_{tf}}{r} \quad (30)$$

Definujeme tzv. radiacu rýchlosť v_{shift} ako vektor rýchlostí, pri ktorých je odporúčaná zmena zaradeného prevodového stupňa za účelom využitia maximálneho výkonu motora. V reálnom svete zmena prevodového stupňa trvá určitý čas, my ale radiaci čas v modeli zanedbáme. Dôvod definovania radiacej rýchlosti nám skvele prezentuje Obr. 6, kde je hrubou čiarou znázornený teoretický výkon motora, ku ktorému máme snahu sa čo najviac priblížiť. K tomu práve slúžia prevodové stupne.



Obr. 6 Hnacia sila [1]

Keďže v priebehu jazdy meníme prevodové stupne, môžeme očakávať závislosť prevodového pomeru a spoločnú účinnosť prevodovky a rozvodovky na radiacej rýchlosti. Platí $N_{tf} = f(v_{shift})$, $\eta_{tf} = f(v_{shift})$. Nakoľko väčšina komponent hnacieho ústrojenstva rotuje, musíme tento vplyv zohľadniť súčiniteľom rotačných hmôt ϑ . Parameter M_r je ekvivalentná hmota rotačných hmôt.

$$\vartheta = \frac{M + M_r}{M} \quad (31)$$

Teraz, keď poznáme vzťah pre trakčnú silu a jazdné odpory, ostáva nám napísať rovnicu dynamiky automobilu v závislosti od hnacieho ústrojenstva. V rovnici tiež zohľadníme vplyv rotačných hmôt a pridáme valivý odpor $a + bv$, kde a, b sú empirické konštanty.

$$\vartheta M a_x = \frac{T_e(n_e) N_{tf}(v_{shift}) \eta_{tf}(v_{shift})}{r} - (a + bv + c_d v^2 + Mg \sin \theta) \quad (32)$$

3 VÝPOČET RÝCHLOSTNÉHO PROFILU

Pri tvorbe optimálneho algoritmu na výpočet rýchlostného profilu využijeme teoretické poznatky, ktoré boli v roku 2008 spísané profesorom Panagiotisom Tsiotrasom a doktorom Efsthiosom Velenisom. Ich práca [2] využíva metodológiu teórie optimálneho riadenia, pomocou ktorej zistili optimálnu reguláciu systému, popísali tzv. body prepínania a všetky závery matematicky dokázali. Úlohu zostavili nasledovne:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = u \sqrt{1 - \left(\frac{z_2^2}{R(z_1)} \right)^2}$$

$$u \in [-1, 1]$$

(33)

$$z_1^A = z_{10} = z_1(\tau_0), \quad z_2^A = z_{20} = z_2(\tau_0)$$

$$z_1^B = z_{1f} = z_1(\tau_f), \quad z_2^B = z_{2f} = z_2(\tau_f)$$

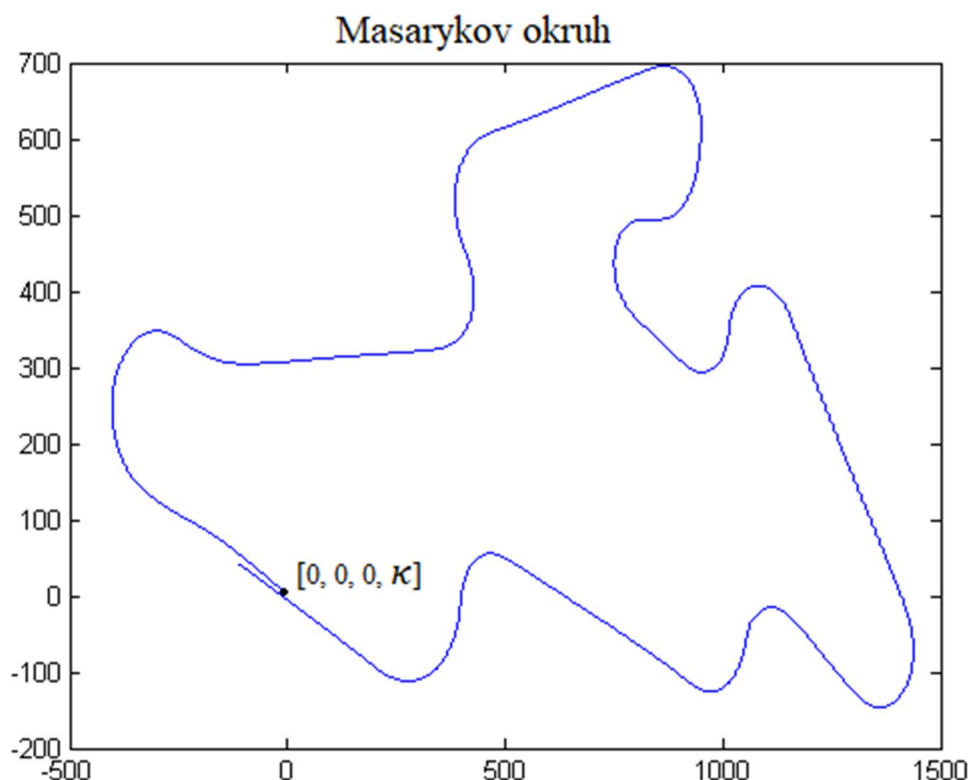
$$\min_{\tau_f} \int_{\tau_0}^{\tau_f} dt$$

Premenné z_1 , resp. z_2 značia dráhu s , resp. rýchlosť v a $R(z_1)$ je funkcia popisujúca obmedzenie v dôsledku trecej elipsy pneumatík. Závislosť od dráhy je dôsledkom závislosti krivosti trajektórie na dráhe, ktorá je dôležitým parametrom trecej elipsy. Predpokladajme, že daná trajektória z bodu A do bodu B je zložená z konečného počtu segmentov s konštantnou, monotónne rastúcou a monotónne klesajúcou krivosťou. Potom algoritmus opísaný v [2] poskytuje optimálny rýchlostný profil s cieľom minimálneho času prejazdu na danej trajektórii.

V nasledujúcich kapitolách bude popísaný algoritmus, ktorý sme navrhli s oporou znalostí vyššie uvedenej úlohy. Tú sa podarilo v [2] vyriešiť čiastočne analyticky alebo semianalyticky. Odprezentovaný výsledok bude hybridom dvoch prístupov. Základom bude analytický prístup, avšak všetky nižšie úrovňové výpočty budú numerického charakteru. Na implementáciu úlohy použijeme vývojové prostredie Matlab-u. Okrem iného našou snahou bude tiež optimalizovať kód aj z pohľadu výpočtovej rýchlosti. Kvôli nižšiemu výpočtovému času sa pozrieme na metódy paralelného programovania, kde hlavnou myšlienkou je maximálne využiť hardwareové možnosti výpočtových zariadení. Za týmto účelom budeme sledovať vytázenie virtuálnych jadier procesora (CPU).

3.1 BODY S MAXIMÁLNOU KRIVOSŤOU

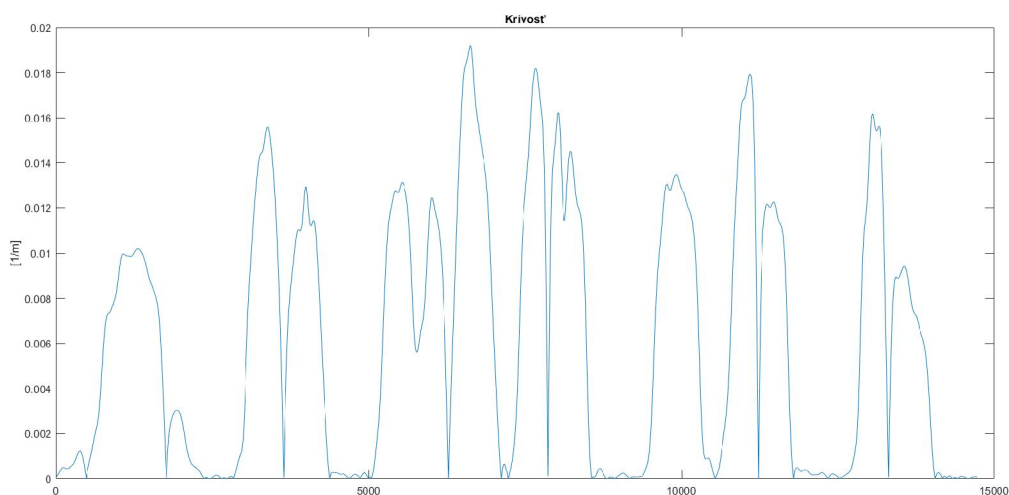
Už zo samotného zadania je jasné, že jedným zo vstupov bude trajektória. Tá je definovaná ako množina bodov zo štvorrozmerného priestoru. Prvé tri súradnice reprezentujú polohu v Kartézskom systéme súradníc. Jeho počiatok je umiestnený na štarte dráhy, čiže v bode A . Posledná súradnica reprezentuje zakrivenie trajektórie, konkrétne krivosť ktorá je definovaná ako prevrátená hodnota polomeru oskulačnej kružnice v danom bode.



Obr. 7 Pôdorys Masarykovho okruhu

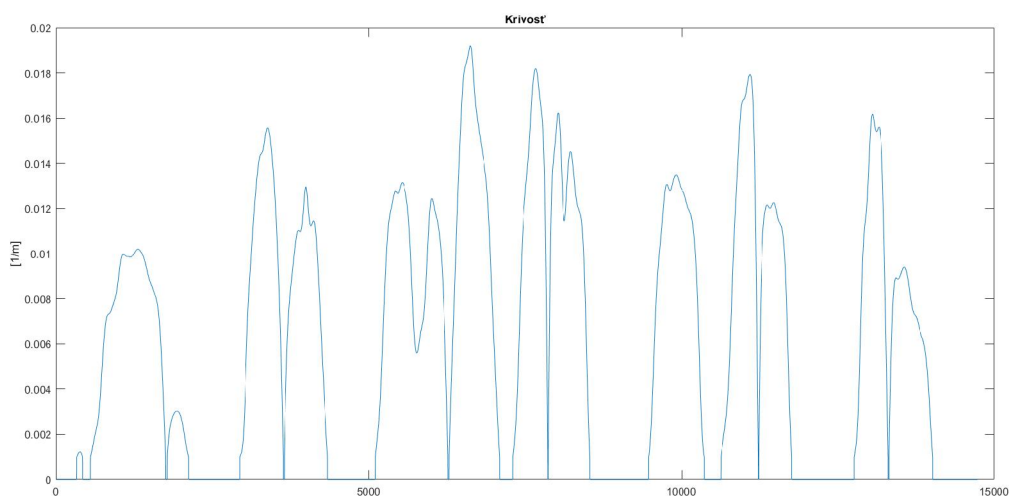
V práci budeme používať reálne dáta, ktoré boli namerané na Masarykovom okruhu v Brne. Zásľuhu na poskytnutí týchto dát má Ústav automobilového a dopravného inžinierstva a experimentálny automobil, pomocou ktorého boli tieto dáta získané. Na Obr. 7 je pôdorys okruhu v Brne. Kvôli lepšej práci s nameranými hodnotami krivosti použijeme pohyblivý priemer za účelom vyhladenia dát. Pri prvotnom spracovaní nepotrebujeme informáciu o smere zakrivenia. To znamená, že nie je nutné vedieť, či ide o ľavotočivú alebo pravotočivú zákrutu, preto dáta upravíme pomocou funkcie absolútnej hodnoty. Na Obr. 8 vidíme graf krivosti po vyhladení a absolútnej hodnote.

Vďaka skúsenostiam získaných pri tvorbe bakalárskej práce vyfiltrujeme nízke hodnoty krivosti. Predtým, než uvedieme dôvod tejto filtrácie, musíme zadať pojmy maximálna a kritická rýchlosť. Výrobcom udávanú najvyššiu možnú rýchlosť automobilu označíme maximálna rýchlosť v_{max} . Rýchlosť automobilu, ktorú spočítame za predpokladu, že suma pozdĺžnych síl je nulová v závislosti na krivosti trajektórie, nazveme kritická rýchlosť v_{krit} .



Obr. 8 Krivost' po úprave pohyblivým priemerom a absolútnou hodnotou

Nízke hodnoty krivosti v reálnom svete predstavujú rovinky okruhu (časti trate, ktoré sú veľmi blízke úsečkám). V týchto častiach trajektórie je automobil schopný dosiahnuť maximálnu rýchlosť. Avšak optimálny algoritmus, ako bude nižšie vysvetlené, zaujímajú jedine body s lokálnymi maximami krivosti, v ktorých je kritická rýchlosť nižšia ako maximálna rýchlosť automobilu.



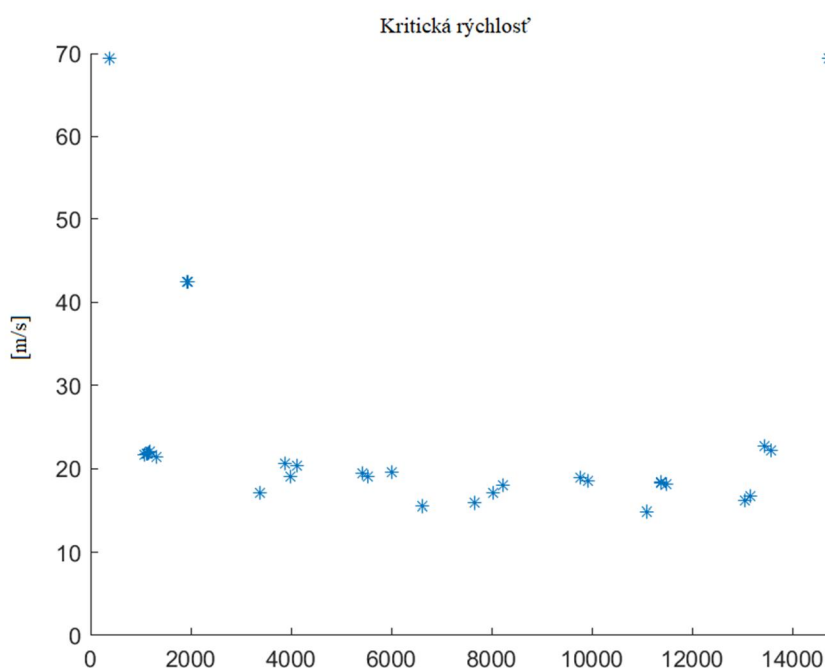
Obr. 9 Krivost' po vyfiltrovaní rovných úsekov

V podstate sme v predchádzajúcej vete naznačili ďalší krok pre nájdenie optimálnej rýchlostnej charakteristiky. Z pohľadu teoretickej úlohy optimálneho riadenia je našou snahou nájsť prepínacie body. Ide o body trajektórie, v ktorých regulácia u skokovo zmení svoju hodnotu. Bohužiaľ, nevieme hneď určiť všetky prepínacie body, ale sme schopní určiť potenciálne prepínacie body, kedy regulácia prepne z hodnoty -1 na 1 . V tomto prípade hodnoty regulácie $u = -1$ znamenajú, že automobil v rámci obmedzenia trecou elipsou brzdí a pre $u = 1$ automobil v rámci obmedzení trecou elipsou a hnacím ústrojenstvom akcelerauje. V [2] preukázali, že tieto body sú totožné s bodmi lokálnych maxím krivosti. Nakoľko máme hodnoty krivosti dôsledne pripravené, použitím Matlabovskej built-in funkcie

$islocalmax(curvature)$ jednoducho získame hľadané body lokálnych maxím. Tieto body teda odpovedajú miestam, kde by mal automobil prestať brzdiť a začať akcelerovať.

Okrem toho nás zaujíma kritická rýchlosť v miestach s lokálne maximálnou krivosťou. Opäť využijeme poznatky z úlohy optimálneho riadenia. Kritickú rýchlosť získame ako minimum z kritických rýchlostí prednej a zadnej nápravy. V predchádzajúcich kapitolách sme odvodili vzťahy popisujúce správanie oboch náprav. Algoritmus výpočtu kritickej rýchlosti popíšeme pre prednú nápravu, analogicky postupujeme pri zadnej. Využijeme vzťah (17), do ktorého dosadíme rovnice (18) s výnimkou pozdĺžnych síl $F_{x_{FI}}, F_{x_{FO}}$. Obe sily budú identické nule. Rovnako pozdĺžne zrýchlenie $a_x \equiv 0$. Dostávame nelineárnu rovnicu premennej rýchlosti v . Najmenší koreň tejto rovnice z intervalu $\langle 0, v_{max} \rangle$ označíme za kritickú rýchlosť. V prípade, že nenájdeme koreň v tomto intervale, tak kritickú rýchlosť položíme rovnú maximálnej. Keďže nemôžeme predpokladať, že v spomínanom intervale je len jeden koreň a pre použitie funkcií zabudovaných v Matlabe na hľadanie koreňa nelineárnej rovnice potrebujeme veľmi špecifické vstupy, implementujeme si vlastnú funkciu založenú na princípe polenia intervalu. Skladá sa z dvoch krokov:

- Najskôr odhadneme, kde má funkcia záporné hodnoty. Interval $\langle 0, v_{max} \rangle$ rozdelíme ekvidištantne a spočítame hodnoty funkcie v uzloch. Prvý záporný uzol použijeme v ďalšom kroku. Ak ani v jednom uzle nie je hodnota funkcie záporná, potom kritická rýchlosť sa rovná maximálnej a druhý krok vynecháme. Citlivosť odhadu nastavujeme pomocou počtu uzlov.
- Ak sme našli uzol so zápornou hodnotou, použijeme klasický algoritmus bisekcie. Krajnými bodmi štartovacieho intervalu je posledný kladný uzol a bod, ktorý sme zistili v prvom kroku. Interval rozdelíme na polovicu a ak absolútna hodnota funkcie v tomto bode p je väčšia ako nejaká požadovaná presnosť, opakujeme nasledovný krok, kým nedosiahneme požadovanú presnosť. Ak znamienko súčinu hodnoty funkcie v p a hodnoty funkcie v ľavom okraji je záporný, prepíšeme pravý okraj na p , v opačnom prípade zmeníme ľavý okraj a opäť skontrolujeme hodnotu funkcie v polke nového intervalu.



Obr. 10 Kritické rýchlosti pre Masarykov okruh

Analogicky postupujeme v prípade zadnej nápravy. Použijeme vzťahy (27) a (28), kde pozdĺžne sily $F_{x_{RI}}$, $F_{x_{RO}}$ a pozdĺžne zrýchlenie sú identické nule.

3.2 APROXIMÁCIA POZDĹŽNEHO ZRÝCHLENIA

Pri hľadaní kritickej rýchlosti sme pozdĺžne zrýchlenie položili rovné nule. Vyplývalo to z predpokladu, že v bode prepnutia regulácie (totožný s bodom lokálneho maxima krivosti) je pozdĺžne zrýchlenie nulové. Pravdaže, ak akcelerujeme alebo brzdíme, tento predpoklad neplatí. Aby sme rýchlosť výpočtu udržali na nízkej hodnote, musíme prijať zjednodušenie úlohy. Najskôr definujeme elementárny interval ako interval medzi dvoma bodmi množiny vstupných dát. Predpokladáme teda, že pozdĺžne a odstredivé zrýchlenie v elementárnom intervale je konštantné. Našou snahou je aproximovať pozdĺžne zrýchlenie. Na to použijeme znalosti numerickej matematiky, presnejšie Eulerovu metódu na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc prvého stupňa [3].

Našou úlohou je dostať automobil z počiatočného bodu (štart) vstupných dát $\mathcal{M}$ do posledného (cieľ). Tieto dáta predstavujú trajektóriu automobilu, ale rovnako môžu slúžiť ako delenie pre časový interval prejazdu danou trajektóriou. Medzi jednotlivými bodmi sme definovali elementárny interval. Označíme v_i rýchlosť automobilu v bode $i \in \mathcal{M}$, t_i čas prejazdu z počiatku do bodu $i \in \mathcal{M}$ a s_i vzdialenosť z počiatku do bodu $i \in \mathcal{M}$. Potom na základe Eulerovej metódy a kinematických vzťahov pre konštantné zrýchlenie môžeme napísať nasledovné vzťahy, ktoré platia v každom elementárnom intervale:

$$v_{i+1} = v_i + (t_{i+1} - t_i)a_x \quad (34)$$

$$s_{i+1} - s_i = v_i(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2}a_x(t_{i+1} - t_i)^2 \quad (35)$$

Z (34) osamostatníme a_x a dosadíme do (35). Vyjadríme $(t_{i+1} - t_i)$ a znovu použitím vzťahu (34) aproximujeme pozdĺžne zrýchlenie

$$a_x \approx \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{2(s_{i+1} - s_i)} \quad (36)$$

Pri popise akcelerácie a brzdenia automobilu budeme celý čas využívať aproximáciu (36).

3.3 AKCELERÁCIA

V [2] dokázali, že optimálna regulácia je konštantná, po častiach spojitá funkcia, ktorá prepína medzi okrajovými hodnotami oboru regulácie. Okrajovú hodnotu regulácie $u = 1$ interpretujeme ako maximálne možné akcelerovanie vzhľadom k obmedzeniam. Snažíme sa nájsť maximálnu možnú rýchlosť, ktorou sa môže automobil v danom bode pohybovať tak, aby boli splnené všetky obmedzenia. Keďže náš model obsahuje hnacie ústrojenstvo a dve nápravy, dokopy počítame s tromi obmedzeniami pri akcelerácii. V 3.3.1 Obmedzenie pneumatík popíšeme algoritmus pre hľadanie maximálnej nožnej rýchlosti zo vzťahov prednej a zadnej nápravy a v 3.3.2 Obmedzenie hnacieho ústrojenstva vysvetlíme princíp hľadania maximálnej nožnej rýchlosti zo vzťahu hnacieho ústrojenstva a momentovej charakteristiky motora.

3.3.1 OBMEDZENIE PNEUMATÍK

Ako už bolo zmienené, obmedzenie pneumatík sa týka oboch náprav. V oboch prípadoch je postup analogický. Algoritmus je založený na rovnakých predpokladoch, ako tomu bolo pri aproximácii pozdĺžneho zrýchlenia. Uvedené vzťahy pre prednú nápravu (17) a (18) prepíšeme pre elementárny interval medzi bodom $i \in \mathcal{M}$ a $i + 1 \in \mathcal{M}$. Tiež použijeme aproximáciu pozdĺžneho zrýchlenia.

$$\sqrt{\left(\mu_{yFO}^2 F_{zFO}^2 - \frac{\mu_{yFO}^2}{\mu_{xFO}^2} F_{xFO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yFI}^2 F_{zFI}^2 - \frac{\mu_{yFI}^2}{\mu_{xFI}^2} F_{xFI}^2\right)} = M_F \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} F_{zFO} = & \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_{i+1} \frac{c}{L} - M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} - Mg \sin \theta_{i+1} \frac{h}{L} - c_d v_{i+1}^2 \frac{h_a}{L} \right. \\ & \left. - c_l v_{i+1}^2 C_F \right) + \frac{M_F \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 h_{rF}}{t_F} + \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa_{i+1} v_{i+1}^2}{t_F} \\ F_{zFI} = & \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_{i+1} \frac{c}{L} - M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} - Mg \sin \theta_{i+1} \frac{h}{L} - c_d v_{i+1}^2 \frac{h_a}{L} \right. \\ & \left. - c_l v_{i+1}^2 C_F \right) - \frac{M_F \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 h_{rF}}{t_F} - \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa_{i+1} v_{i+1}^2}{t_F} \end{aligned} \quad (38)$$

$$F_{xFO} = TFDO \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_{i+1}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}) \right)$$

$$F_{xFI} = TFDI \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_{i+1}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}) \right)$$

Vzťahy pre súčinitele trenia sa oproti vzťahom (18) nemenia, preto ich tu neuvádzame, napriek tomu sú stále súčasťou sústavy rovníc (37) a (38). Našou úlohou je nájsť rýchlosť v bode $i + 1$. Keďže predpokladáme, že rýchlosť v_i poznáme a rovnako vzdialenosti s_{i+1} a s_i , potom rovnica (37) je nelineárna rovnica jednej premennej v_{i+1} . Riešením je najmenší koreň rovnice (37) z intervalu $\langle 0, v_{max} \rangle$.

$$f(v_{i+1}) = \sqrt{\left(\mu_{yFO}^2 F_{zFO}^2 - \frac{\mu_{yFO}^2}{\mu_{xFO}^2} F_{xFO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yFI}^2 F_{zFI}^2 - \frac{\mu_{yFI}^2}{\mu_{xFI}^2} F_{xFI}^2\right)} - M_F \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 \quad (39)$$

Použijeme približne rovnaký postup ako pri hľadaní kritickej rýchlosti. Rozdiel je ale v tom, že obor funkčných hodnôt funkcie (39) je priestor komplexných čísel, keďže výraz pod odmocninou môže mať aj zápornú hodnotu. Z pohľadu dynamiky vozidla nastáva tento jav v momente, keď jedno z kolies dosiahne svoj limit. Stále platí predpoklad, že ani jedna z pneumatík neprekročí svoj limit. Preto hľadaná rýchlosť môže odpovedať rýchlosti skokovej zmeny z reálnej hodnoty funkcie (39) na hodnotu imaginárnu. Algoritmus sa skladá z dvoch krokov:

- Najskôr odhadneme krajné body vstupného intervalu pre bisekciu. Interval $\langle v_i, v_{max} \rangle$ rozdelíme ekvidištantne a v uzloch zistíme hodnotu $f(v_{i+1})$. Vstupný interval má ľavú hodnotu rovnú prvému kladnému reálnemu uzlu a pravú hodnotu rovnú, buď prvému uzlu v ktorom je $f(v_{i+1})$ záporná a reálna, alebo prvému uzlu v ktorom má $f(v_{i+1})$ imaginárnu hodnotu. Aj tu citlivosť odhadu nastavíme pomocou počtu uzlov.
- Ďalším krokom je bisekcia. Algoritmus je doplnený o prípad imaginárnej funkčnej hodnoty. Rozdiel oproti klasickej bisekcii je v podmienke ukončenia cyklu. Namiesto zisťovania rozdielu funkčnej hodnoty a nuly porovnávame rozdiel vzdialenosti polovičného bodu intervalu a jedného z okrajov.

Tento numerický postup je ale nestabilný v okolí bodov s lokálne maximálnou krivosťou. Dôvodom je šum dát na tomto okolí, ktorý pretrval aj napriek vyhladzovaniu pomocou pohyblivého priemeru. Jedným z riešení by bolo lepšie vyhladenie dát s krivosťou. Kvôli ošetreniu tejto chyby za každých okolností sme radšej zvolili riešenie s umelým nastavením hľadanej rýchlosti na tú hodnotu kritickej rýchlosti, na ktorej okolí vzniká nestabilita.

Rovnako postupujeme aj v prípade zadnej nápravy. Vzťah (27) prepíšeme na elementárny interval a za pozdĺžne zrýchlenie a_x dosadíme aproximáciu (36).

$$\sqrt{\left(\mu_{yRO}^2 F_{zRO}^2 - \frac{\mu_{yRO}^2}{\mu_{xRO}^2} F_{xRO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yRI}^2 F_{zRI}^2 - \frac{\mu_{yRI}^2}{\mu_{xRI}^2} F_{xRI}^2\right)} = M_R \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 \quad (40)$$

Podobne upravíme vzťahy (28).

$$F_{zRO} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_{i+1} \frac{b}{L} + M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} + Mg \sin \theta_{i+1} \frac{h}{L} + c_d v_{i+1}^2 \frac{h_a}{L} - c_l v_{i+1}^2 C_R \right) + \frac{M_R \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 h_{rR}}{t_R} + \frac{K_{\phi R} \phi_k \kappa_{i+1} v_{i+1}^2}{t_R}$$

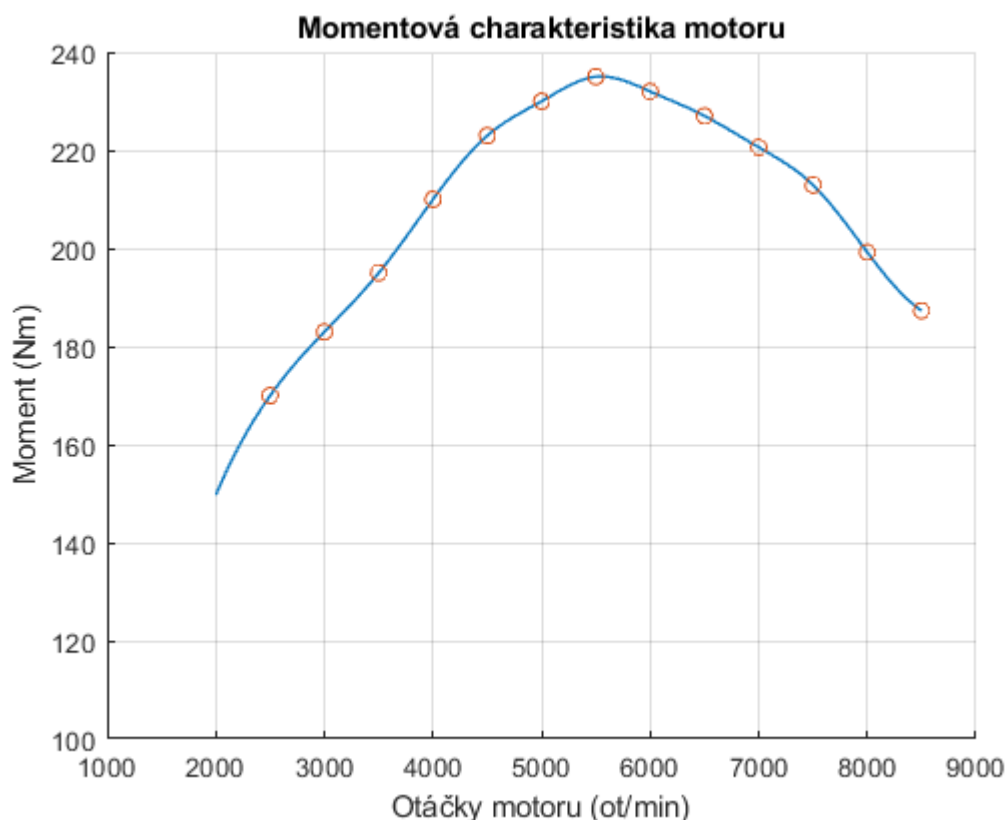
$$F_{z_{RI}} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_{i+1} \frac{b}{L} + M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} + Mg \sin \theta_{i+1} \frac{h}{L} + c_d v_{i+1}^2 \frac{h_a}{L} - c_l v_{i+1}^2 C_R \right) - \frac{M_R \kappa_{i+1} v_{i+1}^2 h_{rR}}{t_R} - \frac{K_{\phi R} \phi_k \kappa_{i+1} v_{i+1}^2}{t_R} \quad (41)$$

$$F_{x_{RO}} = TRDO \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_{i+1}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}) \right)$$

$$F_{x_{RI}} = TRDI \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_{i+1}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}) \right)$$

3.3.2 OBMEDZENIE HNACIEHO ÚSTROJENSTVA

Druhým obmedzením pri akcelerácii je hnacie ústrojenstvo. Pri popise obmedzení nápravami hlavnú rolu zohrávali konštanty vystupujúce v silových rovniciach. Avšak pri tomto obmedzení zohľadňujeme viacero faktorov, od ktorých je silová rovnica hnacieho ústrojenstva závislá.



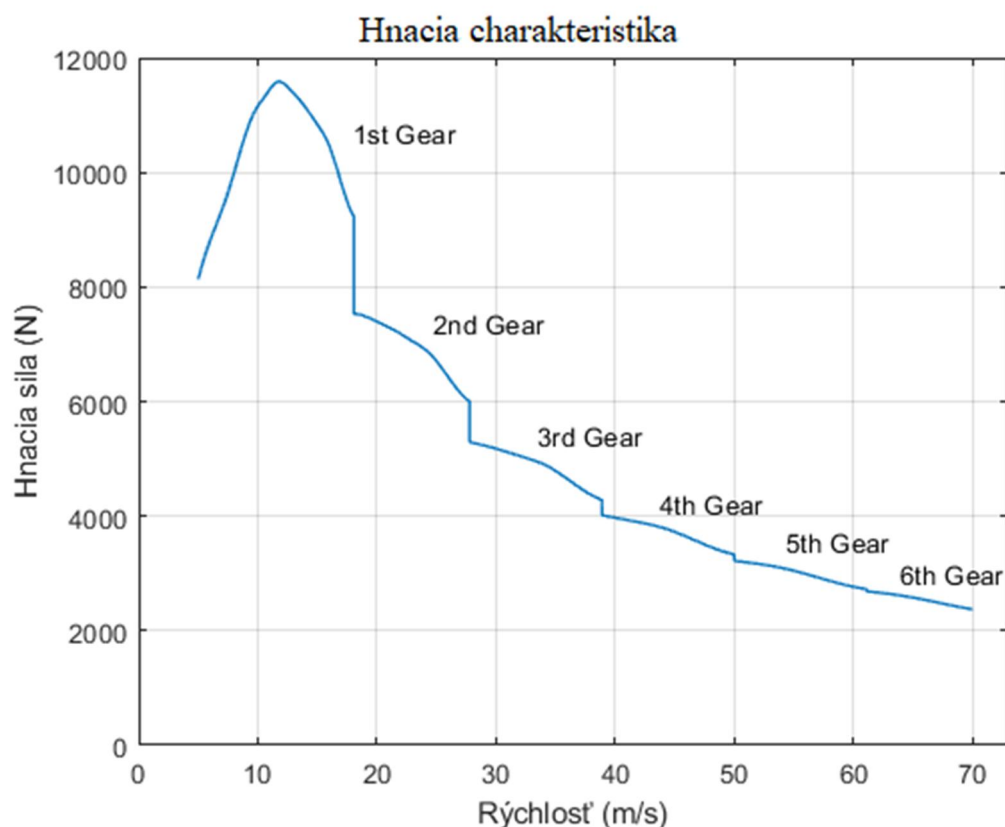
Obr. 11 Charakteristika krútiaceho momentu experimentálneho automobilu

Najskôr sa venujme momentovej charakteristike motora. Definujeme ju ako zobrazenie intervalu otáčok motora na interval krútiacich momentov motora

$$f: \langle n_{e_{min}}, n_{e_{max}} \rangle \rightarrow \langle T_{e_{min}}, T_{e_{max}} \rangle,$$

kde $\langle n_{e_{min}}, n_{e_{max}} \rangle, \langle T_{e_{min}}, T_{e_{max}} \rangle \subset \mathbb{R}$. Vo väčšine prípadov však nepoznáme explicitný tvar funkcie, ktorá by popisovala toto zobrazenie. Naším vstupom je množina bodov z dvojrozmerného priestoru. Využijeme poznatky o interpolácii dát tzv. splajnami [4]. Štruktúra splajnu nám umožňuje pracovať so vstupnými diskretnými dátami ako so spojitou funkciou. Na Obr. 11 sú vstupné diskkrétne dáta zobrazené oranžovými bodmi a modrá krivka predstavuje interpoláciu týchto dát (splajn).

Ďalším vstupom je usporiadaná množina odporúčaných radiacích rýchlostí v_{shift} . Ako už bolo zmienené, celkový prevodový pomer prevodovky a rozvodovky N_{tf} a ich spoločná účinnosť η_{tf} sú obe závislé na v_{shift} . Obe veličiny sú teda po častiach konštantné funkcie, kde body nespojitosti sú totožné s bodmi množiny v_{shift} . Použitím vzťahov (29), (30) a daných parametrov – charakteristika krútiaceho momentu experimentálneho automobilu, celkový prevodový pomer prevodovky a rozvodovky a ich spoločná účinnosť v závislosti na radiacej rýchlosti – môžeme vykresliť hnaciu charakteristiku.



Obr. 12 Hnacia charakteristika experimentálneho automobilu

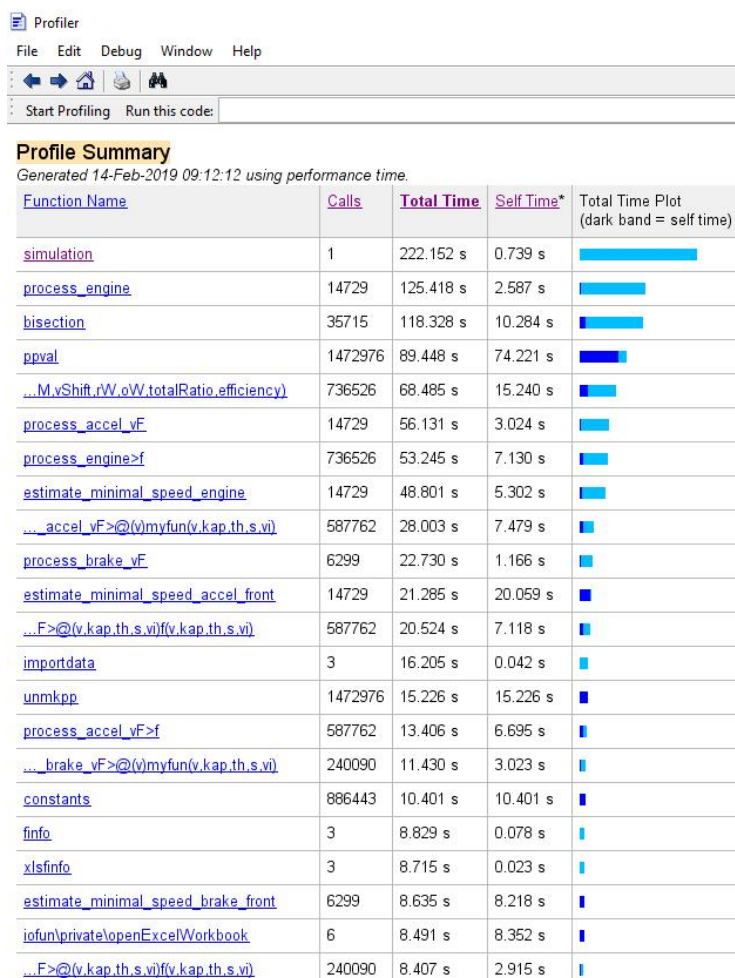
Je nutné poznamenať, že model nie je nijako závislý od konkrétneho experimentálneho automobilu, ktorého parametre boli názorne odprezentované. V prípade zmeny všetkých potrebných vstupných parametrov je možné modelovať hnacie ústrojenstvo akéhokoľvek typu automobilu.

Posledným krokom je prepísať silovú rovnicu (29) a (32) na elementárny interval s použitím aproximácie pozdĺžneho zrýchlenia.

$$n_e = v_{i+1} \frac{N_{tf}(v_{i+1})}{2\pi r} \quad (42)$$

$$\vartheta M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} = \frac{T_e(n_e)N_{tf}(v_{i+1})\eta_{tf}(v_{i+1})}{r} - (a + bv_{i+1} + c_d v_{i+1}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}) \quad (43)$$

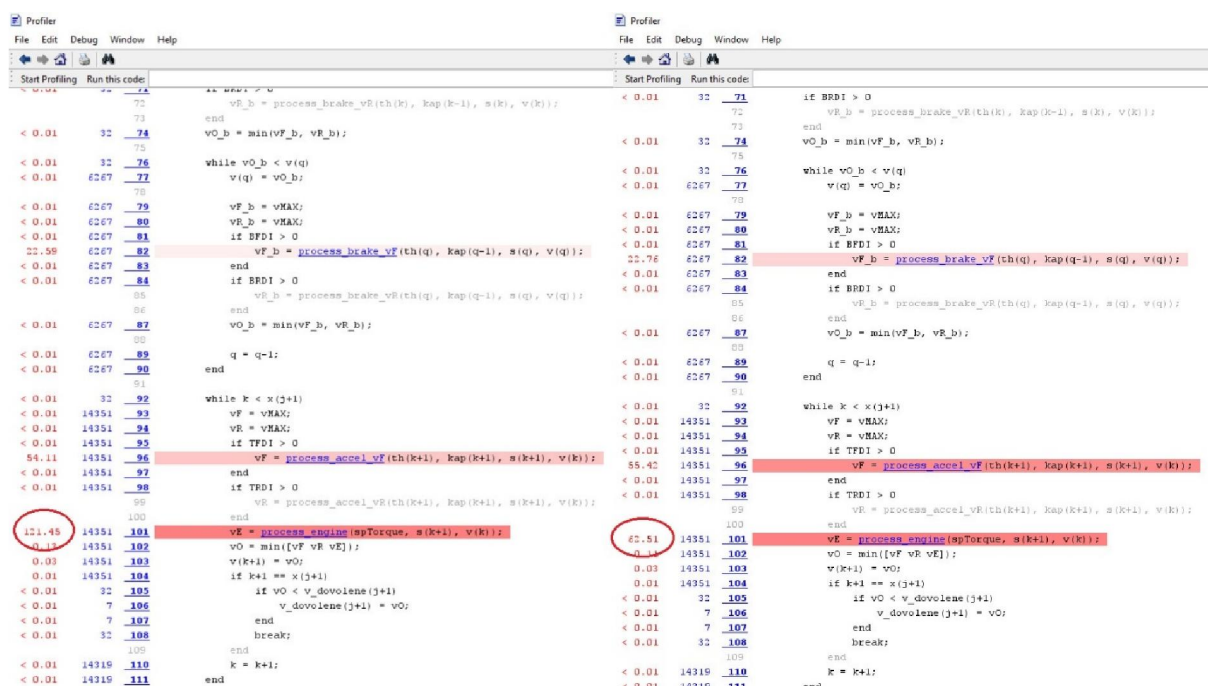
Nájdením najmenšieho koreňa rovnice (43) na intervale $\langle 0, v_{max} \rangle$, ktorý je zároveň väčší než rýchlosť v bode i , dostávame maximálnu možnú rýchlosť na ktorú môže automobil zrýchliť vzhľadom na obmedzenie hnacím ústrojenstvom. Postup hľadania je rovnaký, ako bol uvedený pri hľadaní kritickej rýchlosti. Najskôr odhadneme štartovací interval a následne spustíme algoritmus polenia intervalov.



Obr. 13 Analýza výpočetného času hľadania optimálneho rýchlostného profilu

Každým ďalším pridaním obmedzenia rastie aj výpočtový čas hľadania optimálneho rýchlostného profilu. Implementovaním obmedzenia hnacím ústrojenstvom výpočtový čas vzrástol viac, ako by sme chceli. Využitím vlastnosti analýzy výpočtového času Matlabu vidíme najvyšší podiel času stráveného (na Obr. 13 je významná hodnota Self Time) vo funkcii *ppval()*. Jej úloha spočíva v zistení funkčnej hodnoty funkcie popísanej splajnom. Vďaka informáciám získaným z [5] sa nám podarilo výpočtový čas významne zredukovať.

Funkcia *process_engine()* obsahovala práve problémovú funkciu *ppval()*. Na Obr. 14 vidíme porovnanie rýchlosti výpočtu pred úpravou kódu a po úprave.



Obr. 14 Porovnanie výpočetných časov pred úpravou kódu a po úprave

3.4 BRZDENIE

Opačným procesom k akcelerácii je brzdenie. V úlohe optimálneho riadenia je tento stav reprezentovaný zápornými hodnotami regulácie u . Okrajovú hodnotu regulácie $u = -1$ interpretujeme ako maximálne možné brzdenie vzhľadom na obmedzenia. Hľadáme maximálnu možnú rýchlosť, ktorou sa môže automobil pohybovať, aby boli splnené všetky obmedzenia. Pri brzdení uvažujeme jedine obmedzenie prednej a zadnej nápravy.

Predtým, než zavedieme proces brzdenia do simulácie, musíme náš teoretický model automobilu rozšíriť o mechanické zariadenie vytvárajúce záporné zrýchlenie – brzdy. Predpokladáme, že každé koleso je vybavené vlastnou brzdou. Definujeme koeficienty reprezentujúce jednotlivú brzdú nasledovne: *BFDO* (brake front-drive out = koeficient brzdenia vonkajšieho kolesa prednej nápravy), *BFDI* (brake front-drive in), *BRDO* (brake rear-drive out) a *BRDI* (brake rear-drive in). Pre koeficienty platia vzťahy:

$$BFDI = BFDO$$

$$BRDI = BRDO$$

$$BFDI + BFDO + BRDI + BRDO = 1$$

V silových rovniciach prednej a zadnej nápravy pri brzdení má zavedenie brzdnych koeficientov vplyv iba na pozdĺžne sily. Rovnice (8), (9), (20) a (21) prepíšeme takto:

$$F_{xFO} = BFDO(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (44)$$

$$F_{xFI} = BFDI(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (45)$$

$$F_{xRO} = BRDO(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (46)$$

$$F_{xRI} = BRDI(Ma_x + (c_d v^2 + Mg \sin \theta)) \quad (47)$$

Aby sme zistili maximálnu možnú rýchlosť, ktorou sa môže automobil pohybovať vzhľadom na silové rovnice prednej a zadnej nápravy pri brzdení, musíme zistiť osobitne rýchlosť pre prednú a osobitne pre zadnú nápravu. Minimum týchto dvoch rýchlostí je naša hľadaná rýchlosť. Obe sústavy silových rovníc prepíšeme na elementárny interval spolu s aproximáciou pozdĺžneho zrýchlenia a predpokladáme, že poznáme rýchlosť v_{i+1} v bode $i + 1$ a vzdialenosti s_{i+1}, s_i . Cieľom je určiť rýchlosť v_i . V podstate chceme vypočítať maximálnu možnú rýchlosť, ktorou sa môže automobil pohybovať, aby dokázal v elementárnom intervale dráhy $s_{i+1} - s_i$ ubrzdiť na požadovanú rýchlosť v_{i+1} .

$$\sqrt{\left(\mu_{yFO}^2 F_{zFO}^2 - \frac{\mu_{yFO}^2}{\mu_{xFO}^2} F_{xFO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yFI}^2 F_{zFI}^2 - \frac{\mu_{yFI}^2}{\mu_{xFI}^2} F_{xFI}^2\right)} = M_F \kappa_i v_i^2 \quad (48)$$

$$F_{zFO} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_i \frac{c}{L} - M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} - Mg \sin \theta_i \frac{h}{L} - c_d v_i^2 \frac{h_a}{L} - c_l v_i^2 C_F \right) + \frac{M_F \kappa_i v_i^2 h_{rF}}{t_F} + \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa_i v_i^2}{t_F}$$

$$F_{zFI} = \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_i \frac{c}{L} - M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} - Mg \sin \theta_i \frac{h}{L} - c_d v_i^2 \frac{h_a}{L} - c_l v_i^2 C_F \right) - \frac{M_F \kappa_i v_i^2 h_{rF}}{t_F} - \frac{K_{\phi F} \phi_k \kappa_i v_i^2}{t_F} \quad (49)$$

$$F_{xFO} = BFDO \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_i^2 + Mg \sin \theta_i) \right)$$

$$F_{xFI} = BFDI \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_i^2 + Mg \sin \theta_i) \right)$$

Pre úplnosť doplníme ešte sústavu rovníc pre zadnú nápravu. Postup hľadania rýchlostí pre obe nápravy je úplne totožný s algoritmom uvedeným v kapitole 3.3.1, tiež sú rovnakým spôsobom ošetrené všetky situácie, ktoré môžu nastať pri hľadaní rýchlosti v_i .

$$\sqrt{\left(\mu_{yRO}^2 F_{zRO}^2 - \frac{\mu_{yRO}^2}{\mu_{xRO}^2} F_{xRO}^2\right)} + \sqrt{\left(\mu_{yRI}^2 F_{zRI}^2 - \frac{\mu_{yRI}^2}{\mu_{xRI}^2} F_{xRI}^2\right)} = M_R \kappa_i v_i^2 \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
F_{zRO} &= \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_i \frac{b}{L} + M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} + Mg \sin \theta_i \frac{h}{L} + c_d v_i^2 \frac{h_a}{L} - c_l v_i^2 C_R \right) \\
&\quad + \frac{M_R \kappa_i v_i^2 h_{rR}}{t_R} + \frac{K_{\phi R} \phi_k \kappa_i v_i^2}{t_R} \\
F_{zRI} &= \frac{1}{2} \left(Mg \cos \theta_i \frac{b}{L} + M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2) h}{2(s_{i+1} - s_i) L} + Mg \sin \theta_i \frac{h}{L} + c_d v_i^2 \frac{h_a}{L} - c_l v_i^2 C_R \right) \\
&\quad - \frac{M_R \kappa_i v_i^2 h_{rR}}{t_R} - \frac{K_{\phi R} \phi_k \kappa_i v_i^2}{t_R} \\
F_{xRO} &= BRDO \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_i^2 + Mg \sin \theta_i) \right) \\
F_{xRI} &= BRDI \left(M \frac{(v_{i+1}^2 - v_i^2)}{2(s_{i+1} - s_i)} + (c_d v_i^2 + Mg \sin \theta_i) \right)
\end{aligned} \tag{51}$$

3.5 ZHRNUTIE A POPIS VÝPOČTU RÝCHLOSTNÉHO PROFILU

Všetky úlohy a hľadané hodnoty z predchádzajúcich kapitol boli len čiastočnými výsledkami. Hlavnou úlohou je výpočet optimálneho rýchlostného profilu vzhľadom k minimalizácii celkového času prejazdu zadanou trajektóriou. Uvedieme preto v hierarchii najvyššie položený algoritmus, ktorý bude používať dielčie výsledky z procesov: hľadanie bodov s lokálne maximálnou krivosťou a k nim kritických rýchlostí, akcelerácia a brzdenie.

Jedným z predpokladov zavedených v elementárnom intervale je konštantné zrýchlenie, ktoré sa môže v uzloch skokovo meniť. Ďalej uvažujme v elementárnom intervale pohyb automobilu po priamke. Vo výsledku je teda našou trajektóriou polygón s $N - 1$ hranami, kde N je počet bodov vstupnej množiny dát trajektórie $\mathcal{M}$. Definujeme elementárnu vzdialenosť s a uhol stúpania θ a premenné X, Y, Z predstavujú súradnice v kartézskej sústave súradníc.

$$s_{i+1} - s_i = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2 + (Z_{i+1} - Z_i)^2} \tag{52}$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{Z_{i+1} - Z_i}{s_{i+1} - s_i} \right) \tag{53}$$

Ako prvé načítame dáta. Okrem trajektórie $\mathcal{M}$ sú tiež vstupnými dátami všetky konštanty popisujúce automobil, ktoré vystupujú v silových rovniciach. Ďalej musíme na trajektórii nájsť body s lokálnymi maximami krivosti a ich kritické rýchlosti. Výstupom je vektor bodov. Doplníme okrajové podmienky, ktorými sú rýchlosti na štarte a v cieľi. Pri porovnaní reálneho rýchlostného profilu a nami vypočítaného profilu nastavíme počiatočnú rýchlosť na hodnotu počiatočnej rýchlosti experimentálneho automobilu. Ak sa v cieľi nechceme ničím obmedzovať, zvolíme rýchlosť v_{max} .

Začneme prvou akceleráciou, zo štartu až do prvého bodu s kritickou rýchlosťou. To znamená, že postupne prechádzame elementárne intervaly a v každom uzle spočítame, na akú maximálnu rýchlosť môže automobil zrýchliť. Touto rýchlosťou je minimum (vO) z rýchlostí zistených pre prednú (vF) a zadnú (vR) nápravu a pre hnacie ústrojenstvo (vE). Rýchlosti vO zapisujeme do hľadaného rýchlostného profilu. Rovnako spočítame vO aj v prvom uzle

s kritickou rýchlosťou. Môžu nastať dve situácie. Ak $vO < v_{krit}$, potom musíme kritickú rýchlosť prepísať rýchlosťou vO . V opačnom prípade sa nič nedeje a pokračujem ďalej vo výpočte. V tomto momente začína hlavný cyklus, ktorý iteruje práve vektorom kritických rýchlostí:

- 1) Prvým procesom každej iterácie je brzdenie. V podstate ide o vnorený cyklus. Predpokladajme, že sa nachádzame v uzle i . Spočítame pre obe nápravy maximálne možné rýchlosti, ktorými sa môžu hýbať v uzle $i - k$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$ a zvolíme minimum zo zistených rýchlostí. Ak:
 - a) je minimum vyššie alebo rovnaké ako rýchlosť výsledného rýchlostného profilu v uzle $i - k$, vnorený cyklus brzdenia ukončíme a pokračujeme na akceleráciu.
 - b) je minimum nižšie ako rýchlosť výsledného rýchlostného profilu v uzle $i - k$, prepíšeme rýchlosť výsledného rýchlostného profilu na minimum zistených rýchlostí a inkrementujeme hodnotu k . Pokračujem vo vnorenom cykle brzdenia, až kým nenastane možnosť a).
- 2) Druhým procesom každej iterácie je akcelerácia. Opäť ide o vnorený cyklus, ktorý prechádza všetkými uzlami trajektórie medzi dvoma uzlami kritických rýchlostí. V každom uzle trajektórie zistíme maximálne možné rýchlosti, na ktoré môže automobil zrýchliť vzhľadom na obe nápravy a hnacie ústrojenstvo. Rýchlosťou výsledného rýchlostného profilu v danom uzle je $\min\{vF, vR, vE\}$. Tak isto zistíme toto minimum v druhom uzle s kritickou hodnotou. Ak, $\min\{vF, vR, vE\} < v_{krit}$, potom musíme kritickú rýchlosť prepísať minimálnou rýchlosťou. Ak nerovnosť neplatí, tak sa nič nedeje a pokračujeme ďalšou iteráciou.

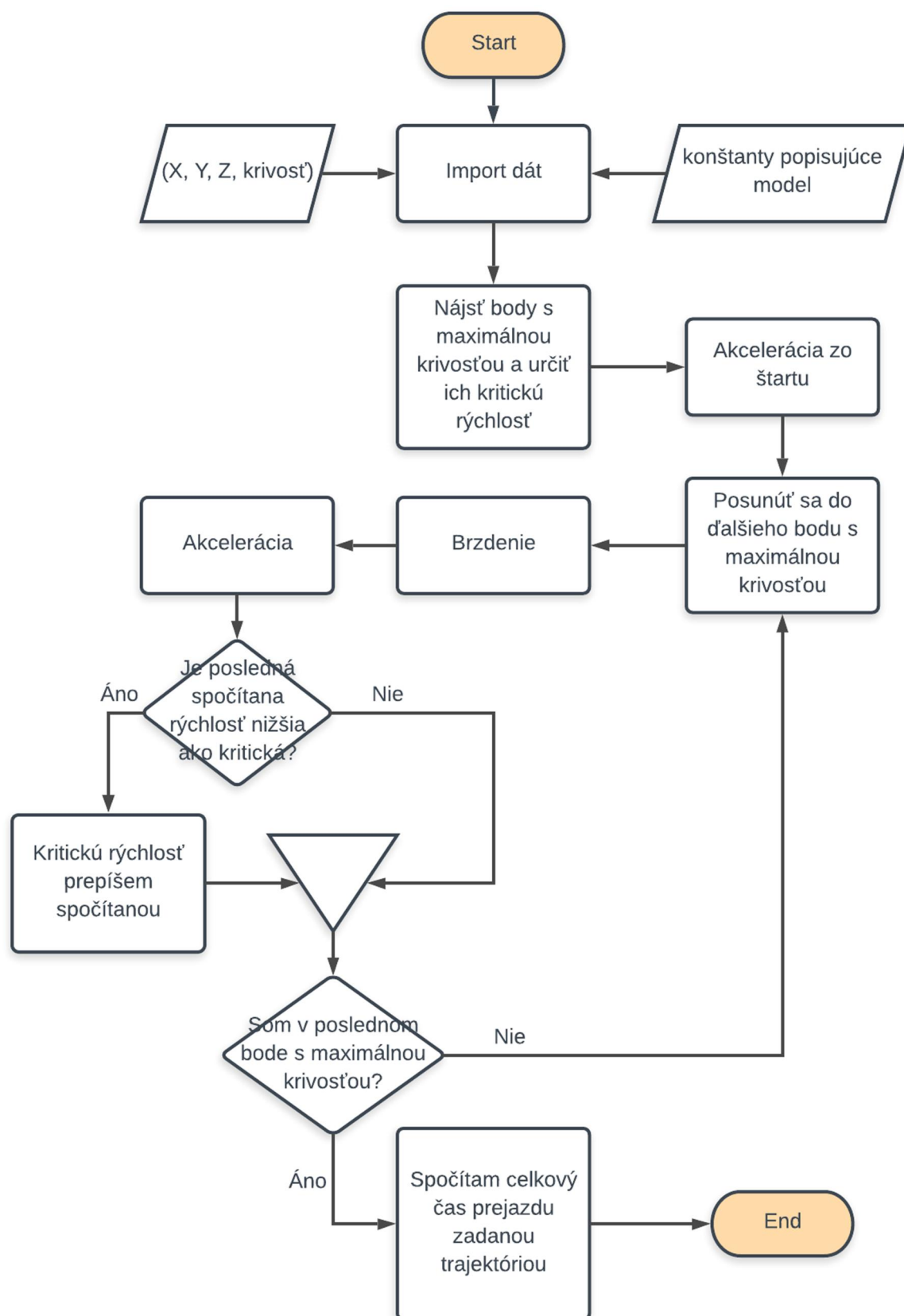
Posledným krokom je výpočet celkového času prejazdu zadanou trajektóriou. Keďže sme spočítali výslednú rýchlosť v uzloch a rovnako poznáme vzdialenosť medzi jednotlivými uzlami, pomocou vzťahov (34) a (35) vyjadríme čas prejazdu na elementárnom intervale, ktorý označíme $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

$$\Delta t_i = \frac{2(s_{i+1} - s_i)}{v_{i+1} + v_i} \quad (54)$$

Celkový čas prejazdu T je teda suma všetkých časov prejazdu na elementárnych intervaloch.

$$T = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i \quad (55)$$

Na Obr. 15 je znázornený ilustratívny priebeh hlavného algoritmu. V praxi sa používa pomenovanie FlowChart.



Obr. 15 FlowChart hlavného algoritmu

4 OPTIMALIZÁCIA BLACK-BOX FUNKCIE

Na základe poznatkov silových vzťahov a závislostí, dynamiky pohybu automobilu a analytického riešenia úlohy minimalizácie času prejazdu zadanou trajektóriou pomocou metodológie optimálneho riadenia sa nám podarilo zostaviť teoretický model automobilu a implementovať algoritmus pre výpočet optimálneho rýchlostného profilu. Z kapitoly 3 je jasne vidieť komplexnosť problému. Je použitých niekoľko numerických postupov a metód, ktoré sme navzájom spojili do jedného komplexného algoritmu. Aby sme mohli ďalej v práci pokračovať, musíme si túto skutočnosť uvedomiť.

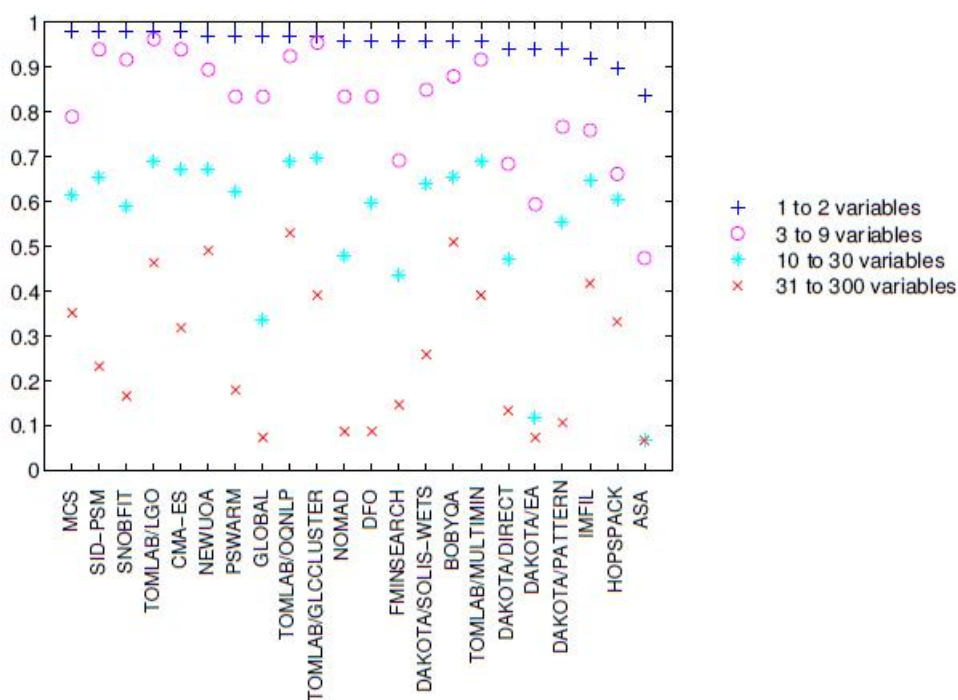
Naším ďalším krokom je optimalizácia niektorých parametrov automobilu. Stručne zopakujeme, o čo ide pri optimalizácii. Majme účelovú funkciu f a množinu prípustných riešení Ω (často $\Omega \subset \mathbb{R}^n$), kde $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hľadáme také $x_0 \in \Omega$, že platí $f(x_0) \leq f(x)$ pre $\forall x \in \Omega$. V našom prípade je účelovou funkciou algoritmus výpočtu rýchlostného profilu. Ďalej z definície optimalizácie môžeme za $f(x)$ označiť výsledný celkový čas prejazdu danou trajektóriou. Venovať sa budeme dvom optimalizačným úlohám.

Solver	URL	Version	Language	Bounds	Constraints
ASA	www.ingber.com	26.30	C	required	no
BOBYQA	Available by email from mjdpc@cam.ac.uk	2009	Fortran	required	no
CMA-ES	www.lri.fr/~hansen/cmaesintro.html	3.26beta	Matlab	optional	no
DAKOTA/DIRECT	www.cs.sandia.gov/dakota/	4.2	C++	required	yes
DAKOTA/EA	www.cs.sandia.gov/dakota/	4.2	C++	required	yes
DAKOTA/PATTERN	www.cs.sandia.gov/dakota/	4.2	C++	required	yes
DAKOTA/SOLIS-WETS	www.cs.sandia.gov/dakota/	4.2	C++	required	yes
DFO	projects.coin-or.org/Dfo	2.0	Fortran	required	yes
FMINSEARCH	www.mathworks.com	1.1.6.2	Matlab	no	no
GLOBAL	www.inf.u-szeged.hu/~csendes	1.0	Matlab	required	no
HOPSPACK	software.sandia.gov/trac/hopspack	2.0	C++	optional	yes
IMFIL	www4.ncsu.edu/~ctk/imfil.html	1.01	Matlab	required	yes
MCS	www.mat.univie.ac.at/~neum/software/mcs/	2.0	Matlab	required	no
NEWUOA	Available by email from mjdpc@cam.ac.uk	2004	Fortran	no	no
NOMAD	www.gerad.ca/nomad/	3.3	C++	optional	yes
PSWARM	www.norg.uminho.pt/aivaz/pswarm/	1.3	Matlab	required	yes*
SID-PSM	www.mat.uc.pt/sid-psm/	1.1	Matlab	optional	yes*
SNOBFIT	www.mat.univie.ac.at/~neum/software/snobfit/	2.1	Matlab	required	no
TOMLAB/GLCCLUSTER	tomopt.com	7.3	Matlab	required	yes
TOMLAB/LGO	www.pinterconsulting.com/	7.3	Matlab	required	yes
TOMLAB/MULTIMIN	tomopt.com	7.3	Matlab	required	yes
TOMLAB/OQNLP	tomopt.com	7.3	Matlab	required	yes

* Handles linear constraints only.

Tab. 1 Implementácie derivative-free algoritmov [8]

Nepríjemnosťou je, že obe úlohy spadajú do okruhu nelineárnej optimalizácie, ba čo viac, ani u jednej nepoznáme konkrétny tvar účelovej funkcie. Ide o tzv. black-box (čierna skrinka) účelovú funkciu. Princíp je jednoduchý. Na vstupe máme známe hodnoty premenných, v rámci čiernej skrinky sa nejako vyhodnotia a my dostávame už len hodnotu na výstupe. Aj pre tento typ účelových funkcií vznikla odnož optimalizácie nazvaná „*derivative-free optimization*“. Základnú definíciu optimalizácie rozšírime o predpoklad, že derivácia účelovej funkcie je neznáma, prakticky nedosiahnuteľná alebo výpočet hodnoty $f(x)$ je časovo náročný. Akýkoľvek algoritmus, ktorý sa snaží riešiť tieto typy úloh, označíme „*derivative-free algorithm*“.



Obr. 16 Úspešnosť riešičov vzhľadom k počtu premenných [8]

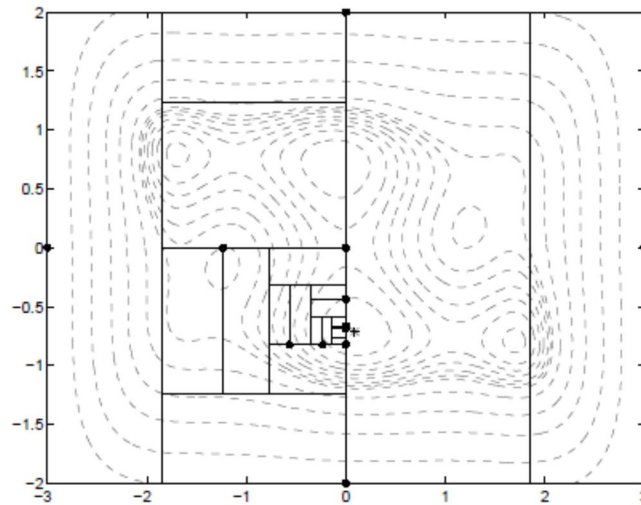
Prvými priekopníkmi v rámci tejto problematiky boli Spendley s jeho prácou [6] a Nelder a Mead vytvorili simplexovú metódu [7]. Práve s rozmachom výpočtovej techniky a začiatkom používania počítačových simulácií v takmer každom odvetví priemyslu sa veľká pozornosť upriamila na vývoj a implementáciu rôznych derivative-free algoritmov. Potrebu zhrnúť a porovnať jednotlivé algoritmy cítili tiež autori článku [8] Luis Rios a Nikolaos Sahinidis. V Tab. 1 je uvedených 22 algoritmov implementovaných v rôznych vývojových prostrediach a s odlišnými predpokladmi na obmedzenia a množinu prípustných riešení. Všetky boli otestované na 502 problémoch, zahŕňajúcich ako konvexné a nekonvexné problémy, tak aj hladké a nehladké problémy. Na základe dosiahnutých výsledkov (Obr. 16) a prijatých záverov, sme sa rozhodli pre použitie dvoch konkrétnych algoritmov. Keďže ide o špecifický prípad optimalizácie, nemôžeme sa úplne spoliehať na výsledky spomínaného článku. Preto zvolíme dva algoritmy, ktoré sa odlišujú teoretickým prístupom a budeme skúmať ich použiteľnosť pre našu konkrétnu úlohu. Ďalším faktorom v rozhodovaní bolo implementačné prostredie algoritmov. Sústredili sme sa hlavne na algoritmy implementované v Matlabe. Tiež sme pre úlohu aktívneho diferenciálu potrebovali algoritmus, ktorý vedel optimalizovať s obmedzeniami. V neposlednom rade nás zaujímala úspešnosť riešenia problémov vzhľadom k počtu premenných. Pretože budeme optimalizovať úlohy s maximálne dvomi premennými, vybrali sme deterministický algoritmus MCS (Multilevel Coordinate Search) a stochastický algoritmus Particle Swarm (v československej literatúre prekladaný ako Roj častíc).

4.1 MCS (MULTILEVEL COORDINATE SEARCH) ALGORITHMUS [9]

Existuje niekoľko teoretických prístupov, na základe ktorých vznikajú derivative-free algoritmy. Podľa toho ich môžeme rozdeliť do niekoľkých skupín. Dvoma najväčšími skupinami sú heuristiky a deterministické algoritmy. Zatiaľ čo heuristiky využívajú náhodu v prospech dosiahnutia minima, deterministické algoritmy sa snažia pristupovať k problému

analyticky a dodržiavať určité pravidlá pre nájdenie minima. Autori MCS považujú tento algoritmus za hybrid medzi týmito dvoma prístupmi. Najbližšie má MCS k metóde pre hľadanie globálneho optima nazvanej DIRECT, ktorej autorom je Jones [10]. Konvergencia ku globálnemu minimu je zaručená za predpokladu spojitosti účelovej funkcie na okolí tohto minima, k tomu navyše nie sú nutné žiadne ďalšie predpoklady na hladkosť účelovej funkcie.

Podobne ako metóda DIRECT, tak aj MCS sa snaží nájsť minimum delením množiny prípustných riešení na menšie intervalové podmnožiny. Každá podmnožina obsahuje tzv. „*base-point*“, ktorého funkčná hodnota je známa. Práve odlišným faktorom je delenie, ktoré v MCS nie je rovnomerné, ale uprednostňujú sa podmnožiny, kde sa očakávajú nízke hodnoty účelovej funkcie. Algoritmus sa skladá z dvoch dielčích úloh. Delenie veľkých neprehľadaných oblastí reprezentuje globálnu časť a delenie oblastí s nízkou funkčnou hodnotou reprezentuje lokálnu časť hľadania minima. Problémom je ale správne určiť podiel času stráveného globálnym alebo lokálnym hľadaním. Riešením je viacúrovňový (*multilevel*) prístup. Každý podmnožine priradíme úroveň (*level*) prehľadávania $s \in \{0, 1, \dots, s_{max}\}$. V podstate ide o hodnotu, ktorá nám hrubo napovie, koľkokrát už bola daná podmnožina prehľadávaná. Podmnožiny s priradenou hodnotou s_{max} považujeme za príliš malé pre ďalšie delenie. Hodnota úrovne $s = 0$ znamená, že podmnožina už bola rozdelená a môže byť v ďalšom hľadaní vynechaná. Riadime sa pravidlom, ktoré nám hovorí, že vždy, keď delíme podmnožinu s úrovňou s ($0 < s < s_{max}$), zmeníme jej hodnotu úrovne na nulu a jej potomkom (dve alebo tri disjunktné podmnožiny) priradíme hodnotu $s + 1$ alebo $\min(s + 2, s_{max})$. Všeobecne teda platí, že podmnožiny s malou hodnotou s sú veľké oblasti, ktoré neboli často delené. Globálna časť hľadania je zohľadnená tým, že algoritmus si primárne vyberá podmnožiny s najmenšími hodnotami úrovne, avšak na každej úrovni uprednostní podmnožinu s najnižšou hodnotou účelovej funkcie, čiže prebieha lokálna časť hľadania. Na rozdiel od metódy DIRECT, ktorá delí priestor pomocou niekoľkých súradníc, delenie MCS využíva len jednu súradnicu. Vďaka spočítaným funkčným hodnotám z predchádzajúcich delení v base-pointoch zistíme, ktorú súradnicu využijeme pri ďalšom delení a následne aj konkrétnu hodnotu, v ktorej rozdělíme prehľadávanú oblasť. Väčšinou nám stačí jediný výpočet hodnoty účelovej funkcie, aby sme dokázali prehľadávanú oblasť rozdeliť na dve až tri podoblasti s base-pointmi, ktoré sa líšia od base-pointu pôvodnej oblasti v najviac jednej súradnici. MCS bez lokálneho hľadania si ukladá base-pointy s príslušnými funkčnými hodnotami oblastí s s_{max} do tzv. „*nákupného vozíka*“. Avšak my využívame MCS s lokálnym hľadaním, ktoré predtým, než si uloží novovytvorený base-point podoblasti s hodnotou levelu s_{max} , skontroluje, či je pravdepodobné, že už má uložený nejaký iný base-point, ktorý je v okolí lokálneho minima oboch bodov. Ak je pravdepodobnosť nízka, spustí sa algoritmus lokálneho hľadania minima, kde počiatok berieme v novo vytvorenom base-pointe. Algoritmus pozostáva z vytvorenia lokálneho kvadratického modelu pomocou „*triple searches*“, následne minimalizáciou kvadratického modelu nad vhodnou oblasťou nájde sľubný smer hľadania a pozdĺž tohto smeru nájde lokálne minimum.



Obr. 17 Výsledok MCS pre "six-hump camel function" [9]

Na príklade „six-hump camel function“ vidíme delenie algoritmu MCS pôvodne zadanej oblasti prípustných riešení. Base-pointy sú znázornené čiernymi bodmi a krížik značí globálne minimum, ktoré lokálne hľadanie algoritmu našlo tiež.

4.2 PARTICLE SWARM (ROJ ČASTÍC) ALGORITHMUS [11]

Druhým derivative-free algoritmom, ktorý nás zaujíma, patrí do skupiny heuristických algoritmov. Uvažujme problém s lineárnymi obmedzeniami

$$\min_{z \in \Omega} f(z), \quad \text{kde } \Omega = \{z \in \mathbb{R}^n : l \leq z \leq u\} \quad (56)$$

$$\text{s. t. } Az \leq b \quad (57)$$

a platí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Navyše nerovnosť $l \leq z \leq u$ berieme po zložkách, kde $l \in (-\infty, \mathbb{R})^n$, $u \in (\mathbb{R}, +\infty)^n$ a nutnou podmienkou $l < u$. Oproti MCS sa algoritmus roj častíc implementovaný Vazom a Vincentem odlišuje v zavedení lineárnych obmedzení (57). Inšpiráciou pri tvorbe roju častíc je práve správanie sa populácie častíc. Účelom je čo najlepšie prehľadať oblasť prípustných riešení. Zaraďujeme ho do kategórie heuristických algoritmov kvôli tomu, že niektoré parametre modelu sú náhodnými premennými. To znamená, že každým novým spustením algoritmu s rovnakým štartovacím rojom môžeme obdržať vždy iný výstup. Veľkosťou populácie označíme hodnotu s , ktorá značí počet častíc v roji. Algoritmus simuluje pohyb častíc v čase t (predstavuje iteráciu v kontexte programu). Takže každej častici priradíme vektor rýchlosti, ktorý reprezentuje smer pohybu častice. Novú polohu i -tej častice $x^i(t+1)$ v čase $t+1$ spočítame tak, že k pôvodnej polohe $x^i(t)$ v čase t pripočítame vektor rýchlosti $v^i(t+1)$.

$$x_j^i(t+1) = x_j^i(t) + \alpha_{j,max}^i v_j^i(t+1); \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, s \quad (58)$$

Index j predstavuje konkrétnu súradnicu i -tej častice $x_j^i \in \Omega$ a premenná $\alpha_{j,max}^i > 0$, ktorá je závislá od každej súradnice, každej častice. Má snahu, aby novozískaná poloha častice spadala do oblasti prípustných riešení vzhľadom k lineárnym obmedzeniam. Vektor rýchlosti danej častice spočítame ako stochastickú, lineárnu kombináciu pôvodnej rýchlosti, smeru

k doposiaľ najlepšej získanej polohe danej častice a smeru k doposiaľ celkovej najlepšej polohe častice v rámci celej populácie.

$$v_j^i(t+1) = \iota(t)v_j^i(t) + \mu\omega_{1j}(t)(y_j^i(t) - x_j^i(t)) + \nu\omega_{2j}(t)(\hat{y}_j(t) - x_j^i(t)) \quad (59)$$

Vektor rýchlostí je rozpísaný po zložkách pre $j = 1, \dots, n$, kde $\iota(t)$ je váhový faktor „zotrvačnosti“, $\mu > 0$ je „poznávací“ parameter a $\nu > 0$ je „sociálny“ parameter. Premenná $y_j^i(t)$ vyjadruje polohu i -tej častice s doposiaľ najlepšou hodnotou účelovej funkcie a $\hat{y}_j(t)$ predstavuje polohu častice z celej populácie s doteraz spočítanou najlepšou hodnotou účelovej funkcie celkovo. Ďalej čísla ω_{1j}, ω_{2j} sú náhodným výberom z rovnomerného rozloženia $R(0,1)$. Práve kvôli týmto parametrom zaraďujeme algoritmus medzi heuristiky, keďže náhodne ovplyvňujeme vektor rýchlostí pohybu jednotlivých častíc.

Kvôli zavedeniu lineárnych obmedzení sme prezentovali parameter $\alpha_{j,max}^i$. Samotný ale nedokáže zaistiť zotrvanie častíc v oblasti prípustných riešení. Aby sme predišli únikom častíc z oblasti prípustných riešení, zavedieme takzvanú „*extreme barrier function*“, ktorou algoritmus upraví pôvodnú účelovú funkciu.

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{ak } z \in \Omega \text{ a zároveň } Az \leq b \\ +\infty & \text{inakšie} \end{cases} \quad (60)$$

4.3 POUŽITIE OPTIMALIZAČNÝCH ALGORITMOV

Venovať sa budeme dvom rôznym optimalizačným úlohám. Obe sa zhodujú v účelovej funkcii a pre obe platí, že hodnotou účelovej funkcie $f(x)$ označíme celkový čas prejazdu. Líšia sa v premennej x a v množine prípustných riešení. Prvou optimalizačnou úlohou bude nájsť taký koeficient klopnej tuhosti, aby sme minimalizovali celkový čas prejazdu. Pôjde o tzv. statickú optimalizáciu, keďže výsledkom bude konkrétna hodnota nemeniaca sa v čase. Druhou úlohou bude nájsť optimálnu charakteristiku činnosti aktívneho medzi-nápravového diferenciálu tak, aby sme opäť minimalizovali celkový čas prejazdu. Táto úloha je úlohou dynamickej optimalizácie, výsledkom budú dva grafy optimálnych koeficientov TFD , TRD v závislosti na čase alebo dráhe.

4.3.1 OPTIMÁLNA KLOPNÁ TUHOŠŤ ZAVESENIA AUTOMOBILU

Uvažujme nasledovnú optimalizačnú úlohu

$$\min_{\varphi \in \Omega} T(\varphi), \quad \text{kde } \Omega = \{\varphi \in \mathbb{R}: 0 \leq \varphi \leq 1\} \quad (61)$$

Minimalizujeme hodnotu účelovej funkcie, teda celkový čas prejazdu $T(\varphi)$ ktorý je závislý od premennej φ (koeficient prerozdelenia klopnej tuhosti). Oblasť prípustných riešení tejto úlohy je interval $\langle 0,1 \rangle$. Žiadne ďalšie obmedzenia nepožadujeme. Takto formulovanú úlohu môžeme riešiť pomocou oboch prezentovaných algoritmov (MCS, Particle Swarm). Primárnym cieľom ostáva zistiť optimálnu hodnotu φ , ale okrem toho budeme sledovať niekoľko ďalších cieľov. Zaujímať nás bude napr. rýchlosť nájdenia optima, ako blízko sa dokážu algoritmy dostať ku globálnemu minimu v prípade nastavenia maximálneho počtu volaní účelovej funkcie pre výpočet celkového času prejazdu, využitie procesorov pri výpočte a v poslednom rade porovnanie s reálnymi dátami.

4.3.2 OPTIMÁLNA CHARAKTERISTIKA ČINNOSTI AKTÍVNEHO DIFERENCIÁLU

Pri návrhu modelu automobilu sme definovali nápravový diferenciál prednej a zadnej nápravy a medzi-nápravový diferenciál, ktoré sú v silových rovniciach (8), (9) a (20), (21) reprezentované koeficientami $TFDI$, $TFDO$, $TRDI$ a $TRDO$. Predpokladajme, že oba nápravové diferenciály (predný aj zadný) sú otvorené, teda platia rovnosti:

$$TFDI = TFDO$$

$$TRDI = TRDO \quad (62)$$

$$TFDI + TFDO + TRDI + TRDO = 1$$

Definujeme koeficient TFD (traction front-drive), resp. TRD , ako výstupný podiel hnacej sily na prednej náprave medzi-nápravového diferenciálu, resp. na zadnej náprave. Hodnoty týchto koeficientov sú z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Krajné hodnoty intervalu interpretujeme ako model automobilu s predným pohonom $TFD = 1$ a model automobilu so zadným pohonom $TFD = 0$. Keďže celú hnaciu silu, ktorú medzi-nápravový diferenciál prideli jednotlivým nápravám, následne prerozdedia nápravové diferenciály medzi jednotlivé kolesá, môžeme uviesť tieto vzťahy:

$$TFD = TFDI + TFDO$$

$$TRD = TRDI + TRDO \quad (63)$$

$$TFD = 1 - TRD$$

Tu vzniká otázka: „Aká je správna, teda optimálna hodnota TFD a TRD pri minimalizácii celkového času prejazdu zadanou trajektóriou?“ Ak by sme túto úlohu riešili tak, ako to bolo v prípade klopnej tuhosti, výsledok by bol statický medzi-nápravový diferenciál s pevnou hodnotou pomeru rozdelenia hnacej sily počas celého prejazdu. Naším cieľom je ale optimalizovať aktívny diferenciál, preto k problému pristupujeme ako k hľadaniu optimálnej charakteristiky koeficientu podielu hnacej sily $TFD(t)$ závislom na čase, prípadne dráhe.

Pri optimalizácii klopnej tuhosti môžeme laicky povedať, že optimalizačné algoritmy MCS a Particle Swarm využívali, opakovane volali implementovanú funkciu algoritmu pre výpočet rýchlostného profilu. Pri optimalizácii aktívneho diferenciálu je to však naopak. Presnejšie povedané, museli sme zmeniť implementáciu algoritmu výpočtu rýchlostného profilu, konkrétne krok pre akceleráciu. Pôvodný princíp spočíval v hľadaní maximálnych možných rýchlostí, na ktoré môže automobil zrýchliť, vzhľadom na obmedzenia prednej nápravy (v_F), zadnej nápravy (v_R) a hnacieho ústrojenstva (v_E) v každom uzle trajektórie pri prejazde elementárnym intervalom. Následne sme vybrali minimum z týchto rýchlostí. Vzhľadom k tomu, že jedine silové vzťahy popisujú náprav sú závislé na koeficientoch TFD a TRD , môžeme proces hľadania rýchlosti v_E vylúčiť z optimalizácie. To znamená, že v každom uzle trajektórie pri akcelerácii na elementárnom intervale, najskôr nájdeme optimálne hodnoty koeficientov diferenciálu a k nim odpovedajúcu rýchlosť.

$$\begin{aligned} & \max_{TFD_{i+1} \in \Omega} \text{best_v}(TFD_{i+1}, \theta_{i+1}, \kappa_{i+1}, s_{i+1} - s_i, v_i) \\ & \text{s.t. } \Omega = \{TFD_{i+1} \in \mathbb{R}: 0 \leq TFD_{i+1} \leq 1\} \end{aligned} \quad (64)$$

Funkcia *best_v* na základe vstupných parametrov elementárneho intervalu (uhol stúpania θ_{i+1} , krivosť trajektórie v koncovom uzle κ_{i+1} , dĺžka trajektórie $s_{i+1} - s_i$, rýchlosť v prvom uzle v_i) nájde maximálne možné rýchlosti, na ktoré môžu zrýchliť predná a zadná náprava na danom elementárnom intervale a vráti $\min\{vF, vR\}$. Pomocou optimalizačného algoritmu Particle Swarm, ktorého implementácia síce minimalizuje zadaný problém, ale pomocou zmeny znamienka výstupnej hodnoty docielime žiadanú maximalizáciu, riešime úlohu (64), a obdržíme optimálne TFD_{i+1} a príslušnú rýchlosť *best_v*. Následne spočítame maximálnu možnú rýchlosť, na ktorú môže vozidlo akcelerovať vzhľadom na obmedzenie hnacím ústrojenstvom, a opäť vyberieme minimálnu hodnotu z týchto dvoch hodnôt. Výsledok označíme ako nami hľadanú rýchlosť profilu pri akcelerácii $v_{i+1} = \min\{vE, \text{best_v}\}$.

5 ZHRNUTIE VÝSLEDKOV

Podľa uvedených postupov a algoritmov implementujeme simuláciu prejazdu modelu automobilu zadanou trajektóriou. Použitím programovacieho prostredia Matlab sme schopný simulované dáta názorne prezentovať pomocou vykreslenia grafu rýchlostného profilu. Po dosadení parametrov experimentálneho automobilu, vďaka ktorému boli získané dáta trajektórie prejazdu Masarykovým okruhom, môžeme výsledný rýchlostný profil a celkový čas prejazdu simulácie porovnať s hodnotami nameranými týmto vozidlom. Okrem toho budeme skúmať výpočtový čas simulácie a využitie virtuálnych jadier procesora.

Implementovaný program pre výpočet rýchlostného profilu ďalej využijeme na optimalizovanie hodnoty koeficientu prerozdelenia klopnej tuhosti medzi prednú a zadnú nápravu. Aplikovaním dvoch derivative-free algoritmov (MCS a Particle Swarm) na hľadanie globálneho minima, vypočítame hľadaný optimálny koeficient a k nemu príslušný celkový čas prejazdu. Získané hodnoty porovnáme s parametrami a dátami experimentálneho vozidla. Tiež porovnáme použiteľnosť a úspešnosť optimalizačných algoritmov medzi sebou. Dôležitými porovnávacími faktormi budú výpočtový čas, presnosť výsledku, využitie procesora. Algoritmy podrobíme testovaniu pri obmedzenom počte volaní výpočtu rýchlostného profilu, pričom budeme sledovať vyššie spomínané faktory.

Rozšírením teoretického modelu automobilu o aktívny medzi-nápravový diferenciál a nájdením jeho optimálnej charakteristiky a príslušného celkového času prejazdu, poukážeme na zásadne priaznivý vplyv použitia aktívneho diferenciálu pri konštruovaní pretekárskeho vozidla, prípadne akéhokoľvek iného vozidla, kde hlavným jazdným režimom je režim s cieľom minimalizovať čas prejazdu.

5.1 VÝSLEDKY VÝPOČTU RÝCHLOSTNÉHO PROFILU

Našou snahou je nasimulovať prejazd experimentálneho vozidla. To dosiahneme dosadením konkrétnych hodnôt parametrov do nášho teoretického modelu. Ten sa opiera o silové rovnice prednej, zadnej nápravy a hnacieho ústrojenstva. Všeobecné parametre pre všetky vzťahy sú uvedené v Tab. 2.

Tab. 2 Všeobecné parametre experimentálneho vozidla

Všeobecné parametre	
$v_{MAX} = 69,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	Maximálna rýchlosť vozidla
$M = 1016 \text{ kg}$	Celková hmotnosť vozidla
$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	Gravitačné zrýchlenie
$a = 46,9271 \text{ N}$	1. konštanta valivého odporu
$b = 22,4972 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	2. konštanta valivého odporu
$c_d = 0,0572 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$	Konštanta aerodynamického odporu

Keďže pre testy bolo použité pretekárske auto s aerodynamickou karosériou a prvkami poskytujúcimi prítláčnú silu, v modeli použijeme nenulový koeficient aerodynamického vztlaku. Pri meraniach tiež boli použité rozdielne pneumatiky medzi prednou a zadnou nápravou, teoretický model sme ale zjednodušili na jeden typ pneumatík pre všetky kolesá.

Model ďalej obsahuje pohon zadných kolies s otvoreným diferenciálom a brzdy s väčším podielom brzdnnej sily na predných kolesách. Zohľadňujeme tiež konštrukčné rozdiely medzi prednou a zadnou nápravou nerovnosťou parametrov: výška osi klopenia nad vozovkou, rozchod kolies, klopna tuhosť odpruženia, koeficient podielu prítlaču, hmotnosť pôsobiaca na nápravu, vzdialenosť ťažiska od nápravy. V Tab. 3 sú najskôr uvedené spoločné parametre pre obe nápravy a následne sú rozdelené podľa jej polohy.

Tab. 3 Parametre náprav experimentálneho vozidla

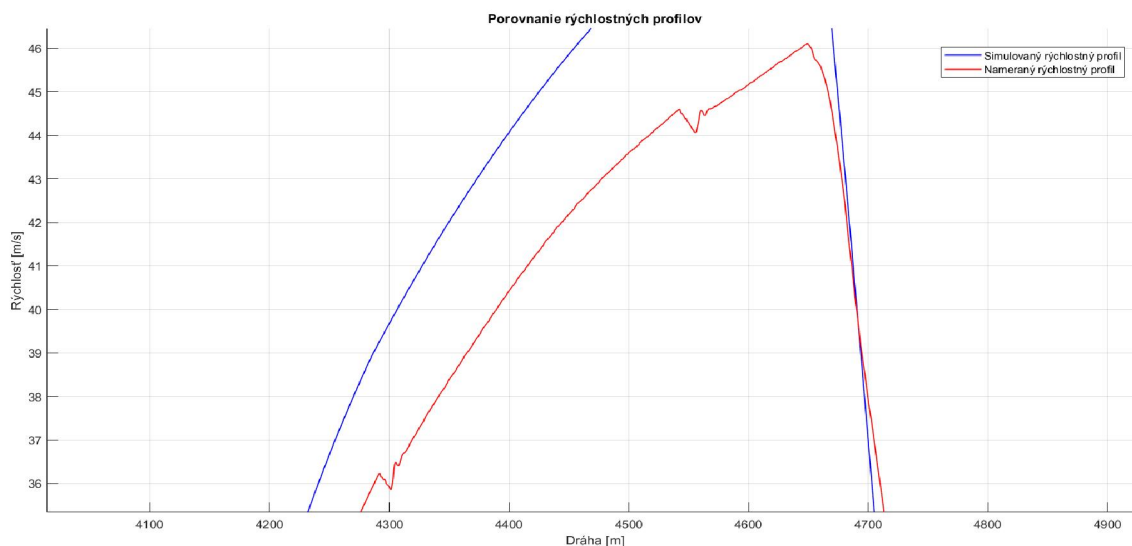
Spoločné parametre oboch náprav	
$c_l = -0,031 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$	Konštanta aerodynamického vztlaku
$\mu_{x0} = 1,9590$	Pozdĺžny súčiniteľ trenia – konštantná zložka
$\mu_{y0} = 1,7089$	Priečny súčiniteľ trenia – konštantná zložka
$k_x = 9,9226 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1}$	Pozdĺžny súčiniteľ trenia – lineárna zložka
$k_y = 6,9127 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1}$	Priečny súčiniteľ trenia – lineárna zložka
$L = 2,2969 \text{ m}$	Rázvor
$h = 0,35 \text{ m}$	Výška ťažiska nad vozovkou
$h_a = 0 \text{ m}$	Výška pôsobenia aerodyn. odporu
$\phi_k = 1,5769 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$	Konštanta prevádzajúca a_y na uhol klopenia
Parametre prednej nápravy	
$TFDI = TFDO = 0$	Koeficienty podielu hnacej sily
$BFDI = BFDO = 0,38$	Koeficienty podielu brzdnnej sily
$M_F = 413 \text{ kg}$	Pôsobiaca hmotnosť
$c = 1,3632 \text{ m}$	Vzdialenosť ťažiska
$C_F = 0,2761$	Koeficient podielu prítlaču
$h_{rF} = 0,334 \text{ m}$	Výška osi klopenia nad vozovkou
$t_F = 1,489 \text{ m}$	Rozchod kolies
$K_{\phi F} = 1,1008 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	Klopna tuhosť odpruženia
Parametre zadnej nápravy	
$TRDI = TRDO = 0,5$	Koeficienty podielu hnacej sily
$BRDI = BRDO = 0,12$	Koeficienty podielu brzdnnej sily
$M_R = 603 \text{ kg}$	Pôsobiaca hmotnosť
$b = 0,9337 \text{ m}$	Vzdialenosť ťažiska
$C_R = 0,7239$	Koeficient podielu prítlaču
$h_{rR} = 0,299 \text{ m}$	Výška osi klopenia nad vozovkou
$t_R = 1,655 \text{ m}$	Rozchod kolies
$K_{\phi R} = 1,3255 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	Klopna tuhosť odpruženia

Najdôležitejším parametrom hnacieho ústrojenstva je charakteristika krútiaceho momentu. Na Obr. 11 vidíme charakteristiku experimentálneho automobilu, ktorú použijeme pri simulácii. Doplňme zvyšné parametre hnacieho ústrojenstva (Tab. 4).

Tab. 4 Parametre hnacieho ústrojenstva experimentálneho automobilu

Parametre hnacieho ústrojenstva	
$r = 0,313 \text{ m}$	Polomer kola
$\vartheta = 1,1$	Súčiniteľ rotačných hmôt
$v_{shift} = \{18,06; 27,78; 38,89; 50,00; 61,11\} \text{ ms}^{-1}$	Radiace rýchlosti
$N_{tf} = \{15,43; 10,03; 7,16; 5,57; 4,56; 3,86\}$	Celkový prevodový pomer
$\eta_{tf} = \{1; 1; 1; 1; 1; 1\}$	Účinnosť prevodovky a rozvodovky

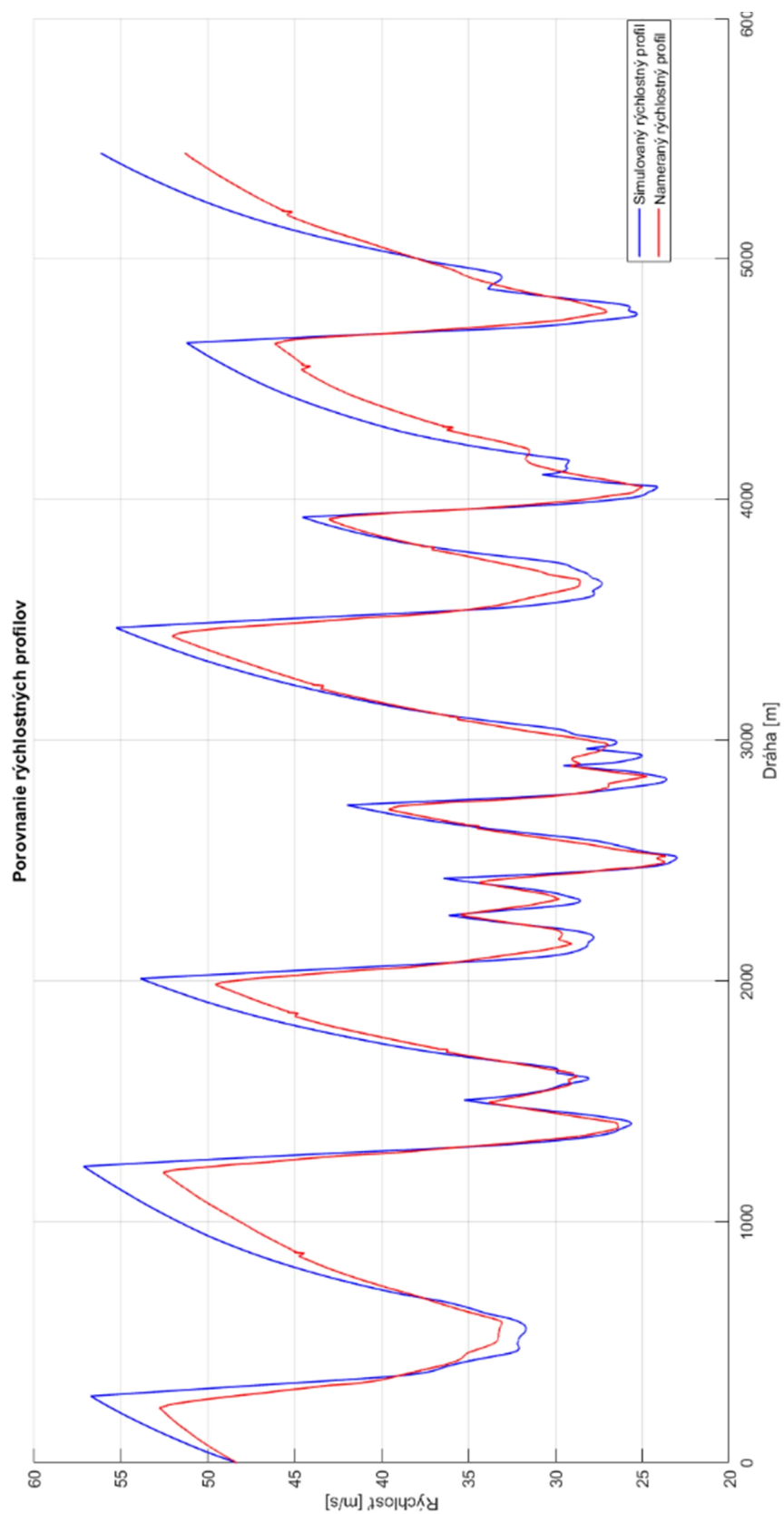
Po dosadení týchto parametrov do teoretického modelu a spustením nášho programu pre výpočet rýchlostného profilu, nasimulujeme prejazd experimentálneho vozidla. Na Obr. 19 máme výstup v podobe grafu rýchlosti simulovaného prejazdu v závislosti od dráhy, zobrazený modrou krivkou, a graf nameraných rýchlostí pri testovaní, zobrazený červenou krivkou. Celkový čas simulovaného prejazdu je **T = 146,74 s** a celkový nameraný čas prejazdu pri testovaní je **T = 147,30 s**. Simulácia bola počítaná na notebook-u MSI GL63 8RD s procesorom Intel i7-8750H a pri využití všetkých dvanástich virtuálnych jadier trval výpočet približne 30 sekúnd.



Obr. 18 Detail rýchlostných profilov - radenie

Rozdiely medzi vykreslenými rýchlostnými profilmi sú prevažne pri vyšších rýchlostiach, kedy sme obmedzovaný motorom. Príčinou môže byť nesprávna charakteristika krútiaceho momentu, alebo zlé hodnoty dosadených parametrov jazdných odporov. Ďalej vidíme na nameranom rýchlostnom profile vplyv radenia ako jemné nerovnosti krivky (Obr. 18). Keďže sme z teoretického modelu vylúčili čas potrebný na preradenie, simulovaný profil tieto nerovnosti nemá.

Obr. 19 Porovnanie rýchlostných profilov



5.2 VÝSLEDKY OPTIMÁLNEJ KLOPNEJ TUHOSTI

Prvou úlohou statickej optimalizácie je nájsť optimálnu hodnotu koeficientu rozdelenia klopnej tuhosti medzi prednú a zadnú nápravu. Naformulovaný problém (61) najskôr riešime pomocou algoritmu MCS. Optimálna hodnota, ku ktorej algoritmus dokonvergoval je $\varphi = 1$ a odpovedajúci celkový čas prejazdu trajektóriou je $T = 146,3$ s. Rozdiel oproti experimentálnemu automobilu, kde parameter rozdelenia klopnej tuhosti má hodnotu $\varphi = 0,4537$, je značný. Z teoretického hľadiska sa zdá byť nájdená hodnota správna. V tomto prípade je model na väčšine dráhy obmedzovaný zadnou nápravou v kombinácii s hnacím ústrojenstvom (to nie je závislé na klopnej tuhosti), a to aj napriek premiestneniu celej klopnej tuhosti na prednú nápravu. V praxi by to ale znamenalo, že karoséria nad zadnou nápravou by sa pri prejazde zákrutou nakláňala minimálne, zatiaľ čo náklon karosérie nad prednou nápravou by bol maximálny možný. Takéto správanie karosérie by spôsobilo nedotáčavosť vozidla pri prejazde zákrutou. Možným riešením je kontrola správnosti dosadených parametrov experimentálneho automobilu alebo doplnenie silových rovníc a tým presnejšia formulácia teoretického modelu vozidla. Hľadanie optima je v našom prípade výpočtovo veľmi náročné, preto nemôžeme pri výpočte použiť štandardné nastavenia algoritmu MCS. Keďže vyhodnotenie volanej funkcie pre výpočet rýchlostného profilu, a teda celkového času prejazdu danou trajektóriou v priemere trvá 30 sekúnd, pri štandardnom nastavení maximálneho počtu ($50 \cdot n^2$, kde n je dimenzia oblasti prípustných riešení) by hľadanie optima mohlo trvať až 1500 sekúnd. S maximálnym počtom desiatich volaní výpočtu času prejazdu, algoritmus MCS dokonvergoval k uvedenému výsledku za 723 sekúnd. Dokonca to zvládol aj pri maxime piatich volaní a s výpočtovým časom 346 sekúnd.

Na riešenie toho istého problému (61) ďalej použijeme algoritmus Particle Swarm. Aby podmienky boli rovnaké pre oba algoritmy, zvolíme veľkosť populácie rovnú dvom časticiam a určíme maximálne päť iterácií pohybu častíc. Pri týchto nastaveniach bude funkcia výpočtu rýchlostného profilu volaná maximálne desaťkrát. Hodnota optimálneho koeficientu rozdelenia klopnej tuhosti nájdená algoritmom Particle Swarm je tiež $\varphi = 1$ a odpovedajúci celkový čas prejazdu je $T = 146,3$ s. Pri daných nastaveniach je hodnota výpočtového času 851 sekúnd. Po znížení počtu maximu iterácií pohybu častíc na tri, algoritmus opäť dokonvergoval k hodnote $\varphi = 1$ pričom mu to trvalo 576 sekúnd.

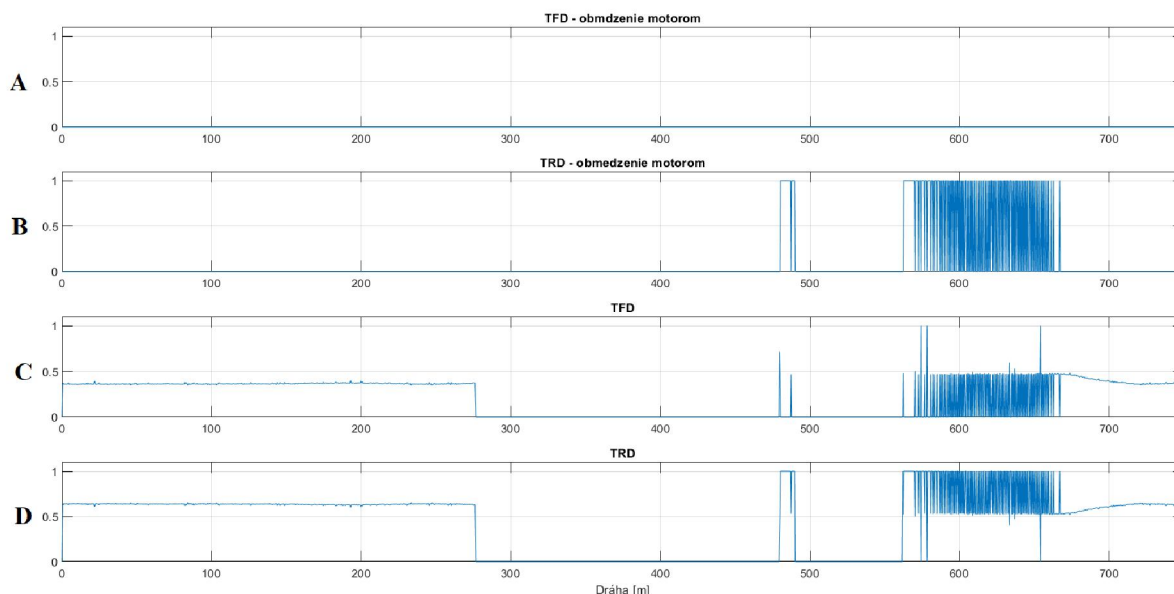
5.3 VÝSLEDKY OPTIMÁLNEHO AKTÍVNEHO DIFERENCIÁLU

Poslednou úlohou bolo nájsť optimálnu charakteristiku aktívneho medzi-nápravového diferenciálu. Ako sme uviedli v kapitole 4.3.2, optimalizácia prebieha jedine počas akcelerácie, ktorá bola v algoritme výpočtu rýchlostného profilu pozmenená. Práve preto pri výpočte rýchlosti, na ktorú môže vozidlo zrýchliť, nastane jedna zo situácií:

- 1) Nájďme optimálnu hodnotu TFD , TRD a k nim príslušnú rýchlosť, ktorá je väčšia ako rýchlosť hnacieho ústrojenstva v_E
- 2) Nájďme optimálnu hodnotu TFD , TRD a k nim príslušnú rýchlosť, ktorá je menšia ako rýchlosť hnacieho ústrojenstva v_E

Aby sme tieto situácie dokázali znázorniť, pomôžeme si dvomi grafmi pre každý z koeficientov. V grafoch s príponou „*obmedzenie motorom*“, ak majú oba koeficienty hodnotu rovnú nule, znamená to, že model buď brzdí, alebo nastala situácia 1). Naopak v grafoch bez prípony, ak majú oba koeficienty hodnotu rovnú nule, model jedine brzdí

(vykreslené sú všetky optimálne hodnoty koeficientov, bez ohľadu na to, ktorá situácia nastala).



Obr. 20 Grafy aktívneho diferenciálu

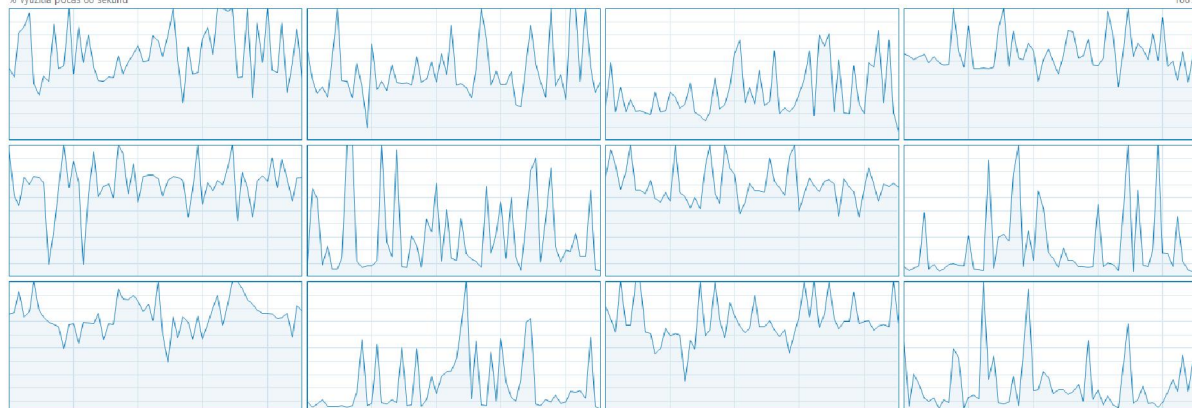
Na Obr. 20 vidíme optimálnu charakteristiku diferenciálu na prvých 750 metroch trajektórie. Z počiatku model akcelerauje na dráhe približne 275 metrov, avšak z grafu A a B vyplýva, že celý čas je aktívne obmedzenie hnacieho ústrojenstva. Následne brzdí, až kým sa nedostane do vzdialenosti cca 475 metrov od počiatku. Tu prechádza bodom s lokálne najväčšou krivosťou a podľa úlohy optimálneho riadenia začína opäť zrýchľovať. Podľa A, B je pri tejto krátkej akcelerácii aktívne práve obmedzenie náprav. Optimálna hodnota *TRD* sa rovná jednej, čiže celú pozdĺžnu silu prenesie na vozovku zadná náprava. Vskutku, pri výjazde automobilu zo zákruty a akcelerovaní je odľahčovaná predná náprava (kvôli pôsobeniu zrýchlenia). Navyše pri prejazde zákrutou, kde pôsobí veľká odstredivá sila je vnútorné koleso z dôvodu klopenia karosérie na okraji svojho limitu. Tým sa rapídne zníži schopnosť prednej nápravy preniesť pozdĺžnu silu. Po brzdení na méte 660 metrov model opäť zrýchľuje, pričom sa striedajú aktívne obmedzenia medzi nápravami a hnacím ústrojenstvom. Postupne však prejde k jedinému aktívnemu obmedzeniu hnacím ústrojenstvom. V častiach trajektórie, kde za ostrou zákrutou nasleduje okamžité rovinka je optimálna hodnota koeficientov diferenciálu približne rovná hodnotám na prvých 250 metroch trajektórie grafov C a D.

Vďaka aktívnemu medzi-nápravovému diferenciálu je výsledný celkový čas prejazdu danou trajektóriou $T = 146,382$ s. Oproti simulovanému prejazdu modelu so zadným pohonom sme celkový čas vylepšili o $0,358$ s. Relatívne často sme pri výpočte boli obmedzovaný hnacím ústrojenstvom. Ak by sme dosadili parametre výkonnejšieho automobilu, zvýšili by sme tým podiel trajektórie, na ktorej by sme boli obmedzovaný nápravami, a viac by sa uplatnil aktívny diferenciál. Napriek tomu, zlepšenie ktoré sme dosiahli je v motošporte veľmi cenné.

Processor

Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @ 2.20GHz

% využitia počas 60 sekúnd

Využitie 49%
Rýchlosť 3,90 GHz

Obr. 21 Využitie virtuálnych jadier pri výpočte aktívneho diferenciálu

Z hľadiska rýchlosti výpočtu to už také dobré nie je. Pri využití všetkých jadier trval výpočet **1285 s**. Výpočtový čas sme sa snažili ovplyvniť aj prostredníctvom nastavení optimalizačnej metódy Particle Swarm. Hľadanie prebiehalo pomocou troch častíc a povolili sme maximálne desať iterácií pohybu častíc. To otvára otázku presnosti dosiahnutých výsledkov. Výpočet sme znovu spustili, ale s populáciou štyroch častíc a maximálnym počtom desiatich iterácií. Celkový čas prejazdu trajektóriou sa zmenil v rádoch desiatich sekúnd, avšak výpočtový čas bol v tomto prípade **1654 s**. Možným riešením presnosti nájdenia globálneho minima by bolo prispôbenie metódy výpočtovému procesoru. Z Obr. 21 vidíme, že jadrá nie sú využívané naplno, a teda paralelizácia nie je optimálna. Vzhľadom k počtu jadier by bolo zaujímavé použiť populáciu o veľkosti dvanástich častíc, pričom každej častici by sme priradili vlastné virtuálne jadro. Tým by sme zrejme dosiahli presnejšie výsledky, otázka je ako by to ovplyvnilo celkový čas výpočtu a či by zlepšenie výsledku bolo natoľko významné, že by sme akceptovali dlhší výpočtový čas.

ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo priblížiť dynamiku automobilu a zostaviť zjednodušený teoretický model. Na základe teórie optimálneho riadenia implementovať optimálny algoritmus pre výpočet rýchlostného profilu jazdného režimu s cieľom minimalizovať celkový čas prejazdu zadanou trajektóriou. Následne pomocou tohto programu optimalizovať vybrané parametre modelu automobilu. Práca je preto rozdelená do troch hlavných tematických celkov.

V prvej časti sme priblížili problematiku vplyvu pneumatík na dynamiku vozidla, aby sme následne mohli definovať dvojnápravový model automobilu s otvorenými nápravovými diferenciálmi a voliteľným pomerom pohonu predných alebo zadných kolies. Rozlišujeme prednú a zadnú nápravu, kde pri prejazde zákrutami sme zohľadnili pôsobenie odstredivých síl na náklon karosérie automobilu a odľahčovanie vnútorných kolies oboch náprav. Ďalej sme zahrnuli vplyv jazdných odporov a v neposlednom rade hnacie ústrojenstvo. To hlavne vystihuje charakteristika krútiaceho momentu.

Druhým cieľom bolo zostaviť program pre výpočet rýchlostného profilu. Našou snahou bolo tiež optimalizovanie kódu implementovaného vo vývojovom prostredí MATLAB z hľadiska rýchlosti výpočtu hľadaného profilu. Postupnou výstavbou procesov a dielčích funkcií sme plynule prešli k popisu princípu fungovania celého algoritmu. Okrem toho sme vysvetlili postupy spracovania vstupných dát a prezentovali neoptimálne časti kódu s vysokým výpočtovým časom, ktoré sa nám podarilo úpravou eliminovať.

Na záver sme priblížili tému nelineárnej optimalizácii a jej metódy venujúce sa hľadaniu optima úloh s neznámou deriváciou účelovej funkcie. Všeobecne povedané, tieto metódy vôbec nezaujímajú tvar účelovej funkcie, ale pracujú jedine s jej funkčnými hodnotami. Popísali sme dva konkrétne vybrané derivative-free algoritmy, ktoré sa líšia princípom hľadania globálneho optima. Tie sme následne použili pri statickej optimalizácii koeficientu prerozdelenia klopnej tuhosti a dynamickej optimalizácii aktívneho medzi-nápravového diferenciálu, pričom sme tiež analyzovali použiteľnosť týchto algoritmov vzhľadom na výpočtový čas, presnosť a možnosť ďalšieho rozvoju.

Našou snahou bolo tiež formulovať teoretický model aj algoritmus výpočtu rýchlostného profilu tak, aby bolo veľmi jednoduché na prácu naviazať, či už rozšírením vzťahov popisujúcich vozidlo, alebo optimalizáciou iných vybraných parametrov. Najväčšie možnosti ďalšieho rozvoju vidím práve v presnejšom popise dynamiky vozidla. Zaujímavým by tiež mohol byť výskum znižovania výpočtového času optimalizácii vybraných parametrov, alebo priamo algoritmu hľadania rýchlostného profilu. Síce paralelizácia výpočtu na virtuálnych jadrách poskytuje značné zrýchlenie, väčších rozdielov vo výpočtových časoch by sme boli schopný dosiahnuť zapojením grafickej karty.

POUŽITÉ INFORMAČNÉ ZDROJE

- [1] GILLESPIE, T.D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1992. ISBN 1-56091-199-9.
- [2] VELENIS, E. a P. TSOTRAS. Minimum-Time Travel for a Vehicle with Acceleration Limits: Theoretical Analysis and Receding-Horizon Implementation. *Journal of Optimization Theory and Applications* [online]. 2008, **138**(2), 275-296 [cit. 2019-04-12]. DOI: 10.1007/s10957-008-9381-7. ISSN 0022-3239. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10957-008-9381-7>
- [3] ČERMÁK, Libor. Numerické metody II: diferenciální rovnice. Vyd. 2., upr. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010, 135 s. : il. ; 30 cm. ISBN 978-80-214-4110-1.
- [4] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. Numerické metody. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 110 s. : il. ; 30 cm. ISBN 978-80-214-3752-4.
- [5] Efficient replacement for ppval. Stack Overflow [online]. New York: Stack Exchange, c2019 [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: <https://stackoverflow.com/questions/18642585/efficient-replacement-for-ppval>
- [6] SPENDLEY, W., G. R. HEXT a F. R. HIMSWORTH. Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation. *Technometrics* [online]. 1962, **4**(4), 441-461 [cit. 2019-04-17]. DOI: 10.1080/00401706.1962.10490033. ISSN 0040-1706. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1962.10490033>
- [7] NELDER, John Ashworth a Roger MEAD. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*. 1965, (7), 308-313.
- [8] RIOS, Luis Miguel a Nikolaos V. SAHINIDIS. Derivative-free optimization: a review of algorithms and comparison of software implementations. *Journal of Global Optimization* [online]. 2013, **56**(3), 1247-1293 [cit. 2019-04-17]. DOI: 10.1007/s10898-012-9951-y. ISSN 0925-5001. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10898-012-9951-y>
- [9] HUYER, Waltraud a Arnold NEUMAIER. Global Optimization by Multilevel Coordinate Search. *Journal of Global Optimization* [online]. 1998, **14**(4), 331-355 [cit. 2019-04-17]. DOI: 10.1023/A:1008382309369. ISSN 09255001. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1023/A:1008382309369>
- [10] JONES, D. R., C. D. PERTTUNEN a B. E. STUCKMAN. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant. *Journal of Optimization Theory and Applications* [online]. 1993, **79**(1), 157-181 [cit. 2019-04-21]. DOI: 10.1007/BF00941892. ISSN 0022-3239. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF00941892>
- [11] VAZ, A. I.F. a L. N. VICENTE. PSwarm: a hybrid solver for linearly constrained global derivative-free optimization. *Optimization Methods and Software* [online]. 2009, **24**(4-5), 669-685 [cit. 2019-05-06]. DOI: 10.1080/10556780902909948. ISSN 1055-6788. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10556780902909948>

- [12] DELINGETTE, H., M. HEBERT a K. IKEUCHI. Trajectory generation with curvature constraint based on energy minimization. In: *Proc 91 IEEE RSJ Int Workshop Intell Robots Syst IROS 91* [online]. Publ by IEEE, 1992, s. 206-211 [cit. 2019-05-10]. ISBN 078030067X.
- [13] SCHEUER, A., C. LAUGIER a K. IKEUCHI. Planning sub-optimal and continuous-curvature paths for car-like robots. In: *Proceedings. 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Innovations in Theory, Practice and Applications* (Cat. No.98CH36190) [online]. IEEE, 1998, s. 25-31. DOI: 10.1109/IROS.1998.724591. ISBN 0-7803-4465-0. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/724591/>
- [14] LAMIRAUX, F. a J.-P. LAMMOND. Smooth motion planning for car-like vehicles. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* [online]. **17**(4), 498-501 [cit. 2019-05-10]. DOI: 10.1109/70.954762. ISSN 1042296X. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/954762/>
- [15] BRAGHIN, F., F. CHELI, S. MELZI a E. SABBIONI. Race driver model. *Computers & Structures* [online]. 2008, **86**(13-14), 1503-1516 [cit. 2019-05-10]. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.04.028. ISSN 00457949. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045794908000163>
- [16] GADOLA, Marco, David VETTURI, Danilo CAMBIAGHI a Luca MANZO. *A Tool for Lap Time Simulation* [online]. In: . 1996-12-01, s. - [cit. 2019-05-10]. DOI: 10.4271/962529. Dostupné z: <https://www.sae.org/content/962529/>
- [17] BOBROW, J.E., S. DUBOWSKY a J.S. GIBSON. Time-Optimal Control of Robotic Manipulators Along Specified Paths. *The International Journal of Robotics Research* [online]. 2016, **4**(3), 3-17 [cit. 2019-05-10]. DOI: 10.1177/027836498500400301. ISSN 0278-3649. Dostupné z: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/027836498500400301>
- [18] KANG SHIN a N. MCKAY. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* [online]. 1985, **30**(6), 531-541 [cit. 2019-05-10]. DOI: 10.1109/TAC.1985.1104009. ISSN 0018-9286. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1104009/>
- [19] VELENIS, E. a P. TSIOTRAS. Optimal Velocity Profile Generation for Given Acceleration Limits; The Half-Car Model Case. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2005. ISIE 2005* [online]. IEEE, 2005, 2005, s. 361-366 [cit. 2019-05-10]. DOI: 10.1109/ISIE.2005.1528937. ISBN 0-7803-8738-4. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1528937/>

ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV

μ	[–]	Výsledný súčiniteľ trenia
μ_0	[–]	Konštantný člen súčiniteľa trenia
k	$[N^{-1}]$	Lineárny koeficient súčiniteľa trenia
F_x	$[N]$	Pozdĺžna sila
F_y	$[N]$	Odstredivá sila
F_z	$[N]$	Normálová sila
$TFDI$	[–]	Koeficient akcelerácie prednej vnútornej pneumatiky
$TFDO$	[–]	Koeficient akcelerácie prednej vonkajšej pneumatiky
$TRDI$	[–]	Koeficient akcelerácie zadnej vnútornej pneumatiky
$TRDO$	[–]	Koeficient akcelerácie zadnej vonkajšej pneumatiky
M	$[kg]$	Celková hmotnosť vozidla
M_F	$[kg]$	Hmotnosť na prednej náprave
ψ	[–]	Hmotnostný koeficient
a_x	$[m \cdot s^{-2}]$	Pozdĺžne zrýchlenie
c_d	$[kg \cdot m^{-1}]$	Koeficient aerodynamického odporu
v	$[m \cdot s^{-1}]$	Rýchlosť
g	$[m \cdot s^{-2}]$	Gravitačné zrýchlenie
θ	$[rad]$	Uhol stúpania
c	$[m]$	Vzdialenosť ťažiska od zadnej nápravy
L	$[m]$	Rázvor
h	$[m]$	Výška ťažiska nad vozovkou
h_a	$[m]$	Výška pôsobenia aerodyn. odporu
c_l	$[kg \cdot m^{-1}]$	Koeficient aerodynamického vztlaku
C_F	[–]	Koeficient podielu prítlaku prednej nápravy
κ	$[m^{-1}]$	Krivosť
h_{rF}	$[m]$	Výška osi klopenia nad vozovkou prednej nápravy
t_F	$[m]$	Rozchod kolies prednej nápravy
$K_{\phi F}$	$[kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}]$	Klopná tuhosť odpruženia prednej nápravy
ϕ_k	$[m^{-1} s^2]$	Konštanta prevádzajúca a_y na uhol klopenia
φ	[–]	Koeficient prerozdelenia klopnéj tuhosti
K_ϕ	$[kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}]$	Celková klopná tuhosť odpruženia
$K_{\phi R}$	$[kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}]$	Klopná tuhosť odpruženia zadnej nápravy

M_R	[kg]	Hmotnosť na zadnej náprave
C_R	[-]	Koeficient podielu prítlaču zadnej nápravy
h_{rR}	[m]	Výška osi klopenia nad vozovkou zadnej nápravy
t_R	[m]	Rozchod kolies zadnej nápravy
a	[N]	Konštantný koeficient valivého odporu
b	[kg.s ⁻¹]	Lineárny koeficient valivého odporu
n_e	[ot/s]	Otáčky motoru
r	[m]	Polomer kola
ϑ	[-]	Súčiniteľ rotačných hmôt
v_{shift}	[m.s ⁻¹]	Radiace rýchlosti
N_{tf}	[-]	Celkový prevodový pomer
η_{tf}	[-]	Účinnosť prevodovky a rozvodovky
T_e	[N.m]	Krútiaci moment
M_r	[kg]	Ekvivalentná hmota rotačných súčastí
z_1	[m]	Dráha v úlohe optimálneho riadenia
z_2	[m.s ⁻¹]	Rýchlosť v úlohe optimálneho riadenia
u	[-]	Regulácia
v_{max}	[m.s ⁻¹]	Maximálna rýchlosť
v_{krit}	[m.s ⁻¹]	Kritická rýchlosť
s	[m]	Dráha
t	[s]	Čas
$BFDI$	[-]	Koeficient brzdenia prednej vnútornej pneumatiky
$BFDO$	[-]	Koeficient brzdenia prednej vonkajšej pneumatiky
$BRDI$	[-]	Koeficient brzdenia zadnej vnútornej pneumatiky
$BRDO$	[-]	Koeficient brzdenia zadnej vonkajšej pneumatiky
X	[m]	X-ová súradnica trajektórie
Y	[m]	Y-ová súradnica trajektórie
Z	[m]	Z-ová súradnica trajektórie
Δt	[s]	Čas prejazdu elementárnym intervalom
v_F	[m.s ⁻¹]	Maximálna možná rýchlosť akcelerácie/brzdenia prednej nápravy
v_R	[m.s ⁻¹]	Maximálna možná rýchlosť akcelerácie/brzdenia zadnej nápravy
v_E	[m.s ⁻¹]	Maximálna možná rýchlosť akcelerácie hnacieho ústrojenstva
T	[s]	Celkový čas prejazdu

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obr. 1 Pozdĺžny sklz [1]	11
Obr. 2 Závislosť súčiniteľa trenia [1]	12
Obr. 3 Rozloženie pôsobiacich síl na automobil [1]	15
Obr. 4 Rozloženie síl pôsobiacich na nápravu [1]	16
Obr. 5 Výkonnostné charakteristiky benzínového a dieslového motora [1]	20
Obr. 6 Hnacia sila [1]	21
Obr. 7 Pôdorys Masarykovho okruhu	23
Obr. 8 Krivosť po úprave pohyblivým priemerom a absolútnou hodnotou	24
Obr. 9 Krivosť po vyfiltrovaní rovných úsekov	24
Obr. 10 Kritické rýchlosti pre Masarykov okruh	26
Obr. 11 Charakteristika krútiaceho momentu experimentálneho automobilu	29
Obr. 12 Hnacia charakteristika experimentálneho automobilu	30
Obr. 13 Analýza výpočetného času hľadania optimálneho rýchlostného profilu	31
Obr. 14 Porovnanie výpočetných časov pred úpravou kódu a po úprave	32
Obr. 15 FlowChart hlavného algoritmu	36
Obr. 16 Úspešnosť riešičov vzhľadom k počtu premenných [8]	38
Obr. 17 Výsledok MCS pre "six-hump camel function" [9]	40
Obr. 18 Detail rýchlostných profilov - radenie	46
Obr. 19 Porovnanie rýchlostných profilov	47
Obr. 20 Grafy aktívneho diferenciálu	49
Obr. 21 Využitie virtuálnych jadier pri výpočte aktívneho diferenciálu	50

ZOZNAM TABULIEK

Tab. 1 Implementácie derivative-free algoritmov [8]	37
Tab. 2 Všeobecné parametre experimentálneho vozidla	44
Tab. 3 Parametre náprav experimentálneho vozidla	45
Tab. 4 Parametre hnacieho ústrojenstva experimentálneho automobilu	46

PRÍLOHY

Všetky prílohy sú na priloženom CD. To obsahuje tri zložky:

- I. Optimalizácia klopnej tuhosti – zložka obsahuje dva spúšťacie súbory, dve zložky implementovaných algoritmov a dátový súbor.
 - a. FindOptimalSuspCoef_MCS.m – spustí optimalizáciu koeficientu prerozdelenia klopnej tuhosti pomocou algoritmu MCS.
 - b. FindOptimalSuspCoef_PSwarm.m – spustí optimalizáciu klopnej tuhosti pomocou algoritmu Particle Swarm.
 - c. data.mat – zdrojové dáta trajektórie a nameraných hodnôt.
 - d. zložka mcs – obsahuje implementáciu algoritmu MCS.
 - e. zložka simulation – obsahuje implementáciu výpočtu rýchlostného profilu.
- II. Optimalizácia medzi-nápravového diferenciálu – zložka obsahuje spúšťací súbor optimalizácie, potrebné funkcie a zložku PSwarmM_v2_1.
 - a. simulation.m – spustí optimalizáciu aktívneho diferenciálu.
 - b. zložka PSwarmM_v2_1 – obsahuje implementáciu algoritmu Particle Swarm a optimalizované funkcie: accelFunction, bisection, constantsOpt, estimate_minimal_speed_accel_front, estimate_minimal_speed_accel_rear, process_accel_vF, process_accel_vR.
- III. Výpočet rýchlostného profilu – obsahuje spúšťací súbor simulation.m a zvyšné potrebné funkcie pre výpočet rýchlostného profilu a porovnanie s nameranými dátami.