



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO  
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

## MATEMATICKÉ MODELY PNEUMATIK

TYRE MATHEMATICAL MODELS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

*BACHELOR'S THESIS*

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

PAVEL RUBÍČEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR HEJTMÁNEK

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automobilního a dopravního inženýrství

Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Pavel Rubíček

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301r016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Matematické modely pneumatik**

V anglickém jazyce:

### **Tyre Mathematical Models**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sestavení rešeršního přehledu matematických modelů simulujících vozidlovou pneumatiku s ohledem na zkoumání jízdní dynamiky vozidla. Vytvoření přehledu funkčních charakteristik jednotlivých parametrů pneumatiky.

Cíle bakalářské práce:

1. Popis konstrukce pneumatiky
2. Vysvětlení základních charakteristik pneumatiky
3. Přehled matematických modelů pro simulaci chování
4. Možnosti měření charakteristik pneumatiky

Seznam odborné literatury:

- [1] PACEJKA, H. B.: Tyre Models For Vehicle Dynamics Analysis, ISBN 9026513321, 1993
- [2] VLK, F. Podvozky motorových vozidel. ISBN 80-239-6464-X, Nakladatelství VLK, Brno 2006.
- [3] DIXON, J.C. Tires, suspension and handling. ISBN 1-56091-831-4, SAE International, Warrendale 1996.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Petr Hejtmánek

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 6.11.2012

L.S.

---

prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty



## ABSTRAKT

Dnes je pneumatika nedílnou součástí vozidel. Při jejím vývoji se užívá různých metod. Tato práce se některými z nich zabývá. Při jejím výzkumu je třeba znát její vlastnosti a konstrukční řešení. Základní konstrukce pneumatiky je popsána v první části. Tyto poznatky se poté hodí k dalším kapitolám. Ve druhé části jsou ukázky několika modelů pneumatiky ve formě matematických rovnic. Tyto rovnice slouží k určení silových a momentových zatížení, která působí na pneumatiku. Výsledné zatížení může být pomocné při návrhu nových typů pneumatik. V poslední části práce je popsáno, jakým způsobem lze využít matematické modely k výpočtu a také jsou zde uvedeny jiné metody, jak jinak lze získat informace o zatížení pneumatiky. Jsou zde uvedeny organizace, které se simulací či testy zabývají.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Pneumatika, síla, moment, vozidlo, vozovka, simulace

## ABSTRACT

Today the tire is an integral part of the vehicle. During its development is used in various methods. This publication deals with some of them. In her research is necessary to know its features and design solutions. Basic tire structure is described in the first part. These findings are then fit to the other chapters. In the second part there are examples of several tire models in the form of mathematical equations. These equations are used to determine the force and moment loads acting on the tire. The resulting load may aid in the design of new types of tires. The last part describes how to use mathematical models to calculate and here are other methods how else can it gets information about the load on the tire. There is a list of organizations that deal with simulations and tests.

## KEYWORDS

Tyre (tire), force, torque, vehicle, roadway, simulation



## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

RUBÍČEK, P. *Matematické modely pneumatik*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 43 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Hejtmánek.



## ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Ing. Petra Hejtmánka a s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 24. května 2013

.....

Pavel Rubíček



## PODĚKOVÁNÍ

Zde bych rád poděkoval Ing. Petru Hejtmánkovi za odborné vedení této bakalářské práce. Jeho cenné a užitečné rady mi pomohly k jejímu vypracování. Dále děkuji své rodině za podporu během mého studia.



## OBSAH

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| Úvod .....                                   | 9  |
| 1 Konstrukce pneumatiky .....                | 10 |
| 1.1 Funkce pneumatiky .....                  | 10 |
| 1.2 Stavba pneumatiky .....                  | 10 |
| 1.3 Plášť pneumatiky .....                   | 12 |
| 1.3.1 Diagonální pneumatika .....            | 12 |
| 1.3.2 Radiální pneumatika .....              | 12 |
| 1.4 Dezén pneumatiky .....                   | 14 |
| 1.5 Značení pneumatiky .....                 | 14 |
| 1.6 Opatření pneumatiky .....                | 16 |
| 1.7 Montáž pneumatiky .....                  | 17 |
| 2 Modely pneumatik .....                     | 18 |
| 2.1 Silové působení a momenty .....          | 18 |
| 2.2 Magic formula model .....                | 20 |
| 2.3 String tire model .....                  | 24 |
| 2.4 VCRware tire model .....                 | 26 |
| 2.5 PC-crash linear tire force model .....   | 27 |
| 2.6 SMAC tire model .....                    | 28 |
| 2.7 Simon tire model .....                   | 29 |
| 2.8 Další modely .....                       | 30 |
| 2.9 Kammova kružnice přilnavosti .....       | 31 |
| 3 Možnosti měření charakteristik .....       | 32 |
| 3.1 Aplikace matematického modelu .....      | 32 |
| 3.1.1 Použití programu MATLAB/Simulink ..... | 32 |
| 3.1.2 LMS Dads software .....                | 33 |
| 3.1.3 MSC Adams software .....               | 34 |
| 3.2 Reálné testy .....                       | 34 |
| 3.2.1 MTS Systems Corporation .....          | 34 |
| 3.2.2 Smithers Rapra .....                   | 37 |
| Závěr .....                                  | 38 |
| Seznam použitých zkratk a symbolů .....      | 41 |



## ÚVOD

Pod pojmem pneumatika si asi každý představí gumu, která spolu s ráfkem tvoří kolo vozidla. Pneumatiky jsou jediným spojovacím článkem mezi automobilem a vozovkou. Přenášejí síly, momenty a tíhu vozidla. Pneumatiky jsou jednou z nejdůležitějších částí na vozidle, jelikož mají velký vliv na průběh jízdy, na brzdící účinek či akceleraci. Pneumatiky jsou navrženy tak, aby plnily nároky na bezpečnost, řízení a konstrukčně danou rychlost. Aby pneumatika plnila své dané funkce, je třeba, aby byla konstruována jako „vzduchová trubice“.

První pneumatika byla vynalezena v roce 1888 J. B. Dunlopem, kdy Dunlop nasadil gumové hadice na dřevěné kolo. Svůj nápad postupem času vylepšoval a vznikla tak první firma na výrobu pneumatik pojmenovaná po jeho jméně. Poté C. K. Welchem v roce 1891 pneumatiku vylepšil o patní lano. Následně se k vývoji pneumatiky připojili bratři Michelinové, firma Firestone a firma Goodyear. Tehdy se jednalo o diagonální konstrukci pneumatik. Radiální konstrukce byla vyvinuta v roce 1913, ale začala se používat až v roce 1948 díky firmě Michelin. Vývoj byl v té době zaměřen hlavně na materiál patních lan, které byly následně vytlačeny ocelovými dráty. [11]



# 1 KONSTRUKCE PNEUMATIKY

Tato kapitola bude věnována základním informacím o pneumatice.

## 1.1 FUNKCE PNEUMATIKY

- **Přenos výkonu**

Pomocí pneumatik se přenáší síla motoru či síla při brždění na vozovku. Tyto faktory ovlivňuje především styková plocha pneumatiky s povrchem.

- **Tlumící schopnost**

Spolu s tlumiči pérování pneumatiky snižují vibrace svou pružností, která je závislá na tom, jak je pneumatika nahuštěná. Pohlcuje nerovnosti či překážky, přes které vozidlo přejede. To má za následek zvýšení délky životnosti všech součástí vozidla.

- **Řízení**

Bez dobré přilnavosti by vozidlo špatně zatačelo. Při správném nahuštění drží vozidlo směr a chová se stabilně. Pneumatika by měla vydržet příčné síly, aby nedošlo ke změně trajektorie.

- **Přenos hmotnosti**

Při brždění či zrychlování se mění těžiště zátěže, při naložení více osob či nákladu se zvyšuje tlak mezi vozovkou a pneumatikou. Únosnost se udává až několikanásobek vlastní hmotnosti pneumatiky v desítkách jednotek.

- **Odvalování**

Zvýšený odpor valení či nerovnoměrnost vedou ke snížení komfortu a zvýšení spotřeby.

- **Životnost**

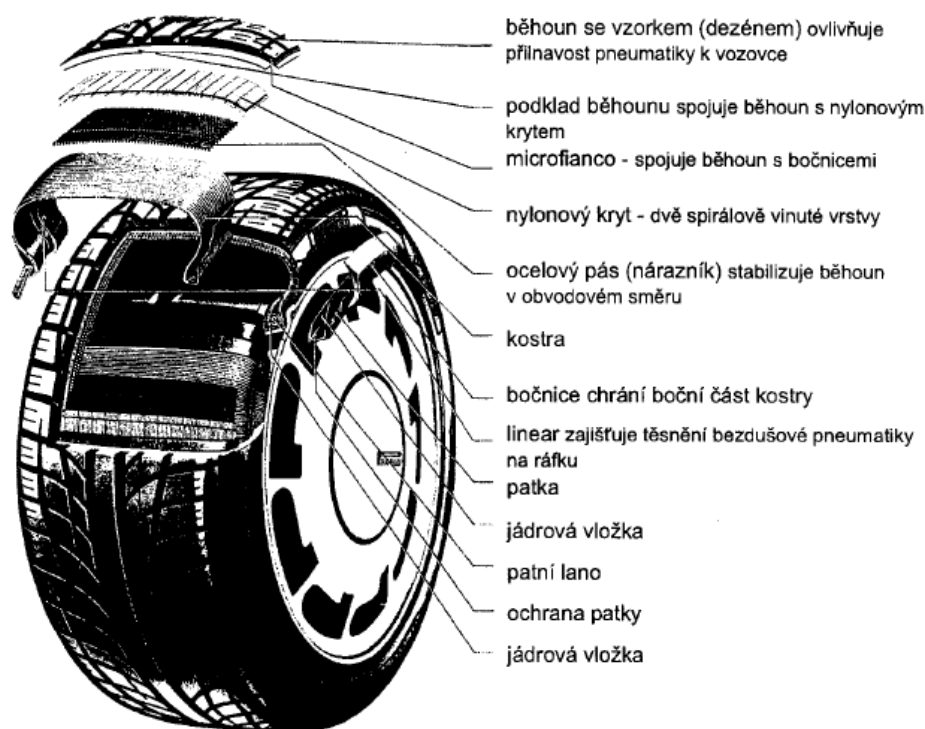
Opotřebení pneumatiky závisí na mnoha faktorech. Nejdůležitější je tlak v pneumatice. Ovlivňuje velikost stykové plochy s vozovkou. Tlak ovšem s časem klesá, jelikož pneumatika obsahuje malé póry či není správně sednutá k ráfku nebo má vadný ventilek. Je třeba tento tlak pravidelně hlídat a dohušťovat na správnou hodnotu udávanou výrobcem. Velký tlak ovšem není taky vhodný, to bude popsáno v dalších podkapitolách. [2]

## 1.2 STAVBA PNEUMATIKY

Pneumatika je vlastně kompozit pryže vyztužený vlákny a drátem. V pneumatice se nacházejí polymery, saze, oleje, další sloučeniny, patková lana a textilie. Základní suroviny jsou elastomery, přísady do směsi, kordy a dráty. Hlavní podíl tvoří kaučuk, který je složkou kaučukové směsi. Je buď přírodní nebo syntetický. Přírodní kaučuk oproti syntetickému s klesající teplotou měkne a křehne. Přírodní se používá pro nákladní vozy a pro osobní vozy



používáme kaučuk syntetický. Vulkanizací směsi vznikne pryž. Vlastnosti pryže ovlivňuje dávka činidel, které se přidávají před vulkanizací. Je to reakce se sírou, která probíhá při lisování pláště. Nesmí se opomenout saze, které se vážou s kaučukem, také ovlivňují vlastnosti a pneumatika je potom také odolnější proti odírání. Nyní je možno místo sazí užít kyseliny křemičité.



Obr. 1 Části pneumatiky [2]

Po zvulkanizování a spojení následujících několika částí a polotovarů vznikne pneumatika:

- **Vnitřní vložka**

Zajišťuje vzduchotěsnost.

- **Kostra**

Tvoří jí vlákna z textilie, které výrazně ovlivňují odolnost pneumatiky.

- **Patka pláště**

Přenáší brzdnou sílu a točivý moment motoru. Dosedá na ráfek. Vznikne tím, že se kordové vložky ohnou okolo patních lan.

- **Patní lana**

Vyztužují patku a přidržují pneumatiku na ráfku. Jsou vyrobené z ocelového drátu. U nákladních aut se používají 2 lanka, druhé pneumatiku ještě více vyztuží.



- **Bočnice**

Chrání pneumatiku proti bočnímu poškození.

- **Nárazníky**

Lanka z oceli kříží tkaninu na plášti pod úhlem  $60^\circ$  a tvoří „trojúhelníky“, nárazníky obepínají pneumatiku a tvoří obvodovou pevnost. Nárazník je vlastně přechod mezi běhounem a kostrou, čímž běhoun stabilizuje na obvodu.

- **Běhoun**

Část pneumatiky, která je v přímém kontaktu s vozovkou. Vzorek pneumatiky ovlivňuje adhezi. Chrání také vnitřní vrstvy a odvádí teplo. [2]

## 1.3 PLÁŠŤ PNEUMATIKY

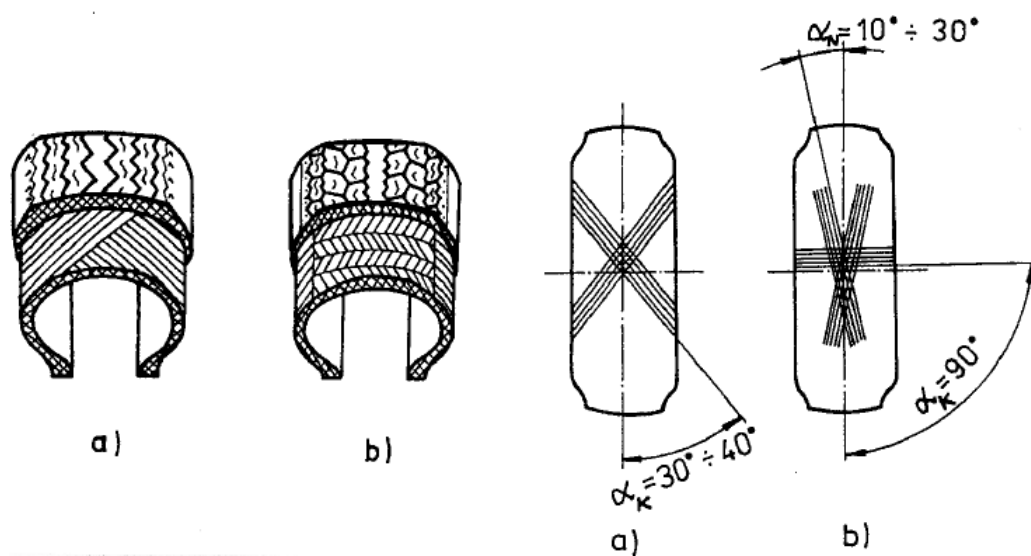
Pláště se skládají z koruny, ramena, boku a patky. Kostru v současné době tvoří nejčastěji kord z oceli. Určuje hlavní vlastnosti pneumatiky. Existují 2 hlavní druhy plášťů a to diagonální a radiální. [2]

### 1.3.1 DIAGONÁLNÍ PNEUMATIKA

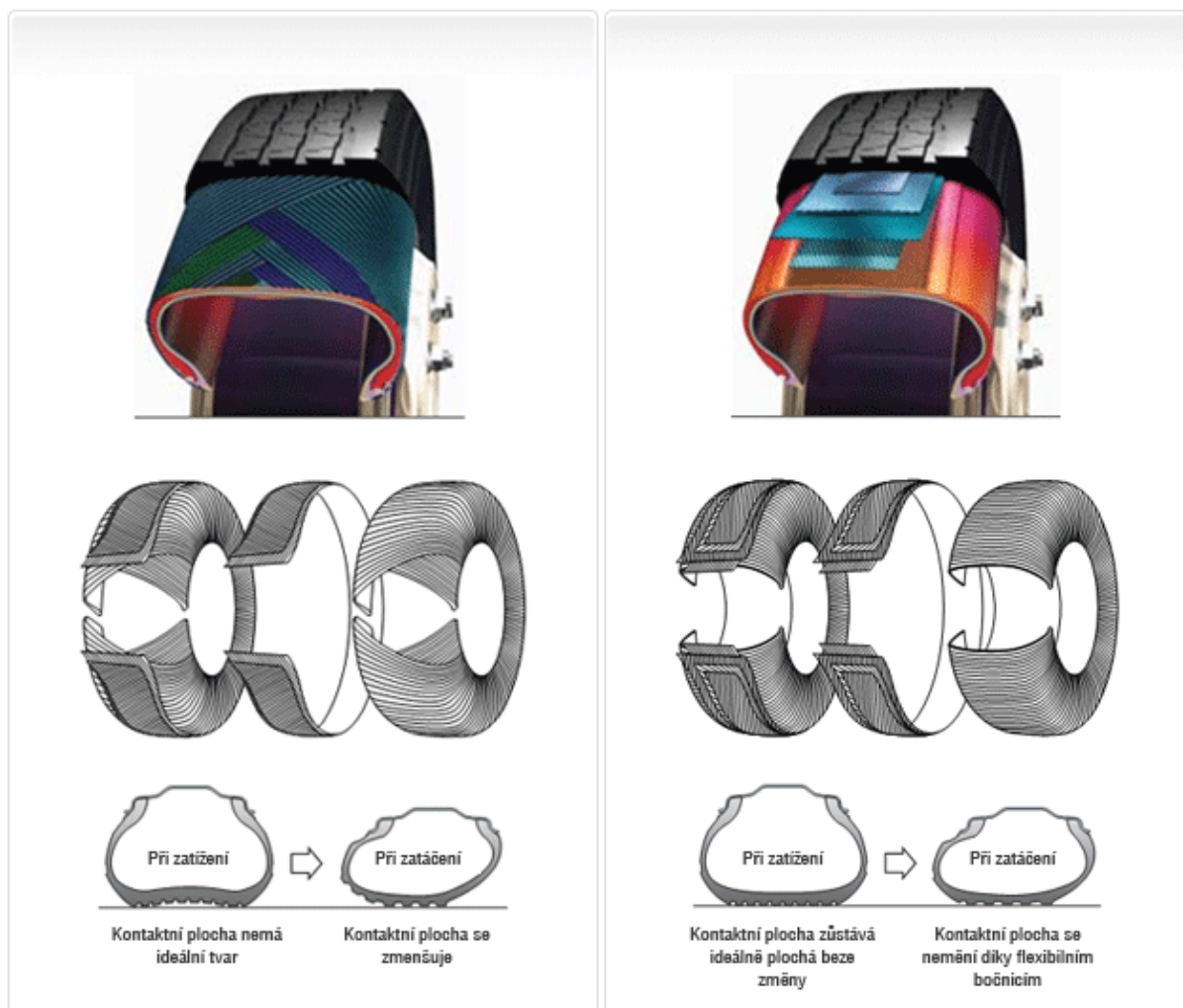
Pevnost kostry určuje pevnost kordů, jejich hustota, počet kordových složek a úhel, který svírají nitě s kružnicí, která tvoří obvod. Tento úhel  $\alpha_k$  má obvykle  $30^\circ$  až  $40^\circ$ . Tento úhel hraje velkou roli při působení sil na pneumatiku, při změně směru či rychlosti. Textilní vrstvy jsou položeny mezi patkovými lany a střídají se. Podobně je to u proužků na bočnicích či koruně. Aby měla pneumatika možnost se pohybovat vyšší rychlostí, bylo třeba snižovat úhel vláken. V dnešní době tento typ pneumatik má menší využití. [2]

### 1.3.2 RADIÁLNÍ PNEUMATIKA

Nejvíce se dnes využívá tento typ pneumatiky, který má kordy stavěné kolmo na obvodovou kružnici. Vzdálenost mezi patkami je tedy menší. Vrstvy na vnějšku mají vlákna na obvodu a strukturu tvoří vrstvy proužků textilu. Proužky jsou kolmé k pohybu pneumatiky. Kordová tkanina je vyztužená ocelovými nárazníky. Korunní vrstvy se překrývají v různých úhlech. Materiál kostry a nárazníku může být kombinovaný. Kostru z kordů a nárazník z oceli označujeme jako „steel“ a obojí z oceli jako „all steel“. [2]



Obr. 2 a) diagonální b) radiální [2]



Obr. 3 Chování při zatížení a) diagonální b) radiální [11]



## 1.4 DEZÉN PNEUMATIKY

Je to vrchní vrstva na pneumatice. Tvoří jí žlaby, které pneumatiku dělí na obrazce. Dezén výrazně ovlivňuje jízdní vlastnosti, hlavně tedy přilnavost. Hlavní funkce žlabů je odvádět vodu a vytvářet co nejlepší styk pneumatiky s vozovkou. Proto je důležité, aby odváděná voda měla co nejmenší trajektorii a byl tedy co nejkratší čas na odvedení vody. Nízkoprofilové pneumatiky mají větší stykovou plochu, tedy mají větší přitlak, který má snahu vodu vytlačet, ale zase má voda delší dráhu na odvádění. U všech pneumatik je tedy důležité najít kompromis mezi šířkou pneumatiky a délkou dráhy drážky na odvádění vody. Letní pneumatika ztrácí během nižších teplot své vlastnosti, proto je důležité včas vyměnit za zimní směs, která má jiný tvar dezénu a zlepšené vlastnosti při nízkých teplotách.

Druhy dezénů:

- **Symetrický:** Obvyklá pneumatika za nízkou cenu.
- **Směrový:** Dezén má tvar šípu, je třeba dodržet smysl otáčení uvedený na bočnici, jelikož dezén má své vlastnosti jen v jednom směru. Tento typ dezénu výborně odvádí vodu.
- **Asymetrický:** U těchto pneumatik je třeba dodržet zase vnitřní a vnější stranu, jelikož je dezén nesymetrický. Pneumatika má dezén rozdělený do několika zón a drážky tvoří „lopatku“, která odebírá vodu. Pneumatiky jsou tedy vysoce odolné aquaplaningu a méně hlučné.
- **Asymetrický směrový:** Pneumatiky určené pro závody. [2]

## 1.5 ZNAČENÍ PNEUMATIKY

K označení pneumatiky nám postačí 3 základní parametry: šířka nezatížené nahuštěné pneumatiky  $B$ , výška profilu  $H$  a průměr ráfku  $d$ .

Důležitým údajem na pneumatice je tzv. profilové číslo. Vyjadřuje poměr  $H/B$ , tedy poměr výšky k šířce. Při vynásobení číslem 100 je tento údaj v %. Tohle číslo je postupem času menší a menší. Původně číslo bylo někde kolem 100 % a nyní je profilové číslo i na hodnotě 30 %. Takovým pneumatikám říkáme, že jsou nízkoprofilové. Tedy šířka pneumatiky je větší než výška profilu. Ovšem takové pneumatiky mají vysokou cenu, vyšší odpor vzduchu, vyšší nebezpečí aquaplaningu a používají je nejčastěji majitelé sportovních vozů. Vůz je položen níže, má tedy nižší těžiště, má lepší držení směru, lepší přilnavost a lepší brzdné vlastnosti díky většímu styku.

Nejdříve je třeba se seznámit s některými parametry, které se v označení vyskytují:

- **Index nosnosti (Load Index)**

Je to maximální nosnost při určité rychlostní kategorii a určitých podmínkách.

Tab. 1 Index nosnosti

| LI (-)       | 50  | 60  | 70  | 80  | 90  | 100 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nosnost (kg) | 190 | 250 | 335 | 450 | 600 | 800 |



- **Kategorie rychlosti (Speed Index)**

Je to maximální přípustná rychlost, kterou je možné se s touto pneumatikou pohybovat.

Tab. 2 Kategorie rychlosti

| SI (-)          | E  | F  | G  | J   | K   | L   | M   | N   | P   | Q   | R   | S   | T   | H   |
|-----------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Rychlost (km/h) | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 210 |

- **PR (Ply Rating)**

Udává pevnost kostry, která odpovídá počtu bavlněných složek. Používají se sudá čísla od 8 do 18.

Následující označení ukazuje, jak vypadá systém značení pneumatik u osobních vozů:

**175/70 R 14 84 S**

kde:

175 - číselný údaj šířky pneumatiky v mm

70 - profilové číslo (tedy 70%)

R - radiální typ pneumatiky, pokud by se jednalo o diagonální, tak místo R bude „-“

14 - průměr ráfku (nejčastěji v palcích)

84 - tzv. index nosnosti (v tomto případě max. 500 kg)

S - kategorii rychlosti (v tomto případě max. 180 km/h)

U lehkých nákladních vozů je to podobné. Neuvádí se profilové číslo, naopak se udává index nosnosti:

**185 R 14 90 S**

kde:

90 - index nosnosti (v tomto případě 600 kg)

Označení u nákladních vozů je trochu jiné:

**12.00 R 20 154/149 M 18 PR** nebo **315/80 R 22,5 154/149 M**

kde:

12.00 - jmenovitá šířka pneumatiky v palcích (tedy 315 v mm)

154/149 - index nosnosti pro případ jednomontáže/dvojmontáže



18 PR - označení nosnosti

Další nejčastější údaje o pneumatice, které se nacházejí na bočnici:

- **Indikátor opotřebení TWI (Thread Wear Indicator)**

Udává informaci o tom, že pneumatiku už je potřeba vyměnit, je tedy ojetá. Je to výstupek v dezénu a zpravidla určuje hraniční hloubku dezénu. U osobních automobilů je to 1,6 mm.

- **Tubeless** (bezdušová pneumatika)
- **Tube type** (pneumatika s duší) [2]

## 1.6 OPOTŘEBENÍ PNEUMATIKY

Opotřebení má mnoho faktorů. Nejvíce se opotřebovává běhoun a bočnice. Nejčastěji životnost pneumatiky ovlivňují podmínky, ve kterých pneumatika funguje např. vozovka, tlumiče, geometrie, rychlost, teplota, prudké akcelerace či náhlá zabrždění. Důležitý je také tlak v pneumatice. Při přehuštění se ojíždí střední část běhounu, při podhuštění krajní části běhounu. Zmenšuje se tedy hloubka dezénu a tím se zhoršují vlastnosti, především na vodě. Proto je nutné dodržet spodní hranici výšky dezénu 1,6 mm, o které informuje indikátor opotřebení TWI. Pneumatika ale vždy není opotřebena rovnoměrně, je proto výhodné pneumatiky po čase zaměňovat či měnit pneumatiky z přední nápravy na zadní a naopak.

- **Přehuštění/podhuštění**

Jak už bylo řečeno, huštění pneumatiky výrazně ovlivňuje životnost a dokonce i jízdní vlastnosti. Při přehuštění dosedá pneumatika na vozovku jen střední částí. To má za následek ojíždění střední části a po čase zjistíte, že střední část už je skoro zcela opotřebovaná a krajní část je jako nová. Pneumatika má také menší stykovou plochu.

Častější jev je podhuštění. V tomto případě jsou více opotřebované krajní části běhounu, kde se kumuluje tlak. Podhuštěná pneumatika má za následek zhoršené ovládání vozidla či zvýšení spotřeby.

Pro měření tlaku je možno užít třeba tzv. manometru. Je důležité, aby tlak v pneumatice byl měřen před jízdou nebo po vychladnutí gumy. Z termodynamického hlediska se mění v pneumatice stavové veličiny a měření vykazuje mírné odchylky.

- **Další faktory:**

Při zvýšené teplotě dochází k většímu odebírání dezénu. Při velké citlivosti brzd či následném zablokování kol můžou vzniknout plošky. Tyto plošky poté působí velmi negativně. Kolo nepravidelně kmitá, vznikají vibrace a pneumatika je více hlučná. Plošky jsou ovšem extrémním případem a navíc jsou již některá vozidla vybavená ABS (Anti-Block System), který brání dlouhodobému zablokování kol a toto prudké brždění mění na přerušované. Pokud je kolo jako celek špatně vyvážené, tak může také dojít k nepravidelnému opotřebení. Pneuservis po každé výměně kolo znovu vyvažuje. Na plechovém disku jsou připnuta závaží a na litém disku jsou jednoduše tyto závaží přilepena na vnitřku disku a drží díky odstředivé síle. Ale přesto



může dojít ke ztrátě a nevyváženosti. Jelikož je pneumatika tvořená z pryže, je třeba ji nevystavovat přímému slunci či na ní nechat působit chemické látky, které ji naleptávají. [2]

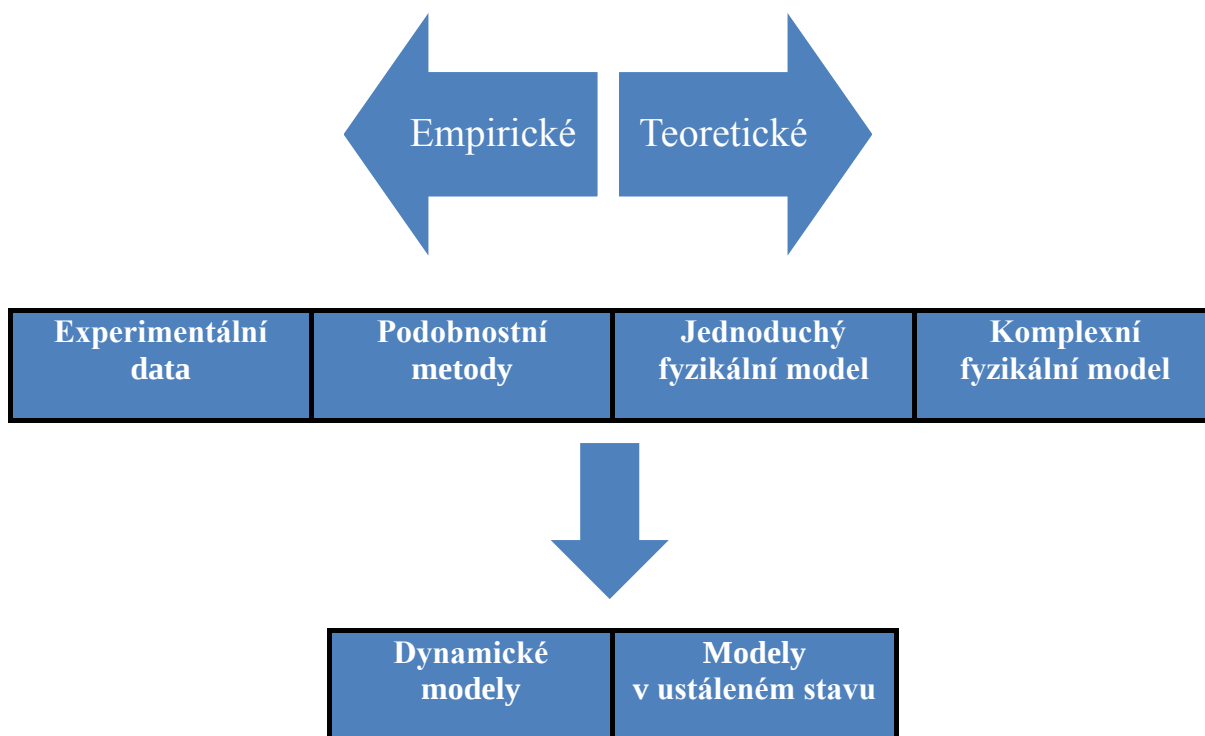
## 1.7 MONTÁŽ PNEUMATIKY

Správná montáž je velice důležitá kvůli správné funkčnosti. Tuto montáž by měl dělat někdo, kdo má jisté zkušenosti, tedy nejlépe pneuservis. Je zřejmé, že všechna kola musí mít stejný průměr ráfku a stejný rozměr pneumatiky. Pro každé auto jsou předepsané rozměry pneumatik v TP či uvedený správný tlak na víčku od nádrže. Při výměně pneumatiky je třeba disk odstranit od nečistot a neměl by být ani nijak deformovaný z důvodu, aby pneumatika k disku správně přilnula. Dále je důležité zkontrolovat ventilek a vyvážení kola. Vyjimku tvoří dojezdové kolo, které slouží jen ke svému účelu. K novým pneumatikám je třeba se chovat šetrněji. Co se týče zimních pneumatik, tak je výhodné mít je na jiných discích, tedy nepřezouvat je na stejné disky. A také je bezpečnější používat je na všechny 4 kola. Minimální hloubka dezénu je 4mm. [2]



## 2 MODELÝ PNEUMATIK

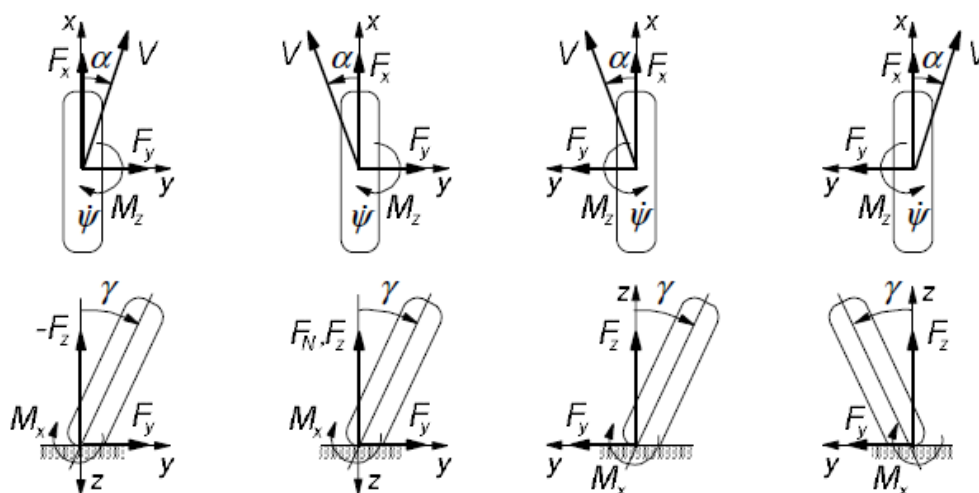
Tato kapitola již bude věnována některým typům matematických modelů pneumatiky. Modely můžeme rozdělit na několik základních typů, podle toho jak je k problému přistupováno:



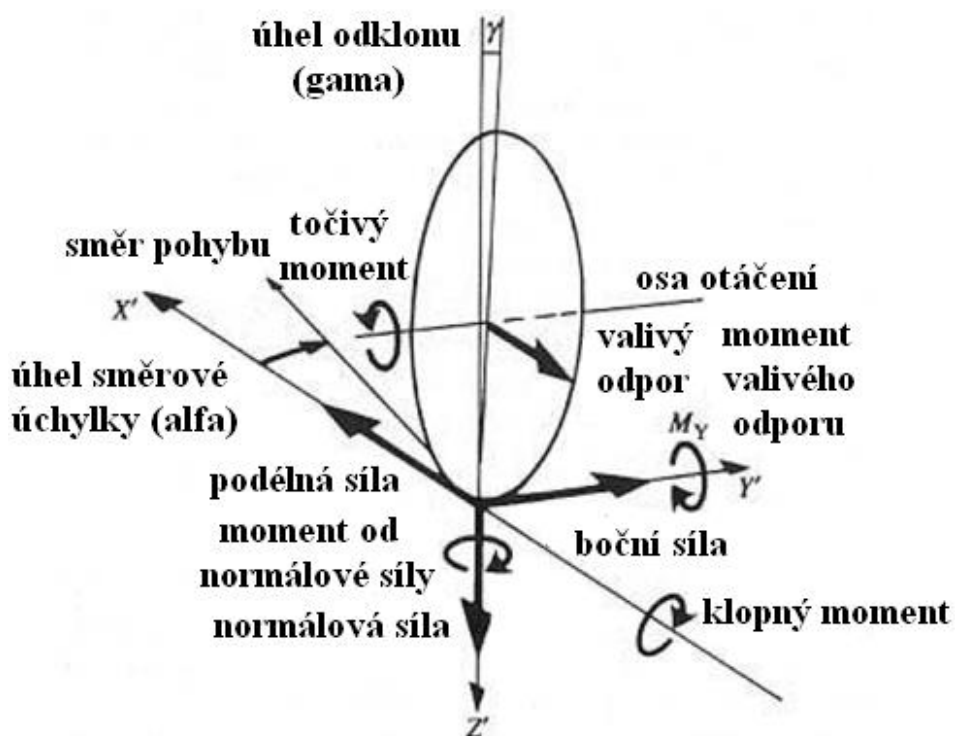
[12]

### 2.1 SILOVÉ PŮSOBENÍ A MOMENTY

Nejdříve je třeba si definovat, co se děje s pneumatikou při provozu. Na pneumatiku působí několik sil a momentů v několika rovinách. Je třeba si zavést souřadnicový systém XYZ.



Obr. 4 Souřadnicový systém: a) SAE b) Pacejka c) ISO d) modifikované ISO [1]



Obr. 5 Silové působení a momenty podle souřadnicového systému SAE [3]

kde:

$F_z$  - normálová síla kola působící směrem dolů

$F_v$  - vertikální síla, tedy  $F_v = -F_z$

$F_x$  - podélná síla

$F_y$  - boční síla

$M_x$  - klopný moment

$M_y$  - moment valivého odporu

$M_z$  - moment od normálové síly

Síly dále lze rozdělit na síly ve směru pohybu a síly od pneumatiky.

**Efektivní poloměr valení** pneumatiky lze získat z následujícího vztahu:

$$r_e = \frac{V_x}{\Omega_0} \quad (1)$$

kde:

$V_x$  - podélná složka celkového vektoru rychlosti středu kola

$\Omega_0$  - úhlová rychlost otáčení kola



**Podélný skluz** vzniká při aplikaci točivého momentu na pneumatiku a definuje se takto:

$$\kappa = -\frac{V_x - r_e \Omega}{V_x} \quad (2)$$

kde:

$\Omega$  - úhlová rychlost při aplikaci točivého momentu

S použitím předchozího vzorce, můžeme tento vzorec upravit a budou se zde vyskytovat jen  $\Omega$  a  $\Omega_0$ .

**Boční skluz (úhel směrové úchytky)** kol je definován jako poměr boční a podélné rychlosti kola, tedy:

$$\tan \alpha = -\frac{V_y}{V_x} \quad (3)$$

Další vlastností je tzv. **spin**, který vzniká rotací kola okolo svislé normálové síly, která je kolmá na vozovku. **Úhel odklonu**  $\gamma$  přispívá ke spinu.

Zde jsou základní funkční silové závislosti:

$$F_x = f(\kappa, \alpha, \gamma, F_z) \quad (4)$$

$$F_y = f(\kappa, \alpha, \gamma, F_z) \quad (5)$$

$$M_z = f(\kappa, \alpha, \gamma, F_z) \quad (6)$$

Tyto vztahy ovšem nic neříkají, proto je třeba je trochu upravit. Je třeba si zavést veličinu **tuhost podélného skluzu**, která je značená jako  $C_{F\kappa}$ . Jednou z nejdůležitějších vlastností parametrů pneumatiky je **směrová tuhost pneumatiky** a má zásadní význam pro vozidla, ovlivňuje jejich stabilitu, označíme ji jako  $C_{F\alpha}$ . Tuhost existuje i pro úhel odklonu, tedy **klopná tuhost**  $C_{F\gamma}$ . Při nulovém úhlu skluzu dostáváme **vratnou tuhost**  $C_{M\alpha}$  a pro odklon je to  $C_{M\gamma}$ . Nyní těchto tuhostí je možno využít k upravení předchozích závislostí:

$$F_x = C_{F\kappa} \kappa \quad (7)$$

$$F_y = C_{F\alpha} \alpha + C_{F\gamma} \gamma \quad (8)$$

$$M_z = -C_{M\alpha} \alpha + C_{M\gamma} \gamma \quad (9)$$

[3]

## 2.2 MAGIC FORMULA MODEL

Je to model, který má široké využití, ve kterém počítáme s konstantní zatěžující silou. Tento model se řadí mezi empirické, jelikož se velikosti sil určují z funkčních závislostí skluzů a jiných vstupních parametrů. Zajímavostí je, že se zde nacházejí funkční závislosti jen



goniometrických funkcí. Model se nachází v souřadném systému Pacejka. Základní vztah má následující podobu:

$$y = D \sin[C \arctan \{Bx - E(Bx - \arctan Bx)\}] \quad (10)$$

Dále je třeba uvážit, že:

$$Y(X) = y(x) + S_V \quad (11)$$

$$x = X + S_H \quad (12)$$

kde:

$Y$  - výstupní proměnné, síly  $F_x$ ,  $F_y$  a moment  $M_z$

$X$  - vstupní proměnné, boční skluz  $\tan \alpha$  nebo podélný skluz  $\kappa$

$B$  - konstanta tuhosti

$C$  - součinitel tvaru

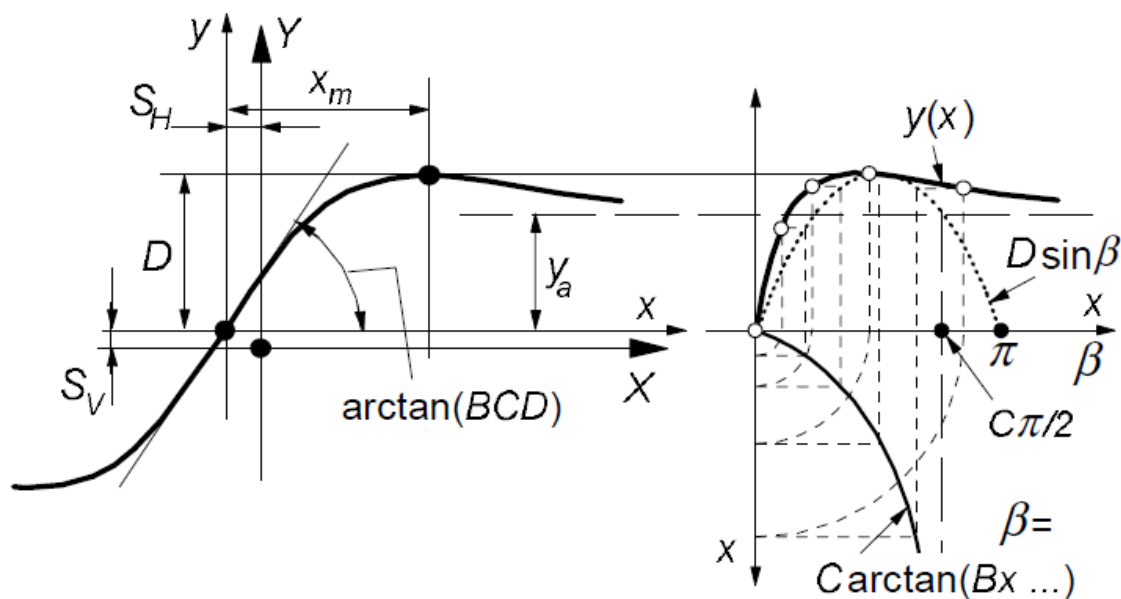
$D$  - amplituda

$E$  - konstanta křivosti

$S_H$  - posuv v horizontálním směru

$S_V$  - posuv ve vertikálním směru

Všechny předchozí konstanty jsou bezrozměrná čísla a některé jsou na sobě závislé, k tomu poslouží graf z Obr. 6, ze kterého se nám hodí hodnoty  $y_a$  a  $x_m$ .



Obr. 6 Graf pro určení  $y_a$  a  $x_m$  [1]



Pro konstantu  $C$  tedy platí:

$$C = 1 \pm \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{y_a}{D}\right) \quad (13)$$

Pro  $E$  je podmínka, že  $C > 1$ , pokud je splněna, tak je možno psát:

$$E = \frac{Bx_m - \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)}{Bx_m - \arctan(Bx_m)} \quad (14)$$

Výše uvedený základní vztah je spíše obecný, nyní je možno využít jeho modifikace, ze kterých už lze vypočítat výsledné síly a momenty, které působí na pneumatiku. Pro moment  $M_z$  vypadá soustava rovnic takto:

$$M_z = -tF_y + M_{zr} \quad (15)$$

$$M_{zr}(\alpha_r) = D_r \cos[\arctan(B_r \alpha_r)] \quad (16)$$

$$\alpha_r = \tan \alpha + S_{Hr} \quad (17)$$

$$t(\alpha_t) = D_t \cos[C_t \arctan\{B_t \alpha_t - E_t(B_t \alpha_t - \arctan(B_t \alpha_t))\}] \quad (18)$$

$$\alpha_t = \tan \alpha + S_{Ht} \quad (19)$$

kde:

$M_{zr}$  - vratný moment

$t$  - stopa pneumatiky, která se mění s rostoucím bočním skluzem.

$\alpha_r, \alpha_t$  - úhly směrové úchylky

$S_{Hr}, S_{Ht}$  - horizontální posuvy

Pro konstanty  $D_r, B_r, B_t, C_t, D_t$  a  $E_t$  platí stejné funkční závislosti jako pro předchozí bezindexové. A všechny veličiny mají stejný význam. Není je tedy třeba dále vysvětlovat.

(Pozn.: indexy  $t$  a  $r$  jsou zde uvedeny z důvodu odlišení od základní rovnice Magic formula modelu)

Další soustava rovnic ve výsledku dává boční sílu  $F_y$ , která je potřebná k vypočtení předchozích vztahů:

$$F_y = G_{y\kappa} F_{y\kappa} + S_{Vy\kappa} \quad (20)$$

$$G_{y\kappa} = \frac{\cos[C_{y\kappa} \arctan(B_{y\kappa} \kappa_S)]}{\cos[C_{y\kappa} \arctan(B_{y\kappa} S_{Hy\kappa})]} (> 0) \quad (21)$$

$$\kappa_S = \kappa + S_{Hy\kappa} \quad (22)$$



$$B_{y\kappa} = r_{By1} \cos[\arctan\{r_{By2}(\tan\alpha - r_{By3})\}] \quad (23)$$

$$C_{y\kappa} = r_{Cy1} \quad (24)$$

$$S_{Hy\kappa} = r_{Hy1} + r_{Hy2} df_z \quad (25)$$

$$S_{Vy\kappa} = D_{Vy\kappa} \sin[r_{Vy5} \arctan(r_{Vy6} \kappa)] \quad (26)$$

$$D_{Vy\kappa} = \mu_y F_z (r_{Vy1} + r_{Vy2} df_z + r_{Vy3} \gamma) \cos[\arctan(r_{Vy4} \tan\alpha)] \quad (27)$$

$$df_z = \frac{F_z - F'_{z0}}{F'_{z0}} \quad (28)$$

$$F'_{z0} = \lambda_{Fz0} F_{z0} \quad (29)$$

kde:

$G_{y\kappa}$  - tíhová funkce

$F_{y\kappa}$  - boční síla při bočním skluzu

$S_{Vy\kappa}$  - vertikální posuv

$\kappa_S$  - součet podélného skluzu a horizontálního posuvu

$B_{y\kappa}$  - udává sklon vozovky ve směru pohybu

$C_{y\kappa} = r_{Cy1}$  - závislost na svislém zatížení

$S_{Hy\kappa}$  - horizontální posuv od tíhové funkce

$r_{By1}, r_{By2}, r_{By3}$  - korekční koeficienty pro sklon vozovky

$r_{Hy1}, r_{Hy2}$  - korekční koeficienty pro horizontální posuv

$df_z$  - přírůstek svislého zatížení

$r_{Vy1}, r_{Vy2}, r_{Vy3}, r_{Vy4}, r_{Vy5}, r_{Vy6}$  - korekční koeficienty závislé na  $V_y$

$D_{Vy\kappa}$  - závislost na  $\gamma$  a  $\alpha$

$F_{z0}$  - nominální zatížení  $F_z$

$F'_{z0}$  - adaptivní nominální zatížení  $F_z$

$\lambda_{Fz0}$  - poměr velikostí  $F'_{z0}$  a  $F_{z0}$

$\mu_y$  - součinitel tření v bočním směru

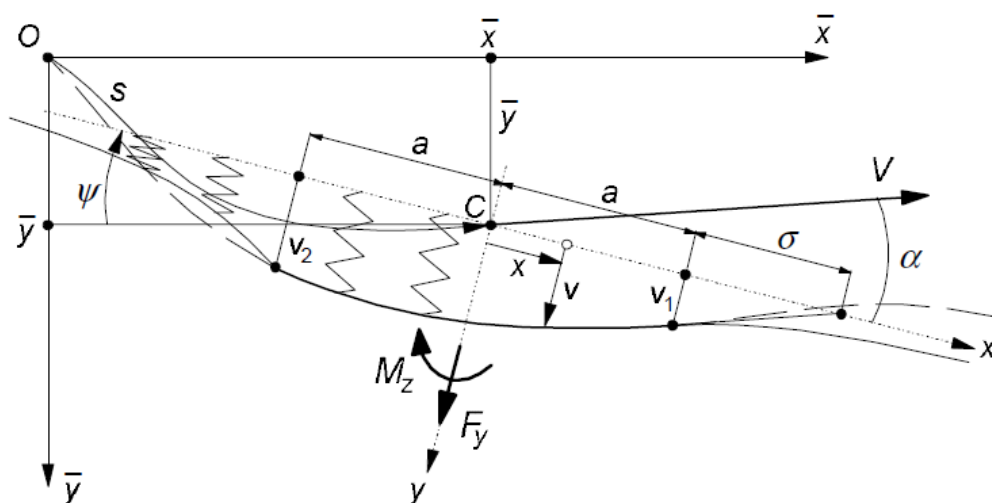
[1]



Model byl vyvinut společností TNO Automotive. Na modelu pracovaly také Volvo Car a Delft University. Poté se k vývoji připojila i firma Michelin a následně byl model přejmenován na Delft Tyre 97. Model získal řadu modifikací a prošel velkým vývojem. Za zmínku stojí např. modely Pacejka 89 a 94 či MF-MC Tyre, který se zabývá většími odklony a je tedy vhodný pro motocyklové pneumatiky. [5]

## 2.3 STRING TIRE MODEL

Jak už název říká, tento model je založený na tom, že se pneumatika nahrazuje působením sil na vlákno. Myšlenku má zachytit Obr. 7:



Obr. 7 Zobrazení String tire modelu [1]

Důležité je, že se podmínky mění v čase, tedy nejsou konstantní. V této metodě tedy bude potřeba integrací a derivací. Tento model můžeme zařadit do kategorie jednoduchých fyzikálních modelů. Diferenciální rovnice má tento tvar:

$$q_y dx - c_c v dx - D + D + \frac{\partial D}{\partial x} dx - S_1 \frac{\partial v}{\partial x} + S_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) = 0 \quad (30)$$

kde:

$q_y$  - kontaktní tlak

$v$  - boční průhyb vlákna

$c_c$  - boční tuhost kostry na jednotku délky

$S_1$  - x-ová složka celkové tahové síly působící na vlákno

$D$  - smyková síla, která je definovaná takto:



$$D = S_2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (31)$$

Složky takové síly můžeme sečíst, dostaneme tedy celkové napětí, což bude dále využito. Model s více vlákný bude stejný, když každé z nich bude mít stejný parametr  $S$ .

$$S = S_1 + S_2 \quad (32)$$

(Pozn.:  $dx$  zde znamená diferenciál (přírůstek) v  $x$ -ovém směru. Dále se zde vyskytují parciální derivace.)

Při využití předchozího vztahu se může diferenciální rovnice zjednodušit:

$$S \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c_c v = -q_y \quad (33)$$

Tato rovnice platí pro část pneumatiky, kde dochází ke kontaktnímu tlaku, v případě tedy, že  $q_y = 0$  se rovnice mění na tzv. homogenní.

(Pozn.: Diferenciální homogenní rovnice je taková, která má pravou stranu rovno 0. A její výpočet je podstatně jednodušší.)

$$S \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c_c v = 0 \quad (34)$$

Rovnice má platnost když  $|x| > a$ ,  $a$  je vzdálenost k místu posuvu  $v$ . Rovnici lze ještě dále zjednodušit zavedením substituce hodnotou  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{S}{c_c}} \quad (35)$$

Poté je možno rovnici přepsat do tvaru:

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 0 \quad (36)$$

Rovnice je nyní zjednodušena, ale nabízí se otázka jaké má řešení? Diferenciální rovnice mají složité řešení, a jejich výsledkem je funkce či více funkcí. Řešením této rovnice jsou funkce posuvu  $v$ . Tyto funkce mají tento tvar:

$$v = C_1 e^{-x/\sigma} \text{ pro } x > a \quad (37)$$

$$v = C_2 e^{x/\sigma} \text{ pro } x < -a \quad (38)$$

Kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou konstanty. Tyto konstanty se zjišťují z počátečních podmínek.

(Pozn.: Počáteční podmínky jsou funkční hodnoty v nějakých bodech, které dosadíme do rovnice a tím zjistíme konstanty. Definují tedy řešení.)

Poté je třeba si ještě definovat konstantu  $c_c$ :



$$c_c = \frac{S}{\sigma^2} \quad (39)$$

Z posuvů je již možno vypočítat naše hledané veličiny:

$$F_y = c_c \int_{-a}^a v dx + \frac{S(v_1 + v_2)}{\sigma} \quad (40)$$

$$M_z = c_c \int_{-a}^a v x dx + \frac{S(a + \sigma)(v_1 - v_2)}{\sigma} \quad (41)$$

[1]

## 2.4 VCRWARE TIRE MODEL

U tohoto modelu je jistá podobnost s modelem Magic Formula či snad tento model je možno nazvat jeho modifikací. Tudiž jde taky o empirický model. Je zde ovšem nový parametr smýkání  $s$ . Vztahy jsou pro různé situace, se kterými se pneumatika může setkat. Pro tento model se používá souřadný systém SAE.

Vztah pro podélnou sílu při samotném brždění bez zatáčení,  $\alpha = 0$ :

$$F_x(s) = D \sin\{C \arctan[B(1 - E)Ks + E \arctan(BKs)]\} \quad (42)$$

Vztah pro boční sílu při zatáčení bez brždění,  $s = 0$ :

$$F_y(\alpha) = D \sin\left\{C \arctan\left[B(1 - E)K \frac{2\alpha}{\pi} + E \arctan\left(BK \frac{2\alpha}{\pi}\right)\right]\right\} \quad (43)$$

Vztah pro podélnou sílu při kombinovaném brždění a zatáčení:

$$F_x(\alpha, s) = \frac{F_x(s)F_y(\alpha)s}{\sqrt{s^2 F_y^2(\alpha) + F_x^2(s) \tan^2 \alpha}} \frac{\sqrt{s^2 C_\alpha^2 + (1 - s)^2 \cos^2 \alpha F_x^2(s)}}{s C_\alpha} \quad (44)$$

Vztah pro boční sílu při kombinovaném brždění a zatáčení:

$$F_y(\alpha, s) = \frac{F_x(s)F_y(\alpha) \tan \alpha}{\sqrt{s^2 F_y^2(\alpha) + F_x^2(s) \tan^2 \alpha}} \frac{\sqrt{(1 - s)^2 \cos^2 \alpha F_y^2(\alpha) + C_s^2 \sin^2 \alpha}}{C_s \sin \alpha} \quad (45)$$

kde:

B, C, D, E, K - bezrozměrné konstanty

$C_s$  - brzdící koeficient

$C_\alpha$  - boční tuhost

$s$  - smýkání pneumatiky [4]



## 2.5 PC-CRASH LINEAR TIRE FORCE MODEL

V tomto modelu se nachází nová proměnná a to brzdná síla  $F_b$ . Při  $\alpha = \alpha_{max}$  boční síla nabývá svého maxima. Model opět můžeme zařadit mezi empirické a do souřadného systému SAE.

Nejdříve je třeba určit boční skluz, poté podle jeho velikosti se použije jeden ze dvou vztahů, přitom  $s = 0$ :

$$F_y(\alpha) = \frac{-\mu F_z \alpha}{\mu \alpha_{max}}, \text{ pro } (0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}) \quad (46)$$

$$F_y(\alpha) = \mu F_z, \text{ pro } (\alpha_{max} < \alpha < \frac{\pi}{2}) \quad (47)$$

Pro kombinované zatáčení a brždění:

$$F_y(\alpha, s) = \min \left[ \mu F_z \frac{\alpha}{\alpha_{max}} \right] \quad (48)$$

$$F_x(\alpha, s) = \min[F_b] \quad (49)$$

Pro boční sílu, která roste lineárně s  $\alpha$  platí:

$$F_y(\alpha, s) = \mu F_z \frac{\alpha}{\alpha_{max}} \quad (50)$$

Při limitním tření:

$$F_y(\alpha, s) = \sqrt{(\mu F_z)^2 - F_b^2} \quad (51)$$

Pro smýkající blokové kolo platí:

$$F_y(\alpha, s) = \mu F_z \sin \alpha \quad (52)$$

kde:

$$\mu F_z = \sqrt{F_y^2(\alpha, s) + F_b^2} \quad (53)$$

$F_b$  - brzdná síla

$F_z$  - normálová síla

$\mu$  - koeficient tření

[4]



## 2.6 SMAC TIRE MODEL

Tento model nepoužívá při brždění proměnnou skluz. Ale navíc se pracuje s brzdou silou  $T$ . Model je empirický a souřadná soustava je SAE. Vztahy jsou opět pro různé situace, které můžou u pneumatiky nastat.

Pro brždění:

$$T = 0 (s = 0), F_x(T) = 0 \quad (54)$$

$$0 < T \leq \mu F_z, F_x(T) = -T \quad (55)$$

$$T > \mu F_z, F_x(T) = -\mu F_z \quad (56)$$

Pro akceleraci:

$$|T| \leq \mu F_z, F_x(T) = T \quad (57)$$

$$|T| > \mu F_z, F_x(T) = \mu F_z \quad (58)$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}(\alpha) = \frac{C_\alpha \alpha}{\sqrt{\mu^2 F_z^2}} \quad (59)$$

Pro:

$$|\bar{\beta}| < 3, F_y(\alpha) = \mu F_z \left[ \bar{\beta} - \frac{\bar{\beta}|\bar{\beta}|}{3} + \frac{\bar{\beta}^3}{27} \right] \quad (60)$$

$$|\bar{\beta}| \geq 3, F_y(\alpha) = \mu F_z \quad (61)$$

Pro současné brždění a zatáčení:

Pro:

$$F_x(T) \leq \mu F_z \cos \alpha, F_x(\alpha, s) = T \quad (62)$$

$$F_x(T) > \mu F_z \cos \alpha, F_x(\alpha, s) = \mu F_z \cos \alpha \quad (63)$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}(\alpha) = \frac{C_\alpha \alpha}{\sqrt{\mu^2 F_z^2 - F_x^2(\alpha, s)}} \quad (64)$$

Pro:

$$|\bar{\beta}| < 3, F_y(\alpha, s) = \sqrt{\mu^2 F_z^2 - F_x^2(\alpha, s)} \left[ \bar{\beta} - \frac{\bar{\beta}|\bar{\beta}|}{3} + \frac{\bar{\beta}^3}{27} \right] \quad (65)$$

$$|\bar{\beta}| \geq 3, F_y(\alpha, s) = \sqrt{\mu^2 F_z^2 - F_x^2(\alpha, s)} \quad (66)$$



kde:

$$\mu F_z = \sqrt{F_x^2(\alpha, s) - F_y^2(\alpha, s)} \quad (67)$$

$\mu$  - koeficient tření

$\bar{\beta}$  - bezrozměrné číslo určující, který vztah máme použít

$C_\alpha$  - koeficient boční síly

[4]

## 2.7 SIMON TIRE MODEL

Opět se jedná o empirický model v souřadné soustavě SAE.

$$a = (1 - s_p)^2(1 + s_p) \quad (68)$$

$$b = (1 - s_p)(\mu_x(s_p + 2) - \mu_p(2s_p + 1)) \quad (69)$$

$$c = (\mu_x - \mu_p)\mu_x \quad (70)$$

$$B = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (71)$$

$$A = \mu_x + B \quad (72)$$

$$C = \mu_x + B(1 - s_p) \quad (73)$$

$$\mu' = A - Bs \quad (74)$$

$$D_t = \sqrt{(C_s s)^2 + (C_\alpha \sin \alpha)^2} \quad (75)$$

$$\frac{X_s}{L} = \frac{\mu' F_z}{2D_t}(1 - |s|), 0 \leq \frac{X_s}{L} \leq 1 \quad (76)$$

Pro současné brždění a zatáčení:

$$\frac{X_s}{L} = 1 \quad (77)$$

$$F_x(\alpha, s) = \frac{C_s s}{1 - |s|} \quad (78)$$

$$F_y(\alpha, s) = -\frac{C_\alpha \sin \alpha}{1 - |s|} \quad (79)$$



kde:

$a, b, c$  - koeficienty pro výpočet kořenu kvadratické rovnice pomocí diskriminantu

$s_p$  - skluz

$\mu_x$  - koeficient tření pro podélný směr

$\mu_p$  - poměr  $F_x/F_z$

$\mu'$  - ekvivalentní koeficient tření

$C_s$  - koeficient podélné síly

$C_\alpha$  - koeficient boční síly

$s$  - smýkání

$A, B, D_t$  - konstanty

$X_s/L$  - poměr kontaktu pneumatiky s vozovkou

(Pozn.: Diskriminant je polynom, který určuje kořeny kvadratické rovnice.)

[4]

## 2.8 DALŠÍ MODELY

Matematických modelů existuje celá řada. Jedná se například o:

- **Burckhardt Tire Model** (Empirický model – experimentální data)
- **Kiencke and Daiss Tire Model** (Empirický model – experimentální data)
- **Dahl Tire Model** (Jednoduchý fyzikální model – dynamický)
- **LuGre Tire Model** (Jednoduchý fyzikální model – dynamický)
- **Bliman** (Jednoduchý fyzikální model – dynamický)
- **Kinematic Tire Model** (Jednoduchý fyzikální model – dynamický)

Dále je třeba se zmínit o tzv. Brush modelech. Mezi ně patří například:

- **Dugoff's Model** (Jednoduchý fyzikální model) [12]

Modely podle [5]:

- **Fiala Tire Model**
- **5.2.1 Tire Model**
- **UA Tire Model**
- **Swift-Tyre Model**
- **FTire Model**

## 2.9 KAMMOVA KRUŽNICE PŘILNAVOSTI

Aby jízda vozidlem byla bezpečná, musí být mezi pneumatikou a vozovkou adheze, tedy přilnavost. Adhezní závislost znázorňuje právě tato kružnice. Velikost adhezních sil popisuje následující vztah:

$$R_k = \sqrt{B^2 + S^2} \leq Zf \quad (80)$$

kde:

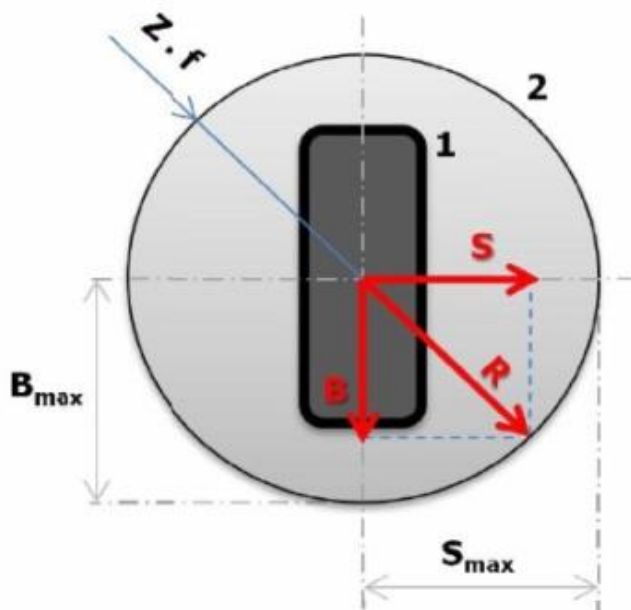
$R_k$  - poloměr kružnice

$B$  - brzdná síla

$S$  - boční síla

$Z$  - normálová síla

$f$  - koeficient tření



Obr. 8 Kammova kružnice přilnavosti [13]

Průměr kružnice je přímo úměrný velikosti přilnavosti. Z kružnice lze vyčíst, že pokud výslednice sil působících na pneumatiku je větší než průměr kružnice, dojde ke ztrátě adheze. Tento model přilnavosti je spíše ideální, reálně má kružnice tvar elipsy, neboť adheze je větší v podélném směru. [13]



### 3 MOŽNOSTI MĚŘENÍ CHARAKTERISTIK

Pokud je potřeba nějakým způsobem zkoumat charakteristiky pneumatik, tak jsou v podstatě 2 možnosti. Jednou z nich je aplikace nějakého matematického modelu, které byly uvedeny v předchozí kapitole a jeho následné použití v nějakém programu. Pro použití matematického modelu je třeba znát na začátku vstupy a ve výsledku budou vypočteny výstupy. Druhou možností je reálný test. Tady je to přesně naopak. Z testu jsou známy výstupy a poté se zpětně dostanou vstupy.

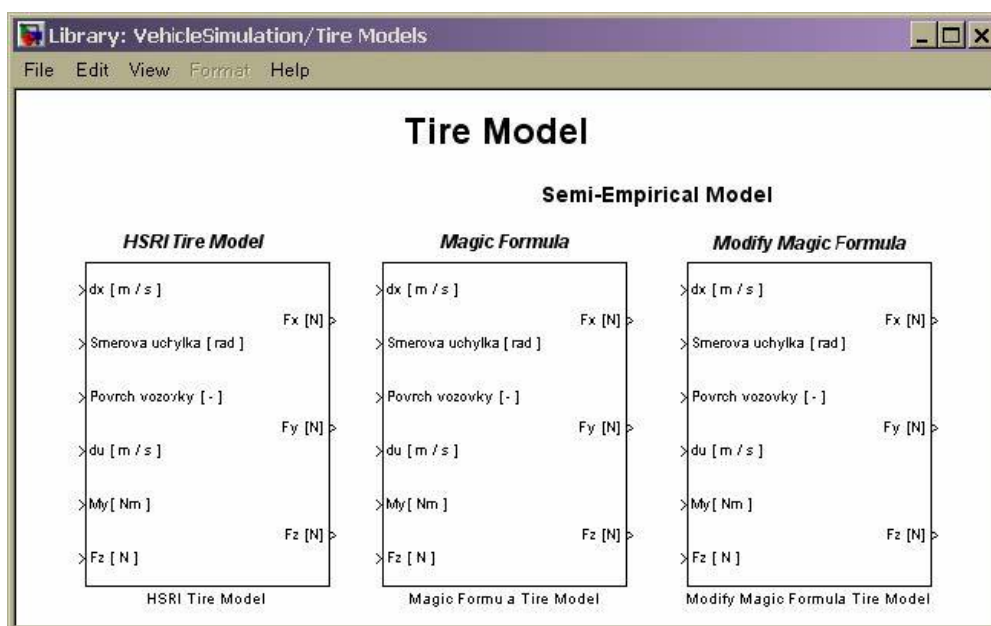
#### 3.1 APLIKACE MATEMATICKÉHO MODELU

##### 3.1.1 POUŽITÍ PROGRAMU MATLAB/SIMULINK

Po vybrání jednoho nebo více modelů je třeba všechny vstupní proměnné nadefinovat v prostředí tohoto programu. Pak je potřeba naprogramovat všechny rovnice, které většinou mají za úkol vypočítat sílu nebo moment. Po určení neznámých už zbývá poslední krok, a to vykreslení grafů určitých závislostí. Tento způsob získání charakteristik je ovšem složitější.

#### VEHICLE SIMULATION KNIHOVNA

Jedná se o knihovnu či plugin, který je možno implementovat do programu MATLAB/Simulink a má již v sobě naprogramované některé matematické modely. Tato knihovna se zajímá o celkovou dynamiku vozidla. Samozřejmostí je možnost užití části, kde jsou přímo modely pneumatik. Knihovna obsahuje 3 modely a to: HSRI, Magic Formula a jeho modifikaci. Všechny modely mají 6 vstupních proměnných a 3 proměnné na výstupu. Mezi vstupní proměnné patří rychlost vozidla, úchylka kola, typ vozovky, obvodová rychlost, moment na pneumatice a reakce v radiálním směru. Na výstupu jsou 3 síly ve všech směrech souřadné soustavy. [6]

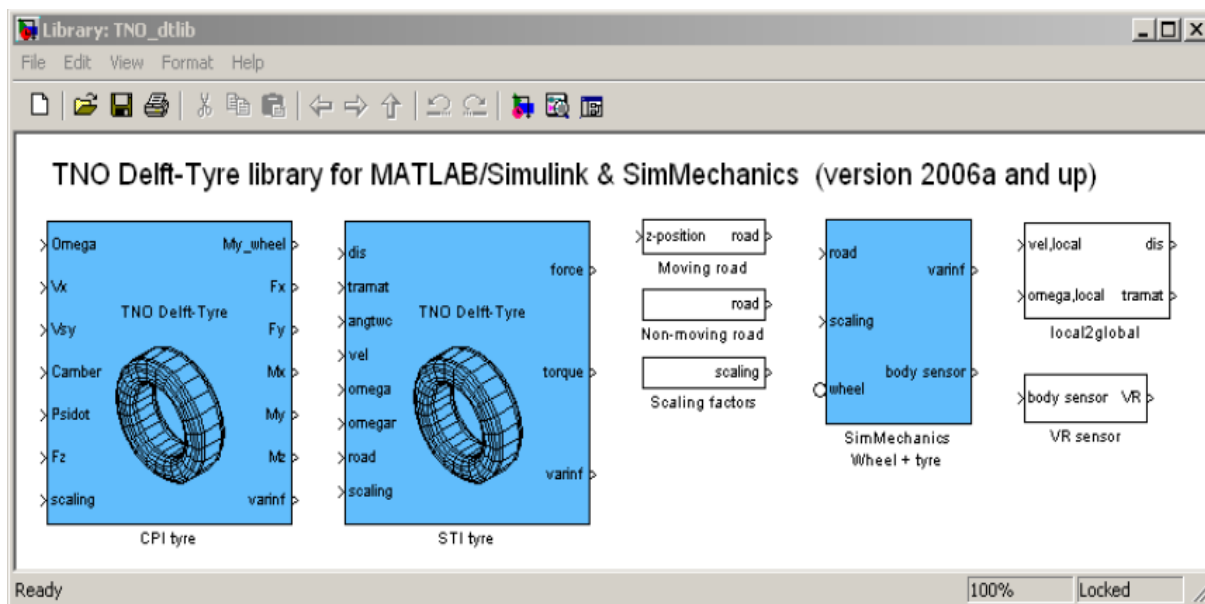


Obr. 9 Vehicle simulation knihovna [6]



**TNO DELFT-TYRE KNIHOVNA**

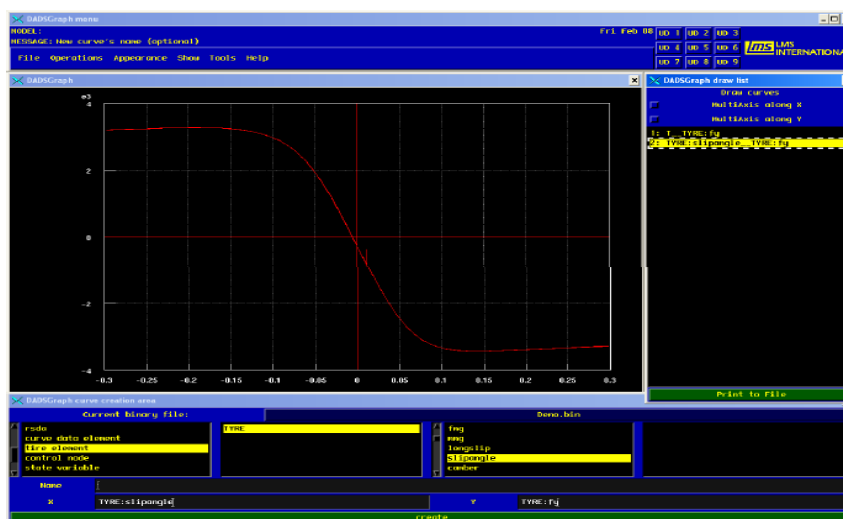
Jde o další knihovnu do programu MATLAB/Simulink, která obsahuje MF-Tyre/MF-Swift 6.1 model pneumatiky. Na výběr je ze dvou typů tohoto modelu. Jedná se o CPI Tyre a STI Tyre. U CPI je na vstupu 7 proměnných a na výstupu taky 7. U STI je na vstupu 8 a na výstupu 3. Jde také nastavit měřítko pneumatiky a typ povrchu vozovky. [7]



Obr. 10 TNO Deft-Tyre knihovna [7]

### 3.1.2 LMS DADS SOFTWARE

Tento program také pracuje s modelem pneumatiky MF-Tyre/MF-Swift 6.1. Opět jsou nastavit různé vlastnosti pneumatiky a její velikost. Program nejdříve vykreslí 3D model pneumatiky, který má zjednodušený tvar, následně proběhne simulace a nakonec vykreslí charakteristiky pneumatiky. [7]

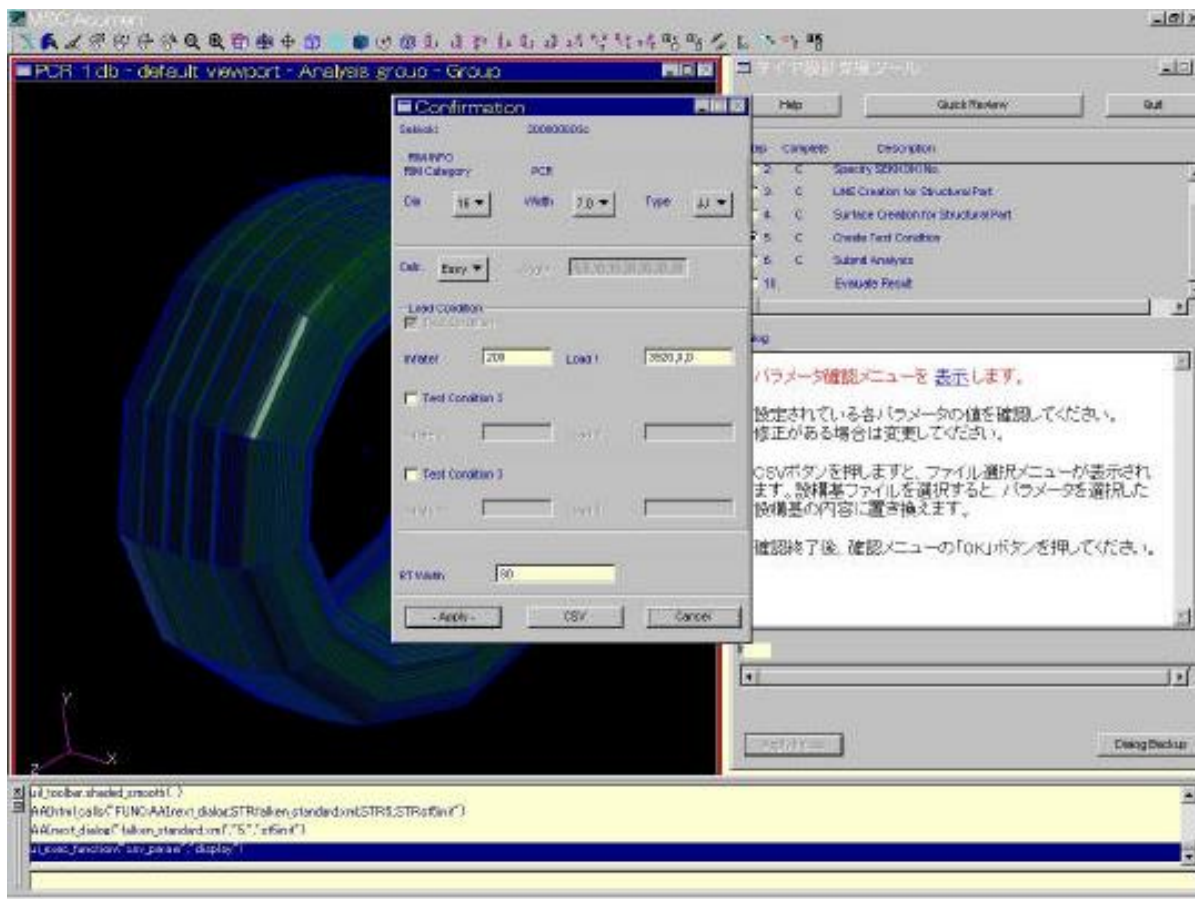


Obr. 11 LMS Dads software [7]



### 3.1.3 MSC ADAMS SOFTWARE

Tento software se zabývá obecně dynamikou vozidla. Obsahuje však modul ADAMS/Tire, který je velice univerzální. Lze v něm totiž simulovat spousty matematických modelů. Samozřejmostí je analýza sil a momentů. Lze si dokonce vybrat typ vozidla a typ vozovky, kde je možnost i simulace životnosti při nárazu do obrubníku či najetí na díru. Takže tento program je velice užitečný. Nejdříve je třeba definovat údaje o pneumatice, pak je třeba zvolit matematický model a vlastnosti vozovky. Následuje simulace a s tím související data. [5]



Obr. 12 MSC Adams software [9]

## 3.2 REÁLNÉ TESTY

### 3.2.1 MTS SYSTEMS CORPORATION

Reálným testem pneumatik se zabývá např. firma MTS Systems Corporation. Testy probíhají tak, že pneumatika je upnuta do držáku a je různě zatěžována, přitom jsou na ni připojeny snímače či senzory a zaznamenávají data. Všechny tyto systémy testů pneumatik nabízí přesné ovládání a intuitivní software, takže inženýři mohou nastavit různé parametry a možnosti měření. Firma nabízí 3 základní možnosti testů:



- **Měření valivého odporu**

Měří se valivé odpory pneumatik od malých aut až po auta nákladní. Jedná se o přesnou metodu a využívá se pásu, který působí na pneumatiku. V testu je cíl snížit valivý odpor co nejvíce, což velice kladně ovlivní celou dynamiku vozidla.

- **Flat-Trac**

Tento typ testu spočívá v simulaci silnice, kdy je zkoumaná pneumatika umístěna na rotujícím pásu. Měří se dynamické síly a momenty. Firma udává, že přesnost testů je vysoká a testují se pneumatiky od vozíků až po závodní pneumatiky.



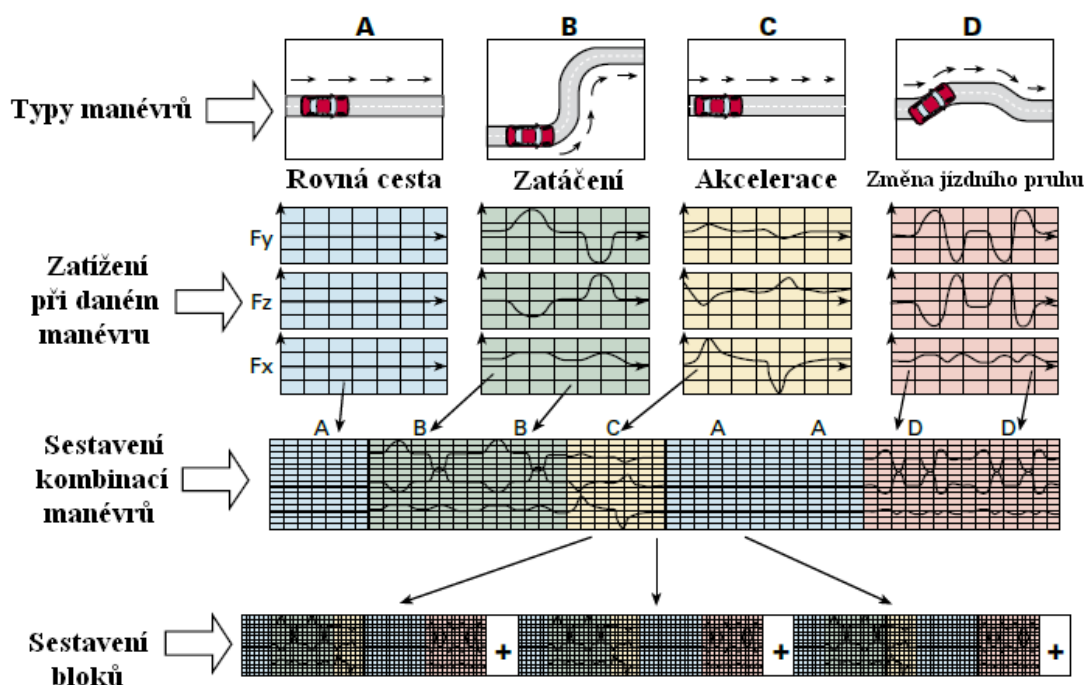
*Obr. 13 Flat-Trac test [16]*

- **Opotřebení běhounu**

Test je dlouhodobějšího charakteru, ovšem samozřejmě zrychlený oproti použití pneumatiky na vozidle. Test probíhá 24 hodin a 7 dní v týdnu. Zkoumají se boční síly a jejich vliv na živostnost, zatížení momentem při běžném zatížení pneumatiky a úhel sklonu pro splnění specifických potřeb testování. Tento test je tedy primárně na zkoumání výdrže běhounu. [8]



Obr. 14 Měření opotřebení běhounu [14]



Obr. 15 Schéma využití dat po měření [14]



### 3.2.2 SMITHERS RAPRA

Firma Smithers Rapra je světovou firmou v oboru kaučuků, plastů, polymerů a kompozitů. Vydala na toto téma spousty publikací. Zabývá se taktéž testy pneumatik. A to těmito oblastmi:

- **Laboratorní testy**

V této oblasti se zkoumají obecně radiální pneumatiky, jejich konstrukce a fyzikální vlastnosti.

- **Síly a momenty**

Testují se pneumatiky pro všechny druhy vozidel. Může být testováno se zatížením až 45 kN, v závislosti na zatížení, úhlu skluzu, úhlu sklonu a rychlosti.

- **Valivý odpor**

Je zkoumán dopad na spotřebu paliva díky kombinaci tepelných ztrát, aerodynamického odporu a tření mezi pneumatikou a povrchem vozovky.

- **Vnitřní opotřebení běhounu**

Kombinací laboratorních přístrojů a modelovacího softwaru se zkoumá běhoun a jeho životnost. Součástí testu je laserové profilování, kde počítač vyhodnocuje vstupy.

- **Trakce na sněhu a ledu**

Zde se zkoumá chování na specifickém povrchu. Firma vyvinula a patentovala aparát pro měření sil a momentů na sněhu a ledu. [10]



Obr. 16 Obrázky z testů firmy Smithers Rapra [15]



## ZÁVĚR

Při vývoji automobilů se klade důraz na vylepšování podvozku. Ke správné funkci podvozku je také důležité mít kvalitní a správné pneumatiky. K výrobě pneumatiky vede dlouhá cesta, která začíná poznáním vlastností a složením směsi, ze které má být pneumatika vyrobena. Zásadní při jejím vývoji je zjištění jejího zatížení. Zatížení může být silové nebo momentové. Momentové zatížení souvisí se silovým zatížením, kdy síla působí na nějakém rameni. Zatížení můžeme zjistit pomocí aplikace matematického modelu ve vhodném programu. Přitom k výpočtu je potřeba vstupních podmínek a parametrů. Obecně je nazýváme vstupy. Tyto vstupy můžeme získat i opačnou cestou, kdy pomocí výstupů (zatížení) se snažíme získat a ovlivňovat tyto vstupy. Tyto procesy nazýváme simulace a ve druhém případě reálné testy. Firma MTS Systems provádí testy takovým způsobem, že realizuje různé typy manévru, které vznikají při běžném provozu a následně je skládá do bloků a zkoumá různé kombinace těchto bloků. Firma Smithers Rapra se soustředí zase na složení směsi.

Zatížení, které vzniká mezi pneumatikou a vozovkou můžeme nazývat jako kontaktní tlak, jelikož tlak je definován jako síla na plochu. Měření tohoto tlaku je ovšem složitější, neboť přesně nelze definovat kontaktní plochu. Síly, vypočtené pomocí modelů jsou většinou definovány jako bodové, ale jak již bylo zmíněno, tak jsou síly reálně plošného charakteru. Některé modely ovšem dávají slušné výsledky. Magic Formula Model se stal rozšířeným a pracovala s ním řada předních světových firem. Za zmínku stojí třeba firma Michelin. Některé modely jsou schopny počítat i s parametry, které se mění v čase, kde průběh je popsán diferenciální rovnicí. Mezi tuto kategorii se řadí např. String tire model.

Dalším důležitým parametrem je koeficient tření mezi vozovkou a pneumatikou. Závislost tohoto tření a sil nám dává Kammova kružnice. Z této kružnice je zřetelné, co se stane, když součet sil je větší než poloměr kružnice. Ztráta adheze je nežádoucí jev.

Podle mého názoru jsou simulace i reálné testy velice důležité při vývoji pneumatik i automobilů a souvisí spolu. Každá společnost zabývající se pneumatikami musela těmito simulacemi a testy projít. Vývoj jde stále dopředu, přesto si myslím, že vývoj pneumatik už je na takové úrovni, že nová vylepšení se aplikují po menších krocích, než tomu bylo dříve. Také si myslím, že se nyní více používají při vývoji reálné testy, kterými se případně ověří výsledek simulace, a pneumatiky se testují také na automobilových závodech, kde se poznatky dají poté využít na pneumatikách pro osobní automobily. V současnosti jsou to firmy Michelin, Pirelli, Hankook a DMAC.



## POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] PACEJKA, H. B. *Tyre Models For Vehicle Dynamics Analysis*. 1993. ISBN 90-265-1332-1.
- [2] VLK, F. *Podvozky motorových vozidel*. Nakladatelství VLK, Třetí vydání, Brno, 2006. ISBN 80-239-6464-X.
- [3] DIXON, J. C. *Tires, suspension and handling*. SAE International, Warrendale, 1996. ISBN 1-56091-831-4.
- [4] BRACH, R. M. *Tire models for vehicle dynamic simulation and accident reconstruction* [online]. SAE International, University of Notre Dame, 2009. [cit. 2013-03-12]. ISSN 0148-7191 Dostupné z: <https://www.brachengineering.com/content/publications/SAE-2009-01-0102-Brach-Engineering.pdf>
- [5] KLEGER, O. *Současný stav výzkumu interakce pneumatiky s podloží*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 44 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Jan Pokorný.
- [6] KLEČKA, R. *Ověření systému řízením jízdy automobilu metodou HIL simulací*. XXXII. Seminar ASR 2007 „Instruments and control“, VŠB-TUO, Ostrava, 2007. ISBN 978-880-248-1272-4
- [7] TNO Automotive. *MF-Tyre & MF-SWIFT 6.1 User manual* [online]. Helmond, 2008. [cit. 2013-03-15]. ISSN 20080208. Dostupné z: <https://www1.ethz.ch/biomed.ee/intranet/support/madymo/Tyremodels.pdf>
- [8] MTS Systems Corporation. *Tire Testing Systems*. MTS [online]. 2004-2013, [cit. 2013-03-19]. Dostupné z: <http://www.mts.com/en/products/producttype/test-systems/simulation-systems/tire/index.htm>
- [9] YAMANISHI, T., MATSUDA, K. *Integrated Tire Analysis and Simulation* [online]. Osaka [cit. 2013-03-19]. Dostupné z: <http://web.mscsoftware.com/support/library/conf/auto00/p01800.pdf>
- [10] SMITHERS Rapra. *Tire Testing*. SMITHERS Rapra [online]. 2013, [cit. 2013-03-20]. Dostupné z: <http://www.smithersrapra.com/services/220-services-tire-performance-testing>
- [11] PYREŇ, Martin. *Vše o pneumatikách*. Profi-pneu [online]. 2013, [cit. 2013-04-14]. Dostupné z: <http://www.profi-pneu.cz/informace/vse-o-pneumatikach.html>
- [12] GURKAN, E. *Tire Modeling* [online]. 2009, [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: <http://www.menet.umn.edu/~gurkan/Tire%20Modeling%20%20Lecture.pdf>
- [13] SAJDL, Jan. *Kammova kružnice přilnavosti*. *Autolexicon.net* [online]. [cit. 2013-05-15]. Dostupné z: <http://cs.autolexicon.net/articles/kammova-kruznice-prilnavosti>
- [14] MTS Systems Corporation. *Tire Tread Wear Simulation System* [online]. 2006, [cit. 2013-03-19]. ISSN 100-153-053. Dostupné z: [http://www.mts.com/ucm/groups/public/documents/library/dev\\_002232.pdf](http://www.mts.com/ucm/groups/public/documents/library/dev_002232.pdf)



- [15] SMITHERS Rapra. Smithers Rapra test. *Google obrázky* [online]. 2013, [cit. 2013-03-20]. Dostupné z:  
[https://www.google.cz/search?q=smithers+rapra+test&hl=cs&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=fEaWUeGWF4iYPfq2gYgJ&ved=0CAcQ\\_AUoAQ&biw=1366&bih=606](https://www.google.cz/search?q=smithers+rapra+test&hl=cs&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=fEaWUeGWF4iYPfq2gYgJ&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1366&bih=606)
- [16] MTS Systems Corporation. *Flat-Trac Tire Test Systems* [online]. 2005, [cit. 2013-05-20]. ISSN 100-147-891. Dostupné z:  
[http://www.mts.com/ucm/groups/public/documents/library/dev\\_002227.pdf](http://www.mts.com/ucm/groups/public/documents/library/dev_002227.pdf)



## SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

|               |                |                                                                        |
|---------------|----------------|------------------------------------------------------------------------|
| $a$           | $[-]$          | koeficient pro výpočet kořenu kvadratické rovnice pomocí diskriminantu |
| $a$           | $[m]$          | vzdálenost k posuvu                                                    |
| $A$           | $[-]$          | konstanta                                                              |
| $b$           | $[-]$          | koeficient pro výpočet kořenu kvadratické rovnice pomocí diskriminantu |
| $B$           | $[m]$          | šířka pneumatiky                                                       |
| $B$           | $[N]$          | brzdná síla                                                            |
| $B$           | $[-]$          | konstanta tuhosti                                                      |
| $B$           | $[-]$          | bezrozměrná konstanta                                                  |
| $B_{yk}$      | $[-]$          | udává sklon vozovky ve směru pohybu                                    |
| $c$           | $[-]$          | koeficient pro výpočet kořenu kvadratické rovnice pomocí diskriminantu |
| $c_c$         | $[Nm^{-1}]$    | boční tuhost kostry na jednotku délky                                  |
| $C$           | $[-]$          | součinitel tvaru                                                       |
| $C$           | $[-]$          | bezrozměrná konstanta                                                  |
| $C_\alpha$    | $[-]$          | koeficient boční síly                                                  |
| $C_\alpha$    | $[-]$          | koeficient boční síly                                                  |
| $C_1$         | $[-]$          | konstanta diferenciální rovnice                                        |
| $C_2$         | $[-]$          | konstanta diferenciální rovnice                                        |
| $C_{F\alpha}$ | $[Nrad^{-1}]$  | směrová tuhost                                                         |
| $C_{F\gamma}$ | $[Nrad^{-1}]$  | klopná tuhost                                                          |
| $C_{Fk}$      | $[Nrad^{-1}]$  | tuhost podélného skluzu                                                |
| $C_{M\alpha}$ | $[Nmrad^{-1}]$ | vratná momentová tuhost                                                |
| $C_{M\gamma}$ | $[Nmrad^{-1}]$ | klopná momentová tuhost                                                |
| $C_s$         | $[-]$          | brzdící koeficient                                                     |
| $C_s$         | $[-]$          | koeficient podélné síly                                                |
| $C_{yk}$      | $[-]$          | závislost na svislém zatížení                                          |
| $d$           | $['']$         | průměr ráfku                                                           |
| $dx$          | $[m]$          | přírůstek délky                                                        |
| $df_z$        | $[-]$          | přírůstek svislého zatížení                                            |
| $D$           | $[m]$          | amplituda                                                              |
| $D$           | $[N]$          | smyková síla                                                           |
| $D$           | $[-]$          | bezrozměrná konstanta                                                  |
| $D_t$         | $[-]$          | konstanta                                                              |
| $D_{vyk}$     | $[N]$          | závislost na $\gamma$ a $\alpha$                                       |
| $E$           | $[-]$          | konstanta křivosti                                                     |
| $E$           | $[-]$          | bezrozměrná konstanta                                                  |
| $f$           | $[-]$          | koeficient tření                                                       |
| $F_b$         | $[N]$          | brzdná síla                                                            |
| $F_v$         | $[N]$          | vertikální síla                                                        |
| $F_x$         | $[N]$          | podélná síla                                                           |
| $F_y$         | $[N]$          | boční síla                                                             |
| $F_{yk}$      | $[N]$          | boční síla při bočním skluzu                                           |
| $F_z$         | $[N]$          | normálová síla                                                         |
| $F'_{z0}$     | $[N]$          | adaptivní nominální zatížení $F_z$                                     |



|           |                     |                                                                           |
|-----------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $F_{z0}$  | [N]                 | nominální zatížení $F_z$                                                  |
| $G_{yk}$  | [N]                 | tíhová funkce                                                             |
| $H$       | [m]                 | výška pneumatiky                                                          |
| $K$       | [-]                 | bezrozměrná konstanta                                                     |
| $L$       | [m]                 | jmenovatel poměru kontaktu pneumatiky s vozovkou                          |
| $M_x$     | [Nm]                | klopný moment                                                             |
| $M_y$     | [Nm]                | moment valivého odporu                                                    |
| $M_z$     | [Nm]                | moment od normálové síly                                                  |
| $M_{zr}$  | [Nm]                | vratný moment                                                             |
| $q_y$     | [Nm <sup>-2</sup> ] | kontaktní tlak                                                            |
| $r_{By1}$ | [-]                 | korekční koeficient pro sklon vozovky                                     |
| $r_{By2}$ | [-]                 | korekční koeficient pro sklon vozovky                                     |
| $r_{By3}$ | [-]                 | korekční koeficient pro sklon vozovky                                     |
| $r_{Cy1}$ | [-]                 | korekční koeficient pro svislé zatížení                                   |
| $r_e$     | [m]                 | efektivní poloměr valení                                                  |
| $r_{Hy1}$ | [-]                 | korekční koeficient pro horizontální posuv                                |
| $r_{Hy2}$ | [-]                 | korekční koeficient pro horizontální posuv                                |
| $R_k$     | [m]                 | poloměr kružnice                                                          |
| $r_{Vy1}$ | [-]                 | korekční koeficient závislý na $V_y$                                      |
| $r_{Vy2}$ | [-]                 | korekční koeficient závislý na $V_y$                                      |
| $r_{Vy3}$ | [-]                 | korekční koeficient závislý na $V_y$                                      |
| $r_{Vy4}$ | [-]                 | korekční koeficient závislý na $V_y$                                      |
| $r_{Vy5}$ | [-]                 | korekční koeficient závislý na $V_y$                                      |
| $r_{Vy6}$ | [-]                 | korekční koeficient závislý na $V_y$                                      |
| $s$       | [-]                 | smýkání pneumatiky                                                        |
| $S$       | [N]                 | tahová síla                                                               |
| $S$       | [N]                 | boční síla                                                                |
| $S_1$     | [N]                 | X složka celkové tahové síly                                              |
| $S_2$     | [N]                 | Y složka celkové tahové síly                                              |
| $S_H$     | [m]                 | posuv v horizontálním směru                                               |
| $S_{Hr}$  | [m]                 | horizontální posuv                                                        |
| $S_{Ht}$  | [m]                 | horizontální posuv                                                        |
| $S_{Hyk}$ | [m]                 | horizontální posuv od tíhové funkce                                       |
| $s_p$     | [-]                 | skluz                                                                     |
| $S_v$     | [m]                 | posuv ve vertikálním směru                                                |
| $S_{vyk}$ | [m]                 | vertikální posuv                                                          |
| $t$       | [m]                 | stopa pneumatiky                                                          |
| $v$       | [m]                 | boční průhyb vlákna                                                       |
| $V_x$     | [ms <sup>-1</sup> ] | podélná složka celkového vektoru rychlosti středu kola                    |
| $V_y$     | [ms <sup>-1</sup> ] | boční složka celkového vektoru rychlosti středu kola                      |
| $x_m$     | [m]                 | X hodnota z grafu funkce                                                  |
| $X$       | [rad]               | vstupní proměnné (boční skluz $\tan \alpha$ nebo podélný skluz $\kappa$ ) |
| $X_s$     | [m]                 | čitatel poměru kontaktu pneumatiky s vozovkou                             |
| $y_a$     | [m]                 | Y hodnota z grafu funkce                                                  |
| $Y$       | [N]                 | výstupní proměnná                                                         |
| $Z$       | [N]                 | normálová síla                                                            |



|                 |                       |                                                    |
|-----------------|-----------------------|----------------------------------------------------|
| $\alpha$        | [rad]                 | boční skluz                                        |
| $\alpha_k$      | [°]                   | úhel nití u radiální pneumatiky                    |
| $\alpha_{\max}$ | [rad]                 | maximální úhel bočního skluzu                      |
| $\alpha_r$      | [rad]                 | úhel směrové úchylky                               |
| $\alpha_t$      | [rad]                 | úhel směrové úchylky                               |
| $\beta$         | [-]                   | bezrozměrné číslo, určuje, který vztah máme použít |
| $\gamma$        | [rad]                 | úhel odklonu                                       |
| $\kappa$        | [rad]                 | podélný skluz                                      |
| $\kappa_S$      | [-]                   | součet podélného skluzu a horizontálního posuvu    |
| $\lambda_{Fz0}$ | [-]                   | poměr velikostí adaptivního a nominálního zatížení |
| $\mu$           | [-]                   | koeficient tření                                   |
| $\mu'$          | [-]                   | ekvivalentní koeficient tření                      |
| $\mu_p$         | [-]                   | poměr $F_x/F_z$                                    |
| $\mu_x$         | [-]                   | součinitel tření v podélném směru                  |
| $\mu_y$         | [-]                   | součinitel tření v bočním směru                    |
| $\sigma$        | [m <sup>-1</sup> ]    | substituce                                         |
| $\Omega$        | [rads <sup>-1</sup> ] | úhlová rychlost při aplikaci točivého momentu      |
| $\Omega_0$      | [rads <sup>-1</sup> ] | úhlová rychlost otáčení kola                       |