

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY

RELIABILITY ANALYSIS OF THE HIP JOINT ENDOPROSTHESIS CERAMIC HEAD

DIPLOMOVÁ PRÁCE MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE AUTHOR Bc. MICHAL MÁLEK

VEDOUCÍ PRÁCE SUPERVISOR Ing. VLADIMÍR FUIS, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky Akademický rok: 2009/2010

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Michal Málek

který/která studuje v magisterském navazujícím studijním programu

obor: Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

#### Spolehlivostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy

v anglickém jazyce:

#### Reliability analysis of the hip joint endoprosthesis ceramic head

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlavice totální kyčelní endoprotézy se vyrábí z biokeramiky, pro kterou je charakteristická křehkost. Z tohoto důvodu je nutné kromě napjatostní analýzy provádět i analýzu pravděpodobnosti porušení.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je provést spolehlivostní analýzu keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy s různými tvarovými odchylkami kuželových kontaktních ploch. Kromě napjatosti bude analyzována i pravděpodobnost porušení, která se určí z Weibullovy teorie nejslabšího článku. Seznam odborné literatury:

Bush, D. R. (1993) Designing Ceramic Components for Structural Applications. Journal of Materials Engineering and Performance, Volume 2, ASM International pp. 851-862.
ANSYS 11 - manuál

Vedoucí diplomové práce: Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010. V Brně, dne 20.11.2009

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. Ředitel ústavu prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc. Děkan fakulty

### Bibliografická citace

MÁLEK, M. *Spolehlivostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 75 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

### Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího diplomové práce pana Ing. Vladimíra FUISE, Ph.D. a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Brně dne .....

-----

Michal Málek

#### Poděkování

Poděkování za vedení mé diplomové práce a za cenné rady chci vyjádřit panu Ing. Vladimíru FUISOVI, Ph.D, za odborné rady panu prof. Ing. Přemyslu Janíčkovi, DrSc., za pomoc při práci s programem Maple panu Ing. Petru Kundrátovi, Ph.D. a všem, kteří mi jakkoliv pomáhali s řešením problémů týkajících se této diplomové práce.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině, která mě po celou dobu studia plně podporovala a v neposlední řadě také mé přítelkyni, za její trpělivost po celou dobu tvorby této diplomové práce.

## Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá pravděpodobností porušení keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy při zkouškách dle normy ISO 7206-5. V první části je provedena napjatostní analýza pomocí metody konečných prvků v programu ANSYS. Bylo analyzováno celkem šest typů keramických hlavic s různou geometrií, a to jak pro ideální geometrii hlavice a dříku, tak pro tvarové imperfekce od nominální kuželovitosti dříku a hlavice. Výsledné hodnoty hlavních napětí z napjatostní analýzy byly vstupními hodnotami pro druhou část – analýzu pravděpodobnosti porušení. Zde byla použita Weibullova teorie nejslabšího článku, a sice tříparametrické a dvouparametrické Weibullovo rozdělení.

**Klíčová slova**: TEP, keramická hlavice, ISO 7206-5, napjatostní analýza, spolehlivostní analýza, Weibullova teorie

## Abstract

This diploma thesis deals with probability of fracture ceramic head of total hip endoprosthesis during tests by the standard ISO 7206-5. In the first part is made stress analysis with method of finite elements in program ANSYS. Six types of ceramic head with different geometry was analysed for ideal geometry of head and shaft, and also for shape imperfections from nominal conical shaft and head. The final values of principal stress from stress analysis were entry values for the second part – probability of fracture analysis. Weibull's weakest-link theory was applied, namely 3-Parameter and 2-Parameter Weibull's distribution.

**Key words**: TEP, ceramic head, ISO 7206-5, stress analysis, reliability analysis, Weibull's theory

## Obsah

1. Úvod	12
2. Problémová situace	13
3. Formulace problému	14
3.1 Formulace problému	14
3.2 Cíle řešení	14
4. Rešeršní studie	14
4.1 Literatura zabývající se deformačně napěťovou analýzou keramické hlavic	e TEP 14
4.2 Literatura zabývající se porušováním křehkých materiálů	15
5. Analýza problému	16
5.1 Zhodnocení rešeršní studie	16
5.2 Analýza nadřazených restrikcí	16
6. Popis soustavy, na které je problém řešen	17
6.1 Historie totální kyčelní endoprotézy	17
6.2 Rozdělení TEP	17
7. Systém podstatných veličin pro modelování napiatosti	19
7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové m	odelování
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny M podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové modelovaní napjatosti</li> </ul>	odelování 19
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové m napjatosti</li> <li>7.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny <i>M</i> a jejich parametrizace [1]</li> </ul>	odelování 19 20
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové m napjatosti</li> <li>7.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny <i>M</i> a jejich parametrizace [1]</li> <li>7.3 Kvantifikace prvků</li> </ul>	odelování 19 20 21
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové m napjatosti</li> <li>7.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny <i>M</i> a jejich parametrizace [1]</li> <li>7.3 Kvantifikace prvků</li> <li>8. Volba metod řešení modelování napjatosti</li></ul>	odelování 19 20 21 22
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové m napjatosti</li> <li>7.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny <i>M</i> a jejich parametrizace [1]</li> <li>7.3 Kvantifikace prvků</li> <li>8. Volba metod řešení modelování napjatosti</li></ul>	odelování 19 20 21 22 23
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mapjatosti</li></ul>	odelování 19 20 21 22 23 23
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mapjatosti</li></ul>	odelování 19 20 21 22 23 23 24
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové m napjatosti</li></ul>	odelování 19 20 21 22 23 23 24 27
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mnapjatosti</li></ul>	odelování 
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mnapjatosti</li></ul>	odelování 
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mnapjatosti</li></ul>	odelování 
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mnapjatosti</li></ul>	odelování 
<ul> <li>7.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové mnapjatosti</li> <li>7.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny <i>M</i> a jejich parametrizace [1]</li></ul>	odelování 

10. Realizace procesu řešení	. 30
10.1 Model diskretizace hlavice a dříku	. 30
10.2 Citlivostní analýza diskretizace hlavice a dříku	. 31
10.3 Kontakt hlavice a dříku	. 33
10.3.1 Vytvoření a definování tzv. kontaktního povrchu "CONTACT" a cílového povrc "TARGET"	:hu . 34
10.3.2 Zadávání parametrů pro kontakt	. 35
10.3.3 Radiální tlak v místě kontaktu	. 35
10.3.4 Penetrace v místě kontaktu	. 37
10.3.5 Koeficient tření	. 39
11. Analýza výsledků napjatosti	. 40
11.1 Hlavice bez tvarových odchylek	. 40
11.2 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti	. 42
11.3 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti	. 44
11.4 Vliv tvarových odchylek	. 46
12. Weibullova teorie nejslabšího článku	. 48
13. Materiálové parametry	. 48
14. Systém podstatných veličin pro pravděpodobnost porušení	. 49
14.1 Vytvoření množiny <i>M</i> podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové modelová pravděpodobnosti porušení	ní . 49
14.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny <i>M</i> a jejich parametrizace [1]	. 50
14.3 Kvantifikace prvků	. 50
15. Tvorba výpočtového modelování pravděpodobnosti porušení	. 51
15.1 Model zahrnující pouze první hlavní napětí	. 51
15.2 Model zahrnující všechna tři hlavní napětí	. 53
16. Realizace procesu řešení	. 55
16.1 3-parametrické Weibullovo rozdělení (model uvažující jednoosou napjatost)	. 55
16.1.1 Hlavice bez tvarových odchylek	. 55
16.1.2 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ_MIN	. 56
16.1.3 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ_MAX	. 57
16.2 2-parametrické Weibullovo rozdělení (model uvažující jednoosou napjatost)	. 58
16.2.1 Hlavice bez tvarových odchylek	. 58

16.2.2 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ_MIN 59
16.2.3 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ_MAX 60
16.3 Vliv tvarových odchylek (rozdíl mezi 2- a 3-parametrickým Weibullovým rozdělením)
16.4 2-parametrické Weibullovo rozdělení (model uvažující trojosou napjatost)
17. Závěr
18. Seznam použitých zkratek a symbolů71
19. Použitá literatura
20. Příloha

## 1. Úvod

Při dnešním sedavém způsobu života, kdy lidé mají stále méně času na pravidelné sportovní aktivity, je zvýšený výskyt nadváhy více než zřetelný. Nadváha je poslední dobou též často nazývána jako epidemie 3. tisíciletí. Říká se, že přejídání už zabilo víc lidí než všechny války dohromady. Počet žen s nadváhou nebo obezitou je v České Republice 68% a u mužů dokonce 78% [21]. S nadváhou, resp. s obezitou je spojená řada nemocí. Jedním z nejčastějších onemocnění související s nadváhou jsou onemocnění kloubů, např. osteoartróza, koxartróza (u kyčlí), gonartróza (u kolen).

Osteoartróza (OA) je degenerativní onemocnění kloubů, pro které je typická destrukce až úplný zánik chrupavky tvořící styčnou plochu mezi kloubní hlavicí a kloubní jamkou. Další poškození kloubu mohou být např. traumatické (úrazy), onkologické (nádory) nebo degenerativní. Statistika uvádí, že v ČR trpí 8,5% mužů a 18% žen některou z mnoha druhů chronické artrózy či artritidy [22].

U pacientů s těžkým stupněm artrózy, např. kyčelního kloubu, přichází na řadu velmi účinné řešení, tzv. umělá náhrada kloubu, neboli totální kyčelní endoprotéza (TEP). Toto řešení patří v současnosti mezi nejčastěji prováděné ortopedické operace. Operativně se vymění jak celá hlavice, tak i kloubní jamka.

Aby byla zajištěna správná funkce TEP po celou dobu životnosti, je nutný její správný návrh, výroba, testování, skladování a sterilizace. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky se problémy s výpočtovým modelováním TEP zabývá již řadu. Ne jinak je tomu i v této diplomové práci, kde první část obsahuje napěťovou analýzu a druhá analýzu spolehlivostní.

## 2. Problémová situace

TEP (obr. 1) je implantát nahrazující obě artikulující části, tzn. u kyčelního kloubu jak jamku, tak hlavici. V Československu se tato metoda jako standardní léčebný postup zavedla již v roce 1969. V současné době je např. jen v Německu ročně implantováno téměř 200 000 TEP kyčelního kloubu [20].

Jednou z největších komplikací týkajících se keramických hlavic je jejich křehkost. Samotná hlavice je spojena s dříkem TEP přes samosvorné kuželové spojení. Díky tomuto spoji vznikají v hlavici tahová napětí, která jsou u keramiky podstatná. K meznímu stavu dochází při tahových napětí 255-260 MPa [16]. Tato napětí je možné ovlivnit vhodnou úpravou geometrie a dodržením rozměrových či geometrických tolerancí. S křehkostí keramiky souvisí i tzv. destrukce hlavice, kdy dojde k jejímu úplnému zničení in vivo. Podle [9] a [11] připadá na 10 000 implantovaných hlavic jedna destrukce. Dle [10] bylo mezi lety 1992 až 1994 v japonské kurumské univerzitní nemocnici implantováno 216 hlavic z oxidu hlinitého o průměru 28mm, které byly spojeny s titanovým dříkem. Z tohoto počtu došlo v jednom případě k destrukci hlavice a u dalších dvou byla detekována vlasová zlomenina. V České republice byla nejhorší situace v jedné z nemocnic na Vysočině, kde bylo do roku 2004 reoperováno 9 kyčelních endoprotéz s



**Obr. 1** Hlavice a dřík TEP (Beznoska s.r.o.) [23]

destruovanou keramickou hlavicí [15]. Tak jako každý zásah do lidského organizmu je i reoperace TEP pro pacienta velmi nepříjemná. Proto je snahou výrobců minimalizovat pravděpodobnost selhání keramických hlavic TEP.

## 3. Formulace problému

#### 3.1 Formulace problému

Ve výrobním procesu může docházet ke vznikům rozměrových nebo geometrických odchylek. Výpočtovým modelováním je možné zjistit, jaký vliv mají výrobní nepřesnosti na velikosti hlavních napětí. Poněvadž je ale pro keramiku charakteristická křehkost, je nutné provést analýzu spolehlivostní. Existují dva možné přístupy výpočtového modelování pravděpodobnosti porušení keramických hlavic. První, jednodušší, uvažuje pouze první hlavní napětí a druhý, který uvažuje všechna tři hlavní napětí.

#### 3.2 Cíle řešení

- vytvoření modelu geometrie keramické hlavice s různými tvarovými odchylkami kuželových ploch
- deformačně napěťová analýza jednotlivých hlavic
- analýza pravděpodobnosti porušení hlavic pomocí Weibullovy teorie nejslabšího článku
- analýza výsledků

## 4. Rešeršní studie

Tato kapitola je přehledem literatury zabývající se tématikou porušování keramických hlavic TEP. Materiály byly získány za pomoci zaměstnanců z areálové knihovny na FSI VUT, dále od vedoucího diplomové práce pana Ing. Vladimíra Fuise Ph.D. a také na internetových serverech elektronických knihoven. Tímto bych chtěl výše zmíněným lidem poděkovat.

# 4.1 Literatura zabývající se deformačně napěťovou analýzou keramické hlavice TEP

• Varga, J. Napjatostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy zatížené dle ISO 7206-5. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 73 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

- tato práce analyzuje posouzení vlivu reálné geometrie na vliv napjatosti uvnitř keramické hlavice. Konkrétně se jedná o nesoulad mezi reálnou geometrií zápichu na dně kužele hlavice a geometrií uvedenou na výkresu.

 Fajfr, M.: Deformačně napěťová analýza keramické hlavice kyčelní endoprotézy s modelovými tvarovými odchylkami kontaktních kuželů, Diplomová práce, 2006

 tato diplomová práce analyzuje vliv výrobních nepřesností a orientace zatížení na napjatost a deformaci keramické hlavice. Jde o výrobní imperfekce typu kuželovitost a ovalita a jejich vzájemné kombinace.

#### 4.2 Literatura zabývající se porušováním křehkých materiálů

• McLean, A., F.; Hartsock, D., L.: An Overview of the Ceramic Design Process, Ceramics and Glasses, Engineered Materials Handbook, Vol. 4, s. 676-689, ASM International 1991

 tento článek se mimo jiné zabývá pravděpodobností porušení keramiky pomocí Weibullovy teorie nejslabšího článku. Rozlišují se zde dva možné výpočtové modely pravděpodobnosti porušení. První, uvažující pouze první hlavní napětí. A druhý, jež uvažuje všechna tři hlavní napětí.

• Sookdeo, S.; Nemeth, N., N.; Bratton, R., L.: Reliability Assessment of Graphite Specimens Under Multiaxial Stresses, NASA/TM-2008-215204, 2008

- tato práce vyšetřuje příčiny porušení dutých grafitových tyčí jaderného reaktoru za působení víceosého namáhání. Zároveň srovnává tři různé metody vyšetřování pravděpodobnosti porušení grafitových tyčí, a to metodu PIA, Weibullovu metodu a Bathdorfovu teorii.

• Fuis, V.: Napjatostní a spolehlivostní analýza keramické hlavice kyčelní endoprotézy, Edice Ph.D. Thesis, 34 s., Brno 2000

v této disertační práci byly zjišťovány příčiny porušování keramických hlavic jak výpočtovým, tak experimentálním modelováním. Hlavice s různou hloubkou samosvorného dna byly modelovány se třemi výrobními imperfekcemi – kuželovitost (kladná, záporná) a ovalita. Současně se analyzoval vliv zoubkování dříku a superponace výrobních imperfekcí. Z hlediska vyšetření pravděpodobnosti porušení keramických hlavic autor použil Weibullovu teorii nejslabšího článku.



## 5. Analýza problému

#### 5.1 Zhodnocení rešeršní studie

- první část prací se zabývala analýzou deformačně napjatostních stavů uvnitř keramické hlavice TEP, přičemž hlavice byly různých velikostí a to s ideální geometrií, ale i s tvarovými odchylkami typu kuželovitost a ovalita. Druhá část řešila problém křehkého chování keramických materiálů a výpočet pravděpodobnosti porušení pomocí Weibullovy teorie nejslabšího článku. Všechny články dopomohly k nastudování nutného minima problematiky porušování keramických hlavic.

#### 5.2 Analýza nadřazených restrikcí

- napjatostní a spolehlivostní analýza musela být prováděna na počítačích s dostupným softwarem a s dostačujícím hardwarovým vybavením. Počítačová učebna na ÚMTMB v budově FSI všechny požadavky na splnění cílů splňovala, i když s určitými omezeními. Provozní doba počítačové učebny je každý pracovní den vždy od 8:00 do 20:00 hod. Pokud nebyla učebna plně využita při výuce, byla možnost ji pro potřeby řešení diplomové práce využít.



## 6. Popis soustavy, na které je problém řešen

#### 6.1 Historie totální kyčelní endoprotézy

První pokusy o náhradu kyčelního kloubu byly zaznamenány již v první polovině 20. století [25]. Do roku 1960 končila většina operací neúspěchem, a to především vlivem nevhodné volby materiálu (biokompatibilita, nadměrný otěr součástí). V roce 1960 Sir John Charnley z Anglie poprvé použil polyetylénovou jamku a kovový dřík s kovovou hlavicí malého průměru (22 cm). Pro fixaci jamky a dříku ke skeletu si půjčil od zubních lékařů polymethylmethakrylát (PPMA), látku známou též jako kostní cement. Od této doby rapidně vzrostla úspěšnost operací TEP kyčelního kloubu a progresivním vývojem prošel i materiál TEP. V České Republice jako první implantoval cementovanou endoprotézu s hlavicí o průměru 32 mm v roce 1969 prof. Oldřich Čech.

#### 6.2 Rozdělení TEP

#### Podle způsobu uchycení ke skeletu

- cementovaná náhrada (obr. 2a) hlavice je do acetabula ukotvena pomocí dříku, který je vyroben z ušlechtilé slitiny (titan, chrom a slitiny kobaltu) a zacementována v horní části femuru. Nevýhodou je nutnost reoperace po cca 15 letech z důvodu uvolnění jamky. Výhodou je její osvědčenost.
- necementovaná náhrada (obr. 2b) v současné době je všeobecně rozšířeno použit kloubních náhrad, které jsou konstruovány tak, aby mohly být implantovány do kosti bez použití kostního cementu. Rostoucí kostní tkáň prorůstá do porézního povrchu dříku. Nevýhodou je pečlivé opracování kosti a nutnost přesného kontaktu kosti s implantátem. Naopak výhodou je rychlé zotavení, nenáročnost, plná pohyblivost a nízká bolestivost



Obr. 2 TEP (Beznoska s.r.o.) [23]: a) cementovaná; b) necementovaná

- *hybridní náhrada* jedna komponenta je fixována bez cementu, obyčejně jamka, a druhá, dřík, je fixována kostním cementem. Tento typ je stále více uplatňující.
- resurfacing jedná se povrchovou náhradu kyčle, kdy dochází k náhradě třecí plochy. Kloubní hlavice je obroušena a je na ni nanesen mimořádně odolný kov. Tento kov také vystýlá acetabulum, které je vyfrézováno dle standardních předpisů. Specifickými komplikacemi u této metody jsou nekróza zbytku hlavice nebo fraktura a poškození krčku. Pozitivem je rychlé zotavení pacienta, nenáročnost, nízká bolestivost.



Obr.3 Resurfacing [19]

SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY

## 7. Systém podstatných veličin pro modelování napjatosti

# 7.1 Vytvoření množiny *M* podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové modelování napjatosti

Modelovaná soustava se skládá z hlavice a dříku (obr. 6), proto i podstatné veličiny zahrnují obě komponenty. Podmnožiny veličin Systému podstatných veličin *M* dle [1]:

S8	-	důsledky	- porušení hlavice
S7	-	projevy objektu	- deformace (rozevření hlavice) - napjatost hlavice (především tahová napětí) - radiální tlak v místě kontaktu
S6	-	procesy a stavy na objektu	<ul> <li>řešený objekt (hlavice a dřík) je v této práci řešena na úrovni makroúrovni mechaniky kontinua, což znamená, že se nezajímáme o ty procesy, které probíhají ve struktuře materiálu a které vedou k deformaci hlavice a tím ke vzniku napjatosti, je tato množina prázdná</li> </ul>
S5	-	vlastnosti objektu (materiálové)	<ul> <li>materiálové charakteristiky hlavice</li> <li>materiálové charakteristiky dříku</li> </ul>
S4	-	ovlivnění objektu	- součinitel smykového tření
S3	-	působení na soustavu (aktivace)	- silové působení od přítlačného tělesa
S2	-	vazby objektu na okolí:	- vazba mezi hlavicí a dříkem - vazba dříku v prostoru
S1	-	geometrické a topologické vlastnos	sti objektu: - geometrie hlavice (dříku) - výrobní imperfekce hlavice (dříku)
S0	-	veličiny, které popisují okolí:	- množina prázdná

### 7.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny *M* a jejich parametrizace [1]

prvek množiny M	činnost prvku	vyjádření pomocí parametrů
geometrie hlavice	popisuje tvar a velikost hlavice (dříku)	l [mm], α [°]
(dříku)		
výrobní imperfekce	výrobní nedokonalosti typu kuželovitost	l [mm], α [°]
hlavice (dříku)		
vazba mezi hlavicí a	spojení (kontakt) mezi hlavicí a dříkem, které	
dříkem	umožňuje jejich vzájemné ovlivňování	
součinitel	tření v místě kontaktu mezi hlavicí a dříkem	COF
smykového tření		
vazba dříku v	spojení mezi dříkem a abstraktním tělesem, které	
prostoru	umožňuje jejich vzájemné ovlivňování	
silové působení od	přítlačné těleso působí silově na keramickou	F [N]
přítlačného tělesa	hlavici, které se zasouvá na kuželový dřík	
materiálové	materiálem hlavice je korundová keramika,	E [MPa],
charakteristiky	příkladem materiálových charakteristik je Youngův	μ[-]
hlavice	modul pružnosti v tahu, Poissonovo číslo	
	materiálem dříku je titanová slitina,	E [MPa],
materiálové	příkladem materiálových charakteristik je Youngův	μ[-]
charakteristiky dříku	modul pružnosti v tahu, Poissonovo číslo	
deformace	rozevření (posuvy) hlavice po zatížení	u [mm]
napjatost hlavice	z hlediska křehkosti vznik důležitých tahových	σ [MPa]
	napětí	
radiální tlak v místě	vyjadřuje silové působení hlavice na plochu dříku	p [MPa]
kontaktu	v místě kontaktu	
porušení hlavice	možnost vzniku křehkého lomu	

Tab. 1 Přiřazení činností prvkům množiny M

#### 7.3 Kvantifikace prvků

- veličiny nezávislé: geometrie hlavice (dříku)
  - výrobní imperfekce hlavice (dříku)
  - vazba dříku v prostoru
  - materiál hlavice
  - materiál dříku
  - silové působení od přítlačného tělesa
- veličiny závislé:
- vazba mezi hlavicí a dříkem
- součinitel smykového tření
- deformace hlavice
- napjatost hlavice
- radiální tlak v místě kontakt
- porušení

## 8. Volba metod řešení modelování napjatosti

U dané soustavy (keramická hlavice-dřík) nelze experimentálně měřit napětí uvnitř hlavice, které je dílčím výsledkem pro výpočet pravděpodobnosti porušení. Mezi stykovými plochami hlavice a dříku dochází k nelinearitě typu kontakt, což výrazně zvyšuje náročnost řešení celé úlohy. Z daných skutečností vyplývá nutnost použití výpočtového modelování.

Pro výpočtové modelování pravděpodobnosti porušení keramických hlavic se používá Weibullova teorie nejslabšího článku. Jelikož vztahy pro výpočet pravděpodobnosti porušení pomocí Weibullovy teorie nejslabšího článku přímo vyžadují diskretizaci modelu, je zde pro výpočtové modelování napjatosti použita metoda konečných prvků (MKP).

Na základě MKP funguje celá řada programů. Mezi nejznámější patří např. ABAQUS, ADINA, ANSYS, NASTRAN. Výpočtové modelování napjatosti uvnitř hlavice je z hlediska dostupnosti (počítačová učebna ÚMTMB) prováděno v programu ANSYS12 (dále jen ANSYS). Pravděpodobnost porušení hlavice je taktéž, především z hlediska dostupnosti, vypočítána pomocí programu Matlab R2008a (dále jen Matlab) a Maple 12 (dále jen Maple).

Výpočtové modelování probíhalo na počítačích s následujícím

- hardware:
- procesor: Intel(R) Core(TM)2 CPU, 6600 @ 2.4GHz
- paměť: 2 GB RAM
- grafická karta: Nvidia GeForce 7300 GT
- software:
- operační systém: Microsoft Windows XP Professional, v. 2002, Service pack 3; 32 a 64 bitová verze
- programy využívané při výpočtovém modelování: Ansys12; Matlab R2008a



## 9. Tvorba výpočtového modelování napjatosti

#### 9.1 Model okolí objektu

Soustava (keramická hlavice, titanový dřík) je provozována *in vivo* v gravitačním poli Země, ve vlhkém prostředí při teplotě asi 37°C. Statické zkoušky pevnosti keramických hlavic dle ISO 7206-5 se ovšem provádí na testovacím stroji ve vzdušném okolí (obr. 4). Teplota vzduchu během zkoušky je přibližně 20°C.



Obr. 4 Zařízení pro statické zatěžování hlavic dle ISO 7206-5

#### bio Contentina echanika FSI, VUT v Brně **9. Tvorba výpočtového modelování napjatosti**

#### 9.1 Model geometrie objektu

Modelovanou soustavou se zde rozumí keramická hlavice a titanový dřík. Přítlačné těleso a posuvný support zde nejsou modelovány – jsou nahrazeny vazbami. Geometrie hlavice (obr. 5) byla modelována dle dílenských výkresů firmy DIAS Trutnov s.r.o. Výkresy jsem si zapůjčil v rámci mé diplomové práce od pana Ing. Vladimíra Fuise, Ph.D. Obvykle se používají dvě varianty velikosti průměru hlavice, a to Ød = 32 mm a Ød = 28 mm. Dále se hlavice dělí podle hloubky kuželového otvoru *I* na *Long, Medium* a *Short* (označení *L, M* a *S* – viz tab. 2). Na dané výkresové dokumentaci bohužel chybělo úplné zakótování zápichu na dně kužele hlavice. Tento nedostatek řešila diplomová práce Ing. Jozefa Vargy [3]. Po více pokusech modelování všech variant zápichu dle kótování autora, jsem z této práce použil pro model geometrie hlavice variantu zápichu u vzorku č. 4. Jelikož celá tato diplomová práce směřovala spíše k určení pravděpodobnosti porušení keramické hlavice, nebyl geometrii zápichu přikládán přílišný význam - tím se zabývala práce Ing. Vargy.

	L	Μ	S
l [mm] (pro d = 32 mm)	15	19	23
l [mm] (pro d = 28 mm)	13,5	17	20



Tab. 2 Označení hlavice podle hloubky l

Obr. 5 Geometrie hlavice TEP

SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY

#### ÚMTMB **9. Tvorba výpočtového modelování napjatosti** FSI, VUT v Brně

K jednotlivým hloubkám kuželového otvoru v hlavici se vyrábí příslušné velikosti dříků. Při zkoušce keramické hlavice ISO 7602-5 [9] se používá dříky se stejnými rozměry, materiálem a se stejným procesem výroby jako dříky, které se používají při reoperaci. Při této se používají dříky s různými výškami kuželových částí v závislosti na hloubce kuželového otvoru hlavice. V této práci je použit model geometrie dříku s délkou *y*1+15 mm.

Z důvodů velkého počtu variant modelování geometrie soustavy zde byl vytvořen parametrický model (obr. 6). Jednotlivými parametry jsou:

- r ... poloměr hlavice
- h ... hloubka kuželového otvoru ode dna hlavice k ose x
- r1 ... poloměr vrcholu kuželového otvoru v hlavici (r1 = d1/2)
- y1 ... vzdálenost vrcholu kuželového otvoru v hlavici od osy x
- q1 ... vzdálenost vnitřní hrany zkosení kuželového otvoru hlavice od osy y



Obr. 6 Geometrie hlavice a dříku s jejich parametry

#### bio Dechanika FSI, VUT v Brně **9. Tvorba výpočtového modelování napjatosti**

Parametry hlavic i s dalšími rozměry jsou uvedeny v příloze (Tab. 1 – 6; tučně parametrizované rozměry).

Všechny varianty hlavic byly modelovány též s tvarovou imperfekcí různá kuželovitost. Se stejnou imperfekcí se modeloval i dřík. Tvarovou odchylku kuželovitost můžeme definovat jako rozdíl vrcholového úhlu jmenovitého kužele a vrcholového úhlu kužele skutečného. V této práci je modelována kuželovitost vždy tak, aby rozdíl od jmenovitého úhlu α u dříku a hlavice dával v součtu rozdíl 10' od ideální kuželovitosti obou komponent (obr. 6 – detail A2 a A3). Původním záměrem byl i model s imperfekcí typu ovalita, ale ten se bohužel z důvodu časového omezení nepodařil namodelovat.

Pozn. Systém	označení	hlavic
--------------	----------	--------

označení – bez tvarové odchylky (Obr. 6 A1)	označení – tvarová odchylka (Obr. 6 A2)	označení – tvarová odchylka (Obr. 6 A3)	r [mm]	l [mm]
hlav1_ideal_L	hlav1_kuz_min_L	hlav1_kuz_max_L	32	15
hlav2_ideal_M	hlav2_kuz_min_M	hlav2_kuz_max_M	32	19
hlav3_ideal_S	hlav3_kuz_min_S	hlav3_kuz_max_S	32	23
hlav4_ideal_L	hlav4_kuz_min_L	hlav4_kuz_max_L	28	13,5
hlav5_ideal_M	hlav5_kuz_min_M	hlav5_kuz_max_M	28	17
hlav6_ideal_S	hlav6_kuz_min_S	hlav6_kuz_max_S	28	20

Tab. 3 Označování hlavic



#### 9.2 Model topologie objektu

Modelovaná soustava je při zkoušce ISO 7602-5 v prostoru rozmístěna dle obr. 4.

#### 9.3 Model vazeb objektu k okolí

Dřík je v reálné soustavě při zkoušce ISO 7602-5 uchycen do posuvného supportu (obr. 4). Tato vazba je modelována jako vetknutí dříku k základnímu tělesu. Tím dojde k zamezení pohybu soustavy v prostoru. Vazba keramické hlavice je realizována kontaktem hlavice a dříku (viz *kap. 10.3*). Celou soustavu jsem z důvodu pozdější spolehlivostní analýzy modeloval jako prostorovou symetrickou ve čtvrtinovém řezu s úhlem 90° (obr. 7). Na plochy řezu byly tedy zadány vazby symetrie.

#### 9.5 Model aktivace objektu z okolí

Zatěžování keramické hlavice během statické zkoušky probíhá silově v ose *y* přes přítlačné těleso (obr. 4). Ten se vyrábí z poměrně poddajného materiálu (např. titan) tak, aby se přizpůsobil tvaru hlavice. V programu ANSYS se ovšem z důvodu lepší stability řešení úloh doporučuje zatěžování deformační. Navíc u této soustavy není hlavice v prostoru vázána, proto bychom byli nuceni u této soustavy při silovém zatěžování použít dva zatěžující kroky (tzv. *loadstepy*) – první (deformační), aby došlo ke kontaktu hlavice a dříku a hlavice byla v prostoru vázána; druhý, samotné silové zatěžování. Při zohlednění těchto faktů jsem použil zatěžování deformační s vertikálním posuvem u = 0,5 mm v jednom zatěžovacím kroku a odečítání zatěžovací síly v kontaktních uzlech. Samotný *loadstep* byl pak rozdělen na 50 *substepů*. Deformační zatížení bylo rozděleno do 413 uzlů po obvodu hlavice s průměrem 32 mm a do 393 uzlů po obvodu hlavice s průměrem 28 mm.

#### 9.6 Model ovlivňování objektu okolím

Z *kapitoly 9.1* plyne, že okolí neovlivňuje napjatost uvnitř hlavice během statické zkoušky zatěžování keramických hlavic dle ISO 7602-5.

#### 9.7 Model materiálu

Hlavice a dřík TEP se vyrábí z různých materiálů, např. kov, keramika. Na tyto materiály jsou kladeny požadavky jako:

- pevnost
- biokompatibilita
- vysoká otěruvzdornost
- dlouhá životnost

#### 9.7.1 Model materiálu hlavice

Modelem materiálu hlavice je zde korundová keramika Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, která se v aloartroplastice používá nejčastěji. Jde o slinutý oxid hlinitý, který musí splňovat tři hlavní kritéria [5]:

- vysoká čistota je nutná pro to, že mechanická pevnost oxidu hlinitého se všeobecně snižuje cizími příměsmi
- vysoká hustota snižuje výskyt pórů, které svým vrubovým účinkem snižují pevnost a zvyšují drsnost povrchu
- 3. jemnost zrna se stoupající velikostí zrna klesá mechanická pevnost a odolnost proti opotřebení

Některé fyzikální vlastnosti korundové keramiky, zejména její hydrofilní parametry, jsou výhodnější pro výrobu komponent kloubních endoprotéz než vlastnosti používaných kovů. Tvrdost je pětkrát až desetkrát vyšší než u známých kovů a jejich slitin.

Model materiálu keramické hlavice je materiál izotropní, elastický s mechanickými vlastnostmi [16]:

modul pružnosti	E = 390 000 MPa
Poissonovo číslo	μ = 0,24

SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY

### 9. Tvorba výpočtového modelování napjatosti FSI, VUT v Brně

#### 9.7.2 Model materiálu dříku

Modelem materiálu dříku je zde slitina titanu TiAl<sub>6</sub>V<sub>4.</sub> Tato slitina byla původně vyvinuta pro letecký průmysl. V sedmdesátých letech vzbudila pozornost výrobců implantátů a někteří ji počali používat jako základní materiál pro výrobu kloubních náhrad. TiAl<sub>6</sub>V<sub>4</sub> má ve srovnání s ostatními kovovými materiály používanými pro výrobu implantátů poloviční modul pružnosti E a velice nízkou plasticitu.

Model materiálu dříku je materiál izotropní, elastický s mechanickými vlastnostmi [17]:

modul pružnosti Poissonovo číslo E = 114 000 MPa μ = 0,34

ÚMTMB

## 10. Realizace procesu řešení

#### 10.1 Model diskretizace hlavice a dříku

Modelování probíhalo ve třech fázích:

- První fáze zahrnovala vytvoření rovinného modelu pomocí prvků typu SHELL 93. Jedná se o skořepinový prvek. Při modelování prvkem SHELL se nejprve vytváří geometrie, která je střednicovou plochou celé skořepiny. Je proto nutné zadávat i tloušťku elementu, která je i tloušťkou této skořepiny. Jelikož vytvořený model sloužil jako rovinná geometrie k rotaci kolem osy rotace (osa *y*), ponechal jsem defaultní tloušťku elementu 1 mm.

 Druhá fáze spočívala v rotaci rovinného modelu vytvořeného v předcházejícím kroku kolem osy rotace a v odstranění původního rovinného modelu. Pro tuto operaci lze v ANSYSu použít prakticky pouze dva typy prvků, a sice tetraedr (čtyřstěn) nebo hexaedr (osmistěn). První typ prvků se používá převážně u geometricky složitých úloh. Poněvadž geometrie hlavice není nijak složitá, použil jsem v tomto kroku kvadratický 20-ti uzlový osmistěn SOLID 95 se třemi stupni volnosti (posuvy u, v, w).

- Třetí konečnou fází je upravení (tzv. sweepování) blízkého okolí osy rotace (obr. 7). Jelikož by při rotaci vznikaly u osy rotace deformované elementy, byla tato oblast sweepována podél osy *y* prvky SOLID 95.



Obr. 7 Model diskretizace hlavice a dříku

SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY

#### 10.2 Citlivostní analýza diskretizace hlavice a dříku

Velikost elementu má rozhodující vliv na přesnost řešení statických deformačně napěťových úloh pomocí MKP. U numerického řešení platí mezi velikostí konečnoprvkové sítě a přesností úlohy závislost:

#### jemnější konečnoprvková síť ↔ vyšší přesnost řešení

Abychom určili optimální diskretizaci hlavice v závislosti na přesnosti výpočtu, byla provedena citlivostní analýza konečnoprvkové sítě. Tato analýza se prováděla pro první hlavní napětí a to na hlavici 1 (rozměry viz tab. 1 v příloze) bez tvarových odchylek. U kontaktu bylo ponecháno defaultní nastavení programu ANSYS, kromě koeficientu tření, jehož hodnota byla zvolena 0,15. Zatěžoval jsem deformačně posuvem 0,3 mm v záporném směru osy y a síla se odečítala z uzlů kontaktních prvků. Typ elementu – SOLID 95. Zjemňování konečnoprvkové sítě probíhalo jak v celém objemu hlavice, tak v kritických místech a v místě kontaktu hlavice a dříku (obr. 8).



**Obr. 8** Kritická místa a kontaktní plochy hlavice

S1=364

153

270

37

-79

#### 10. Realizace procesu řešení

První model konečnoprvkové sítě měl velikost elementů v celém objemu hlavice 1 mm. Stejnou velikost prvků jsem použil i v místech kontaktu, resp. kritických místech (obr. 9a). Druhý model byl diskretizován elementy velikosti 0,75 mm v celém objemu i v kritických místech (obr. 9b).



c) velikost elementů 0,5 mm d) velikost elementů 0,25 – 0,5 mm **Obr. 9** Model diskretizace hlavice

S1=365

Velikost elementů u modelu na obr. 9c) činila 0,5 mm v celém objemu i v kritických místech a místě kontaktu. U posledního modelu se počítalo i se zjemněním v kritických místech a kontaktu, a sice na velikost 0,25 mm. Velikost elementů v celém objemu zůstala zachována na 0,5 mm (obr. 9d).

Během citlivostní analýzy diskretizace hlavice a dříku, byly porovnávány první hlavní napětí v kritickém místě (zahloubení otvoru na dně hlavice) a na ose rotace *y* uvnitř hlavice. Z obrázků 9a) – d) lze vyčíst, že se toto napětí v kritickém místě pro velikosti elementu 0,25 mm zvýšilo již jen nepatrně. Napětí na ose *y* uvnitř hlavice se výrazně neměnilo v celém rozsahu velikostí elementů. Pro posouzení kvality zjemnění konečnoprvkové sítě v okolí kontaktu sloužily další dva parametry – radiální tlaky a penetrace (viz *kap. 10.3.3* a *10.3.4*).

#### 10.3 Kontakt hlavice a dříku

Kontaktní úlohy [24] jsou úlohy vysoce nelineární a tudíž velmi náročné jak z hlediska zkušeností výpočtáře, tak z hlediska SW a HW vybavení. Nelinearita kontaktního problému vyplývá z vlastního iteračního algoritmu kontaktní úlohy a ze zahrnutého modelu tření, který je v systému ANSYS vždy nelineární.

V systému ANSYS jsou zahrnuty čtyři základní kontaktní algoritmy [13]:

- <u>node to node</u> tento algoritmus lze použít tehdy, pokud dojde k velmi malé deformaci těles (elementy: CONTACT12, LINK10, COMBIN40, CONTAC52, CONTA178)
- <u>node to line</u> pouze pro dvoudimenzionální úlohy (element: CONTAC26)
- <u>node to surface</u> používá se u řešení dvou- i třídimenzionálních úloh a to i pro úlohy s velkou deformací těles nebo u povrchů s různou velikostí konečnoprvkové sítě. Poněvadž u těchto kontaktních prvků chybí tzv. mid-side uzly, nelze u tohoto typu analýzy dosáhnout vysokých přesností (elementy: CONTAC48, CONTAC49)
- <u>surface to surface</u> použití jak pro rovinné, tak pro prostorové úlohy (i s velkou deformací). Nemají žádné omezení na geometrii kontaktních povrchů. Vyžadují méně kontaktních elementů než ostatní algoritmy, což má za následek menší zatížení procesoru počítače. Tento algoritmus také zajišťuje vyšší přesnost výsledků (prvky s mid-side uzly). Kromě výše uvedených vlastností je možné u tohoto typu algoritmu použít kontakt typu "BONDED", aktualizování normálové tuhosti pro každou ukončenou iteraci, aj. (elementy TARGE169, TARGE170, CONTA171, CONTA172, CONTA173, CONTA174)

Uspořádání těchto algoritmů reflektuje historii kontaktních prvků za posledních 30 let – první případy řešení kontaktu pomocí algoritmu *node to node* až po použití algoritmu *surface to surface.* 

Pro řešení problému kontaktu keramické hlavice a titanového dříku jsem použil algoritmus typu *surface to surface,* a to především z důsledku prostorové úlohy, rychlosti a přesnosti řešení. U tohoto typu algoritmu musíme nejprve definovat tzv. kontaktní a cílový povrch a také zadat parametry pro kontakt.

# 10.3.1 Vytvoření a definování tzv. kontaktního povrchu "CONTACT" a cílového povrchu "TARGET"

Při řešení kontaktních úloh pro algoritmus *surface to surface* se v programu ANSYS běžně definují na jednu plochu tzv. kontaktní prvky "CONTACT" a na druhou prvky cílové "TARGET". Aby nedocházelo k nekonvergenci celé úlohy nebo v lepším případě k příliš dlouhé době výpočtu, řídí se vytvoření těchto povrchů následujícími zásadami [13]:

Pro elementy typu TARGE16x/CONTA17x :

- pokud jde o kontakt konkávní a ploché/konvexní plochy, pak plochá/konvexní plocha by měla být cílovým povrchem (TARGET)
- jestliže má jeden povrch jemnější konečnoprvkovou síť než druhý, pak je třeba, aby povrch s jemnější sítí byl kontaktní (CONTACT) a povrch s hrubší sítí cílový (TARGET)
- je-li jeden povrch tužší než druhý, pak by měl být cílovým povrchem (TARGET), resp. poddajnější kontaktním povrchem (CONTACT)
- je-li jeden povrch diskretizován prvky s vyšším řádem (s mid-side uzly) a druhé prvky s nižším řádem, pak těleso s vyšším řádem by mělo být kontaktní plochou (CONTACT)
- pokud je jedna plocha výrazně větší než druhá, např. v případě, kdy je povrch obklopen jiným povrchem, pak plocha výrazně větší by měla být cílovou (TARGET)

Z výše uvedených zásad jsou u modelované soustavy důležitými fakty především větší tuhost keramické hlavice vzhledem k titanovému dříku a též její jemná konečnoprvková síť z důvodu pozdější spolehlivostní analýzy. Proto jsem jako cílový povrch (TARGET) volil povrch hlavice a jako kontaktní povrch (CONTACT) plochu dříku.

ANSYS zahrnuje u prostorových úloh cílový prvek TARGE170 a kontaktní prvek CONTA174, které byly použity i v tomto výpočtovém modelování.

#### 10.3.2 Zadávání parametrů pro kontakt

U algoritmu *surface to surface* jsou parametry kontaktu, jako normálová tuhost FKN, povolená tolerance penetrace FTOLN aj., defaultně nastaveny. Avšak pro výpočet s dostatečnou přesností musíme některé parametry změnit.

#### 10.3.3 Radiální tlak v místě kontaktu

U citlivostní analýzy diskretizace soustavy hlavice-dřík jsem jako další porovnávací parametr pro analýzu diskretizace hlavice a dříku zvolil hodnotu radiálních tlaků na povrchu hlavice a dříku. Je zřejmé, že při ideální velikosti diskretizace se musí tyto tlaky shodovat. Jelikož ideální hodnoty nelze nikdy docílit, pokusíme se jí přiblížit na dostatečnou úroveň.

Pro výpočet radiálních tlaků byl použit algoritmus "Augmented Lagrange". Tento algoritmus umožňuje nastavení součinitele normálové kontaktní tuhosti FKN, ale i aktualizaci FKN na základě výsledků z předchozí iterace. Při výpočtu jsem ponechal defaultní nastavení s FKN = 1 a právě možnost aktualizace FKN na základě výsledků předchozí iterace. Kritériem pro posouzení nastavení kontaktu se stala velikost maximální penetrace. Velikost penetrace by měla být v rozmezí jedné desetiny až jedné setiny velikosti elementu. Toleranci maximální penetrace jsem zvolil jednu desetinu PTOLN = 0,1.

Souhrnně lze tedy říct, že pro posouzení kvality diskretizace modelu musíme vzít v úvahu další kritéria; a sice:

- POST1 POST1 ANSY SUB =1 SUB =1 TIME=1 PATH PL NOD1=11 ANSY STEP=1 SUB =1 TIME=1 PATH PL NOD1=78 -217.2 -218.70 OD2=1149 -242.172 -233.42 -249.61 -265.63 -265 7 -289 10 -281.9 -312.5 -298.1 -336.03 -314.35 -359.502 -330.54 -382.96 -346.7 -406.43 -362.9 -429. -379.10 -453.366 6.102 7.119 2.034 4.068 1.017 3.051 8.136 2.134 4.268 10.16 6.402 8.536 5.085 3.201 5.335 DIST DIST a) hlavice b) hlavice Obr. 10 Radiální tlak v místě kontaktu: a) hlavice; b) dřík (velikost elementu v místě kontaktu 1,0 mm – viz obr. 9a)
- radiální tlaky v místě kontaktu shodné
- maximální velikost penetrace v rozmezí 0,1 až 0,01 velikosti elementu



a) hlavice



**Obr. 11** Radiální tlak v místě kontaktu (velikost elementu v místě kontaktu 0,75 mm – viz obr. 9b)



a) hlavice

b) dřík

**Obr. 12** Radiální tlak v místě kontaktu (velikost elementu v místě kontaktu 0,5 mm – viz obr. 9c)

SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY




Na obr. 10 a 11 si můžeme všimnout především rozdílného průběhu radiálního tlaku mezi hlavicí a dříkem. U dalších dvou variant zjemnění na obr. 12 a 13 se průběhy téměř shodují. Rozdíly mezi číselnými hodnotami jsou nejmenší u hlavice s velikostí prvku v místě kontaktu 0,25 mm. Určitou odchylku způsobila též kuželovitost celé soustavy.

#### 10.3.4 Penetrace v místě kontaktu

- jak již bylo uvedeno v *kapitole 9.1.2*, neměla by penetrace mezi hlavicí a dříkem překročit velikost jedné desetiny velikosti elementu.





#### 10. Realizace procesu řešení





Na obr. 14 a 15 můžeme vidět prakticky shodné maximální velikosti penetrace, které dosahovaly hodnot přibližně 0,002 mm, tzn., že vyhovující z hlediska penetrace jsou všechny velikosti elementu.

**Shrnutí** - po zhodnocení všech kritérií v *kap. 10.2 – 10.3.4* jsem se rozhodl použít velikost elementu 0,25 mm v kritických místech a kontaktu. Globální velikost elementu dříku jsem zvolil 1 mm a to především z důvodu, že napjatost uvnitř dříku není pro nás rozhodující a také z důvodu úspory doby řešení celé úlohy. Naopak globální velikost elementu hlavice jsem zvolil 0,5 mm s přihlédnutí na nutnost přesnosti výsledků prvního hlavního napětí pro výpočet pravděpodobnosti porušení keramické hlavice; na obrázcích 9a) – d) můžeme vidět, jak se mění rozložení prvního hlavního napětí uvnitř hlavice pro různé velikosti elementu.

#### 10.3.5 Koeficient tření

Koeficient tření (COF) pro zadané materiály (titanový dřík, keramická hlavice) nebyl přesně znám. COF závisí především na drsnosti obou povrchů – s menší drsností COF klesá. Podle literatury [9] je COF keramiky a titanu 0,30. Dle jiné literatury [2] je COF mezi těmito materiály v rozmezí 0,15 – 0,25. Z daných informací tedy vzniká rozpor, který je nutno prověřit citlivostní analýzou COF. Při této analýze jsem volil hodnoty COF 0,15; 0,20; 0,30 a 0,40. Závislost síly na prvním hlavním napětí pro různé hodnoty COF je zobrazena na obrázku 16.



Obr. 16 Závislost prvního hlavního napětí na COF

Je zřejmé, že pro nejmenší hodnotu COF = 0,15 je zapotřebí menší síla generující stejnou hodnotu napětí uvnitř keramické hlavice než u zbylých COF. To je dáno menším odporem proti zasunutí hlavice do dříku a tím i větším rozevřením hlavice. Následkem jsou větší tahová napětí. Můžeme tedy konstatovat, že tato hodnota COF je z hlediska porušení keramické hlavice nejnebezpečnější a proto s ní budeme dále počítat.



# 11. Analýza výsledků napjatosti

### 11.1 Hlavice bez tvarových odchylek





#### c) hlav3\_ideal\_S

d) hlav4\_ideal\_L



#### 11. Analýza výsledků napjatosti



Na obrázku 17 a) f) můžeme vidět rozložení prvního hlavního napětí při zatížení silou 3000 N. Pro hodnotu tuto síly lze odečíst z obr. 18 velikost příslušného vertikálního posuvu hlavice. Z něj je také zřejmé, že z hlediska zatěžování je na tom nejhůře hlavice 4, jelikož pro tento typ hlavice je k nasunutí ve vertikálním směru o 0,5 mm potřeba nejmenší síla (F = 8700 N).



**Obr. 18** Závislost zatěžující síly na vertikálním posuvu hlavice

S tím souvisí i hodnota prvního hlavního napětí – viz obr. 19. Ten zobrazuje závislost maximálního prvního hlavního napětí na zatěžující síle. Např. pro hlavici 1 (hloubka kuželového otvoru *I* = 15 mm) je hodnota maximálního prvního hlavního napětí při zatěžující



síle 8 kN asi 520 MPa, pro hlavici 3 při stejné zatěžující síle (hloubka kuželového otvoru l = 23 mm) asi 320 MPa. Z obrázků 18 a 19 tedy plyne závěr – s rostoucí hloubkou kuželového otvoru v hlavici klesá velikost maximálního prvního hlavního napětí. То způsobeno ie zvětšením kontaktních ploch hlavice a dříku.

Obr. 19 Závislost prvního hlavního napětí na zatěžující síle

#### bio Dechanika echatronika FSI, VUT v Brně

### 11. Analýza výsledků napjatosti

## 11.2 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti

vrcholový uhel dříku menší než vrcholový úhel hlavice (označení KUZ\_MIN – viz obr.
 6, A2)



Obr. 20 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti (F = 3000 N)



#### 11. Analýza výsledků napjatosti

Obr. 20 a) – f) zobrazuje rozložení prvního hlavního napětí uvnitř hlavice s tvarovou imperfekcí odchylka od nominální kuželovitosti. Zde si můžeme všimnout, že se změnilo rozložení napětí podél hloubky kuželového otvoru. Maximální hodnoty zde byly ovlivněny především tvarem zápichu.



Obr. 21 Závislost zatěžující síly na vertikálním posuvu hlavice

Obr. 21 znázorňuje závislost zatěžující síly na vertikálním posuvu hlavice. Hodnoty zatěžující síly se pro jednotlivé typy hlavic příliš neliší. Z hlediska napjatosti je nejhorší hlavice 6. To potvrzuje i obr. 22, který je zobrazením závislosti maximálního prvního napětí na zatěžující síle. Na obou grafech je patrná také výrazná nelinearita proti předcházejícímu případu bez tvarové odchylky. Ta je způsobena nestacionárním kontaktem (v závislosti na



síle se zvětšuje rozsah kontaktní plochy) mezi hlavicí a dříkem. Skoky v jednotlivých průbězích v okolí zatěžovací síly 4500 N a 7500 N jsou důsledkem přechodu maxima prvního hlavního napětí z hlavice na dřík (viz. [3]).

Obr. 22 Závislost prvního hlavního napětí na zatěžující síle

#### bio Dechanika echanika echanika FSI, VUT v Brně

### 11. Analýza výsledků napjatosti

## 11.3 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti

vrcholový uhel dříku větší než vrcholový úhel hlavice (označení KUZ\_MAX – viz obr.
 6, A3)





SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY

#### 11. Analýza výsledků napjatosti





ÚMTMB

FSI, VUT v Brně

Obr. 24 Závislost zatěžující síly na vertikálním posuvu hlavice

Tento fakt potvrzují i obrázky 24 a 25, které jsou opět vlivem nestacionárního kontaktu mezi



hlavicí a dříkem nelineární. V obrázku 25 si můžeme všimnout též velmi nízkých hodnot zatěžovací síly, která i při nízkých hodnotách vyvolá značná tahová napětí v hlavici.

Obr. 25 Závislost prvního hlavního napětí na zatěžující síle



#### 11.4 Vliv tvarových odchylek

V této kapitole je popsáno srovnání vlivu tvarových imperfekcí pro jednotlivé typy hlavic se dvěma variantami tvarových odchylek od nominální kuželovitosti (obr. 26) na průběh napětí. Srovnání je provedeno na stykových plochách hlavice a dříku, zápichu a dně hlavice (cesta A-B-C-D-E) při zatížení silou 3000 N.



Obr. 26 Varianty tvarových odchylek





Z obrázků 27 – 32 je zřejmé, že se průběh prvního hlavního napětí výrazně mění s různými typy tvarových imperfekcí. Místo s největšími tahovými napětími je pro ideální variantu a pro variantu, kdy je vrcholový úhel dříku větší než vrcholový úhel hlavice (hlav\_kuz\_max) v místě zahloubení kuželového otvoru hlavice – mezi body A-B. U varianty s vrcholovým úhlem dříku menším než vrcholový úhel hlavice (hlav\_kuz\_min) je maximální první hlavní napětí v oblasti zápichu.

# 12. Weibullova teorie nejslabšího článku

FSI, VUT v Brně

ÚMTMB

Jak již bylo zmíněno výše, byla pro modelování pravděpodobnosti porušení keramické hlavice zadána Weibullova teorie nejslabšího článku [7].

Tato teorie [6] se používá pro výpočet spolehlivosti keramických dílů. Je založena na velmi jednoduchém předpokladu, že řešený objekt je modelován jako řetězec s mnoha články. Pokud kterýkoli článek selže, pak selže celý řetězec. Podobně, pokud je u keramického dílu velmi malý element namáhán tak, že u něj dojde k šíření trhliny, pak selže obvykle celý díl. To znamená, že cílem je zjistit, jaká je pravděpodobnost selhání (porušení) jednotlivých elementů v keramickém dílu.

Protože vlastnosti keramických materiálů jsou proměnné v důsledku náhodného rozložení vad, mají jednotlivé elementy různou reálnou pevnost. Proto lze pevnost jednotlivých elementů považovat za statistické rozložení s hodnotami nad a pod určitou charakteristickou pevnost. Je-li element vystaven jisté hodnotě napětí, pak existuje určitá pravděpodobnost, že lokální pevnost materiálu bude překročena. S větším počtem prvků v řetězci je větší pravděpodobnost, že řetězec obsahuje "slabý článek" a pravděpodobnost selhání vzrůstá. Podobně je pravděpodobnost selhání keramických objektů funkcí objemu materiálu vystaveného různým napětím. Pravděpodobnost selhání celého objektu je určena kombinací pravděpodobností selhání všech elementů.

## 13. Materiálové parametry

Pro výpočet pravděpodobnosti porušení se musely stanovit materiálové parametry. U keramických materiálů se tyto parametry určují ze zkoušek tří- nebo čtyřbodovým ohybem. Jedná se o následující materiálové charakteristiky:

- σ<sub>u</sub> [MPa] napětí, pod jehož hodnotu nedochází k porušení materiálu
- σ<sub>0</sub> [MPa . m <sup>3/m</sup>] normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu
- *m*[-] Weibullův modul

 $\sigma_u$ ,  $\sigma_0$ , *m* můžeme považovat za materiálové charakteristiky, avšak jejich hodnota se může lišit podle umístění (různé uvnitř a na povrchu tělesa). Všechny materiálové charakteristiky jsem v rámci této práce obdržel od vedoucího mé diplomové práce pana Ing. Vladimíra Fuise, Ph.D.

# 14. Systém podstatných veličin pro pravděpodobnost porušení

# 14.1 Vytvoření množiny *M* podstatných prvků a vazeb objektu pro výpočtové modelování pravděpodobnosti porušení

Výsledné hodnoty z výpočtového modelování napjatosti (*kap. 11*) jsou dílčími hodnotami pro výpočet pravděpodobnosti porušení keramické hlavice podle Weibullovy teorie nejslabšího článku, lze tedy říci, že všechny podstatné veličiny v této kapitole jsou závislé na podstatných veličinách z *kapitoly 7*. Výpočet pravděpodobnosti porušení zahrnuje tyto podstatné veličiny [1]:

A	-	aktivační parametry	<ul> <li>silové působení od přítlačného tělesa</li> </ul>	
Θ	-	ovlivňovací parametry - geometrické: - výpočtové:	<ul> <li>geometrie hlavice</li> <li>počet elementů</li> <li>objem elementů (velikost elementů</li> <li>první (druhé, třetí) hlavní napětí</li> <li>v elementech</li> </ul>	
		- materiálové:	<ul> <li>napětí, pod jehož hodnotou nedochází k porušení materiálu</li> <li>normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu</li> <li>Weibullův modul</li> </ul>	
П	-	určující parametry	- pravděpodobnost porušení	
L	-	mezní parametry	- mezní stav porušení	

## 14.2 Přiřazení funkcí prvkům množiny *M* a jejich parametrizace [1]

prvek množiny M	činnost prvku	vyjádření pomocí parametrů
geometrie hlavice	popisuje tvar a velikost hlavice	l [mm], α [°]
počet elementů	udává počet elementů v závislosti	n [-]
	na jejich velikosti	
objem elementů	udává počet elementů v závislosti	ΔV [mm³]
	na jejich velikosti	
první (druhé, třetí) hlavní napětí v	dílčí výsledky z výpočtového	σ <sub>1</sub> (σ <sub>2</sub> , σ <sub>3</sub> )
elementech	modelování napjatosti	[MPa]
napětí, pod jehož hodnotou	napětí, pod kterým materiál nikdy	σ <sub>u</sub> [MPa]
nedochází k porušení materiálu	neselže	
normalizovaná materiálová	normalizovaná materiálová pevnost,	
pevnost objemové jednotky	související s velikostí objemu	$\sigma_{\scriptscriptstyle 0}$ [MPa . m $^{\scriptscriptstyle 3/m}$ ]
materiálu	elementu	
Weibullův modul	souvisí s rozptylem změřených	m [-]
	hodnot pevnosti	
pravděpodobnost porušení	určuje možnost nastoupení	Pf [-]
	náhodného jevu (porušení)	
mezní stav porušení	možnost vzniku křehkého lomu	

 Tab. 4 Přiřazení činností prvkům množiny M

### 14.3 Kvantifikace prvků

- veličiny nezávislé: velikost elementů
- veličiny závislé: počet elementů
  - objem elementů
  - první (druhé, třetí) hlavní napětí v elementech
  - napětí, pod jehož hodnotou nedochází k porušení materiálu
  - normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu
  - Weibullův modul
  - pravděpodobnost porušení

# 15. Tvorba výpočtového modelování pravděpodobnosti porušení

Pro vlastní výpočtové modelování porušení se používají dva výpočtové modely:

- <u>model, u kterého jsou při výpočtu zahrnuta pouze první hlavní napětí</u> tento model je zjednodušený, poněvadž uvažuje při výpočtu pravděpodobnosti porušení pouze s prvními hlavním napětími (tahovými).
- <u>model, u kterého jsou při výpočtu zahrnuta všechna tři hlavní napětí</u> tento model uvažuje při výpočtu všechna tři hlavní napětí, ať už tahová či tlaková

### 15.1 Model zahrnující pouze první hlavní napětí

Pravděpodobnost porušení se dle tohoto modelu vypočítá dle vzorce [6]:

$$Pf = 1 - e^{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \sigma_{u}}{\sigma_{0}}\right)^{m} \cdot \frac{V_{i}}{V_{0}}\right]}$$
(1)

Rozšířením na infinitezimální elementy pak obdržíme rovnici v integrálním tvaru:

$$Pf = 1 - e^{\left[-\int_{V} \left(\frac{\sigma - \sigma_{u}}{\sigma_{0}}\right)^{m} dV\right]}$$
(2)

Pro konzervativnější přístup se hodnota  $\sigma_u$  volí rovna nule. Na porušení tělesa mají tedy vliv všechna tahová napětí  $\sigma_1$ , tím přejde 3-parametrický model na model 2-parametrický:

$$Pf = 1 - e^{-\int_{V} (\frac{\sigma}{\sigma_0})^m dV}$$
(3)



Poněvadž napjatost v hlavicích byla určována metodou konečných prvků, je nutné převést tyto rovnice z diferenciálního tvaru do tvaru diferenčního:

- <u>3-parametrické Weibullovo rozdělení uvažující jednoosou napjatost</u>

$$Pf = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} (\frac{\sigma_i - \sigma_u}{\sigma_0})^m \Delta V_i}$$
(4)

U tohoto modelování platí podmínka

$$\sigma_i \ge \sigma_u$$

- 2-parametrické Weibullovo rozdělení uvažující jednoosou napjatost

$$Pf = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} (\frac{\sigma_i}{\sigma_0})^m \Delta V_i}$$
(5)

Kde pro 3- a 2-parametrické Weibullovo rozdělení:

n	celkový počet elementů
$\sigma_i$	první hlavní napětí v objemu element
$\Delta V_i$	objem elementu
$\sigma_{\scriptscriptstyle u},\sigma_{\scriptscriptstyle 0},m$	materiálové charakteristiky

#### 15.2 Model zahrnující všechna tři hlavní napětí

Pro rozšíření rovnice 3 na třídimenzionální napjatost byla zavedena koncepce integrace normálového napětí kolem části jednotkového poloměru koule [6], kdy je normálové napětí pozitivní [7, 8]. Tato koncepce je zobrazena na Obr. 33.



Obr. 33 Zobrazení normálového napětí v Haighově prostoru

Ψ a Φ jsou úhly, které svírá průmět normálového napětí do roviny  $σ_1$ - $σ_2$  s osou  $σ_1$ , resp. úhel mezi průmětem normálového napětí do roviny  $σ_1$ - $σ_2$  a  $σ_n$ . Normálové napětí se vypočte dle vztahu:

$$\sigma_n = \cos^2 \Phi \cdot (\sigma_1 \cdot \cos^2 \psi + \sigma_2 \cdot \sin^2 \psi) + \sigma_3 \cdot \sin^2 \Phi$$
(6)

Protože je keramika křehká a tím citlivá převážně na tahová napětí platí podmínka:

$$\sigma_n > 0$$

Pravděpodobnost porušení je pak:

$$Pf = 1 - e^{\left\{-\int_{V} \left[k \cdot \int_{A} (\sigma_{n})^{m} dA\right] dV\right\}}$$
(7)

k faktor se udává jako:

$$k = \frac{2 \cdot m + 1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_0^m} \tag{8}$$

Po dosazení (4) a (6) do (5) obdržíme hlavní rovnici pravděpodobnosti porušení:

$$Pf = 1 - e^{\left(\left(-\int_{V}\left\{\frac{2\cdot m+1}{2\cdot \pi \cdot \sigma_{0}^{m}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left[\cos^{2}\phi(\sigma_{1}\cos^{2}\psi+\sigma_{2}\sin^{2}\psi)+\sigma_{3}\sin^{2}\phi\right]^{m}\cos\phi d\phi d\psi\right\}dV\right)\right)}$$
(9)

Vzhledem k symetrii normálového napětí na horní a spodní části koule, jsou meze integrálu plochy pouze v horní polovině, tzn. od 0 do  $\pi/2$ .

kde:	n	 celkový počet elementů
	dV	 objem elementu
	$\boldsymbol{\Psi}_{i}$	 úhel, který svírá průmět $\sigma_n$ do roviny $\sigma_1$ - $\sigma_2$ s osou $\sigma_1$ (obr. 33)
	$\boldsymbol{\Phi}_k$	 úhel, který svírá průmět $\sigma_n$ do roviny $\sigma_1$ - $\sigma_2$ s $\sigma_n$ (obr. 33)
	т	 Weibullův modul
	$\sigma_{o}$	 normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu
	$\sigma_{\scriptscriptstyle 1i}$	 první hlavní napětí v elementu
	$\sigma_{2i}$	 druhé hlavní napětí v elementu
	$\sigma_{3i}$	 třetí hlavní napětí v elementu

## 16. Realizace procesu řešení

# 16.1 3-parametrické Weibullovo rozdělení (model uvažující jednoosou napjatost)

Hodnoty parametrů:

$$m = 3,2$$
  
 $\sigma_0 = 238 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{3/\text{m}}$   
 $\sigma_u = 250 \text{ MPa}$ 

- *n* a  $\Delta V_i$  byly získány z programu ANSYS během napjatostní analýzy. Výpočet dle rovnice (4) byl proveden v programu MATLAB.

- podmínka:  $\sigma_i \ge \sigma_u$ 

#### 16.1.1 Hlavice bez tvarových odchylek

Jako první je řešena pravděpodobnost porušení pro 3-parametrické Weibullovo rozdělení, u které se uvažuje pouze jednoosá napjatost, u hlavic bez tvarových odchylek.





Z obr. 34 je patrné, že se zvětšující se hloubkou kuželového otvoru *l* se pravděpodobnost porušení zmenšuje (křivky se posouvají směrem k větším zatěžujícím silám - doprava). Příčinou menší pravděpodobnosti porušení u hlavic s větší hloubkou *l*, je rozložení tahových napětí do rozsáhlejších oblastí, ale s menším tahovým napětím. Pořadí z hlediska porušení hlavice je ve shodě s napjatostní analýzou provedenou v *kap. 11* (obr. 18, obr. 19).



#### 16.1.2 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ\_MIN

Jako další se zde porovnávají jednotlivé hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti – varianta KUZ\_MIN (obr. 26).



**Obr. 35** Pravděpodobnost porušení hlavic s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti v závislosti na zatěžující síle

U tohoto typu tvarové odchylky si můžeme všimnout, že pravděpodobnost porušení závisí především na velikosti objemu, ve kterém působí tahová napětí, v kombinaci s velikostí tohoto napětí (rovnice 7). To dokazuje následující tabulka. Pro zatěžující sílu 6000 N jsem vyselektoval objemy elementů, u nichž platila podmínka  $\sigma_i > \sigma_u = 250$  MPa. Tedy objemy elementů, kde bylo první hlavní napětí větší než napětí, pod kterým materiál nikdy neselže. Všechny vyselektované objemy jsem sečetl a vyjádřil procentuální podíl vůči celému objemu hlavice. Pořadí velikosti objemu s prvním hlavním napětím > 250 MPa v tab. 5 souhlasí s pořadím pravděpodobnostmi porušení hlavic na obr. 35.

3-param W.r.	V <sub>celk</sub> [mm <sup>3</sup> ]	V <sub>σi &gt; 250MPa</sub> [mm <sup>3</sup> ]	V <sub>σi &gt; 250Mpa</sub> / V <sub>celk</sub> [%]
hlav1-kuz-min-L	3582	23,1	0,64
hlav2-kuz-min-M	3424	20,4	0,60
hlav3-kuz-min-S	3257	45,7	1,40
hlav4-kuz-min-L	2284	125,9	5,51
hlav5-kuz-min-M	2150	86,7	4,03
hlav6-kuz-min-S	2024	144,1	7,12

**Tab. 5** Podíl objemu I. hl. napětí  $\sigma_i > 250 MPa$  v objemu hlavice

#### 16.1.3 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ\_MAX

V této kapitole jsou porovnávány hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti (obr. 26).



**Obr. 36** Pravděpodobnost porušení hlavic s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti v závislosti na zatěžující síle

U tohoto typu tvarové imperfekce dochází ke vzniku velkých tahových napětí v zahloubení kuželového otvoru (obr. 27 – 32, oblast A-B). Z obrázku 36 je zřejmé, že u hlavic s průměrem 28 mm (hlavice 4, 5 a 6) je pravděpodobnost porušení mnohem větší než u hlavic s průměrem 32 mm. Příčinou jsou vyšší první hlavní napětí v místě zahloubení (obr. 25).

anika atronika <sup>anika</sup> FSI, VUT v Brně

16. Realizace procesu řešení

16.2 2-parametrické Weibullovo rozdělení (model uvažující jednoosou napjatost)

Hodnoty parametrů:

$$m = 7,19$$
  
 $\sigma_0 = 473,8 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3/\text{m}}$ 

- *n* a  $\Delta V_i$  byly získány z programu ANSYS během napjatostní analýzy. Výpočet dle rovnice (5) byl proveden v programu MATLAB.

- σ<sub>u</sub> je pro 2-parametrické Weibullovo rozdělení rovno nule, proto je tento model konzervativnější než model 3-tříparametrického Weibullova rozdělení.

### 16.2.1 Hlavice bez tvarových odchylek

Jako první je opět řešena pravděpodobnost porušení pro 2-parametrické Weibullovo rozdělení u hlavic bez tvarových odchylek.



**Obr. 37** Pravděpodobnost porušení hlavic bez tvarové odchylky v závislosti na zatěžující síle

Průběhy křivek pravděpodobnosti porušení pro hlavice bez tvarových odchylek jsou znázorněny na obrázku 37. Pořadí hlavic je ve shodě s 3-parametrickým Weibullovým rozdělením, avšak křivky se posunuly k nebezpečnějším hodnotám (nižším zatěžujícím silám). To je způsobeno konzervativností 2-parametrického Weibullova rozdělení.

#### 16.2.2 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ\_MIN

Druhým případem jsou hlavice s tvarovou imperfekcí od nominální kuželovitosti – varianta KUZ-MIN (obr. 26).



**Obr. 38** Pravděpodobnost porušení hlavic s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti v závislosti na zatěžující síle

U této varianty tvarové imperfekce dochází pro 2-parametrické Weibullovo rozdělení ke snižování rozdílu pravděpodobnosti porušení mezi hlavicemi 1 a 2, resp. 3 a 4. To je způsobeno velikostí objemu tahových napětí a zároveň velikostí tohoto napětí. Velikost objemu tahových napětí v jednotlivých hlavicích zobrazuje tab. 6. Můžeme si všimnout, že se změnilo pořadí mezi hlavicemi 1 a 2, resp. 3 a 4 proti pořadí v tab. 6. Tím se také zdůvodňuje přiblížení křivek pro tyto hlavice – objem tahových napětí > 0 v hlavici 1 (resp. 3) je sice menší, ale objem tahových napětí větších než 250 MPa je zde naopak větší.

2-param W.r.	V <sub>celk</sub> [mm <sup>3</sup> ]	V <sub>σi &gt; 0MPa</sub> [mm <sup>3</sup> ]	V <sub>σi &gt; 0Mpa</sub> /V <sub>celk</sub> [%]
hlav1-kuz-min-L	3582	3398	94,9
hlav2-kuz-min-M	3424	3403	99,4
hlav3-kuz-min-S	3257	3254	99,9
hlav4-kuz-min-L	2284	2137	93,6
hlav5-kuz-min-M	2150	2125	98,8
hlav6-kuz-min-S	2024	2024	100

**Tab. 6** Podíl objemu I. hl. napětí  $\sigma i > 0$  *MPa* v objemu hlavice

#### 16.2.3 Hlavice s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti KUZ\_MAX

Jako poslední jsou porovnávány pravděpodobnosti porušení u hlavic s tvarovou imperfekcí typu KUZ\_MAX.



**Obr. 39** Pravděpodobnost porušení hlavic s tvarovou odchylkou od nominální kuželovitosti v závislosti na zatěžující síle

Z obrázku 39 je patrné, že se pořadí křivek pravděpodobnosti porušení pro jednotlivé hlavice shoduje s pořadím maximálního prvního hlavního napětí v napěťové analýze na obr. 25. Z hlediska pravděpodobnosti porušení jsou na tom nejhůře keramické hlavice s menším průměrem 28 mm. U těchto hlavic dochází při zatěžování ke vzniku velkých tahových napětí na zahloubení kuželového otvoru. Např. pro hlavici 6 (d = 28 mm; l = 20) je při zatížení silou 1000 N pravděpodobnost porušení 30%.

# 16.3 Vliv tvarových odchylek (rozdíl mezi 2- a 3-parametrickým Weibullovým rozdělením)

Tato kapitola dává do souvislosti vliv tvarových imperfekcí s pravděpodobností porušení jednotlivých typů keramických hlavic. Zároveň je zde porovnán rozdíl mezi 2- a 3-parametrickým Weibullovým rozdělením (2-PWR ; 3-PWR).



**Obr. 40** Vliv tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro hlavici 1



**Obr. 41** Vliv tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro hlavici 2



**Obr. 42** Vliv tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro hlavici 3



**Obr. 43** Vliv tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro hlavici 4







**Obr. 44** Vliv tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro hlavici 5



**Obr. 45** Vliv tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro hlavici 6

Obrázky 40 až 45 znázorňují porovnání vlivu tvarových imperfekcí na pravděpodobnost porušení pro jednotlivé keramické hlavice. Z tohoto pohledu je jednoznačně nejhorší tvarová odchylka KUZ\_MAX, kdy dochází k jistému porušení (Pf = 1) u všech hlavic již při zatížení 3000 N pro 3-PWR a u 2-PWR dokonce při zatížení 2500 N. Poloha této křivky se pro jednotlivé hloubky kuželového otvoru v hlavici příliš nemění. K posunu dojde při změně průměru hlavice, a sice pro menší průměr (d = 28 mm) se křivka posune mírně k vyšším pravděpodobnostem porušení. To je způsobeno vyššími hodnotami prvních hlavních napětí u těchto typů hlavic (obr. 25). Při tvarové imperfekci KUZ\_MIN se poloha křivek pravděpodobnosti porušení vzhledem k ideální geometrii hlavice a dříku mění v závislosti na hloubce kuželového otvoru v keramické hlavici. Při menší hloubce *I* je pravděpodobnost porušení dokonce menší než u ideálního případu. Příčinou jsou zmenšující se první hlavní napětí u ideálního případu se zvětšující se hloubkou *I* (obr. 19).

Jak již bylo zmíněno výše, rozdíl mezi 2-PWR a 3-PWR je v konzervativnosti 2-parametrického Weibullova rozdělení. To bere v úvahu, na rozdíl od 3-parametrického Weibullova rozdělení, všechna kladná první hlavní napětí. Konkrétní rozdíly zatěžující pro 3-PWR a 2-PWR jsou naznačeny pro tvarovou odchylku KUZ\_MIN při hodnotě pravděpodnosti porušení 50% (obr. 40 – 45).

#### 16. Realizace procesu řešení

#### 16.4 2-parametrické Weibullovo rozdělení (model uvažující trojosou napjatost)

Výpočtový model pravděpodobnosti porušení zahrnující všechna tři hlavní napětí byl z hlediska realizace nejnáročnější a to především z důvodu nedostatečného počtu odborných článků zabývajících se touto problematikou.

Vycházeli jsem tedy z teorie uvedené v *kap. 15.2* převzaté z [6]. Modelem byla kostka o rozměrech 1x1x1 mm a materiálovými charakteristikami pro keramiku Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> shodnými v *kap. 9.7.1.* Globální velikost elementu byla volena s ohledem na shodu jeho objemu s objemy elementů u modelovaných hlavic, tedy 0,3 mm. Abychom zjistili vliv druhého a třetího hlavního napětí na pravděpodobnost porušení, zatěžovalo se na jedné straně tahovým napětím s konstantními hodnotami  $\sigma_1 = 100$  MPa (150 MPa; 200 MPa), přičemž na dalších dvou stranách, kolmých na první stranu, se zatížení měnilo v rozsahu -100 až 100 MPa (-150 MPa až 150 MPa; -200 MPa až 200 MPa) - průběh zatěžování viz obr. 46. Tímto způsobem se zajistily typy napjatosti jako trojosá obecná ( $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ), polorovnoměrná ( $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ ), rovnoměrná tahová ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ); či dvojosá obecná ( $\sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma_3 = 0$ ), rovnoměrná tahová ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Na zbylých třech protilehlých stranách byla modelována vazba vetknutí. Materiálové charakteristiky pro pravděpodobnost porušení jsme použili pro 2-PWR: m = 7,19 a  $\sigma_0 = 473,8$  MPa . m<sup>3/m</sup>



**Obr. 46** Některé typy napjatosti během zatěžování keramické kostky

Jelikož objemy a napjatost všech elementů uvnitř kostky byly shodné, pak pro analýzu vlivu druhého a třetího hlavního napětí na pravděpodobnost porušení postačila napětí a objem jednoho elementu keramické kostky. Pravděpodobnost porušení tohoto elementu se poté vynásobila celkovým počtem elementů v celém objemu kostky. Takto jsme obdrželi pravděpodobnost porušení celé kostky.

#### bio Dechanika echatronika FSI, VUT v Brně

#### 16. Realizace procesu řešení

Abychom mohli řešit rovnici (9), byl sestaven vlastní výpočtový model v programu Maple (viz příloha). Výpočtem pravděpodobnosti porušení pouze pro jeden element kostky jsme z rovnice (9) odstranili integrál přes objem. Po dosazení množiny druhých a třetích hlavních napětí do tohoto výpočtového modelu jsme obdrželi trojrozměrný graf pravděpodobnosti porušení v závislosti na těchto hlavních napětí při konstantním prvním hlavním napětí  $\sigma_1 = 100$  MPa,  $\sigma_1 = 150$  MPa a  $\sigma_1 = 200$  MPa (obr. 47, 48 a 49).





**Obr. 47** Závislost pravděpodobnosti porušení na druhém a třetím hlavním napětí ( $\sigma_1 = 100$  MPa)

SPOLEHLIVOSTNÍ ANALÝZA KERAMICKÉ HLAVICE TOTÁLNÍ KYČELNÍ ENDOPROTÉZY





**Obr. 48** Závislost pravděpodobnosti porušení na druhém a třetím hlavním napětí ( $\sigma_1 = 150$  MPa)





**Obr. 49** Závislost pravděpodobnosti porušení na druhém a třetím hlavním napětí ( $\sigma_1 = 200$  MPa)

#### 16. Realizace procesu řešení

#### ÚMTMB FSI, VUT v Brně

Z obrázku 47 – 49 vyplývá, že druhé a třetí hlavní napětí mají výrazný vliv na pravděpodobnost porušení při trojosé napjatosti tehdy, když všechna tři hlavní napětí jsou tahová. Pro porovnání je na obrázku vykreslena pravděpodobnost porušení 2-parametrického Weibullova porušení uvažující pouze první hlavní napětí. Na obrázcích si lze všimnout vzrůstu rozdílu mezi těmito výpočetními modely s rostoucí velikostí prvního hlavního napětí. Pokud jsou druhé a třetí hlavní napětí rovno nule, pak se pravděpodobnost porušení porušení pro oba výpočetní modely shoduje. Jelikož však byly materiálové charakteristiky vstupující do 2-PWR uvažujícího trojosou napjatost zjištěné ze zkoušek trojbodovým ohybem (vznik jednoosé napjatosti), nelze posoudit, jak je pravděpodobnost porušení touto skutečností ovlivněna. Rozšířit tento výpočtový model na pravděpodobnost porušení hlavice se bohužel z časových důvodů nepodařilo.



## 17. Závěr

Z napjatostní analýzy lze vyvodit následující závěry:

- U ideálního případu geometrie hlavice a dříku dochází při zatěžování k rozložení největších tahových napětí podél stykových ploch hlavice a dříku. K určitým koncentracím dochází v místě zahloubení (obr. 27 32, bod B) a v místech okolí zápichu kuželového otvoru v hlavici (obr. 27 32, body C a D). Velikost maximálního prvního hlavního napětí lineárně roste s velikostí zatěžující síly (obr. 19). Z tohoto obrázku také vyplývá, že s rostoucí hloubkou kuželového otvoru v hlavici, klesá velikost maximálního prvního napětí. Příčinou poklesu tohoto napětí je zvětšení kontaktních ploch a tím větší odpor proti zasunutí hlavice na dřík (obr. 18). Z tohoto pohledu je nejhorší situace u hlavice 4 s průměrem 28 mm a hloubkou /= 13,5 mm.
- V případě tvarových imperfekcí typu odchylka od nominální kuželovitosti, kdy vrcholový úhel dříku je menší než vrcholový úhel hlavice (KUZ\_MIN), se místo maximálních prvních hlavních napětí přesunulo, proti ideální geometrii, z místa okolí zahloubení k místu okolí zápichu kuželového otvoru (obr. 27 32). Hodnoty těchto napětí u všech typů hlavic překročily maximální napětí v případě ideální geometrie. Průběh maximálních prvních hlavních napětí již není lineární, ale v důsledku nestacionárního kontaktu dochází k výrazným nelinearitám (obr. 22). Dále si v tomto obrázku můžeme všimnout, že velikosti napětí se prakticky nemění s hloubkou kuželového otvoru v hlavici, ale mění se s průměrem hlavice u hlavic o průměru 28 mm vznikají větší napětí. Při porovnání zatěžujících sil nutných k vertikálnímu posuvu hlavice o 0,5 mm (obr. 21) je zřejmé, že tyto jsou pro ideální geometrii výrazně vyšší. Tím vzniknou v hlavici s geometrickou imperfekcí KUZ\_MIN, díky většímu zasunutí na dřík, větší maximální první hlavní napětí. Z tohoto pohledu je nejhorší situace u hlavice 6 s průměrem *d* = 28 mm a hloubkou *l* = 20 mm.
- V případě tvarových imperfekcí typu odchylka od nominální kuželovitosti, kdy vrcholový úhel dříku je větší než vrcholový úhel hlavice (KUZ\_MAX), jsou maxima prvního hlavního napětí v místě zahloubení kuželového otvoru v hlavici. Zde dochází k výraznému nárůstu napětí vzhledem k celému objemu hlavice, které překračuje i maxima v případě tvarové imperfekce KUZ\_MIN, resp. ideální geometrie (obr. 27 32). I u tohoto případu se maximální napětí v závislosti na zatěžující síle chová výrazně nelineárně (obr. 25). Vliv hloubky kuželového otvoru v hlavici na první hlavní napětí je minimální. Stejně jako u imprefekce KUZ\_MIN závisí toto napětí na velikosti průměru hlavice u menšího průměru (d = 28 mm) se generují větší napětí.

V obrázku 24 si můžeme všimnout velmi nízkých sil potřebných k zasunutí hlavice na dřík, tzn. i nízkého odporu proti zasunutí. Největší maximální první hlavní napětí jsou tím pádem generována v hlavici 6 o průměru d = 28 mm a hloubce l = 20 mm.

#### Z analýzy pravděpodobnosti porušení lze vyvodit následující závěry:

- U ideálního případu geometrie hlavice a dříku se pořadí křivek pravděpodobnosti porušení pro 3-parametrické (obr. 34) i pro 2-parametrické (obr. 37) Weibullovo rozdělení shoduje s pořadím maximálních prvních hlavních napětí u napjatostní analýzy pro jednotlivé hlavice.
- I v případě tvarových imperfekcí typu odchylka od nominální kuželovitosti, kdy vrcholový úhel dříku je menší než vrcholový úhel hlavice (KUZ\_MIN), se pořadí křivek pravděpodobnosti porušení pro 3-parametrické (obr. 35) i pro 2-parametrické (obr. 38) Weibullovo rozdělení prakticky shoduje s pořadím maximálních prvních hlavních napětí u napjatostní analýzy pro jednotlivé hlavice.
- Také pro případ tvarových imperfekcí typu odchylka od nominální kuželovitosti, kdy vrcholový úhel dříku je větší než vrcholový úhel hlavice (KUZ\_MAX), se pořadí křivek pravděpodobnosti porušení pro 3-parametrické (obr. 36) i pro 2-parametrické (obr. 39) Weibullovo rozdělení shoduje s pořadím maximálních prvních hlavních napětí u napjatostní analýzy pro jednotlivé hlavice.
- Z výpočtového modelu uvažující všechna tři hlavní napětí je zřejmé, že druhé a třetí hlavní napětí výrazně ovlivňuje pravděpodobnost porušení při tahových hodnotách. To znamená, že pro nízká  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$  je vhodnější použít model uvažující pouze první hlavní napětí. Musíme ale zohlednit fakt, že materiálové charakteristiky *m* a  $\sigma_0$  byly získány ze zkoušky trojbodovým ohybem, kdy vzniká jednoosá napjatost, což nekoresponduje s výpočtovým modelem trojosé napjatosti.

Jak z napjatostní, tak ze spolehlivostní analýzy tedy plyne, že odchylky kuželových ploch a dříku významně ovlivňují možnost destrukce hlavice. Z tohoto hlediska je nevyhovující tvarová odchylka KUZ\_MAX a v některých případech i KUZ\_MIN. Proto by mělo být snahou výrobců minimalizovat spodní mez úhlu α u hlavic a horní mez tohoto úhlu u dříku.

#### Návrhy pro další řešení:

- Spolehlivostní analýza pomocí Weibullovy teorie nejslabšího článku pro tvarovou imperfekci ovalita.
- Spolehlivostní analýza pomocí Weibullovy teorie nejslabšího článku pro kombinace jednotlivých tvarových imperfektí.
- Rozšíření výpočtového modelu 2-parametrického Weibullova rozdělení uvažujícího všechna tři hlavní napětí na jednotlivé hlavice.
- Verifikace výsledků získaných výpočtovým modelováním pravděpodobnosti porušení.

# 18. Seznam použitých zkratek a symbolů

 Youngův modul pružnosti v tahu	[MPa]
 Poissonovo číslo	[-]
 celkový počet elementů	[-]
 první hlavní napětí v objemu elementu	[MPa]
 objem elementu	[mm <sup>3</sup> ]
 Weibullův modul	[-]
 normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu	[MPa.m <sup>1/m</sup> ]
 napětí, pod kterým materiál nikdy neselže	[MPa]
 první hlavní napětí v objemu elementu	[MPa]
 druhé hlavní napětí v objemu elementu	[MPa]
 třetí hlavní napětí v objemu elementu	[MPa]
 pravděpodobnost porušení	[-]
···· ··· ··· ··· ··· ···	<ul> <li>Youngův modul pružnosti v tahu</li> <li>Poissonovo číslo</li> <li>celkový počet elementů</li> <li>první hlavní napětí v objemu elementu</li> <li>objem elementu</li> <li>Weibullův modul</li> <li>normalizovaná materiálová pevnost objemové jednotky materiálu</li> <li>napětí, pod kterým materiál nikdy neselže</li> <li>první hlavní napětí v objemu elementu</li> <li>druhé hlavní napětí v objemu elementu</li> <li>třetí hlavní napětí v objemu elementu</li> <li>pravděpodobnost porušení</li> </ul>

# 19. Použitá literatura

- [1] *Janíček P.*: Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky, hledání souvislostí, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007, ISBN 987-80-7204-554-9
- [2] *Fuis V.*: Napjatostní a spolehlivostní analýza keramické hlavice kyčelní endoprotézy, Edice Ph.D. Thesis, 34 s., Brno 2000
- [3] Varga, J.: Napjatostní analýza keramické hlavice totální kyčelní endoprotézy zatížené dle ISO 7206-5. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008, 73 s., Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.
- [4] Fajfr, M.: Deformačně napěťová analýza keramické hlavice kyčelní endoprotézy s modelovými tvarovými odchylkami kontaktních kuželů, Diplomová práce, Brno 2006
- [5] *Beznoska S., Čech O., Löbl K.*: Umělé náhrady lidských kloubů: biomechanické, materiálové a technologické aspekty, SNTL, 246 s., Praha 1987
- [6] McLean, A., F.; Hartsock, D., L.: An Overview of the Ceramic Design Process, Ceramics and Glasses, Engineered Materials Handbook, Vol. 4, s. 676-689, ASM International 1991
- [7] *Weibull W.*: A statistical theory of the strength of materials, Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar Nr. 151, 45 s., Stockholm 1939
- [8] Vardar Ö., Finnie I.: An analysis of the Brazilian disk fracture test using the Weibull probablistic treatment of brittle strength, University of California, Barkeley, California 94720, USA 1974, International Journal of Fracture, Vol. 11, No. 3, June 1975
- [9] Weisse B., Zahnera M., Weber W., Rieger W.: Improvement of the reliability of ceramic hip joint implants, Journal of Biomechanics 36, s. 1633–1639, April 2003
- [10] *Higuchi F., Shiba N., Inoue A., Wakebe I.*: **Fracture of an Alumina Ceramic Head in Total Hip Arthoplasty**, The Journal of Arthoplasty, Vol. 10, No. 6, s. 851-854, 1995
## 19. Použitá literatura

- [11] *Krikler S., Schatzker J.,* Ceramic Head Failure, The Journal of Arthoplasty, Vol. 10, No. 6, Dezember 1995
- [12] Sookdeo, S.; Nemeth, N., N.; Bratton, R., L.: Reliability Assessment of Graphite Specimens Under Multiaxial Stresses, NASA/TM-2008-215204, 2008
- [13] Johnson D., H.: **Principles of Simulating Contact Between Parts using ANSYS**, Erie, Pennsylvania, USA [200?]
- [14] Release 12.0 Documentation for Ansys, 2009
- [15] *Fuis V*.: Experimentální určování charakteristik Weibullova rozdělení pevnosti biokeramiky, Experimentální analýza napětí, 2004

## Internetové odkazy:

- [16] http://www.memsnet.org/material/aluminumoxideal2o3bulk/
- [17] http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MTP641
- [18] http://www.lekari-online.cz/ortopedie/zakroky/kycel-endoproteza
- [19] http://arthritis.about.com/od/hip/ss/birminghamhip.htm
- [20] http://braunoviny.bbraun.cz/clanky/navigace-u-nahrad-kycelnich-kloubu-budoucnostjiz-zacala/
- [21] http://www.obezita.cz/obezita/v-cr-a-ve-svete/
- [22] http://www.bolestkloubu.cz/co-je-to-revmatoidni-artritida/osteoartroza-neborevmatoidni-artritida/osteoartroza-nebo-revmatoidni-artritida--poznejte-rozdil-.aspx
- [23] http://www.beznoska.cz/co-nabizime/kycle/necementovany-drik-tep-kycelniho-kloubutyp-sf.html
- [24] http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/examples/kuzel/kontakt.htm
- [25] http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1888784/



## 20. Příloha

- Rozměry jednotlivých hlavic (tučně parametrizované rozměry)

<b>r</b> [mm]	16	<b>y1</b> [mm]	0,5	α	5°43'30"	h1 [mm]	12,5
<b>h</b> [mm]	12	<b>q1</b> [mm]	6,95	l [mm]	15	d2 [mm]	12,9
<b>r1</b> [mm]	6,35	<b>q2</b> [mm]	7,13	b [mm]	28		

Tab. 1 Rozměry hlavice 1 - LONG

<b>r</b> [mm]	16	<b>y1</b> [mm]	4,5	α	5°43'30"	h1	16,5
<b>h</b> [mm]	12	<b>q1</b> [mm]	7,15	I	19	d2	12,9
<b>r1</b> [mm]	6,35	<b>q2</b> [mm]	7,33	b	28		

Tab. 2 Rozměry hlavice 2 – *MEDIUM* 

<b>r</b> [mm]	16	<b>y1</b> [mm]	8,5	α	5°43'30"	h1	20,5
<b>h</b> [mm]	12	<b>q1</b> [mm]	7,35	I	23	d2	12,9
<b>r1</b> [mm]	6,35	<b>q2</b> [mm]	7,53	b	28		

Tab. 3 Rozměry	hlavice 3 - SHORT
----------------	-------------------

<b>r</b> [mm]	14	<b>y1</b> [mm]	0,5	α	5°43'30"	h1 [mm]	11
<b>h</b> [mm]	10,5	<b>q1</b> [mm]	6,88	l [mm]	13,5	d2 [mm]	12,9
<b>r1</b> [mm]	6,35	<b>q2</b> [mm]	7,13	b [mm]	24,5		

Tab. 4 Rozměry hlavice 4 - LONG

<b>r</b> [mm]	14	<b>y1</b> [mm]	4	α	5°43'30"	h1	14,5
<b>h</b> [mm]	10,5	<b>q1</b> [mm]	7,05	I	17	d2	12,9
<b>r1</b> [mm]	6,35	<b>q2</b> [mm]	7,3	b	24,5		

**Tab. 5** Rozměry hlavice 5 – *MEDIUM* 

<b>r</b> [mm]	14	<b>y1</b> [mm]	7,1	α	5°43'30"	h1	17,6
<b>h</b> [mm]	10,5	<b>q1</b> [mm]	7,21	I	20	d2	12,9
<b>r1</b> [mm]	6,35	<b>q2</b> [mm]	7,46	b	24,5		

Tab. 6 Rozměry hlavice 6 – SHORT

Vlastní program v programu Maple pro výpočtové modelování 2-PWR uvažující všechna tři hlavní napětí pro kostku o rozměrech 1x1x1 mm, s globální velikostí elementu velikostí 0,3 mm.

$$sig1 := 200: sig2 := -50: sig3 := -200: m := 7.19:$$
  
$$f := (\phi, \psi) \rightarrow \cos(\phi)^2 \cdot (sig1 \cdot \cos(\psi)^2 + sig2 \cdot \sin(\psi)^2) + sig3$$
  
$$\cdot \sin(\phi)^2:$$

$$\sigma := (\phi, \psi) \to \frac{(\operatorname{abs}(f(\phi, \psi)) + f(\phi, \psi))}{2} :$$
  
$$\operatorname{intgr} := \int_{0}^{2 \cdot \pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma(\phi, \psi))^{m} \cdot \cos(\phi) \, d\phi d\psi :$$

$$plot3d\left(\left[\sigma(\phi,\psi),f(\phi,\psi)\right],\psi=0...2\cdot\pi,\phi=0...\frac{\pi}{2}, transparency\right)$$
$$=\left[0.2,0.8\right]$$

Volu := 0.025443: sgm0 := 473.8:  $k := \frac{(2 \cdot m + 1)}{2 \cdot \pi \cdot sgm0^{m}}:$  $Pf := 1 - \exp(-(k \cdot intgr \cdot Volu \cdot 39304)):$