VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VÝPOČET DEFORMACE UZAVŘENÉHO ZAKŘIVENÉHO PRUTU
COMPUTATION OF A CLOSED CURVED BEAM DEFORMATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Jan Dvořáček
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Ing. Miroslav Hrstka
SUPERVISOR

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	**Jan Dvořáček**
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	**Ing. Miroslav Hrstka**
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočet deformace uzavřeného zakřiveného prutu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problém spočívá ve stanovení deformace uzavřeného kruhového prutu (kroužku), na kterém je zavěšeno závaží o určité hmotnosti a jenž má příčný průřez tvaru U. Z hlediska úrovně výpočtového modelu je vhodné vyjít z teorie prutů se zahrnutím vlivu všech složek výsledných vnitřních účinků. Vzhledem ke geometrii zakřivených prutů má teorie slabě zakřivených prutů omezenou platnost a pro silně zakřivené pruty je nutné použití příslušné metody. Z hlediska stanovení deformace numerickými metodami se jeví jako nejvhodnější metoda konečných prvků.

Cíle bakalářské práce:

1. Odvození analytických vztahů pro výpočet deformace kroužku pomocí teorie slabě zakřivených prutů.
2. Odvození analytických vztahů pro výpočet deformace kroužku pomocí teorie silně zakřivených prutů.
3. Sestavení výpočtového modelu pomocí metody konečných prvků a srovnání s analyticky vypočtenými výsledky.
4. Zhodnocení použitelnosti jednotlivých přístupů.

Seznam literatury:

Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J.: Mechanika těles : Pružnost a pevnost I. Třetí přepracované. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2004. ISBN 80-214-2592-X.

Timoshenko, S.: History of strength of materials. McGraw-Hill, New York, 1953.

Becker, W., Gross, D.: Mechanik elastischer Körper und Strukturen. Springer, 2002.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt
Předložená bakalářská práce se zabývá výpočtem deformace uzavřeného zakřiveného prutu (kroužku) s příčným průřezem ve tvaru U. Práce je rozdělena do čtyř částí. První část stručně pojednává o teoriích, které byly využity při řešení zadaného problému. Jmenovitě je jako první uveden energetický přístup a s ním spojené teorie slabě a silně zakřivených prutů, dále pak klasické nosníkové teorie – Timošenkova a Euler-Bernoulliho. Druhá část obsahuje všechna odvození potřebná pro analytické řešení daného problému a to jak pro teorie slabě, tak pro teorii silně zakřivených prutů. Ve třetí části je popsána tvorba výpočtových modelů a numerický výpočet, který byl proveden pomocí příslušného výpočtového softwaru využívajícího MKP. Závěrečná část se věnuje srovnání výsledků analytického a numerického řešení a jejich zhodnocení.

Summary
Presented bachelor's thesis deals with a computation of a closed curved beam (ring) deformation with a U-shaped cross section. The thesis consists of four parts. In the first part a brief summary of theories used for analytical solution is given. Specifically energy approach and related straight and curved beam theories, Timoshenko beam theory and Euler-Bernoulli beam theory are listed. The second part contains a complete analytical solution of given problem for both straight and curved beam theories. In the third part a design of computation models and numerical solution is described. In the last part, obtained values are compared and reviewed.

Klíčová slova
slabě zakřivený prut, silně zakřivený prut, výpočet deformace, uzavřený prut, kroužek, Timošenkova teorie, Euler-Bernoulliho teorie, tvarový součinitel příčného průřezu

Keywords
curved beam, deformation computation, closed beam, ring, Timoshenko beam theory, Euler-Bernoulli beam theory, form shear factor

Bibliografická citace

DVOŘÁČEK, J. *Výpočet deformace uzavřeného zakřiveného prutu.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 79 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Miroslav Hrstka.

Prohlášení
Prohlašuji, že předloženou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a pod vedením vedoucího bakalářské práce pana Ing. Miroslava Hrstky.

V Brně dne 25. 5. 2016.

Jan Dvořáček

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce panu Ing. Miroslavu Hrstkovi za čas, ochotu, energii a cenné připomínky, které mi při řešení dané problematiky věnoval. Díky patří také panu Ing. Stanislavu Žákovi, který mi při zpracování práce poskytl mnoho užitečných rad.

Dále bych rád poděkoval své rodině, přátelům a všem, kteří mě během celého mého studia ochotně podporovali.

Obsah

1 Úvod

Jedním ze základních úkolů pružnosti pevnosti je řešit problematiku spojenou s deformací, popisem napjatosti a porušováním součástí i celků technických objektů. Aby byla zajištěna dostatečná provozní bezpečnost, spolehlivost a životnost strojního výrobku, je třeba při jeho navrhování zvolit vhodný výpočtový model (analytický, numerický). Ten je třeba vždy navrhnou tak, aby vyhovoval jak z hlediska výpočtové náročnosti a složitosti, tak z hlediska přesnosti popisu deformace a napjatosti skutečné součásti.

V běžné technické praxi se lze často setkat s geometricky složitými tělesy. Řešení napjatosti a deformace takových těles pro lineární úlohy je spojeno s rozvojem výpočetní techniky v 70. letech 20. století a nástupem numerických metod řešení, zejména pak metody konečných prvků. Předtím byla získána a odvozena řešení hlavně pro geometricky jednodušší tělesa, která byla navíc často omezena silnými předpoklady o napjatosti a deformaci [1].

Až do začátku 19. století byla téměř výhradní náplní pružnosti pevnosti analýza prutů. Základy prutové teorie položili Robert Hooke (1653–1703) a E. Mariotte (1628–1684), kteří nezávisle na sobě dokázali přímou úměrnost mezi napětím a deformací. Další významnou osobností v dějinách pružnosti pevnosti byl švýcarský všestranný vědec Leonardo Euler (1707–1783). Jeho stěžejním příspěvkem bylo nalezení koeficientu úměrnosti mezi ohybovým momentem a křivostí ohybové křivky. To umožnilo zavedení zkoušky ohybem a tím získání modulu pružnosti i jiným způsobem než ze zkoušky tahem. Euler se také zabíral vzpěrem štíhlých prutů, zatížených osově tlakovou silou. Za zakladatele pružnosti pevnosti je považován francouzský inženýr Louis Navier (1785–1800), jehož žák A. J. C. Barré de Saint Vénant (1979–1886) uvedl první správnou teorii kroucení masivních prutů. Ve 20. století byla prutová analýza dále rozvíjena a obohacena například o teorii kroucení tenkostěnných profilů, či maticové algoritmy pro řešení prutových systémů [2].

Pruty patří v technické praxi stále mezi elementární konstrukční prvky a jsou hojně využívány například ve strojírenství, či stavebnictví [2]. Vykazují velikou různorodost a lze je členit do skupin hned podle několika hledisek. Jedno z hledisek je i křivost střednice prutu. Se zakřivenými pruty se lze v technické praxi setkat každý den, například v podobě závěsného šroubu, háku jeřábu či článku řetězu.

(a) Převzato z [3]. (b) Převzato z [4]. (c) Převzato z [5].

Obrázek 1.1: Zakřivené pruty v běžné technické praxi.

Zakřivenými pruty se zabývá i předložená práce, neboť jejím cílem je výpočet posuvu v místě střednice uzavřeného zakřiveného prutu (kroužku). Obecně lze k výpočtu napjatosti a deformace zakřivených prutů přistupovat různě. K řešení zadaného problému je pro analytický výpočet deformačního posuvu využit energetický přístup a s ním spojené teorie slabě a silně zakřivených prutů, které jsou uvedeny v [1]. K výpočtu numerickému byl zvolen výpočtový software *ANSYS Mechanical APDL 16.2* pracující s metodou konečných prvků. Z hlediska charakteru zadaného problému je vhodnou volbou výpočet pomocí dvou prvků – prutového prvku BEAM189 a objemového prvku SOLID186. K numerickému řešení je nepřímo využita i *Timošenkova nosníková teorie*, na které je vystavěn uvedený prutový prvek [6]. V závěru práce je provedeno srovnání obdržených výsledků, jejich zhodnocení, případné vysvětlení odlišností a doporučení použití jednotlivých přístupů.

2 Teoretický základ

2.1 Lineární pružnost

Při rozboru každé úlohy pružnosti je třeba nejprve rozlišit, zda bude řešena jako úloha lineární, či nelineární. Toto posouzení má zcela zásadní význam a to hned z několika hledisek. Mezi ta nejdůležitější patří následující: operační složitost úlohy, náročnost na vstupní proměnné, matematické znalosti inženýra a v neposlední řade také typ chování tělesa.

Lineární vztah mezi vnějšími silami, parametry napjatosti a deformací tělesa vyšetřuje pružnost lineární. Ta je předpokládána i při řešení zadaného problému. Aby byl tento předpoklad platný, musí být splněny následující podmínky [1]:

- materiál tělesa je lineárně pružný,
- deformace tělesa jsou malé,
- napjatost nezávisí na historii zatěžování,
- okrajové podmínky úlohy jsou lineární.

2.1.1 Lineárně pružný materiál

Řešení dané problematiky je tedy omezeno na oblast pružných (vratných) deformací. Jak již jejich název napovídá, takové deformace vždy po odlehčení vymizí. To znamená, že pružná deformace tělesa je v daném okamžiku závislá jen na parametrech zatížení v daném okamžiku a je naopak nezávislá na tom, jak bylo těleso zatíženo v minulosti. Dále platí také to, že jestliže zůstává těleso v celém průběhu zatěžování pružné a nevznikají žádné jiné změny, pak se přírůstek deformační práce přemění v přírůstek energii napjatosti akumulované v tělese

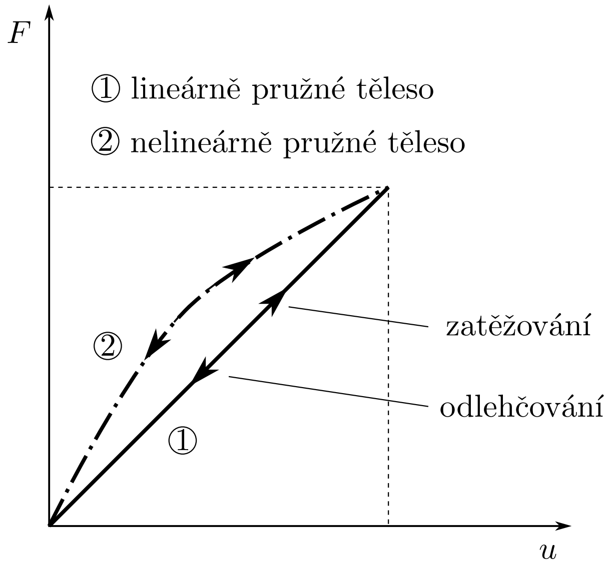
$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}W. \tag{2.1}$$

Tato rovnost je definována jako *zákon zachování energie pro pružné těleso*. Pokud je navíc z nezatíženého stavu zatíženo těleso mající nulovou vnitřní napjatost, platí vztah pro celkové hodnoty deformační práce a energie napjatosti [1]

$$A = W. \tag{2.2}$$

Vlastnost materiálu, která podmiňuje pružnou deformaci, se nazývá pružnost. Dle literatury [1, s. 36] je tato vlastnost definována následovně: *„Pružnost je vlastnost materiálu, která je podmíněna jeho strukturou (typem a parametry krystalové mříže, jejich uspořádáním atd.), provozními a zatěžovacími podmínkami.“* Matematicky ji lze vyjádřit jako funkční závislost mezi tenzorem napětí a tenzorem přetvoření. Ta je obecně, v případě pružného materiálu, nelineární. V případě lineárně pružného materiálu má tato závislost tvar přímky a je charakterizována fyzikálními vztahy, které se souhrnně označují jako *obecný Hookův zákon* – viz obr. 2.1.

Tyto vztahy je možné s dostatečnou přesností aplikovat i na nejběžnější strojíren-



Obrázek 2.1: Pružný materiál. Předloha z [1].

ský materiál – ocel. Ve standardní technické praxi lze také předpokládat, že materiál bude izotropní. V takovém případě lze pružné vlastnosti materiálu charakterizovat dvěma nezávislými konstantami, tzv. Youngovým modulem (modulem pružnosti v tahu) E a Poissonovým číslem (součinitelem příčného přetvoření) μ.

2.1.2 Obecné věty lineární pružnosti

V rámci lineární pružnosti byly zformulovány následující věty, které jsou využity při analytickém řešení zadaného problému.

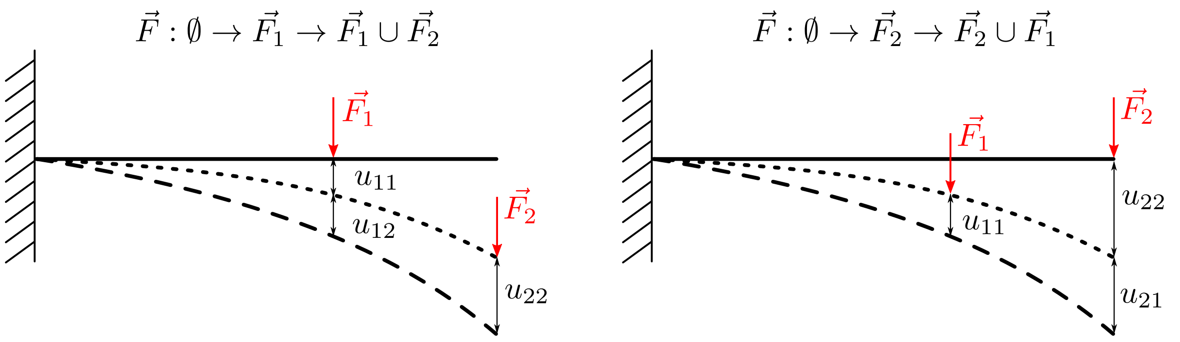
Věta o superpozici napjatosti a deformace

Napjatost a deformace tělesa Ω způsobená silovou soustavou Π je rovna součtu napjatostí a deformací způsobených jednotlivými silovými účinky této soustavy, nezáleží přitom na pořadí zatěžování [7].

Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

Je definováno lineárně pružné těleso Ω, které je z výchozího nezatíženého stavu zatěžováno dvěma osamělými silami $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$. Při působení sil se těleso deformuje a působiště sil se tedy posouvají. Obecně je posuv působiště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený působením síly $\vec{F}_j$ označen symbolem u_{ij}. Toto těleso je postupně zatěžováno dvěma způsoby dle obr. 2.2a a 2.2b:
Při prvním způsobu zatěžování je práce A_1 rovna

$$A_1 = A_{11} + (A_{12} + A_{22}) = \frac{1}{2}F_1 u_{11} + F_1 u_{12} + \frac{1}{2}F_2 u_{22}. \tag{2.3}$$



(a) První způsob zatěžování.

(b) Druhý způsob zatěžování.

Obrázek 2.2: Bettiho věta.

Při druhém způsobu zatěžování lze pak práci A_2 vyjádřit rovností

$$A_2 = A_{22} + (A_{21} + A_{11}) = \frac{1}{2}F_2 u_{22} + F_2 u_{21} + \frac{1}{2}F_1 u_{11}. \tag{2.4}$$

V souladu s předchozí větou nezávisí na historii zatěžování ani vykonaná práce:

$$A_1 = A_2. \tag{2.5}$$

Potom po dosazení vztahů (2.3) a (2.4) do rovnice (2.5) a následné úpravě platí rovnost

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21}. \tag{2.6}$$

Tento výsledek lze slovně interpretovat následující větou:

Práce vykonaná silou F_1 na posuvech vyvolaných silou F_2 (u_{12}) je stejně velká jako práce vykonaná silou F_2 na posuvech vyvolaných silou F_1 (u_{21}) [7].

Věta o vzájemnosti posuvů

Věta o vzájemnosti posuvů vyplývá přímo z Bettiho věty o vzájemnosti prací. Působí-li na lineárně pružné těleso Ω v bodech označených 1 a 2 jednotkové síly $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, které způsobí posuvy značené η_{12}, η_{21}, potom platí rovnost:

$$\eta_{12} = \eta_{21}. \tag{2.7}$$

Veličiny η_{12}, η_{21} se nazývají jako tzv. příčinkové součinitele [1].

Věta o deformační práci silové soustavy

Jestliže na lineárně pružné těleso Ω působí silová soustava Π obsahující osamělé síly $\vec{F_1} \ldots \vec{F_n}$, osamělé silové dvojice $\vec{M_1} \ldots \vec{M_m}$, objemové síly určené rozložením $\vec{\sigma}$ v Ω, plošné síly určené rozložením $\vec{p}$ na Γ, plošné dvojice určené rozložením $\vec{m_p}$, liniové síly určené rozložením $\vec{q}$ a liniové dvojice určené rozložením $\vec{m_q}$ na γ, pak celkovou deformační práci vykonanou soustavou Π lze vyjádřit jako [1]

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i u_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} M_j \varphi_j + \frac{1}{2}\int_{\Gamma} pu\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{\Gamma} m_p \varphi\,\mathrm{d}S + \\ + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma u \;\; \mathrm{d}v \;\; + \frac{1}{2}\int_{\gamma} qu\,\mathrm{d}l + \frac{1}{2}\int_{\gamma} m_q \varphi\,\mathrm{d}l. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ve výše uvedené rovnici vystupují veličiny u a φ, které vyjadřují následující:

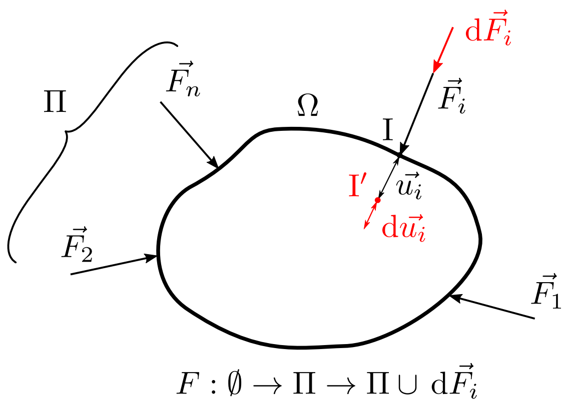
u – posuv působiště osamělých nebo elementárních sil ve směru jejich nositelek vyvolaných silovou soustavou Π,

φ – změnu úhlu přímky pevně spojené s působištěm osamělé nebo elementární silové dvojice vyvolané silovou soustavou Π.

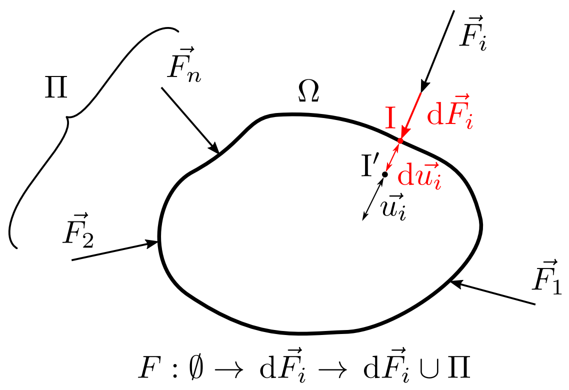
Věta Castiglianova

Tato věta má v lineární pružnosti velký význam, neboť je obecnou metodou pro určování deformací.

Je uvažováno lineárně pružné těleso Ω zatížené silovou soustavou Π tvořenou pouze osamělými silami $\Pi = \{\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_i}, \ldots, \vec{F_n}\}$. Toto těleso je zatěžováno dvěma způsoby dle obr. 2.3a a 2.3b.



(a) První způsob zatěžování.



(b) Druhý způsob zatěžování.

Obrázek 2.3: Castiglianova věta.

Deformační práce vykonané při jednotlivých způsobech zatěžování jsou poté rovny:

$$A_1 = A_\pi + \frac{\partial A}{\partial F_i}\,\mathrm{d}F_i, \tag{2.9}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}F_i\,\mathrm{d}u_i + A_\pi + \mathrm{d}F_i u_i. \tag{2.10}$$

Jak již bylo zmíněno dříve, velikost deformační práce nezávisí na historii zatěžování, proto lze psát

$$A_1 = A_2. \tag{2.11}$$

Po dosazení rovnic (2.9) a (2.10) do výše uvedeného vztahu a následné úpravě je získán vztah pro posuv (člen se dvěma diferencemi $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}F_i\,\mathrm{d}u_i$ lze při úpravě zanedbat, neboť jeho příspěvek je velmi malý)

$$u_i = \frac{\partial A}{\partial F_i} = \frac{\partial W}{\partial F_i}. \tag{2.12}$$

Takto lze odvodit první část *Castiglianovy věty*, kterou lze obecně určit posuv. Analogicky lze odvodit i část druhou. Místo osamělé síly $\vec{F}$ je uvažována osamělá dvojice $\vec{M}$ a místo posuvu u úhel natočení φ

$$\varphi_i = \frac{\partial A}{\partial M_i} = \frac{\partial W}{\partial M_i}. \tag{2.13}$$

První a druhou část Castiglianovy věty lze slovně interpretovat takto:

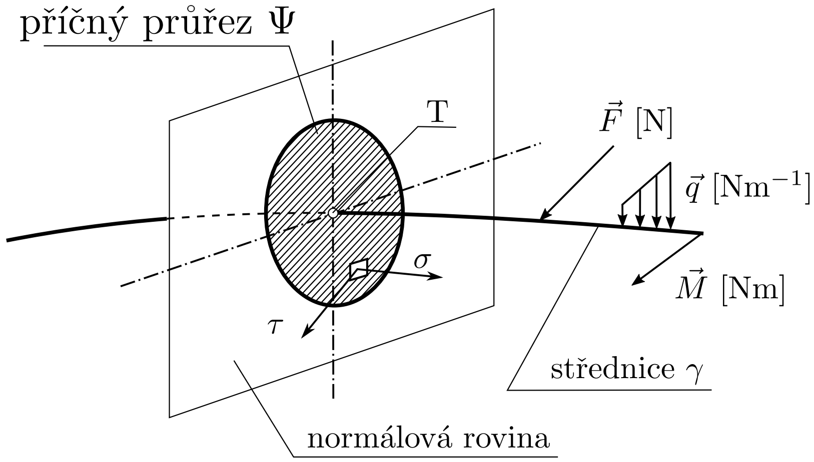
Deformační posuv působiště síly $\vec{F}$ po její nositelce je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této síly. Úhel natočení v místě působení silové dvojice je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této silové dvojice.

3 Energetický přístup

Pro analytický výpočet deformačního posuvu v bodě střednice zadaného kroužku je využit energetický přístup uvedený v [1]. Ten deformační posuv určuje pomocí výše zmíněné Castiglianovy větu. Jak lze vidět z rovnice (2.12), pro výpočet posuvu je nezbytné znát energii napjatosti akumulovanou v tělese. Pro její určení je využit zákon zachování energie (viz rov. (2.1)), který definuje vztah mezi deformační prací silové soustavy působící na těleso a energií napjatosti uložené v tělese. To, že je tento přístup pro řešení zakřivených prutů vhodný potvrzuje i Timošenko v [8].

Nejprve je však třeba prut definovat. V následující podkapitole je kromě definice uvedeno i základní dělení prutů dle různých kritérií.

3.1 Prut v pružnosti



Obrázek 3.1: Pojem prut v pružnosti. Předloha z [1].

Prut lze v pružnosti definovat jako nejjednodušší model reálného tělesa z hlediska typu napjatosti a deformace. Teoretické prutové těleso, viz obr. 3.1, musí splňovat určité geometrické, deformační a napjatostní předpoklady. Ty jsou souhrnně označovány jako tzv. prutové předpoklady [1].

3.1.1 Geometrické předpoklady

1. Prut je jednoznačně určen střednicí γ a v každém bodě střednice příčným průřezem Ψ. Ten obsahuje všechny body tělesa, které leží v normálové rovině. Geometrické těžiště T je určeno jako průsečík střednice γ a příčného průřezu Ψ.

2. Střednice γ je hladká a spojitá křivka konečné délky.

3. Příčný průřez Ψ je definován jako spojitá souvislá oblast, charakterizovaná průřezovými charakteristikami a ohraničená obrysem.

4. Délka střednice γ je řádově nejméně stejně velká jako největší z rozměrů příčného průřezu.

3.1.2 Vazbové a zatěžovací předpoklady

1. Vazbami jsou omezovány pouze úhly natočení a posuvy bodů střednice prutu.

2. Zatížení je realizováno na střednici γ pomocí silového působení osamělých a liniových sil nebo silových dvojic.

3.1.3 Deformační předpoklady

1. Během deformace si střednice prutu zachovává svoji spojitost a hladkost.

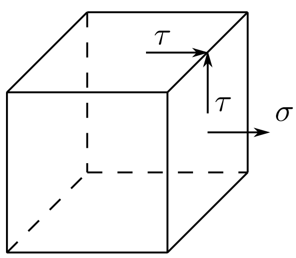
2. Příčné průřezy zůstávají vždy rovinné a kolmé k deformované střednici, pouze se vzájemně:

   - přibližují (tlak), oddalují (tah) a deformují se,
   - natáčejí se kolem osy ležící v příčném průřezu Ψ (ohyb) a deformují se,
   - natáčejí se kolem osy kolmé k příčnému průřezu Ψ (krut) a nedeformují se,
   - posouvají se kolmo ke střednici (smyk).

3.1.4 Napjatostní předpoklady

V bodě prutu vzniká zvláštní případ dvojosé (rovinné) napjatosti, tzv. *prutová napjatost*, viz obr. 3.2. Ta je určena normálovým a smykovým napětím v příčném řezu vedeným tímto bodem, přičemž všechny ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové [10]:

$$\boldsymbol{T_\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad \boldsymbol{T_\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

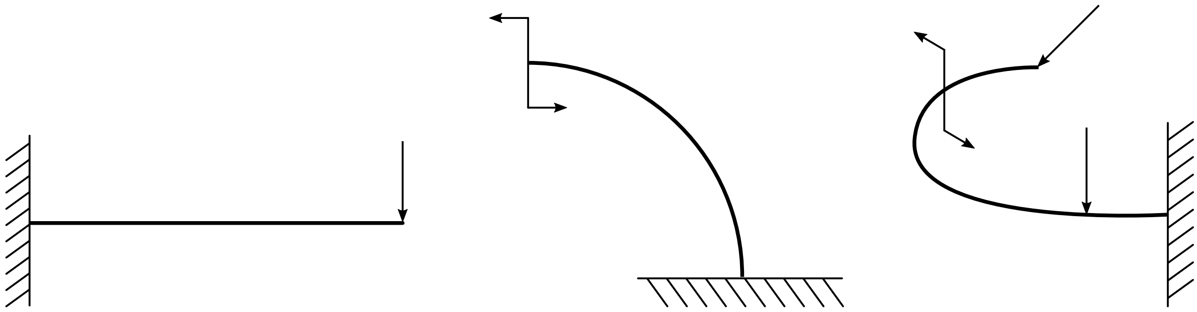


Obrázek 3.2: Prutová napjatost.

3.2 Klasifikace prutů

Jak již bylo zmíněno dříve, pruty jsou velmi rozmanité a lze je dělit dle různých hledisek hned do několika skupin. V této kapitole jsou blíže rozvedena ta, která jsou významná pro řešení zadaného problému.

3.2.1 Dělení dle geometrie prutu



(a) (b) (c)

Obrázek 3.3: Dělení dle křivosti střednice prutu:
(a) přímý prut, (b) zakřivený prut rovinný, (c) zakřivený prut prostorový.

A. dle křivosti střednice – viz obr. 3.3

B. dle uzavřenosti střednice

  (i) otevřené – právě jeden řez ω vedený bodem střednice rozdělí prut na dva prvky,

  (ii) uzavřené (n-krát) – prut je rozdělen na dva prvky řezem ω vedeným právě (n+1) body střednice.

C. dle poměru poloměru křivosti prutu k charakteristickému rozměru příčného průřezu
Toto hledisko má pro analytické řešení zadaného problému zásadní význam a je detailněji rozvedeno v podkapitole 3.3.

  (i) slabě zakřivené pruty – napjatost a deformaci u nich lze určit s ohledem na danou rozlišovací úroveň pomocí vztahů odvozených pro pruty přímé,

  (ii) silně zakřivené pruty – nelze pro ně využít vztahy pro přímé pruty, avšak rovinnost řezu zůstává zachována.

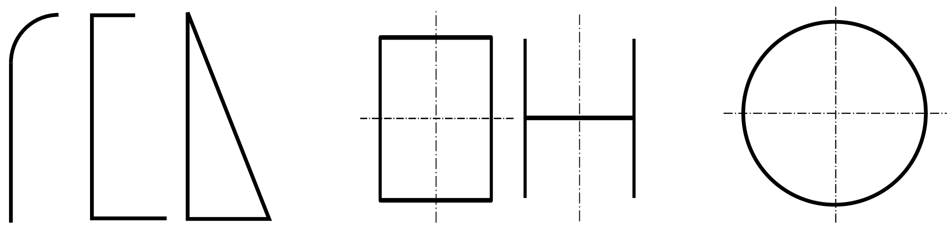
D. dle tvaru příčného průřezu

  (i) elementární průřezy – kruh, čtverec, obdélník, ...
  Pro elementární průřezy lze poměrně snadno odvodit jejich průřezové charakteristiky, neboť lze při jejich odvozování často využít symetrie. V analytické lineární pružnosti se lze setkat výhradně s těmito typy průřezů.

(ii) profily – I, U, Z, T, . . . profily
Tyto tvary jsou určeny normou a hojně rozšířeny v běžné technické praxi.

(iii) obecné průřezy

E. dle symetrie střednice, příčného průřezu – viz obr. 3.4



(a) (b) (c)

Obrázek 3.4: Dělení dle symetrie střednice a příčného průřezu:
(a) nesymetrický, (b) symetrický podle jedné nebo více os, (c) rotačně symetrický prut.

3.2.2 Dělení dle vazeb

(i) volné pruty

(ii) vázané pruty

(a) staticky určité – viz obr. 3.3a

(b) staticky neurčité

3.2.3 Dělení dle zatížení

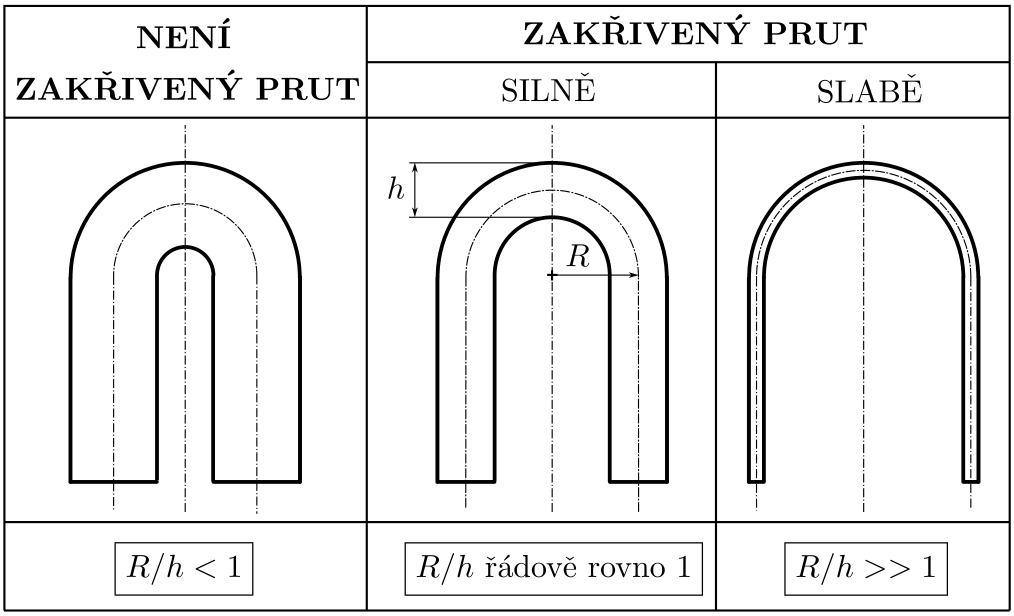
(i) jednoduché zatížení

(ii) kombinované zatížení

3.3 Slabě a silně zakřivené pruty

Zakřivené pruty lze dle poloměru křivosti prutu k charakteristickému rozměru příčného průřezu prutu rozdělit na dvě skupiny – pruty zakřivené slabě a silně. Teorií zakřivených prutů se intenzivně zabývali E. Résal a E. Winkler v 70. letech 19. století, později jejich úvahy dále rozvedli F. Grashof a K. Pearson. U zakřiveného prutu namáhaného ohybem se totiž v závislosti na poloměru křivosti střednice mění rozložení normálových napětí po příčném průřezu a poloha neutrální osy prutu. Podrobnější rozbor této teorie lze nalézt například v knize [8].

Slabě zakřivené pruty se při namáhání základním ohybem vyznačují lineární distribucí normálových napětí po příčném průřezu a tím, že neutrální osa zůstává shodná se střednicí prutu. Napětí a energii napjatosti takového prutu lze proto na dané rozlišovací



Obrázek 3.5: Dělení zakřivených prutů. Předloha z [1].

úrovni určovat podle vztahů pro pruty přímé.

Naopak u prutů zakřivených silně dochází k posunutí neutrální osy. Ta se vůči těžišti posouvá blíže ke středu křivost prutu o parametr nazývaný excentricita označený symbolem e. V příčném průřezu vzniká jako v případě přímého prutu tahové a tlakové normálové napětí. To je však rozloženo hyperbolicky, s nulovou hodnotou v neutrální ose. Energie napjatosti i napětí poté musí být určeny pomocí jiných vztahů než pro pruty přímé.

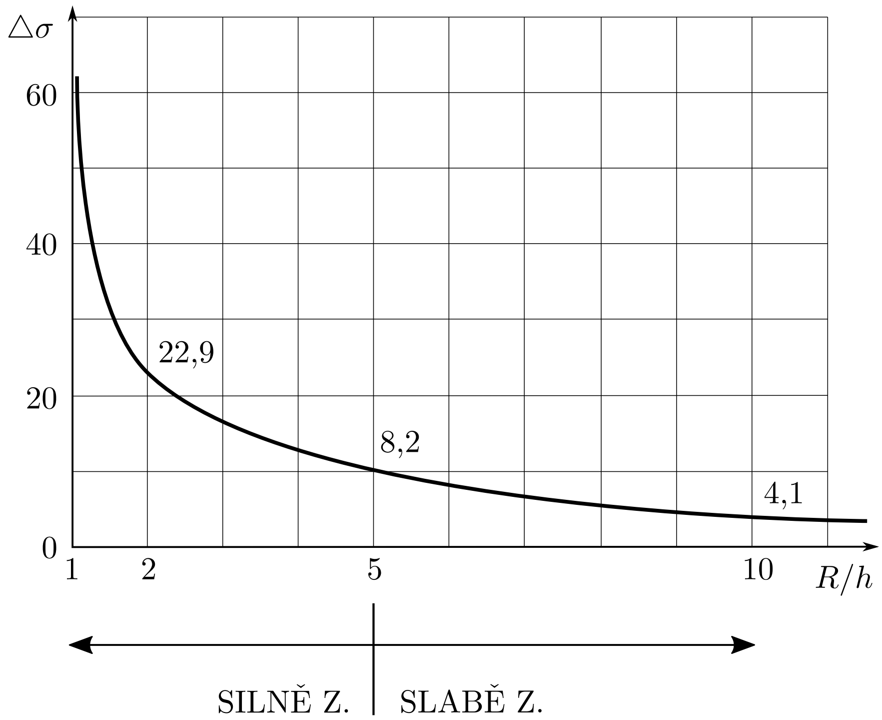
Jako vhodné kritérium pro rozlišení toho, zda je ještě prut zakřivený slabě nebo již ne, se jeví závislost poměru charakterizující geometrii prutu R/h na veličině $\triangle\sigma$. V uvedeném poměru vyjadřuje R poloměr zakřiveného prutu vztažený ke střednici a h charakteristický rozměr příčného průřezu. Veličina $\triangle\sigma$ udává odchylku napětí σ_{z} stanovenou dle vztahu pro napětí v silně zakřiveném prutu od napětí σ_{p} stanoveného dle vztahu pro pruty přímé a vypočítá se dle vztahu

$$\triangle\sigma = \frac{\sigma_{\mathrm{z}} - \sigma_{\mathrm{p}}}{\sigma_{\mathrm{z}}} \cdot 100\ [\%]. \tag{3.1}$$

Přibližnou závislost poměru R/h na veličině $\triangle\sigma$ lze vidět na obr. 3.6.

Obecně lze říci, že pruty, jejichž poloměr je na dané rozlišovací úrovni značně větší než charakteristický rozměr, tj. $R >> h$, lze aproximovat teorií slabě zakřivených prutů. Pro případy, kdy je $R \geq h$, je poté vhodné použít teorii silně zakřivených prutů. Na dané rozlišovací úrovni je jako pomyslná hranice mezi pruty slabě a silně zakřivenými zvolen poměr R/h, pro který se veličina $\triangle\sigma$ rovná přibližně 8 %, to je totiž chyba přijatelná. Tato hodnota odpovídá v grafu na obr. 3.6 přibližně poměru $R/h = 5$. S klesajícím poměrem R/h se charakter prutu stále více odchyluje od prutových předpokladů a vzniká v něm obecnější napjatost. Pro poměr $R/h < 1$ již proto nelze využít ani teorii silně zakřivených prutů. Pomyslné hranice mezi jednotlivými skupinami ilustruje obr. 3.5.

Určením rozlišovací hranice mezi slabě a silně zakřivenými pruty se zabýval i S. Timošenko. Ten ve své knize [8] zvolil podobný postup jako je uvedený výše a jako vhodnou



Obrázek 3.6: Závislost veličiny $\triangle\sigma$ na poměru R/h pro kruhový průřez o průměru h. Předloha z [1].

hranici zvolil poměr $R/h = 10$. Ten odpovídá chybě zhruba 3 % . Stejný autor také později ve své knize [9] srovnal řešení pomocí zmíněné teorie silně zakřivených s řešením pomocí *teorie elasticity*. To je teorie pokročilejší, založena na principu virtuálních prací a měla by poskytovat řešení nejpřesnější. Výsledkem srovnání bylo, že aproximace pomocí hyperbolického rozložení napětí je vyhovující a jen mírně se liší od přesného řešení.

3.4 Vztahy pro napětí v prutu

Pro odvození energie napjatosti je potřeba znát napětí působící v příčném průřezu, která jsou vyvolána jednotlivými složkami VVÚ. V následující podkapitole jsou proto uvedeny vztahy pro napětí od normálové, posouvající síly a ohybového momentu.

Normálové napětí vyvolané normálovou silou N pro přímý prut se určí dle vztahu

$$\sigma_N = \frac{N}{S}, \tag{3.2}$$

kde N je normálová síla a S je plocha příčného průřezu.

Smykové napětí od posouvající síly T pro přímý prut lze na úrovni pružnosti prutů určit pro tyto případy [10]:

1. příčné průřezy alespoň s jednou osou symetrie,

2. tenkostěnné příčné průřezy – profily.

Pro oba tyto případy navíc musí být splněny tyto předpoklady:

- prut je prizmatický,
- povrch prutu není zatížen smykovými silami.

Pro první případ musí být také splněno, že nositelka posouvající síly je osou symetrie příčného průřezu. Pro druhý případ se zase předpokládá rovnoměrné rozložení smykových napětí po tloušťce profilu.

Při splnění těchto předpokladů lze smykové napětí při namáhání prutu ohybem určit pomocí tzv. *Žuravského vztahu*

$$\tau = \frac{T(x)U_{y\Psi_1}(z)}{b(z)J_y}, \tag{3.3}$$

kde $T(x)$ je posouvající síla, $U_{y\Psi_1}(z)$ lineární moment plochy Ψ_1 k neutrální ose, $b(z)$ šířka příčného průřezu a J_y osový kvadratický moment vzhledem k neutrální ose.

Normálové napětí od ohybového momentu $\mathbf{M_o}$ pro přímý prut je pro případ základního ohybu (musí platit, že pouze jedna ze složek ohybového momentu je nenulová $M_\mathrm{o} = M_{\mathrm{o}y}$; $M_{\mathrm{o}z} = 0$) určeno rovnicí

$$\sigma_{M_\mathrm{o}} = \frac{M_\mathrm{o}}{J_y} z, \tag{3.4}$$

kde z určuje polohu. Je také třeba poznamenat, že uvedený vztah platí pouze v hlavním centrálním souřadnicovém systému.

Napětí od ohybového momentu $\mathbf{M_o}$ pro silně zakřivený prut je za stejných předpokladů definován jako

$$\sigma_{M_\mathrm{o}} = \frac{M_\mathrm{o}}{Se}\frac{z}{r-z}, \tag{3.5}$$

kde e je excentricita a r je poloměr neutrální osy.

3.5 Energie napjatosti prutu

Celkovou energii napjatosti akumulovanou v prutu od všech složek VVÚ lze určit pomocí principu superpozice jako součet

$$W = W_\sigma + W_\tau, \tag{3.6}$$

kde W_σ označuje energii napjatosti od normálových napětí a W_τ energii napjatosti od napětí smykových. Ty se určí podle vztahů

$$W_\sigma = \frac{1}{2E}\int_V \sigma^2 \,\mathrm{d}V, \tag{3.7}$$

$$W_\tau = \frac{1}{2G}\int_V \tau^2 \,\mathrm{d}V, \tag{3.8}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku.

V zakřiveném prutu namáhaném ohybem jsou nenulové všechny složky VVÚ. Proto je třeba při odvozování energie napjatosti pro zakřivené pruty počítat jak s oběma složkami normálového napětí, tak se složkou napětí smykového.

3.6 Energie napjatosti pro slabě zakřivený prut

Jak již bylo zmíněno dříve, energie napjatosti ve slabě zakřiveném prutu je shodná s energií napjatosti akumulovanou v prutu přímém. K odvození lze tedy využít vztahy pro napětí v přímých prutech odvozené v podkapitole 3.4.

Energie napjatosti od normálových napětí

Normálová napětí ve slabě zakřiveném prutu jsou vyvolána jak normálovou silou N, tak ohybovým momentem M_o, rovnice (3.7) se upraví na

$$W_\sigma = \frac{1}{2E}\int_V \left(\sigma_N + \sigma_{M_\mathrm{o}}\right)^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2E}\int_V \left({\sigma_N}^2 + 2\sigma_N\sigma_{M_\mathrm{o}} + \sigma_{M_\mathrm{o}}^2\right) \mathrm{d}V. \tag{3.9}$$

Po dosazení vztahů pro napětí (3.2) a (3.4) nabude rovnice tvaru

$$W_\sigma = \frac{1}{2E}\int_\gamma \left[\int_\Psi \frac{N^2}{S^2}\,\mathrm{d}S \;+ 2\int_\Psi \frac{N}{S}\frac{M_\mathrm{o}}{J_y} z\,\mathrm{d}S \;+ \int_\Psi \frac{M_\mathrm{o}^2}{J_y^2} z^2\,\mathrm{d}S\,\right] \mathrm{d}x.$$

Jelikož v hlavním centrálním souřadnicovém systému platí

$$\int_\Psi z^2\,\mathrm{d}S = J_y, \qquad \int_\Psi z\;\mathrm{d}S = U_y = 0, \qquad \int_\Psi \mathrm{d}S\; = S,$$

rovnice následně přejde do tvaru

$$W_\sigma = \frac{1}{2E}\left(\int_\gamma \frac{M_\mathrm{o}^2}{J_y}\,\mathrm{d}x + \int_\gamma \frac{N^2}{S}\,\mathrm{d}x\right). \tag{3.10}$$

Energie napjatosti od smykových napětí

Pro přímý prut lze energii napjatosti od posouvající síly určit dosazením Žuravského vztahu (3.3) do rovnice (3.8)

$$W_\tau = \frac{1}{2G}\int_\gamma\int_\Psi \frac{T^2 U_{y\Psi_1}^2(z)}{b^2(z) J_y^2}\,\mathrm{d}S\;\mathrm{d}x = \frac{1}{2G}\underbrace{\left(\int_\Psi \frac{U_{y\Psi_1}^2(z) S}{b^2(z) J_y^2}\right)}_{\beta}\int_\gamma \frac{T^2}{S}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\beta}{2G}\int_\gamma \frac{T^2}{S}\,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Veličina β se nazývá tvarový součinitel příčného průřezu, který je detailněji rozveden v podkapitole 3.8.

Celková energie napjatosti ve slabě zakřiveném prutu

Celková energie napjatosti akumulovaná ve slabě zakřiveném prutu od všech složek VVÚ se určí jako součet energie napjatosti od normálových i smykových napětí dle rov. (3.6) jako

$$W = \frac{1}{2E}\int_\gamma \frac{M_o^2}{J_y}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2E}\int_\gamma \frac{N^2}{S}\,\mathrm{d}x + \frac{\beta}{2G}\int_\gamma \frac{T^2}{S}\,\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

3.7 Energie napjatosti pro silně zakřivený prut

Energie napjatosti od normálových napětí

Postup určení energie napjatosti od normálových napětí v případě silně zakřiveného prutu je stejný jako v případě prutu slabě zakřiveného. Místo vztahu pro ohybový moment v přímém (slabě zakřiveném) prutu (3.4) je však třeba dosadit vztah (3.5), který je odvozený pro pruty zakřivené silně.

Po dosazení příslušných vztahů nabude rovnice (3.9) tvaru

$$W_\sigma = \frac{1}{2E}\underbrace{\int_\gamma\int_\Psi \frac{M_o^2}{S^2e^2}\frac{z^2}{(r-z)^2}\,\mathrm{d}S\ \mathrm{d}s_o}_{1} + \frac{1}{E}\underbrace{\int_\gamma\int_\Psi \frac{M_o}{Se}\frac{z}{(r-z)}\frac{N}{S}\,\mathrm{d}S\ \mathrm{d}s_o}_{2} + \frac{1}{2E}\underbrace{\int_\gamma\int_\Psi \frac{N^2}{S^2}\,\mathrm{d}S\ \mathrm{d}s_o}_{3},$$

kde lze délku vlákna $\mathrm{d}s_o$ ve vzdálenosti z od neutrální osy, která se mění v závislosti na radiálním parametru ρ, vyjádřit pomocí délky $\mathrm{d}s$, která zůstává v konstantní

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}s &= R\,\mathrm{d}\varphi\\ \mathrm{d}s_o &= \rho\,\mathrm{d}\varphi = (r-z)\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\right\}\frac{\mathrm{d}s_o}{\mathrm{d}s} = \frac{\rho}{R} = \frac{r-z}{R} \rightarrow \mathrm{d}s_o = \frac{r-z}{R}\,\mathrm{d}s.$$

Vyřešením dílčích integrálů 1, 2 a 3 ve vztahu uvedeném výše lze získat výsledný vztah pro energii napjatosti od normálových napětí

$$W_\sigma = \frac{1}{2E}\int_\gamma \frac{M_o^2}{SeR}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{E}\int_\gamma \frac{M_oN}{SR}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2E}\int_\gamma \frac{N^2}{S}\,\mathrm{d}s. \tag{3.13}$$

Energie napjatosti od smykových napětí

Energie napjatosti od smykových napětí je stejná jako v případě prutu slabě zakřiveného, viz rov. (3.11).

Celková energie napjatosti v silně zakřiveném prutu

Celkovou energii napjatosti akumulovanou v silně zakřiveném prutu lze opět určit jako součet

$$W = \frac{1}{2E}\int_\gamma \frac{M_o^2}{SeR}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{E}\int_\gamma \frac{M_oN}{SR}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2E}\int_\gamma \frac{N^2}{S}\,\mathrm{d}s + \frac{\beta}{2G}\int_\gamma \frac{T^2}{S}\,\mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

3.8 Tvarový součinitel příčného průřezu

Ve vztahu (3.11) se vyskytuje veličina β, která se nazývá *tvarový součinitel příčného průřezu* [7]. V česky psané literatuře se lze také setkat s termíny *koeficient smyku*, *smykový modul průřezu* nebo *součinitel nerovnoměrnosti* [11]. V anglicky psané literatuře se tato veličina většinou označuje symbolem α a nazývá se *(shear) form factor* [12], *shear correction factor* [13], či *shear deformation coefficient* [14].

Tvarový součinitel příčného průřezu zohledňuje rozložení smykových napětí po příčném průřezu a využívá se při výpočtu posuvů jimi způsobenými. Tato veličina je bezrozměrná a z rovnice (3.11) lze vidět, že vždy nabývá hodnoty větší nebo rovno nule. Přesnému určení tohoto součinitele se věnovalo mnoho autorů, kteří se jej snažili odvodit teoreticky, či získat experimentálně. Ani v současné době však nepanuje jednoznačný názor na to, který ze způsobů určení tohoto součinitele je správný a je stále předmětem diskuze. Výsledné vztahy jsou závislé pouze na průřezových charakteristikách příčného průřezu, ty přesnější pak i na materiálových vlastnostech (zejména Poissonově čísle).
Za velmi kvalitní shrnutí a přehled odvozených výrazů tvarového součinitele je považován článek [15] od Kaneka. Timošenko tento koeficient v [8] definuje jako poměr maximálního smykového napětí vůči průměrnému smykovému napětí působícím po příčném průřezu. Odvození koeficientu se kromě Timošenka věnovali například i Cowper, Mindlin, Goodier, či Renton. Jejich odvození jsou podstatně složitější a ve většině případů autoři vycházeli z teorie elasticity. K téměř shodným výsledkům jako Renton došli Pilkey a Schramm, kteří k řešení využili metodu konečných prvků. [12].

Běžně používaný vztah pro určování tvarového součinitele příčného průřezu nabývá právě tvaru rovnice (3.11). Pro obdélníkový příčný průřez odpovídá dle skript [1] tento výraz hodnotě 1,2. Timošenko ve svém prvním článku [16] uvedl pro stejný typ příčného průřezu hodnotu 1,5, která se později ukázala jako méně přesná. Další vyjádření, tentokrát získané Goodierem nabývá pro obdélník tvaru

$$\alpha = \frac{12 + 11\mu}{10(1 + \mu)} \tag{3.15}$$

Pro hodnotu Poissonova čísla 0,3 je tento vztah roven přibližně 1,18 [14]. Lze tedy vidět, že hodnoty získané z rovnic (3.11) a (3.15) se mírně liší. Pro jiné příčné průřezy může být rozdíl mezi jednotlivými hodnotami ještě významnější.
V analytickém výpočtu je pro výpočet tvarového součinitele použita rov. (3.11), která je odvozena z energie napjatosti od posouvající síly. V numerickém řešení poté metoda výpočtu uvedená v [14]. Ta je totiž výchozí metodou pro určování smykových koeficientů pro prutové prvky ve výpočtovém softwaru ANSYS Mechanical APDL 16.2 [6].

Je také vhodné poznamenat, že ve výpočtových programech využívajících síť konečných prvků vstupuje do výpočtu hodnota koeficientu smyku běžně jako převrácená hodnota a nazývá se *shear deflection constant* [13].

3.9 Deformační posuv v bodě střednice

K výpočtu posuvu je při analytickém výpočtu využita Castiglianova věta. Aby tato věta mohla být aplikována, musí být splněna podmínka lineárnosti. Pro zjednodušení postupu výpočtu je vhodné využít jednu z variant Castiglianovy věty, tzv. *Maxwell-Mohrovu variantu*. Ta je založena na dvou následujících předpokladech [1]:

- materiálové a geometrické charakteristiky vyskytující se ve vztazích pro energii napjatosti nejsou závislé na veličinách F ani M podle kterých se derivuje,
- jednotlivé složky VVÚ závisí na veličinách F i M lineárně.

Pro její vyjádření je vhodné zavést obecný vztah pro energii napjatosti od jednotlivých namáhání

$$W = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{V^2\,\mathrm{d}x}{K_\Psi}, \tag{3.16}$$

kde V je složka VVÚ (N, M_o, T, M_k) a K_Ψ vyjadřuje tuhost příčného průřezu pro jednoduchá namáhání. Pro určení deformačního posuvu lze Castiglianovu větu (2.12) upravit dosazením vztahu (3.16) následovně

$$u_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{K_\Psi}\frac{\partial V^2}{\partial F}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{2V}{K_\Psi}\frac{\partial V}{\partial F}\,\mathrm{d}x.$$

Konečný tvar Maxwell-Mohrovy varianty pro deformační posuv vyvolaný silou $\vec{F}$ je

$$u_F = \int_\gamma \frac{V}{K_\Psi}\frac{\partial V}{\partial F}\,\mathrm{d}x, \tag{3.17}$$

pro natočení vyvolané působením silové dvojice $\vec{M}$ poté

$$\varphi_M = \int_\gamma \frac{V}{K_\Psi}\frac{\partial V}{\partial M}\,\mathrm{d}x. \tag{3.18}$$

Dosazením vztahů pro energii napjatosti od jednotlivých složek VVÚ do vztahu (3.17) lze tedy získat posuvy (natočení) jimi vyvolanými.

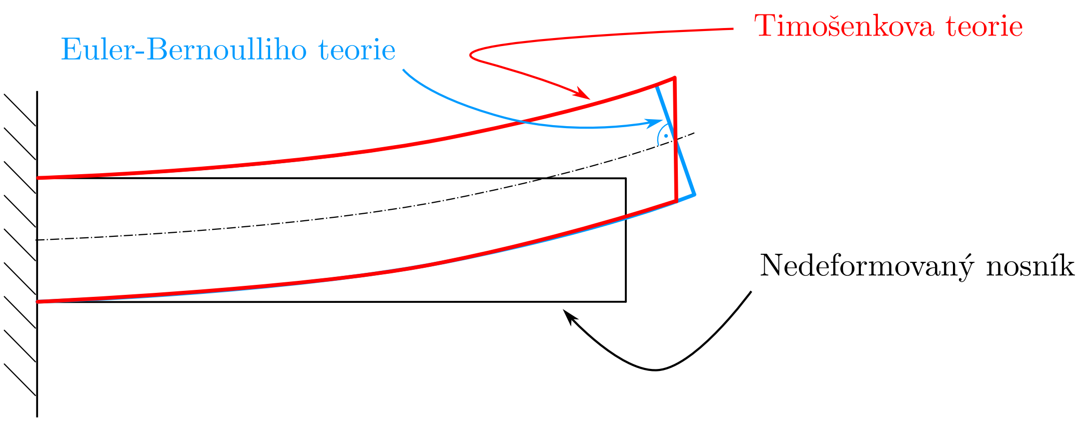
Analytická vyjádření pro celkový posuv pro slabě i silně zakřivený prut jsou uvedeny v kapitole 5.

4 Timošenkova nosníková teorie

V běžné technické praxi se k určení průhybu prutů velmi často využívají klasické nosníkové teorie. Ty jsou výhodné zejména z toho důvodu, že pomocí nich lze získat informaci o průhybu v libovolném bodě střednice prutu. Toho lze s výhodou využít například při návrhu prutu, kdy jsou často známy maximální dovolené hodnoty průhybu prutu v libovolných místech střednice.

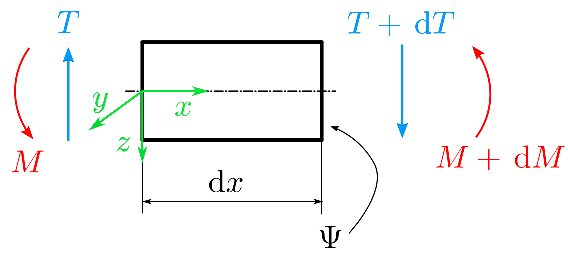
Pod pojmem nosník se rozumí prut, který je zatížen osamělými silami nebo spojitým zatížením v příčném směru. U takového prutu je posouvající síla nenulová a ohybový moment nemá po délce střednice konstantní průběh [10]. Klasickým nosníkovým teoriím se bude věnovat i následující kapitola, zejména pak tzv. *Timošenkově nosníkové teorii*. Na této teorii jsou totiž vystavěny prvky typu BEAM v mnoha výpočtových programech pracujících se sítí konečných prvků [17]. Prutové prvky využité pro numerický výpočet zadaného problému jsou na této teorii založeny také [6]. Druhá z klasických nosníkových teorií se nazývá jako *Euler-Bernoulliho nosníková teorie*. Ta je starší než teorie Timošenkova a jak bude ukázáno dále, Euler-Bernoulliho teorie je vlastně jejím pouhým zjednodušením.

První z jmenovaných teorií uvedl k životu Štěpan P. Timošenko (1878–1972), který je považován za otce moderní aplikované mechaniky. Během svého života působil jako profesor na prestižní Stanfordské a Michiganské univerzitě, kde publikoval řadu knih významných jak na poli vzdělávacím, tak výzkumném. Na jeho počest je každoročně Americkou asociací strojních inženýrů (ASME) udělována Timošenkova medaile za mimořádný přínos na poli aplikované mechaniky [18]. Druhá z teorií byla zformulována zhruba v polovině 18. století švýcarským matematikem a fyzikem Danielem Bernoullim (1700–1782). Z myšlenek zformulovaných Bernoullim později vycházel Leonhard Euler (1707–1783) a teorii doplnil o další poznatky [19]. Z počátku vládly o platnosti této teorii pochybnosti, ty se však rozplynuly po úspěšné aplikaci při stavbě Eiffelovy věže a ruského kola v 19. století. Jak již bylo uvedeno dříve, obě teorie byly odvozeny pro nosníky a uvažují tedy primárně namáhání přímého prizmatického prutu ohybem. Rozdíl mezi oběma teoriemi je vysvětlen v následujícím odstavci.



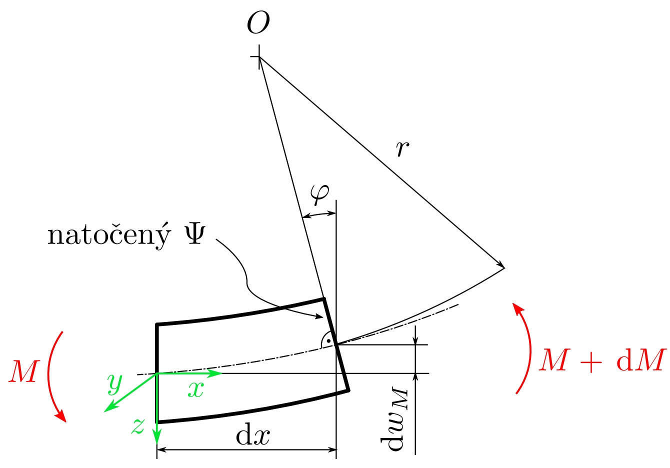
Obrázek 4.1: Klasické nosníkové teorie.

Euler-Bernoulliho teorie je odvozena při zavedení předpokladu o rovinnosti a kolmosti příčných průřezů k deformované střednici. Timošenkova teorie předpoklad o kolmosti relaxuje a předpokládá to, že příčné průřezy se vůči deformované střednici natáčejí, viz. obr. 4.1. Toto natočení vzniká v důsledku toho, že Timošenko uvažuje nejen průhyby vyvolané ohybovým momentem, ale i průhyby vyvolané působením posouvající síly, jejíž hodnota je při příčném zatížení nenulová. Tento případ namáhání se v praxi vyskytuje často a i když jsou průhyby vzniklé v důsledku smykového napětí v porovnání s deformacemi od ohybového momentu většinou zanedbatelné, existují případy, kdy je zanedbat nelze. V následujících podkapitolách jsou odvozeny diferenciální rovnice určující průhyby po celé délce střednice zvlášť pro ohybový moment i posouvající sílu. Na obr. 4.2 lze vidět uvolněný prvek přímého prizmatického nosníku zatíženého příčně osamělou silou.



Obrázek 4.2: Uvolněný prvek nosníku.

4.1 Průhyby od ohybového momentu



Obrázek 4.3: Uvolněný prvek nosníku při namáhání ohybem. Prvek na obrázku se deformuje tak, že se jeho příčný průřez natočí kolem osy ležící v příčném průřezu o úhel φ.

Při ohybovém namáhání přímého prizmatického prutu lze průhyby střednice prutu charakterizovat tvz. *diferenciální rovnicí ohybové čáry* [1]. Tu lze odvodit následovně. V případě základního ohybu, když ohybový moment působí pouze v jedné z os ($M_\mathrm{o} = M_{\mathrm{o}y}$, $M_{\mathrm{o}z} = 0$), platí pro křivost ohybové čáry následující relace

$$\frac{1}{r} = \frac{M_{\mathrm{o}y}}{EJ_y}. \tag{4.1}$$

V případě, že je výraz $M_{\mathrm{o}y}/EJ_y$ ve vztahu (4.1) konstantní, má deformovaná střednice tvar kružnice. Tento případ se však vyskytuje velmi ojediněle a běžná jsou naopak zatížení, pro která tento výraz konstantní není. Poté nabývá deformovaná střednice tvaru obecné křivky, v případě základního ohybu se navíc jedná o křivku rovinnou. V diferenciální geometrii lze křivost rovinné křivky vyjádřit v souřadnicovém systému (x,z) vztahem

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}^2 x}}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{4.2}$$

V případě, kdy výraz w_M označuje průhyb v ose z přejde rovnice do tvaru

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm \dfrac{\mathrm{d}^2 w_M}{\mathrm{d}^2 x}}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}w_M}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{4.3}$$

Po dosazení vztahu (4.1) do rovnice (4.3) lze získat výsledný tvar diferenciální rovnice ohybové čáry:

$$\frac{M_{\mathrm{o}y}}{EJ_y} = \frac{\pm \dfrac{\mathrm{d}^2 w_M}{\mathrm{d}^2 x}}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}w_M}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{4.4}$$

Tato rovnice je obyčejná, nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Její analytické řešení je omezeno pouze na elementární případy a to navíc ve tvaru obsahujícím eliptické funkce.

Pro malé deformace přejde diferenciální rovnice (4.4) do tvaru

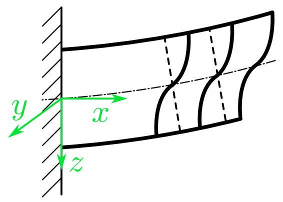
$$\frac{M_{\mathrm{o}y}}{EJ_y} = \pm \frac{\mathrm{d}^2 w_M}{\mathrm{d}^2 x}. \tag{4.5}$$

Tuto rovnici již lze po doplnění okrajových podmínek řešit analyticky přímou integrací.

Znaménko ve vztazích (4.4) a (4.5) se určuje dle znaménkové konvence. Pokud je moment $M_{\mathrm{o}y}$ orientován ve směru kladné osy globálního souřadnicového systému a osa z míří směrem dolů, je ve výrazech znaménko mínus.

Výše popsaná teorie vyjadřuje dříve zmíněnou Euler-Bernoulliho teorii.

4.2 Průhyby od posouvající síly



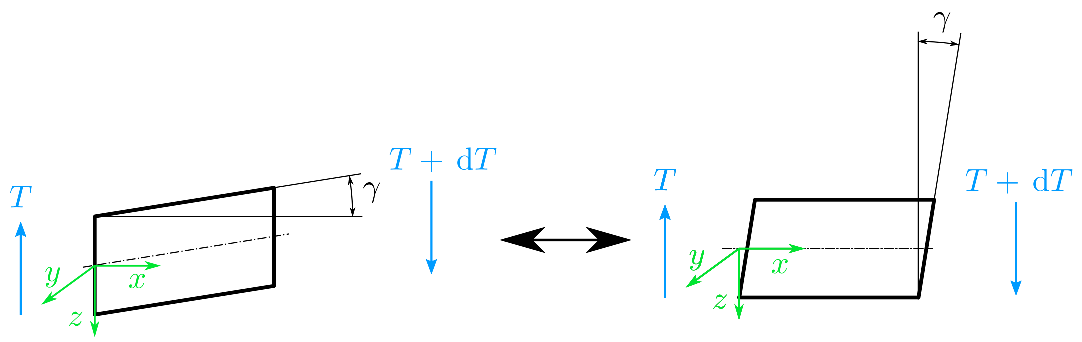
Obrázek 4.4: Při namáhání smykem dochází k borcení příčných průřezů.

Další průhyby jsou při příčném zatížení způsobeny působením posouvající síly [8]. Teorie Euler-Bernoulliho tento fakt úplně vypouští. To je například u krátkých a tlustých prutů nepřípustné, protože složka průhybu od posouvající síly je nezanedbatelná. Tento průhyb se realizuje vzájemným skluzem dvou sousedních příčných průřezů, viz. obr. 4.4. Jelikož jsou smyková napětí rozložena po příčném průřezu nerovnoměrně, dojde k borcení příčného průřezu prutu. Místo složitého modelování vzniklé křivky charakterizující tvar příčného průřezu po deplanaci, Timošenko využívá toho, že části příčného průřezu v místě těžiště zůstávají svislé a vzájemně po sobě klouzají. To je možné jen tehdy, předpokládá-li se konstantní rozložení smykového napětí po příčném průřezu. Sklon diferenciální rovnice je tedy v každém příčném průřezu roven přetvoření v těžišti tohoto příčného průřezu.

Využitím konstitutivního vztahu $\tau = G\gamma$ lze pak sklon diferenciální rovnice průhybové čáry od smyku vyjádřit následovně [8]:

$$\frac{\mathrm{d}w_T}{\mathrm{d}x} = \frac{(\tau_{zx})_{z=0}}{G} = \frac{\alpha T}{SG}. \tag{4.6}$$

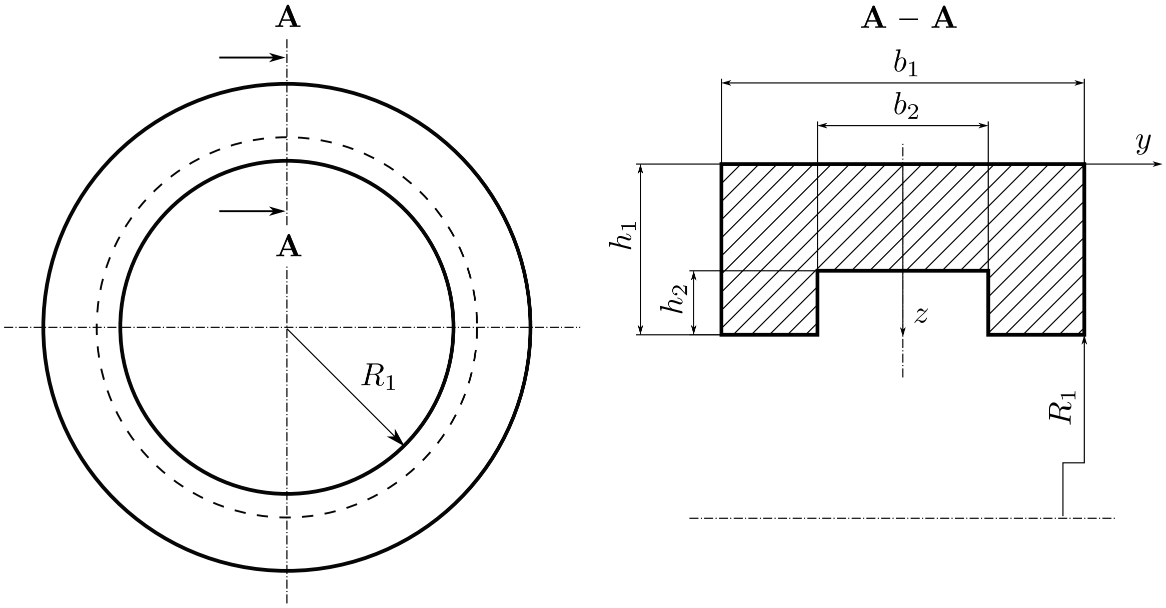
Výraz T/S v rovnici vyjadřuje průměrné smykové napětí τ_{zx} a α korekční faktor, kterým je třeba výraz vynásobit tak, aby v rovnici vystupovalo smykové napětí v těžišti příčného průřezu (viz podkapitola 3.8).



Obrázek 4.5: Uvolněný prvek nosníku při zatížení posouvající silou. Prvek na obrázku se deformuje tak, že se jeho příčný průřez natočí vůči střednici o úhel γ.

5 Analytický výpočet

5.1 Formulace problému



Obrázek 5.1: Geometrie kroužku.

Geometrie zadaného kroužku je zřejmá z obr. 5.1. Jak bylo uvedeno v podkapitole 3.3, nejvhodnějším parametrem pro rozlišení prutu slabě a silně zakřiveného se jeví charakteristika R/h. Z hlediska výpočtu je výhodné měnit poloměr kroužku R_1 a tím pádem i poloměr střednicové plochy R. Poloměr R_1 se bude postupně zvětšovat při stálých rozměrech příčného průřezu, od hodnoty 1 mm až do hodnoty 701 mm, vždy po 5 mm. Zadané rozměry jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 5.1: Zvolené rozměry kroužku.

R_1 [mm]	h_1 [mm]	h_2 [mm]	b_1 [mm]	b_2 [mm]
1–701, krok 5	25	10	40	25

Jako materiál, ze kterého je kroužek vyroben byla zvolena nejpoužívanější ušlechtilá uhlíková ocel *ČSN 12 050*, značená také *C45* dle normy *ČSN EN 10027-1*. Jelikož jsou uvažovány pouze elastické deformace, stačí k výpočtu pouze dvě nezávislé materiálové charakteristiky uvedené v tab. 5.2.

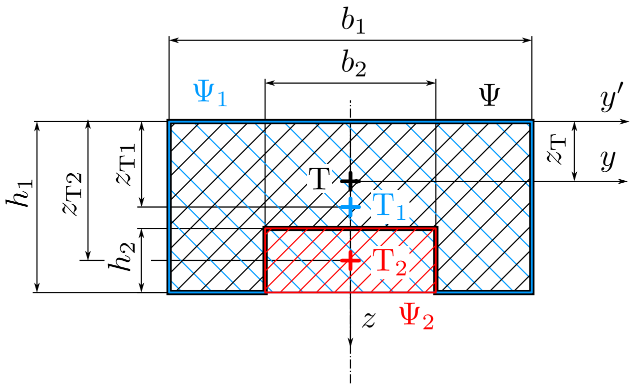
Tabulka 5.2: Materiálové charakteristiky oceli *ČSN 12 050* dle normy [20].

E [MPa]	μ [mm]
211 000	0,3

5.2 Geometrické charakteristiky příčného průřezu

Pro výpočet deformačních a napěťových parametrů je třeba určit některé z charakteristik příčného průřezu. Jmenovitě jsou v této podkapitole odvozeny obecné funkční závislosti pro plochu S, polohu těžiště z_{T} a kvadratický moment průřezu J_y. Dále pak také funčkní vztahy pro veličiny, které s geometrickými charakteristikami příčného průřezu přímo souvisí – tvarový součinitel příčného průřezu β a excentricita e. Pro většinu odvození je využita symetrie zadaného příčného průřezu, dále pak věty vyjadřující princip superpozice a v neposlední řadě také *Steinerova věta*.

Aby byl výpočet co nejefektivnější, je vhodné rozdělit zadaný příčný průřez Ψ na dva jednoduché průřezy Ψ_1 a Ψ_2, viz obr. 5.2. Jednoduchý průřez je takový, pro který lze získat jeho průřezové charakteristiky z tabulek, popř. jsou všeobecně známy [1].



Obrázek 5.2: Příčný průřez Ψ s rozměry a polohami těžišť jednoduchých průřezů.

Výpočet plochy

Pomocí obecně známého vztahu pro výpočet plochy obdélníku a principu superpozice lze jednoduše získat výslednou plochu příčného průřezu Ψ jako rozdíl ploch S_1, S_2 jednoduchých příčných průřezů Ψ_1 a Ψ_2

$$S = S_1 - S_2 = h_1 b_1 - h_2 b_2. \tag{5.1}$$

Výpočet polohy těžiště

Pro výpočet polohy těžiště v ose z lze využít vztah

$$U_y = z_{\mathrm{T}} S, \tag{5.2}$$

který říká, že lineární moment k ose y je roven součinu polohy těžiště v ose z a plochy průřezu.

Pro obdélníkový průřez o výšce h a šířce b tedy obecně bude platit

$$U_y = z_{\mathrm{T}} h b. \tag{5.3}$$

Podobně jako při výpočtu plochy lze při výpočtu U_y příčného průřezu Ψ využít princip superpozice. Polohy těžišť v jednoduchých průřezech lze snadno určit a platí tedy

$$U_y = U_{y1} - U_{y2} = z_{\mathrm{T1}} h_1 b_1 - z_{\mathrm{T2}} h_2 b_2. \tag{5.4}$$

Nyní je již vyjádření polohy těžiště v ose z příčného průřezu Ψ jednoduché. Plocha příčného průřezu a lineární moment k ose y jsou zřejmé z rovnic (5.1) a (5.4)

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{T}} = \frac{U_{y1} - U_{y2}}{S_1 - S_2} = \frac{z_{\mathrm{T1}} h_1 b_1 - z_{\mathrm{T2}} h_2 b_2}{h_1 b_1 - h_2 b_2} = \frac{\frac{h_1}{2} h_1 b_1 - \left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right) h_2 b_2}{h_1 b_1 - h_2 b_2} = \\ = \frac{h_1^2 b_1 + 2 h_1 h_2 b_2 - h_2^2 b_2}{2\left(h_1 b_1 + h_2 b_2\right)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Výpočet osového kvadratického momentu průřezu

Při výpočtu této průřezové charakteristiky lze opět využít toho, že osový kvadratický moment celého průřezu Ψ k dané ose je dán sumací kvadratických momentů částí průřezu Ψ_1 a Ψ_2 k témže osám.

Je známo, že osový kvadratický moment průřezu k ose y procházející těžištěm obdélníka o šířce b a výšce h je roven

$$J_y = \frac{b h^3}{12}. \tag{5.6}$$

K vyjádření osových kvadratických momentů částí průřezu ke stejné ose y' lze využít vztah známý jako Steinerova věta, která dle obr. 5.2 nabývá tvaru

$$J_{y'} = J_y + z_{\mathrm{T}}^2 S. \tag{5.7}$$

Použitím rovnice (5.6) a Steinerovy věty (5.7) lze tedy získat kvadratický moment průřezu Ψ k ose y' jako součet

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \left(J_{y1} + z_{\mathrm{T1}}^2 S\right) + \left(J_{y2} + z_{\mathrm{T2}}^2 S\right) = \\ &= \left[\frac{b_1 h_1^3}{12} + \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 b_1 h_1\right] - \left[\frac{b_2 h_2^3}{12} + \left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right)^2 b_2 h_2\right] = \\ &= \frac{b_1 h_1^3}{3} + \frac{b_2 h_2 h_1^2}{4} + \frac{b_2 h_2^3}{12}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pro další výpočty je ještě třeba posunout kvadratický momentu průřezu Ψ k ose y' do těžiště. K tomu lze opět využít Steinerovu větu a rovnice (5.1), (5.5) a (5.8)

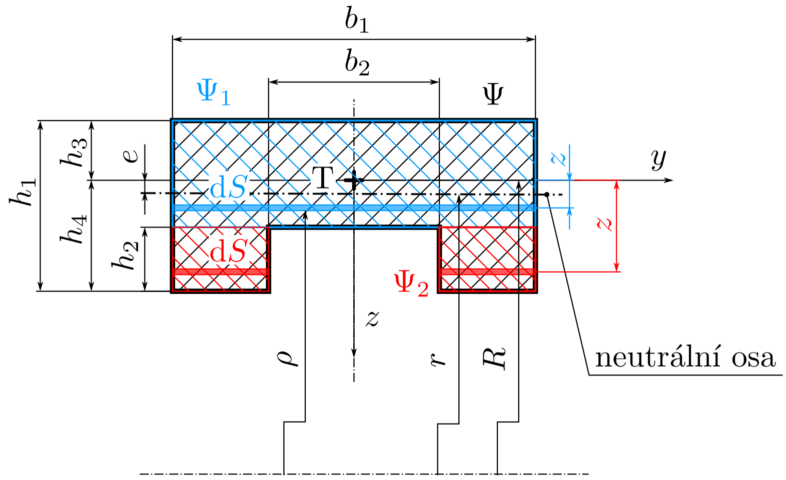
$$\begin{aligned} J_y = J_{y'} - z_T^2 S = \frac{b_1 h_1^3}{3} + \frac{b_2 h_2 h_1^2}{4} + \frac{b_2 h_2^3}{12} - \\ - \left(\frac{h_1^2 b_1 + 2 h_1 h_2 b_2 - h_2^2 b_2}{2\left(h_1 b_1 + h_2 b_2\right)}\right)^2 \left(h_1 b_1 - h_2 b_2\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Výpočet tvarového součinitele příčného průřezu

Jak již bylo zmíněno dříve (rov. (3.11)), tento součinitel je závislý pouze na geometrii příčného průřezu a obecně je definována takto

$$\beta = \int_\Psi \frac{U^2_{y\Psi 1}(z) S}{b^2(z) J^2_y} \, \mathrm{d}S, \tag{5.10}$$

kde $U_{y\Psi 1}(z)$ je lineární moment plochy $\Psi_1(z)$ k neutrální ose, S je plocha průřezu, $b(z)$ je šířka příčného průřezu, J_y je osový kvadratický moment příčného průřezu k neutrální ose.



Obrázek 5.3: Příčný průřez prutu upravený pro výpočet tvarového součinitele příčného průřezu a excentricity. Rozměry h_3 a h_4 jsou zavedeny pro přehlednost a platí pro ně vztahy $h_3 = z_\mathrm{T}$ a $h_4 = h_1 - z_\mathrm{T}$.

Integrální vztah pro výpočet β je v tomto případě potřeba rozdělit na dva integrály, každý pro jednu z oblastí Ψ_1 a Ψ_2

$$\beta = \beta_1 + \beta_2. \tag{5.11}$$

Jelikož se šířky jednotlivých oblastí nemění v závislosti na souřadnici z, lze je jednoduše zapsat jako

$$b_1\,(z) = b_1, \tag{5.12}$$

$$b_2\,(z) = b_2 - b_1. \tag{5.13}$$

Dále je potřeba vyjádřit lineární momenty jednotlivých oblastí. Obecně je lineární moment definován jako

$$U_y = \int_\Psi z \;\, \mathrm{d}S. \tag{5.14}$$

Z popisu jednotlivých veličin definičního vztahu (5.10) plyne, že vztahy pro lineární moment a osový kvadratický moment musí být vyjádřeny k neutrální ose. Výpočet tvarového součinitele β se tedy pro slabě a silně zakřivené pruty liší.

a) Slabě zakřivené pruty

Lineární momenty $U_{y\Psi_1}$ a $U_{y\Psi_2}$ je v tomto případě třeba vyjádřit v závislosti na souřadnici z viz obr. 4.5. Pro každý interval lze tedy zvlášť odvodit

$$z \in \langle -h_3; h_4 - h_2 \rangle : \qquad U_{y\Psi_1} = \int_{-h_3}^{z} \int_{\frac{-b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \frac{b_1}{2} \left(z^2 - h_3^2 \right), \tag{5.15}$$

$$z \in \langle h_4 - h_2; h_4 \rangle : \qquad U_{y\Psi_2} = \int_{z}^{h_4} \int_{\frac{-(b_1-b_2)}{2}}^{\frac{(b_1-b_2)}{2}} z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \frac{b_1 - b_2}{2} \left(h_4^2 - z^2 \right). \tag{5.16}$$

Nyní již nic nebrání tomu zapsat výrazy pro β_1 a β_2. Pro první integrál platí

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \int_{\Psi} \frac{U_{y\Psi_1}^2(z) S}{b_1^2(z) J_y^2} \,\mathrm{d}S = \frac{S}{J_y^2} \frac{1}{b_1^2} \int_{-h_3}^{h_4-h_2} \int_{\frac{-b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \left[\frac{b_1}{2} \left(z^2 - h_3^2 \right) \right]^2 \mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{S}{J_y^2} \frac{b_1}{4} \int_{-h_3}^{h_4-h_2} \left(z^4 - 2z^2 h_3^2 + h_3^4 \right) \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{S}{J_y^2} \frac{b_1}{4} \left[h_3^4 \left(h_4 - h_2 \right) - 2h_3^2 \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^3}{3} + \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^5}{5} + \frac{8}{15} h_3^5 \right],
\end{aligned} \tag{5.17}$$

pro druhý pak

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \int_{\Psi} \frac{U_{y\Psi_2}^2(z) S}{b_2^2(z) J_y^2} \,\mathrm{d}S = \frac{S}{J_y^2} \frac{1}{\left(b_1 - b_2 \right)^2} \int_{h_4-h_2}^{h_4} \int_{\frac{-(b_1-b_2)}{2}}^{\frac{(b_1-b_2)}{2}} \left[\frac{b_1 - b_1}{2} \left(h_4^2 - z^2 \right) \right]^2 \mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{S}{J_y^2} \frac{b_1 - b_2}{4} \int_{h_4-h_2}^{h_4} \left(h_4^4 - 2h_4^2 z^2 + z^4 \right) \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{S}{J_y^2} \frac{b_1 - b_2}{4} \left[\frac{8}{15} h_4^5 - h_4^4 \left(h_4 - h_2 \right) + 2h_4^2 \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^3}{3} - \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^5}{5} \right].
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Celkový modul průřezu se tedy pro slabě zakřivené pruty stanoví jako součet jednotlivých integrálů

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathrm{SLA}} = \frac{S}{J_y^2} \Bigg\{ &\frac{b_1}{4} \left[h_3^4 \left(h_4 - h_2 \right) - 2h_3^2 \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^3}{3} + \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^5}{5} + \frac{8}{15} h_3^5 \right] + \\
&+ \frac{b_1 - b_2}{4} \left[\frac{8}{15} h_4^5 - h_4^4 \left(h_4 - h_2 \right) + 2h_4^2 \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^3}{3} - \frac{\left(h_4 - h_2 \right)^5}{5} \right] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

b) Silně zakřivené pruty

Protože v případě silně zakřiveného prutu dochází k posunutí neutrální osy o parametr e, je třeba modifikovat meze integrálů tak, aby byla zaručena podmínka maximálního smykového napětí na neutrální ose. To znamená, že od mezí pro z ve vztazích pro lineární moment (5.15) a (5.16) je třeba odečíst právě excentricitu. Dále je třeba také přepočítat osový kvadratický moment z těžiště k neutrální ose. Výpočet pro silně zakřivené pruty je formálně stejný jako v případě slabě zakřivených prutů a proto je uveden jen výsledný vztah:

$$\begin{aligned}\beta_{\mathrm{SIL}} = \frac{S}{J_y''^2}\Bigg\{ \frac{b_1}{4}\Bigg[& (-h_3-e)^4(h_4-h_2-e) - 2(-h_3-e)^2\frac{(h_4-h_2-e)^3}{3} + \\ & + \frac{(h_4-h_2-e)^5}{5} + \frac{8}{15}(h_3+e)^5\Bigg] + \\ & + \frac{b_1-b_2}{4}\Bigg[-(h_4-e)^4(h_4-h_2-e) + 2(h_4-e)^2\frac{(h_4-h_2-e)^3}{3} - \\ & - \frac{(h_4-h_2-e)^5}{5} + \frac{8}{15}(h_4-e)^5\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.20}$$

kde je $J_y''^2$ vyjádřeno pomocí Steinerovy věty následovně

$$J_y''^2 = J_y + e^2 S. \tag{5.21}$$

Pozn. Zkratky použité v této kapitole vyjadřují následující: SLA – slabě zakřivený prut, SIL – silně zakřivený prut.

Výpočet excentricity

Excentricita e vyjadřuje u silně zakřiveného prutu vzdálenost neutrální osy (plochy) určenou poloměrem r od těžiště příčného průřezu Ψ určeného poloměrem R

$$e = R - r. \tag{5.22}$$

Poloměr neutrální osy r je speciální průřezová charakteristika definována vztahem

$$r = \frac{S}{\int_\Psi \frac{\mathrm{d}S}{\rho}}, \tag{5.23}$$

kde radiální parametr ρ vyjadřuje poloměr křivosti řezu prutu ekvidistantního se střednicí prutu viz obr. 4.3. Parametr R lze obecně vyjádřit v závislosti na poloze těžiště příčného průřezu Ψ jako

$$R = R_1 + h_1 - z_{\mathrm{T}}. \tag{5.24}$$

Poslední neznámou je integrál ve jmenovateli vztahu (5.23). Pro jeho výpočet lze s výhodou využít princip aplikovaný při výpočtech ostatních průřezových charakteristik – integrál spočítat jako součet dvou dílčích integrálů

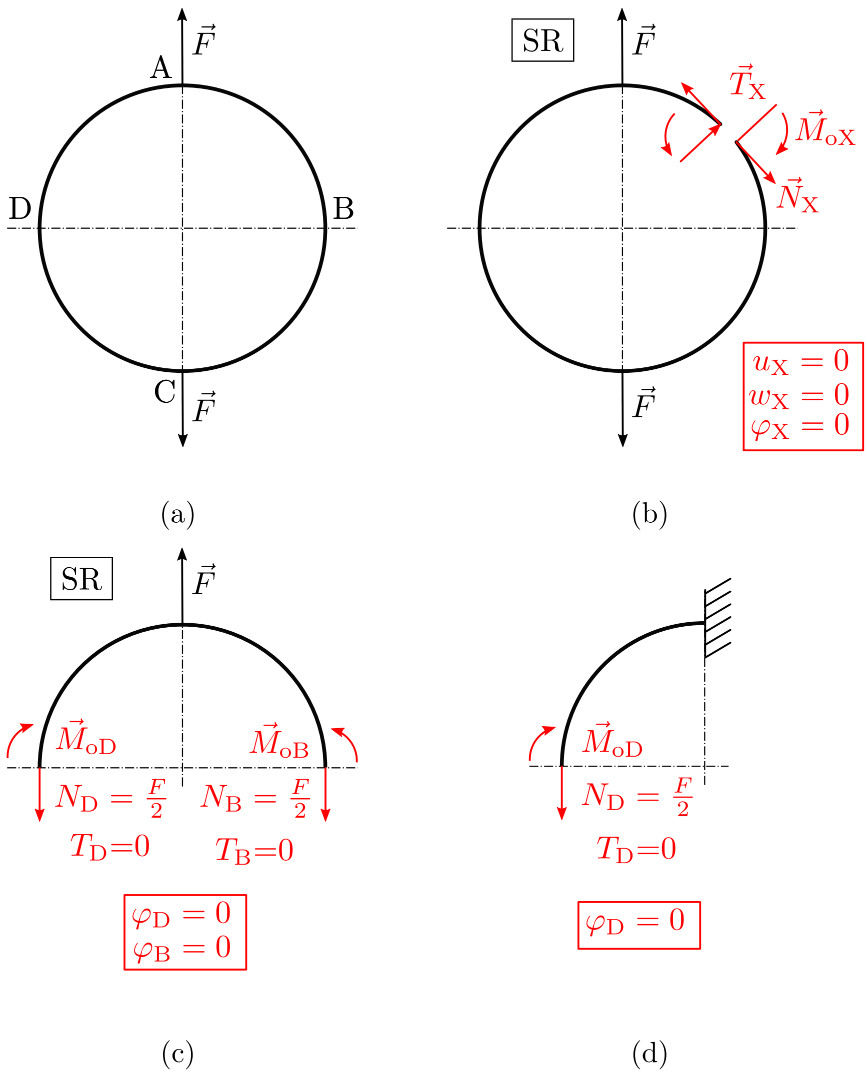
$$\begin{aligned}\int_\Psi \frac{\mathrm{d}S}{\rho} &= \int_{R-h_4}^{R-h_4+h_2} \frac{(b_1-b_2)\,\mathrm{d}\rho}{\rho} + \int_{R-h_4+h_2}^{R-h_3} \frac{b_1\,\mathrm{d}\rho}{\rho} = \\ &= b_1 \ln\left(\frac{R+h_3}{R-h_4}\right) - b_2 \ln\left(\frac{R-h_4+h_2}{R-h_4}\right).\end{aligned} \tag{5.25}$$

Rovnicí (5.25) je tedy dokazán princip superpozice, výrazy symbolicky značí rozdíl obdélníku $b_1 h_1$ od obdélníku $b_2 h_2$.

Dosazením vztahů (5.24) a (5.25) tedy rovnice (5.22) nabude tvaru

$$e = (R_1 + h_1 - z_T) - \left(b_1 \ln\left(\frac{R+h_3}{R-h_4}\right) - b_2 \ln\left(\frac{R-h_4+h_2}{R-h_4}\right)\right). \tag{5.26}$$

5.3 Stanovení výsledných vnitřních účinků (VVÚ)



Obrázek 5.4: Využití symetrie kroužku: (a) zjednodušená geometrie kroužku, (b) částečné uvolnění bez využití symetrie, (c) částečné uvolnění s využitím jedné roviny symetrie (d) částečné uvolnění s využitím obou rovin symetrie. Pozn. Z důvodu přehlednosti chybí u všech VVÚ v ilustracích index ψ - viz 5.3.1.

5.3.1 Využití symetrie úlohy

Jak lze vidět z obr. 5.4a, zadaný kroužek má jak z hlediska geometrie, tak z hlediska zatížení dvě roviny symetrie. Toho lze s výhodou využít při řešení a podstatně tak zjednodušit náročnost výpočtu. Na začátku je třeba zdůraznit, že při analýze symetrie úlohy se nepracuje s „klasickými" složkami VVÚ v libovolném řezu, ale se složkami VVÚ v řezu obsahujícím osu symetrie. Pokud je uvolňovací řez označen symbolem ω a rovina symetrie ψ, pak jsou tyto složky VVÚ značeny pomocí indexu ψ.

Uzavřené rovinné pruty (rámy) jsou vždy vnitřně třikrát staticky neurčité. Pokud by nebyla využita symetrie, postup by byl jako na obr. 5.4b. Bylo by nezbytné otevřít uzavřený prut v libovolném bodě střednice a následně zformulovat tři deformační podmínky – pro posuvy i natočení v bodě X. Pomocí nich by bylo možné určit všechny složky $(\text{VVÚ})_\psi$, následně složky VVÚ v libovolném řezu a konečně vyřešit napjatost i deformaci. Toto řešení by však bylo značně náročné a neefektivní. Vždy je proto vhodné využít symetrii. Jak bude dále ukázáno, každá roviny symetrie vždy sníží neurčitost úlohy o jeden stupeň.

Využití první z rovin symetrie DB ilustruje obr. 5.4c. V případě symetrického zatížení prutu jsou nenulové pouze symetrické složky $(\text{VVÚ})_\psi$, tedy N_ψ a $M_{\text{o}\psi}$. Velikosti normálových sil N_B a N_D lze poté určit z vnější silové rovnováhy uvolněného prutu. Jedinými neznámými zůstávají momenty M_B a M_D. Pro ty je však možno formulovat deformační podmínky ve formě nulového natočení střednice. Výpočtová náročnost úlohy se tedy snížila o jeden stupeň a bude se řešit jako dvakrát vnitřně staticky neurčitá.

Nejefektivnější postupem je využití i druhé roviny symetrie AC dle obr. 5.4d. V místě A se při deformaci směrnice tečny nemění, a proto zde lze formálně zavést vetknutí. Výsledkem je úloha jednou vnitřně staticky neurčitá. Po zapsání deformační podmínky v podobě nulového natočení v místě D již nic nebrání ve vyřešení zadaného problému.

5.3.2 Určení VVÚ v libovolném řezu

Jak je vidět na obr. 5.5, vetknutý prut je nejvhodnější uvolnit z volného konce. Rovnice pro normálovou sílu N, posouvající sílu T a ohybový moment M_o se v místě řezu určí ze statické rovnováhy uvolněného prvku jako funkce úhlového parametru θ

$$N = N_\text{D}\cos\theta = \frac{F}{2}\cos\theta, \tag{5.27}$$

$$T = -N_\text{D}\sin\theta = -\frac{F}{2}\sin\theta, \tag{5.28}$$

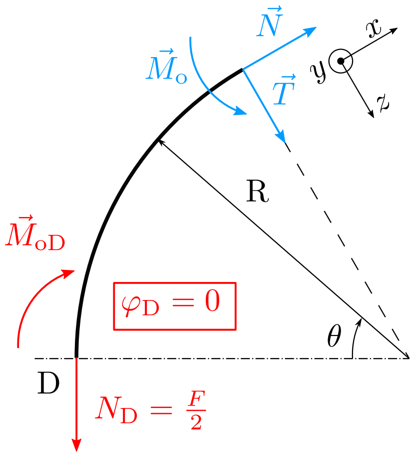
$$M_o = M_\text{oD} - N_\text{D}R(1-\cos\theta) = M_\text{oD} - \frac{F}{2}R(1-\cos\theta). \tag{5.29}$$

Jedinou neznámou je tedy ohybový moment M_oD, který se stanoví z deformační podmínky pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy, viz podkapitola 3.9.

$$\varphi_\text{D} = \frac{\partial W}{\partial M_\text{oD}} = 0 \tag{5.30}$$

5.3.3 Deformační podmínka

Řešení rovnice (5.30) se bude lišit v závislosti na tom, jaká z teorií bude zvolena k řešení zadaného problému.



Obrázek 5.5: Uvolněný prvek prutu s reakcemi v místě řezu.

Slabě zakřivený prut

Pro všechny složky VVÚ lze deformační podmínku (5.30) rozepsat následovně

$$\varphi_\mathrm{D} = \int_\gamma \frac{M_\mathrm{o}}{EJ_y}\frac{\partial M_\mathrm{o}}{\partial M_\mathrm{oD}}\,\mathrm{d}s \; + \int_\gamma \frac{N}{ES}\frac{\partial N}{\partial M_\mathrm{oD}}\,\mathrm{d}s \; + \beta\int_\gamma \frac{T}{GS}\frac{\partial T}{\partial M_\mathrm{oD}}\,\mathrm{d}s \; = 0 \tag{5.31}$$

Jelikož jsou parciální derivace normálové síly N a posouvající síly T podle ohybového momentu M_oD rovny nule, tj.

$$\frac{\partial N}{\partial M_\mathrm{oD}} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial M_\mathrm{oD}} = 0, \tag{5.32}$$

pak se rovnice (5.31) redukuje pouze na první člen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_\mathrm{oD} - \frac{F}{2}R(1-\cos\theta)}{EJ_y} 1R\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Řešení vzniklého integrálu vede na rovnici

$$\left[M_\mathrm{oD}\theta - \frac{F}{2}R\left(\theta - \sin\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = M_\mathrm{oD}\frac{\pi}{2} - \frac{F}{2}R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0.$$

Z té již lze snadno vyjádřit vztah pro ohybový moment

$$M_\mathrm{oD} = \frac{FR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\pi}$$

a následně vztah (5.29) upravit do podoby

$$M_\mathrm{o} = \frac{FR\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta - 1\right)}{\pi}. \tag{5.33}$$

Silně zakřivený prut

V případě silně zakřiveného prutu vypadá rozepsaná deformační podmínka (5.30) takto:

$$\varphi_{\mathrm{D}} = \int_\gamma \frac{M_{\mathrm{o}}}{EeSR}\frac{\partial M_{\mathrm{o}}}{\partial M_{\mathrm{oD}}}\,\mathrm{d}s \; - \int_\gamma \left[\frac{M_{\mathrm{o}}}{ESR}\frac{\partial N}{\partial M_{\mathrm{oD}}} + \frac{N}{ESR}\frac{\partial M_{\mathrm{o}}}{\partial M_{\mathrm{oD}}}\right]\mathrm{d}s \; + \\ + \int_\gamma \frac{N}{ES}\frac{\partial N}{\partial M_{\mathrm{oD}}}\,\mathrm{d}s \; + \beta \int_\gamma \frac{T}{GS}\frac{\partial T}{\partial M_{\mathrm{oD}}}\,\mathrm{d}s \; = 0. \tag{5.34}$$

Jelikož jsou jako v případě slabě zakřiveného prutu parciální derivace (5.32) rovny nule, rovnice se redukuje pouze na dva členy, a to

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{\mathrm{oD}} - \frac{F}{2}R(1-\cos\theta)}{EeSR} 1R\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2}\cos\theta}{ESR} 1R\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Po řešení integrálu má výsledná rovnost tvar

$$\frac{1}{EeS}\left[M_{\mathrm{oD}}\theta - \frac{F}{2}R\left(\theta - \sin\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{F}{2ES}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ = \frac{1}{2EeS}\left[\left(M_{\mathrm{oD}} - \frac{F}{2}R\right)\pi + FR\right] - \frac{F}{2ES} = 0,$$

po vyjádření M_{oD} z rovnice pak plyne

$$M_{\mathrm{oD}} = \frac{F\left(\frac{\pi}{2}R - R + e\right)}{\pi}.$$

Na závěr již nezbývá než dosadit do funkčního vztahu (5.29), výsledný ohybový moment je poté určen rovnicí

$$M_{\mathrm{o}} = \frac{F\left(R\frac{\pi}{2}\cos\theta - R + e\right)}{\pi}. \tag{5.35}$$

Po zjištění neznámého ohybového momentu je možné určit deformaci kroužku.

5.4 Výpočet deformace

Je třeba podotknout, že hlavní kritérium, které bude použito pro srovnání výsledků analytického výpočtu s numerickým, představuje posuv bodu A při maximálním zatížení kroužku. Tato kapitola se zabývá odvozením funkčních vztahů pro posuv v bodě D uvažované čtvrtiny prutu, který zachycuje obr. 5.4 (tento posuv odpovídá posuvu v bodě A celého kroužku). Jak již bylo zmíněno dříve, při výpočtu jsou uvažovány všechny složky VVÚ. Při běžných analytických výpočtech je často uvažována jen složka ohybového momentu M_{o}, neboť složky posuvu od ostatních VVÚ jsou vůči celkovému posuvu zanedbatelné. Tento fakt bude výpočtem ověřen také. Ke stanovení posuvu v bodě D je opět využita Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty. Pro stanovení celkového posuvu mezi body A a C by díky symetrii úlohy stačilo hodnotu posuvu v místě D vynásobit dvěma.

5.4.1 Řešení s využitím teorie slabě zakřivených prutů

Rovnice VVÚ (5.27), (5.28) a (5.33) jsou parciálně derivovány podle síly způsobující posuv v bodě D, tedy podle normálové síly $N_{\mathrm{D}} = \frac{F}{2}$:

$$\delta_{\mathrm{D}} = \int_{\psi} \frac{M_{\mathrm{o}}}{EJ_y} \frac{\partial M_{\mathrm{o}}}{\partial \frac{F}{2}} \,\mathrm{d}s \; + \int_{\psi} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}} \,\mathrm{d}s \; + \beta \int_{\psi} \frac{T}{GS} \frac{\partial T}{\partial \frac{F}{2}} \,\mathrm{d}s \; = 0. \tag{5.36}$$

Z důvodu názornosti a přehlednosti jsou posuvy odvozeny pro každou složku VVÚ zvlášť. Jednotlivé integrace byly provedeny matematickým softwarem *Maple 17*.

Posuv od ohybového momentu

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{D},M_{\mathrm{o}}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{\mathrm{o}}}{EJ_y} \frac{\partial M_{\mathrm{o}}}{\partial \frac{F}{2}} R \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{FR\left(\frac{\cos\theta}{2} - \frac{1}{\pi}\right)}{EJ_y} R \left(\frac{\cos\theta}{2} - \frac{1}{\pi}\right) R \,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{FR^3}{EJ_y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{2} - \frac{1}{\pi}\right)^2 \mathrm{d}\theta = \dots \\ \dots &= \frac{FR^3\left(\pi^2 - 8\right)}{8\pi EJ_y} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Posuv od normálové síly

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{D},N} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}} R \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2}\cos\theta}{ES} \cos\theta R \,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{FR}{2ES} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \dots \\ \dots &= \frac{\pi FR}{8ES} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Posuv od posouvající síly

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{D},T} &= \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T}{GS} \frac{\partial T}{\partial \frac{F}{2}} R \,\mathrm{d}\theta = \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(-\frac{F}{2}\sin\theta\right)}{GS} \left(-\sin\theta\right) R \,\mathrm{d}\theta = \\ &= \beta \frac{FR}{2GS} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \dots \\ \dots &= \beta \frac{\pi FR}{8GS} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Výsledný posuv je tedy součtem posuvů od jednotlivých složek VVÚ

$$\delta_{\mathrm{D,SLA}} = \frac{FR^3\left(\pi^2 - 8\right)}{8\pi EJ_y} + \frac{\pi FR}{8ES} + \beta \frac{\pi FR}{8GS}. \tag{5.40}$$

5.4.2 Řešení s využitím teorie silně zakřivených prutů

Pomocí stejného postupu lze určit i posuv bodu D pro teorii silně zakřivených prutů. VVÚ jsou v tomto případě určeny rovnicemi (5.27), (5.28), (5.35) a Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty je upravena pro silně zakřivené pruty do tvaru

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{D}} = &\int_\gamma \frac{M_\mathrm{o}}{EeSR}\frac{\partial M_\mathrm{o}}{\partial \frac{F}{2}}\,\mathrm{d}s \;-\int_\gamma \left[\frac{M_\mathrm{o}}{ESR}\frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}} + \frac{N}{ESR}\frac{\partial M_\mathrm{o}}{\partial \frac{F}{2}}\right]\mathrm{d}s\;+ \\ &+\int_\gamma \frac{N}{ES}\frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}}\,\mathrm{d}s\; + \beta\int_\gamma \frac{T}{GS}\frac{\partial T}{\partial \frac{F}{2}}\,\mathrm{d}s\; = 0.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Posuv od ohybového momentu

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{D},M_\mathrm{o}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_\mathrm{o}}{EJ_y}\frac{\partial M_\mathrm{o}}{\partial \frac{F}{2}}R\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2}\left(\pi R\cos\theta - 2R + 2e\right)}{\pi EeSR}\frac{\pi R\cos\theta - 2R + 2e}{\pi}R\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{F}{2\pi EeS}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\pi R\cos\theta - 2R + 2e\right)^2\,\mathrm{d}\theta = \ldots \\ \ldots &= \frac{F\left(\pi^2R^2 - 8R^2 + 8e^2\right)}{8\pi EeS}\end{aligned} \tag{5.42}$$

Posuv od integrálu součtu normálové síly a ohybového momentu

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{D},M_\mathrm{o}N} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{M_\mathrm{o}}{ESR}\frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}} + \frac{N}{ESR}\frac{\partial M_\mathrm{o}}{\partial \frac{F}{2}}\right]R\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2}R\left(\pi R\cos\theta - 2R + 2e\right)}{\pi ESR}\cos\theta + \frac{\frac{F}{2}R\cos\theta}{ESR}\frac{\pi R\cos\theta - 2R + 2e}{\pi}\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{F}{2\pi ES}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\pi R\cos\theta - 2R + 2e\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \ldots \\ \ldots &= \frac{F\left(\pi^2R - 8R + 8e\right)}{4\pi ES}\end{aligned} \tag{5.43}$$

Posuv od normálové síly

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{D},N} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{N}{ES}\frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}}R\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2}\cos\theta}{ES}\cos\theta R\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{FR}{2ES}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \ldots \\ \ldots &= \frac{\pi FR}{8ES}\end{aligned} \tag{5.44}$$

Posuv od posouvající síly

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{D},T} &= \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T}{GS} \frac{\partial T}{\partial \frac{F}{2}} R \,\mathrm{d}\theta = \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(-\frac{F}{2}\sin\theta\right)}{GS} \left(-\sin\theta\right) R \,\mathrm{d}\theta = \\
&= \beta \frac{FR}{2GS} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \ldots \\
\ldots &= \beta \frac{\pi FR}{8GS}
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

Výsledný posuv je opět dán součtem posuvů od jednotlivých složek VVÚ

$$
\delta_{\mathrm{D,SIL}} = \frac{F\left(\pi^2R^2 - 8R^2 + 8e^2\right)}{8\pi EeS} - \frac{F\left(\pi^2R - 8R + 8e\right)}{4\pi ES} + \frac{\pi FR}{8ES} + \beta \frac{\pi FR}{8GS}. \tag{5.46}
$$

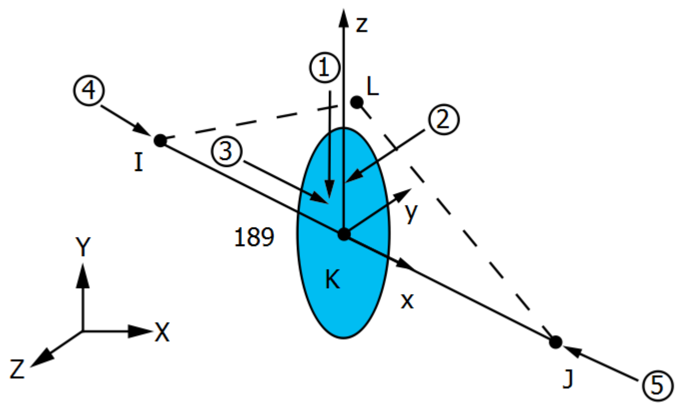
Všechny výše uvedené vztahy byly naprogramovány v tabulkovém procesoru *Microsoft Excel 2013* a následně byl pro zadané hodnoty proveden samotný výpočet vertikálního posuvu v bodě A.

6 Numerický výpočet

Vhodnou metodou pro srovnání hodnot deformace v analytické části se jeví všeobecně rozšířená metoda konečných prvků. Teorie MKP v práci rozvedena není, podrobný rozbor této metody lze najít v literatuře [21] nebo [22]. Pro numerické řešení zadaného problému byl zvolen výpočtový software ANSYS Mechanical APDL 16.2. Jako výchozí jednotky pro výpočet byly zvoleny mm, MPa a N. Ten byl následně proveden pomocí maker, která jsou dostupná na přiloženém CD. V následujících podkapitolách je proveden popis sestavení výpočtového modelu pomocí dvou typů prvku – prutového a objemového.

6.1 Výpočtový model založený na prvku BEAM189

6.1.1 Charakteristika prvku



Obrázek 6.1: Prvek BEAM189. Převzato z [6].

Vzhledem k tomu, že je řešen prut zakřivený, jako vhodnější varianta se jeví využití kvadratického prostorového prvku BEAM189, viz obr. 6.1. Ten totiž oproti svému lineárnímu protějšku BEAM188 disponuje jedním uzlem navíc, celkově tedy třemi uzly. V každém uzlu je umožněn posuv i rotace ve všech třech osách x, y a z, celkové má tedy prvek šest stupňů volnosti v každém uzlu. Z hlediska výpočtu je tento prvek obecně velmi efektivní, s výbornou konvergencí sítě vzhledem k její jemnosti [6]. Prvek BEAM189 vychází z Timošenkovy nosníkové teorie, která je detailněji rozvedena v kapitole 4. Prvek lze dle [6] využít jak pro tenké, tak pro přiměřeně tlusté pruty. V samotném manuálu je jako určující parametr doporučeno využít tzv. *slenderness ratio*. To se vypočítá následovně:

$$SR = \frac{GAL^2}{EI}, \tag{6.1}$$

kde G vyjadřuje modul pružnosti ve smyku, A plochu příčného průřezu prutu, L délku prutu a člen EI tzv. ohybovou tuhost, která je vyjádřena součinem E Youngova modulu a osového kvadratického momentu příčného průřezu I. Aby byly výsledky co nejpřesnější, doporučuje se, aby tento poměr byl větší než 30. Pro zakřivené pruty manuál [6] neudává žádná doporučení, či určující parametry. ANSYS nerozlišuje mezi pruty přímými a zakřivenými. Zakřivení je realizováno čistě geometrií a současnou rotací souřadného systému prvku do směru střednice.

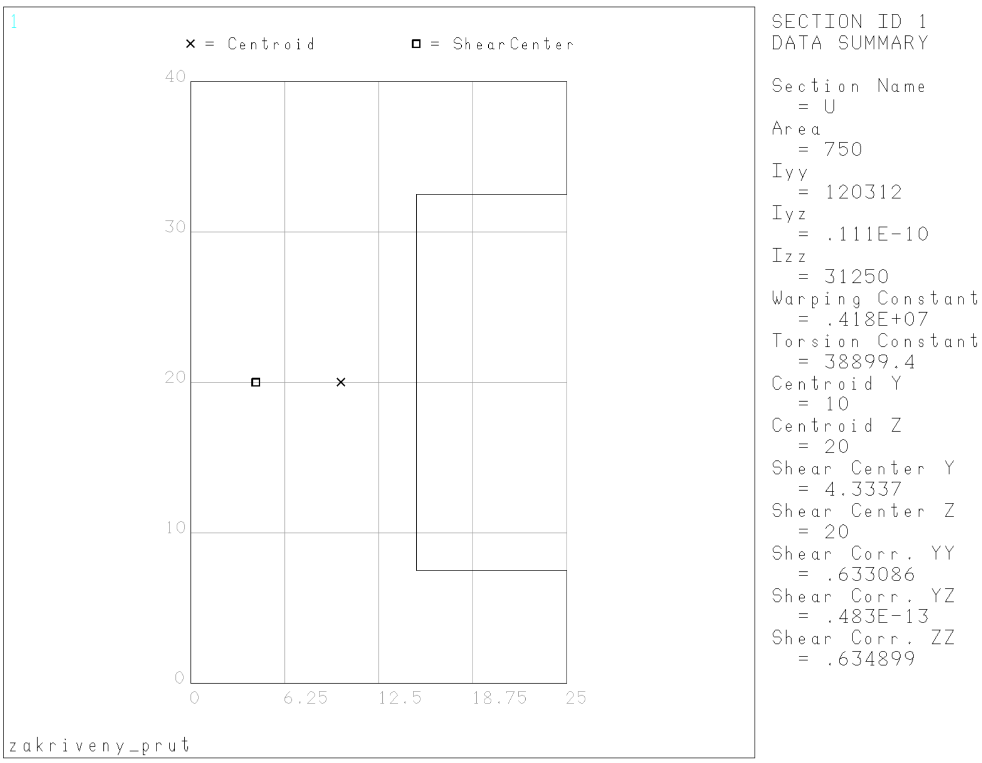
Nastavení parametrů prvku se provádí pomocí příkazu `KEYOPT`. Jediný parametr, který je třeba změnit se označuje pořadovým číslem 4. Ten vyjadřuje jaká VVÚ jsou zahrnuta do výpočtu smykových napětí. Z dříve vyjádřených rovnic lze vidět, že na prut nepůsobí žádný kroutící moment a naopak posouvající síla nabývá nenulové hodnoty. Přepnutím na `KEYOPT(4),1` je zajištěno to, že výsledná smyková napětí jsou vyvozena pouze z působení posouvající síly. Ostatní parametry lze ponechat na svých výchozích hodnotách.

6.1.2 Charakteristiky materiálu

Materiálové charakteristiky stačí zadat pouze dvě, stejné jako v tabulce 5.2.

6.1.3 Geometrie příčného průřezu

Jelikož je zadaný příčný průřez běžně se vyskytující, lze jej jednoduše definovat v záložce `SECTIONS` → `COMMON SECTIONS` zvolením příčného průřezu tvaru U. Do něj jsou zadány hodnoty uvedené v tab. 5.1. Pro co nejpřesnější stanovení tvarového součinitele příčného průřezu je nutné nastavit jemnější síť příčného průřezu. To se provede v rámci příkazu `SECTYPE`. Jelikož je zvolený příčný průřez homogenní a chování materiálu je předpokládáno lineární, dojde jen k mírnému nárůstu výpočtové náročnosti [6].



Obrázek 6.2: Geometrie zadaného příčného průřezu.

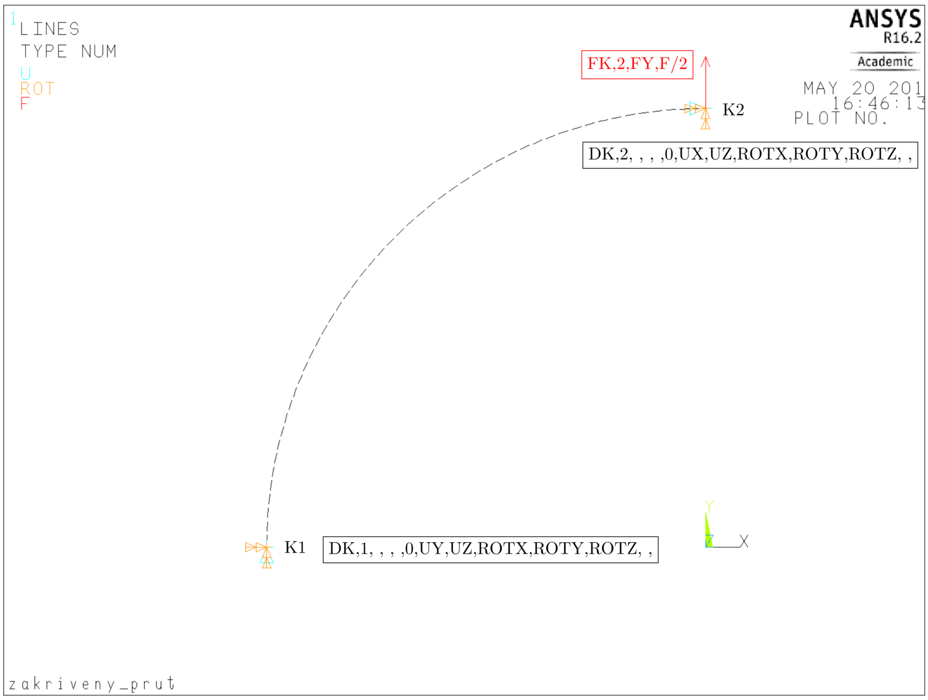
Vykreslení tvaru zadaného příčného průřezu je možné spolu s některými geometrickými charakteristikami příčného průřezu vykreslit pomocí příkazu `PLOT SECTION` – viz obr. 6.2.

6.1.4 Geometrie prutu a vytvoření konečnoprvkové sítě

Při řešení problému lze i při numerickém výpočtu využít symetrii úlohy. Řešením pouze čtvrtiny kroužku dojde z hlediska sítě konečných prvků ke snížení počtu prvků a tím pádem ke snížení výpočtové náročnosti. Obecně lze říci, že využití symetrie při řešení MKP je vždy žádoucí.

Pro vytvoření geometrie prutového prvku stačí pouze definovat jeho střednici. Pro zadání polohy hraničních keyopointů lze využít příkaz `K` a poté v rámci polárního souřadného systému `CSYS,1` příkazem `L` definovat samotnou střednici. Střed kroužku je v tomto případě totožný s počátkem globálního souřadného systému. Dále je třeba upravit orientaci příčného průřezu vůči střednici. Toho lze docílit příkazem `LATT` a pomocným keypointem definovaným v ose z. Poloměr střednice se vypočítá ze vztahu $R = R_1 + h_1 - z_T$.

K vygenerování sítě konečných prvků slouží příkaz `LMESH`. Velikost prvku je v tomto případě zadána pomocí příkazu `LESIZE`. Vzhledem ke složitosti a geometrii zadaného problému a výkonu výpočetní techniky v tomto případě není potřeba provádět optimalizaci velikosti prvku.



Obrázek 6.3: Geometrie, okrajové podmínky a zatížení při využití prutového prvku.

6.1.5 Definice okrajových podmínek a zatížení

Deformační podmínky musí být definovány v souladu s využitím symetrie při řešení problému. Na okrajích prutu musí být zadána okrajová podmínka zajišťující spojitost střednice zamezením rotací a podmínka osové symetrie zamezující posuvům tečným.

Silová podmínka je zadána v keypointu 2 ve směru globální osy y, viz obr. 6.3. Je třeba upozornit na to, že zadaná hodnota zátěžné síly musí být kvůli symetrii úlohy poloviční než v případě celého kroužku.

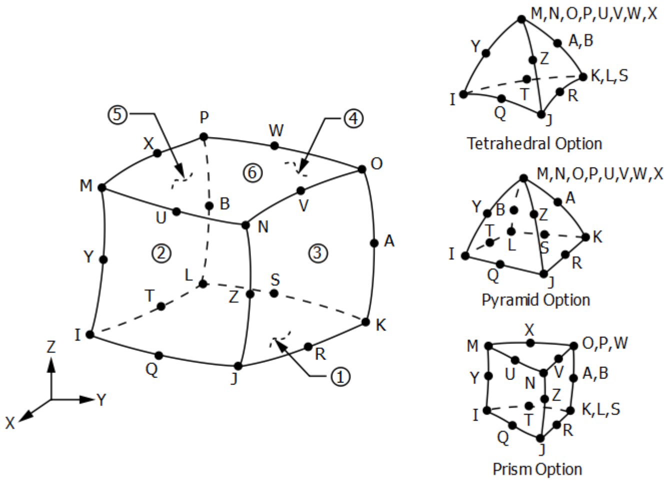
6.1.6 Vlastní řešení úlohy

Pro řešení úlohy je třeba v záložce `SOLUTION` nadefinovat jednoduchou statickou strukturální analýzu pomocí příkazu `ANTYPE,0`.

6.2 Prvek SOLID186

6.2.1 Výpočtový model založený na prvku SOLID186

K řešení zadaného problému pomocí objemů je zvolen dvacetiuzlový kvadratický prvek SOLID186, viz obr. 6.4. Každý uzel tohoto prvku disponuje třemi stupni volnosti, reprezentovanými posuvy v osách x, y a z.



Obrázek 6.4: Geometrie prvku SOLID186. Převzato z [6].

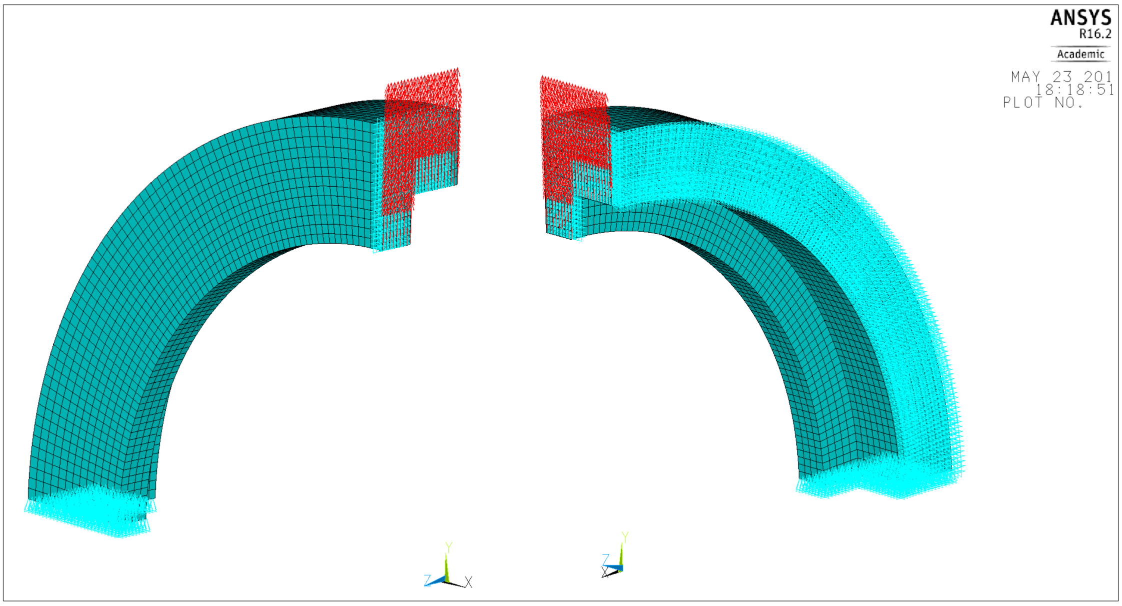
6.2.2 Charakteristiky materiálu

Zadané charakteristiky jsou stejné jako v případě prutového prvku.

6.2.3 Geometrie prutu a vytvoření konečnoprvkové sítě

Při modelování výsledného objemu je opět vhodné pracovat se symetrií. Tentokrát lze využít ještě o jedno rovinu symetrie více, stačí tedy vymodelovat jen polovinu ze čtvrtiny kroužku, viz obr. 6.5.

Dále je třeba dbát na to, aby srovnání posuvů BEAM a SOLID prvku bylo co nejobjektivnější. Výsledné posuvy u prvků prutových jsou definovány na střednici, posuvy



Obrázek 6.5: Geometrie, okrajové podmínky a zatížení při využití objemového prvku.

u prvku objemového je tedy vhodné odečítat z uzlů na myšlené střednici. Její poloha lze získat pomocnou definicí prvku BEAM a jemu příslušnému příčnému průřezu.

S ohledem na předchozí odstavec je vhodné vytvořit objemový model ze tří dílčích objemů. Nejprve je pomocí příkazu `CYL4` definován objem č. 1 pro poloměr z intervalu $(R_1;\ R_1 + h_1 - y_T)$. Pomocí stejného příkazu jsou vytvořeny i objemy č. 2 pro poloměr $(R_1 + h_1 - y_T; R_1 + h_1)$ a č. 3 pro interval $(R_1; R_1 + h_2)$. Spojením objemů č. 1 a č. 2 pomocí příkazu `VGLUE` a následným odečtením objemu č.3 od vzniklého objemu pomocí příkazu `VSBV` již vznikne objem výsledný – viz obr. 6.5.

Síť konečných prvků je tentokrát definována pomocí příkazu `ESIZE` s velikostí prvku 2 mm.

6.2.4 Definice okrajových podmínek a zatížení

Okrajové podmínky jsou formálně stejné jako v případě prutového prvku s výjimkou rotací, ty totiž u objemového prvku netvoří žádné stupně volnosti. Po vytvoření tří komponent (dvě na koncích tělesa a jedna v rovině symetrie xy) jsou okrajové podmínky realizovány vazbou DISPLACEMENT, příkazem `D` se zamezí normálových posuvů.

Zatížení je opět formálně stejné jako u prvku BEAM, je třeba jej však aplikovat jinak. Kompatibilita s prutovým prvkem je zajištěna rozpočítáním celkové zátěžné síly mezi jednotlivé uzly komponenty na okraji prutu. Z důvodu eliminace napěťových koncentrací v místě odečítaní posuvů se však na uzly ležící v této rovině může aplikovat pouze poloviční zatížení než na uzly zbylé. Výpočet parciální zátěžné síly pro jeden uzel uvažované komponenty lze pro názornost charakterizovat jednoduchou rovnicí:

$$F_{\text{par}} = \frac{F}{4\left(N_1 + \frac{N_2}{2}\right)}, \tag{6.2}$$

kde F vyjadřuje zátěžnou sílu působící na kroužek, N_2 počet uzlů na zatěžované ploše v rovině symetrie xy a N_1 poté počet uzlů v zatěžované ploše bez uzlů N_2. Celý výraz je navíc vynásoben konstantou 1/4 z důvodu užití symetrie.

7 Diskuze výsledků

V této kapitole je srovnáno analytické řešení vycházející z energetického přístupu (kapitola 5) a řešení numerické pomocí MKP (kapitola 6). Zátěžná síla působící na kroužek, viz obr. 5.4a, byla pro oba způsoby výpočtu zvolena $F = 4000$ N. Pozn. Zkratky použité v této kapitole vyjadřují následující: SLA – slabě zakřivený prut, SIL – silně zakřivený prut, ANS – ANSYS.

7.1 Srovnání průřezových charakteristik

Jako první jsou srovnány průřezové charakteristiky. Jak se lze přesvědčit v tab. 7.1, průřezové charakteristiky získané přístupem analytickým a pomocí softwaru ANSYS pro prutový prvek BEAM189 jsou rovnocenné. Porovnání těchto hodnot se na první pohled jeví jako zbytečné. Pro objektivní srovnání získaných výsledků a správné určení odlišností mezi zvolenými přístupy je však nezbytné.

Tabulka 7.1: Srovnání průřezových charakteristik.

	S [mm^2]	J_y [mm^4]	z_{T} [mm]
Analyticky (slabě i silně)	750	31250	10
ANSYS (BEAM 189)	750	31250	10

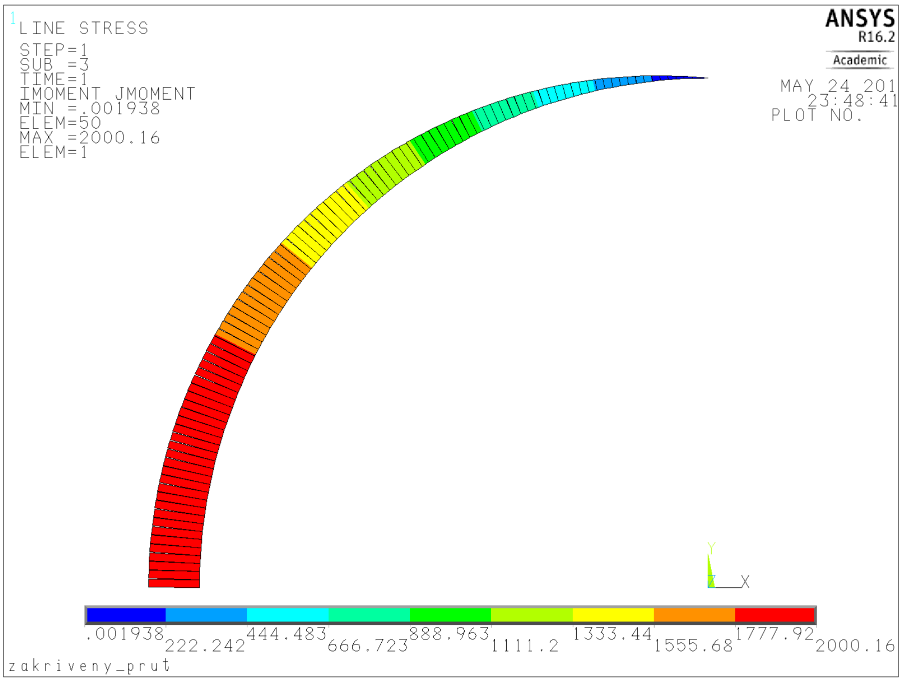
7.2 Srovnání VVÚ

Jako další je provedeno srovnání průběhu a maximálních i minimálních hodnot VVŮ pro teorii slabě zakřivených prutů a prvek BEAM189. Pro výpočet byla jako referenční hodnota zvolen vnitřní poloměr kroužku $R_1 = 201$ mm. V následující tabulce 7.2 jsou uvedeny hodnoty získané oběma zvolenými přístupy. Průběhy VVÚ po délce střednice jsou pro analytický i numerický výpočet formálně stejné a jsou zachyceny na obrázcích 7.1, 7.2 a 7.3. K jejich vykreslení lze v ANSYSu využít příkazy `ETABLE, ,SMISC`.

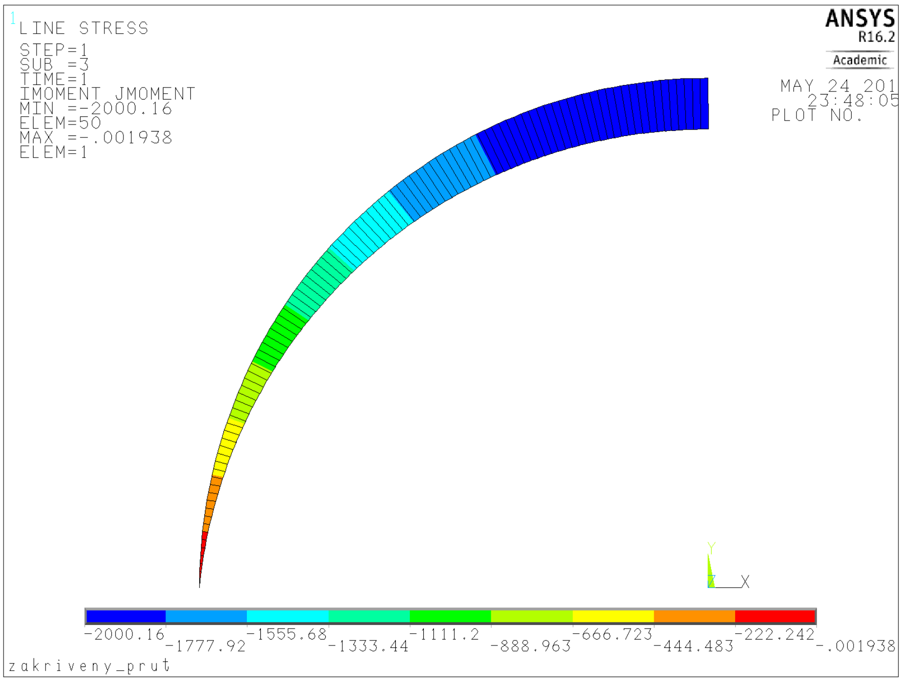
Tabulka 7.2: Srovnání hodnot VVÚ.

	N [N]	T [N]	M_{o} [Nmm]
$\theta = 0°$	$2\ 000,0$	$0,0$	156 980
$\theta = 90°$	$0,00$	$-2\ 000,0$	-275 019
$\theta = 0°$	$2\ 000,2$	$0,0$	-157 016
$\theta = 90°$	$0,0$	$-2\ 000,2$	275 019

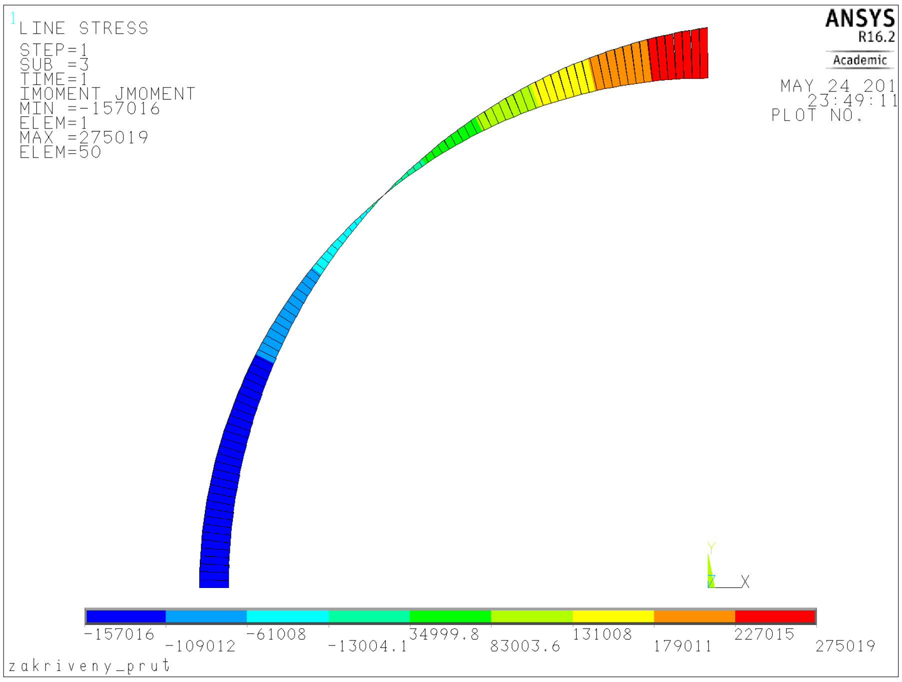
Z tabulky získaných hodnot je vidět, že maximální i minimální hodnoty VVŮ jsou téměř totožné. Jediná odlišnost vyplývající z tabulky je znaménko u ohybového momentu, které je na koncích prutu opačné. Tento rozdíl je způsoben tím, že ANSYS používá souřadnicový systém pootočený o 90° v porovnání se souřadnicovým systémem použitým při analytickém výpočtu.



Obrázek 7.1: Průběh normálové síly.

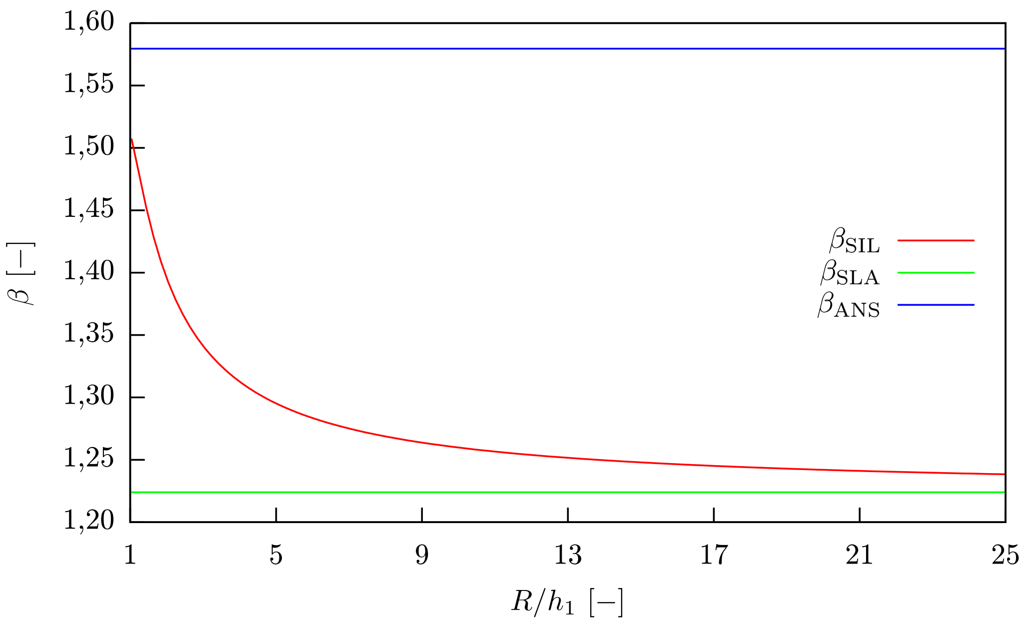


Obrázek 7.2: Průběh posouvající síly.



Obrázek 7.3: Průběh ohybového momentu.

7.3 Srovnání tvarových součinitelů příčného průřezu



Obrázek 7.4: Srovnání tvarových součinitelů příčného průřezu získaných zvolenými přístupy. Veličiny β_{SLA} a β_{SIL} představují tvarové součinitele získané analytickým výpočtem, β_{ANS} pak tvarový součinitel odečtený z ANSYSu pro prutový prvek BEAM189.

Jelikož jak energetický přístup, tak ANSYS zohledňují při výpočtu vliv posouvající síly na celkový posuv (rov. (5.38), (5.44) a kapitola 5), je vhodné srovnat i tvarové součinitele příčného průřezu, se kterými pracují.

V případě slabě zakřivených prutů je β_{SLA} závislé pouze na průřezových charakteristikách (viz rov. (5.19)) a s měnícím se poloměrem střednice R zůstává konstantní. Správnost vypočítané vztahu byla ověřena doplněním příčného průřezu U na obdélník, tzn. pro $h_2 = 0$. Po dosazení vyšla hodnota součinitele 1,2, což odpovídá hodnotě pro obdélníkový příčný průřez uvedené v literatuře [1] nebo v [13].

Závislost součinitele β_{SIL} na R již dle obr. 7.4 konstantní není. Ve vztahu (5.20) totiž kromě průřezových charakteristik vystupuje i parametr excentricita. Její hodnota se zvyšujícím poloměrem R narůstá, a proto se zvyšuje i hodnota β_{SIL}.

Výpočtový software ANSYS pracuje při výpočtu s převrácenou hodnotou tohoto součinitele (podkapitola 3.4). Po přepočtu hodnoty získané z ANSYSU (obr. 6.2) lze vidět, že její hodnota β_{ANS} je také konstantní a ve srovnání s hodnotou β_{SLA} vyšší. To, že je získaná závislost konstantní, také poukazuje na to, že ANSYS při výpočtu tohoto součinitele nijak nepracuje s posunem neutrální osy.

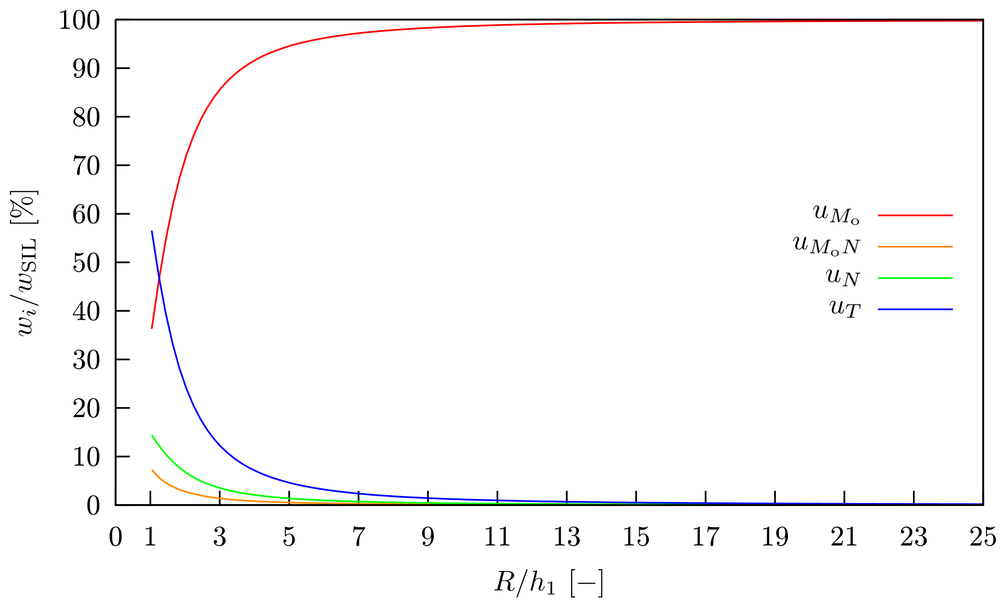
Jak bylo zmíněno dříve, ANSYS používá pro výpočet tohoto součinitele metodologii uvedenou v [14]. Tento způsob určení součinitele vychází z teorie elasticity, principu virtuálních prací, k řešení poté využívá metodu konečných prvků. Stanovení součinitele tvarového průřezu podle metodologie uvedené ve výše zmíněné literatuře by vyžadovalo rozsáhlejší rešeršní studii a pokročilé matematické znalosti. Zpracování této studie je nad rámec náplně této bakalářské práce.

7.4 Srovnání vlivu jednotlivých VVÚ na posuv

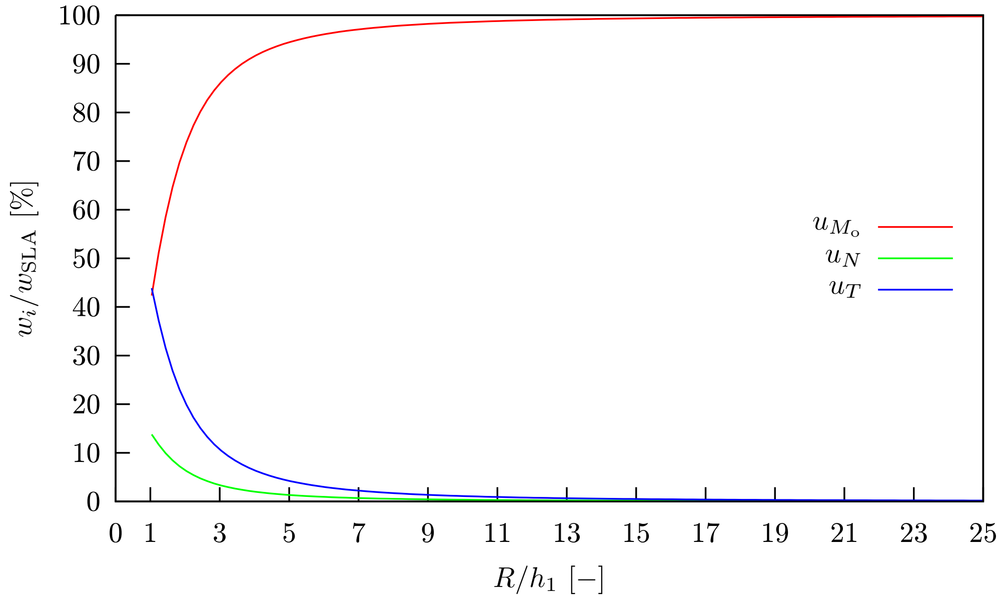
V této podkapitole jsou srovnány vlivy jednotlivých VVŮ na celkový posuv a to pro teorii slabě i silně zakřivených prutů. Pro slabě zakřivený prut byla použita hodnota tvarového součinitele příčného průřezu β_{SLA} a pro silně zakřivené pruty pak tvarový součinitel závislý na excentricitě – β_{SIL}.

Z obrázku 7.5 je vidět, že s klesajícím poměrem R/h_1 se mění vliv složek posuvů od jednotlivých VVÚ na celkový posuv vypočítaný pomocí teorie silně zakřivených prutů. Pokud je jako hraniční poměr R/h_1 mezi pruty slabě a silně zakřivenými zvolena hodnota 5 (viz podkapitola 3.3), pak tento trend potvrzuje následující myšlenku. Při výpočtu posuvů u silně zakřivených prutů je nezbytné zahrnout vliv všech VVÚ, neboť s klesajícím poměrem R/h_1 vliv posouvající i normálové síly roste. Pro posuvy od posouvající síly je tento trend poměrně strmý a pro poměry $R/h_1 \approx 1$ jsou dokonce příspěvky posuvů od posouvající síly mírně větší než od ohybového momentu. Je třeba také upozornit na to, že v daném případě se při změně poloměru R_1 nemění tloušťka příčného průřezu. Pokud by docházelo i ke zvětšování tohoto parametru, vliv posouvající síly by byl ještě vyšší.

V případě výpočtu posuvu pomocí teorie slabě zakřivených prutů jsou získané závislosti podobné. Je však třeba upozornit, že tato teorie pro poměry $R/h_1 > 5$ již není platná. Tento fakt však nebrání srovnání vlivu posouvající síly na celkové posuv, neboť se příspěvek tohoto posuvu u obou teorií počítá rovnocenně. Rozdíl mezi jednotlivými teoriemi lze pozorovat ve změnu strmosti růstu této křivky. To lze vysvětlit díky obr. 7.4, neboť se zvyšující se β_{SIL} roste i hodnota posuvu od posouvající síly. Obrázek 7.6 také potvrzuje to, že při výpočtu posuvu pro slabě zakřivené pruty lze pro dané rozměry příčného průřezu vliv posouvající i normálové síly zanedbat. To by však stejně jako u prutů silně zakřivených nemuselo platit při změně tloušťky prutu.



Obrázek 7.5: Procentuální srovnání vlivu posuvů w_i od jednotlivých složek VVÚ ($i = N$, T, M_o, M_oN) vzhledem k celkovému posuvu určenému pomocí teorie silně zakřivených prutů.

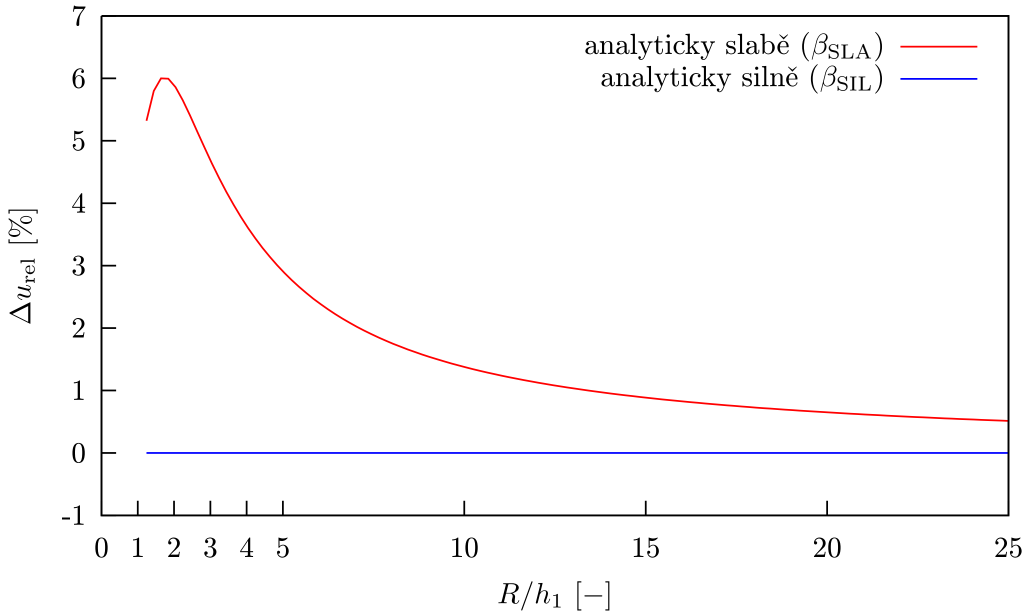


Obrázek 7.6: Procentuální srovnání vlivu posuvů w_i od jednotlivých složek VVÚ ($i = N$, T, M_o) vzhledem k celkovému posuvu určenému pomocí teorie slabě zakřivených prutů.

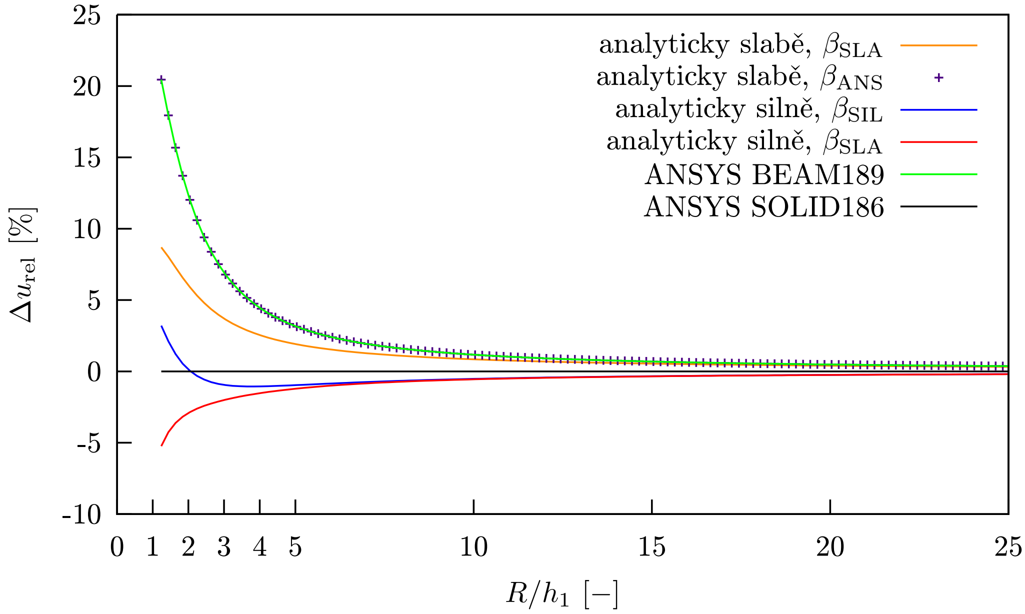
7.5 Srovnání posuvů

Na závěr byla provedena studie, ve které byly srovnány všechny posuvy.

Jako první bylo provedeno srovnání posuvů získaných pomocí teorií slabě a silně zakřivených prutů. Z obr. 7.6 plyne, že posuvy získané jednotlivými teoriemi se liší v celém rozsahu osy x. Posuvy se začínají výrazněji odlišovat zhruba v intervalu $R/h_1 \in (5; 10)$. Mezní hodnoty tohoto intervalu odpovídají hranicím mezi oběma teoriemi určenými přes napětí v [1] a v [8] (viz podkapitola 3.3).



Obrázek 7.7: Závislost relativní odchylky posuvu vůči teorii silně zakřivených prutů.



Obrázek 7.8: Závislost relativní odchylky posuvu vůči objemovému prvku SOLID186.

Druhý z grafů (obr. 7.8) zachycuje srovnání všech získaných posuvů, jak energetickým, tak numerickým přístupem. Toto srovnání bylo realizováno pomocí parametru relativní chyby definované jako

$$\triangle w_{\text{rel}} = \frac{w_i - w_{\text{SOLID186}}}{w_{\text{SOLID186}}} \cdot 100\ [\%], \tag{7.1}$$

kde i značí posuvy získané jednotlivými přístupy. Jako referenční hodnota byl zvolen posuv získaný z ANSYSu pro objemový prvek SOLID186 (černá křivka). Tato hodnota je totiž na dané rozlišovací úrovni nejpřesnější.

Všechny posuvy jsou také srovnávány až pro poměr $R/h_1 \geq 1$. Při nižší hodnotě poloměru již totiž nejsou splněny prutové předpoklady.

Nejblíže přesnému řešení se ukázala teorie silně zakřivených prutů při použití tvarového součinitele závislého na excentricitě β_{SIL} (modrá křivka). Tato skutečnost odpovídá i faktu zmíněném Timošenkem v [9], o čemž je také pojednáno v podkapitole 3.3. Vzniklá chyba je v tomto případě pouze v řádu jednotek. Odlišnost získaných hodnot je způsobena prutovými předpoklady u teorie silně zakřivených prutů (SOLID186 například uvažuje i deplanaci myšleného příčného průřezu, apod.)

Porovnáním červené a modré křivky lze potvrdit to, že tvarový součinitel je v případě silně zakřivených prutů opravdu závislý na poloze neutrální osy (excentricitě). Červená křivka se v oblasti silně zakřivených prutů od referenční hodnoty odchyluje výrazněji než křivka modrá.

Zajímavé je srovnání posuvů získaných analyticky pomocí teorie slabě zakřivených prutů a posuvů získaných ANSYSem pro BEAM189. Výsledky získané těmito přístupy se liší v případě, kdy je v analytickém výpočtu použit tvarový součinitel β_{SLA} (oranžová křivka) získaný analyticky. Pokud je v analytickém výpočtu dosazen tvarový součinitel z ANSYSU β_{ANS} (fialové body), pak jsou vypočítané hodnoty totožné s posuvy prvku BEAM189 (zelená křivka). Jediný rozdíl mezi těmito dvěma přístupy je tím pádem v hodnotě tvarového součinitele β. To tedy znamená, že přestože je BEAM189 dle příslušné dokumentace založen na Timošenkově teorii prutů, počítá i normálovými složkami VVÚ a představuje tedy jakýsi zdokonalený prutový prvek (detaily jsou uvedeny v článku [23]). Při porovnání těchto přístupů s referenční hodnotou je již vzniklá chyba větší než v případě teorie silně zakřivených prutů. O nevhodnosti použití teorie slabě zakřivených prutů již bylo pojednáno dříve. Použití prvku BEAM189 pro silně zakřivené pruty se jeví jako nevhodné také. Jak již bylo řečeno dříve, manuál ANSYSU [6] se o vhodnosti použití tohoto prvku pro zakřivené pruty explicitně nezmiňuje.

Graf také potvrzuje pomyslnou hranici mezi pruty slabě a silně zakřivenými zmíněnou výše.

8 Závěr

Cílem předkládané bakalářské práce byl výpočet deformace uzavřeného zakřiveného prutu (kroužku) zvolenými analytickými a numerickými metodami. Prvotní motivací bylo to, že jednotlivé analytické a numerické přístupy poskytují různé výsledky a v případě softwarů založených na metodě konečných prvků nejsou v uživatelských manuálech striktně uvedena omezení a předpoklady jejich platnosti, často se také odkazují na aktuální vědecké publikace. Jako modelový případ byl vybrán zdánlivě triviální problém zakřiveného prutu, jehož řešení je nejsilněji omezeno geometrickými předpoklady.

V úvodní části práce byl stručně uveden přehled teorií dále využitých při řešení zadaného problému. Při jeho zpracování byl kladen důraz zejména na pruty zakřivené, jejich klasifikaci a způsob výpočtu uvedený ve skriptech [1] určených pro základní kurz pružnosti pevnosti na Fakultě strojního inženýrství, VUT v Brně. Jako kvalitní zdroj věnující se podobné tématice byla i Timošenkova kniha [8], která používá teorie založené na diferenciální přístupu a teorii elasticity, především pak rozšíření Euler-Bernoulliho teorie, která je v zmíněném základním kurzu známá jako diferenciální rovnice ohybové čáry. Úvodní část se také věnovala veličině nazvané tvarový součinitel příčného průřezu. Ta se přes svoji zdánlivou nepodstatnost ukázala jako jeden z rozhodujících parametrů pro diskuzi výsledků.

Kapitola čtvrtá byla věnována klasickým nosníkovým teoriím, zejména pak teorii Timošenkově. I když jsou obě nosníkové teorie primárně určeny pro výpočet přímých prutů, je možné je odvodit i pro pruty zakřivené. Toto odvození však vyžaduje pokročilé matematické znalosti, neboť je třeba pracovat v křivočarých souřadnicích. V knize [8] je takové odvození provedeno pro teorii Euler-Bernoulliho. Posuv vypočítaný touto teorií pro zakřivený prut odpovídá posuvu od ohybového momentu získaného energetickým přístupem (rov. (5.37)). Kompletní odvození Timošenkovy teorie pro zakřivený prut (tedy i s vlivem posouvající síly) by vzhledem k matematické náročnosti přesahovalo rámec definovaných cílů bakalářské práce. Toto odvození by však mohlo být námětem na téma diplomové práce.

V další části byl formulován zadaný problém a následně byly odvozeny vztahy pro výpočet posuvu pomocí dvou teorií – slabě a silně zakřivených prutů. Společně s těmito vztahy byly analyticky odvozeny i charakteristiky příčného průřezu tvaru U. Při jejich odvození byl často využit princip superpozice, který je v lineární oblasti obecně platný.

V kapitole šesté byla detailně popsána tvorba výpočtových modelů a maker v softwaru ANSYS. Numerický výpočet byl následně proveden pro dva prvky – prutový prvek BEAM189 a objemový prvek SOLID186. Deformace vypočtené pomocí objemového modelu byly stanoveny jako referenční, protože tento numerický model je nejblíže chování reálného tělesa.

V závěrečné části práce bylo poté z několika hledisek provedeno srovnání získaných hodnot posuvů. Za stěžejní závěry provedené studie jsou považovány následující:

1. Hranice poměru $R/h = 5$ (obr. 3.6) mezi slabě a silně zakřivenými pruty určená přes napětí uvedená v [1] byla potvrzena přes výpočet deformačního posuvu (obr. 7.5, 7.7 a 7.8).

2. Prutový prvek BEAM189 definovaný v softwaru ANSYS je nevhodný pro pruty se silně zakřivenou střednicí. Naopak dostatečně vhodnou teorií se ukázala teorie silně zakřivených prutů odvozená z energetického přístupu. Ta se při použití tvarového součinitele přepočteného na neutrální osu blíží přesnému řešení získanému pro objemový prvek SOLID186.

3. Tvarový součinitel příčného průřezu je pro zakřivené pruty obecně závislý na excentricitě, což je zřejmé z obr. 7.4. Tento fakt není ve skriptech [1] explicitně vyjádřen.

4. Výpočet tvarového součinitele β se pro různé přístupy odlišuje. Objasnění rozdílu mezi analyticky vypočítanými hodnotami a hodnotami z ANSYSu by vyžadovalo rozsáhlejší rešerši a další studii.

5. Při výpočtu zakřivených prutů, obzvláště pak silně zakřivených, nelze zanedbat složky posuvů od posouvající ani normálové síly, neboť s rostoucím zakřivením střednice R jejich vliv roste.

Závěrem lze dodat, že i řešení zdánlivě triviálního problému přineslo zajímavá zjištění a může být dobrým základem pro další rozšíření v diplomové práci.

Seznam použitých zdrojů

[1] JANÍČEK, P., E. ONDRÁČEK a J. VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I.* 2. vyd. Brno: VUT, 1992. ISBN 802140468X.

[2] ŠEJNOHA, Jiří a Jitka BITTNAROVÁ. *Pružnost a pevnost 10.* 2. vyd. Praha: ČVUT, 1996. ISBN 80-01-02742-2.

[3] Drop Forged Machine Eye Bolt. In: *Lifting Equipment, Rigging Equipment, and Fall Protection* [online]. © 2016 Bairstow lifting products Co. [cit. 2016-04-22]. Dostupné z: http://www.bairstow.com/v/vspfiles/photos/MEB32-2.jpg

[4] Stainless Eye Slip Hook. In: *Marine Superstore — Chandlery & Boat Parts, Accessories, Fitting, Stainless Direct* [online]. © 2016 Stainless Direct. [cit. 2016-04-22]. Dostupné z: http://stainlessdirect.co.uk/images/eye-slip-hoo-lifting--hook-snap-hook.jpg

[5] Stainless Steel Short Link Chain. In: *Lifting Chains and Hoists, Bungee Cord and Ratchet Strap Suppliers & Lifting Equipment Online* [online]. © 2016 Lifting Equipment Online [cit. 2016-04-22]. Dostupné z: http://www.liftingequipmentonline.co.uk/collections/chain/products/4mm-stainless-steel-short-link-chain

[6] ANSYS® Academic Research, Release 16.2, Help System, Mechanical APDL, ANSYS, Inc.

[7] VRBKA, Jan *Pružnost a pevnost I: Učební text* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012 [cit. 2016-03-05]. Dostupné z: http://www.umt.fme.vutbr.cz/ tprofant/UMTMB-ucebni%20text-PPI--def-130201.pdf

[8] TIMOSHENKO, Stephen. *Strength of Materials.* 2. vyd. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1940.

[9] TIMOSHENKO, Stephen a J.N. GOODIER. *Theory of Elasticity.* 2. vyd. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951.

[10] HORNÍKOVÁ, Jana et al. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text* [online]. 1. vyd. Brno: CERM, 2003 [cit. 2016-03-05]. ISBN 80-720-4268-8. Dostupné z: http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/

[11] MIROLJUBOV, I., Z. KULIŠ, O. SPANILÝ a L. ŠUBRT. *Řešení úloh z pružnosti a pevnosti.* 2. vyd. Praha: SNTL, 1982.

[12] IYER, Hariharan. *The Effects of Shear Deformation in Rectangular and Wide Flange Sections.* Blacksburg, Virginia, 2005. Diplomová práce. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

[13] PILKEY, Walter D. *Formulas for stress, strain, and structural matrices.* 2. vyd. Hoboken, NJ: John Wiley, 2005. ISBN 04-710-3221-2.

[14] PILKEY, Walter D. *Analysis and design of elastic beams: computational methods.* 1. vyd. Chichester: Wiley, 2002. ISBN 04-713-8152-7.

[15] KANEKO, T. On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *Journal of Physics D: Applied Physics.* 1975, **8**(16), 1927–1936.

[16] TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine.* 1921, **41**(245), p. 744.

[17] ONATE, Eugenio. *Beams, Plates and Shells.* Berlin: Springer Netherland, 2008. ISBN 9781402087424.

[18] GHAVAMI, Parviz. *Mechanics of Materials: An Introduction to Engineering Technology.* Springer International Publishing, 2015. ISBN 978-3-319-07571-6.

[19] HAN S.M., BENAROYA H. a WEI T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 1999, **225**(5), 935-988 [cit. 2016-03-04]. Article No. jsvi.1999.2257. Dostupné z: http://csxe.rutgers.edu/research/vibration/51.pdf

[20] ČSN 41 2050. *Ocel 12 050.* Praha: Úřad pro normalizaci a měření, 1978. 16 s. Třídící znak 412050.

[21] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství [cit. 2016-03 4-23]. Dostupné z: http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf

[22] ZIENKIEWICZ, O. C. a Y. K. CHEUNG. *The finite element method in structural and continuum mechanics.* London: McGraw-Hill, 1967.

[23] S. Y. YANG a H. C. SIN, Curvature-based beam elements for the analysis of Timoshenko and shear-deformable curved beams. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 1995, **187**(4), 569-584 [cit. 2016-05-20], ISSN 0022-460X. Dostupné z: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X85705457

Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Jednotka	Význam
A	[J]	deformační práce
A_π	[J]	práce silové soustavy Π
b	[m]	šířka příčného průřezu
E	[Pa]	Youngův modul
e	[m]	excentricita
e_i	[N]	jednotková síla
F	[N]	osamělá síla
G	[Pa]	modul pružnosti ve smyku
h	[m]	charakteristický rozměr příčného průřezu/výška příčného průřezu průřezu
J_y	[m^4]	osový kvadratický moment
K_Ψ	[Nm^2]	tuhost příčného průřezu
l	[m]	délka střednice
M	[Nm]	osamělá silová dvojice
M_o	[Nm]	ohybový moment
m_q	[$\mathrm{Nm} \cdot \mathrm{m}^{-1}$]	liniová dvojice
m_p	[$\mathrm{Nm} \cdot \mathrm{m}^{-2}$]	plošná dvojice
N	[N]	normálová síla
p	[Nm^{-2}]	plošná síla
R	[m]	poloměr střednice
r	[m]	poloměr neutrální osy/křivost křivky
S	[m^2]	plocha příčného průřezu
s	[m]	délka
T		těžiště příčného průřezu
T	[N]	posouvající síla
U_y	[m^3]	lineární moment k ose
u	[m]	posuv
V		složka VVÚ
W	[J]	energie napjatosti
w	[m]	průhyb
x	[m]	poloha v ose x
y	[m]	poloha v ose y
z	[m]	poloha v ose z
$\boldsymbol{T_\sigma}$		tenzor napětí
α	[−]	koeficient smyku
β	[−]	tvarový součinitel příčného průřezu
γ		střednice
γ_{xz}	[−]	úhlové přetvoření
δ	[m]	posuv v bodě
η	[m]	příčinkový součinitel

θ		úhlový parametr
μ	$[-]$	Poissonovo číslo
Π		silová soustava
φ	[rad]	natočení
ρ		radiální parametr
σ	[Pa]	normálové napětí
σ	[Nm^{-3}]	objemová síla
σ_{p}	[Pa]	normálové napětí ve slabě zakřiveném (přímém) prutu
σ_{z}	[Pa]	normálové napětí v silně zakřiveném prutu
$\triangle\sigma$	[%]	odchylka napětí
τ	[Pa]	smykové napětí
Ψ		příčný průřez
Ω		lineárně pružné těleso
ω		řez prutem
$\triangle\omega$	[%]	odchylka posuvu

Zkratka	**Význam**
ANS	ANSYS
MKP	metoda konečných prvků
SIL	silně zakřivený prut
SLA	slabě zakřivený prut
VVÚ	výsledné vnitřní účinky

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam příloh

Příloha A

Součástí bakalářské práce je jeden kus CD, které obsahuje následující soubory:

- `analyticky_vypocet.xlsx`
  - soubor tabulkového procesoru Microsoft Excel, ve kterém jsou naprogramovány všechny vztahy potřebné k analytickému výpočtu deformačního posuvu
- `start_prut_cycle.mac`
  - makro spustitelné v programu ANSYS Mechanical APDL s integrovaným cyklem pro získání hodnot posuvů prvku BEAM189 pro různé hodnoty poloměru R_1
- `start3D_cycle.mac`
  - makro spustitelné v programu ANSYS Mechanical APDL s integrovaným cyklem pro získání hodnot posuvů prvku SOLID186 pro různé hodnoty poloměru R_1
- `vysledky_komplet.txt`
  - textový soubor obsahující všechny výsledky obdržené pro analytický i numerický výpočet