VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV FYZIKÁLNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF PHYSICAL ENGINEERING

FYZIKA METAMATERIÁLŮ

PHYSICS OF METAMATERIALS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE **MARTIN LÁSKA**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE **prof. RNDr. PETR DUB, CSc.**
SUPERVISOR

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, fakulta strojního Inženýrství

Ústav fyzikálního inženýrství
Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student: Martin Láska

který studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Fyzikální inženýrství (3901R012)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem c.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Fyzika metamateriálů

v anglickém jazyce:

Physics of Metamaterials

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metamateriály připravované v posledních letech moderními technologiemi vykazují neobvyklé vlastnosti, které nemají běžné přírodní materiály. Mezi tyto vlastnosti, které otevírají cestu k řadě zajímavých aplikací, patří záporný index lomu. Porozumění novým jevům vyžaduje detailní kritické posouzení teorie optických vlastností látek.

Cíle bakalářské práce:

1. Proveďte rešerši o fyzikálních základech metamateriálů a jejich užití.

2. Proveďte podpůrné výpočty vysvětlující využití metamateriálů v oboru viditelného světla v oblasti plasmoniky.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Petr Dub, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 20.11.2008

L.S.

prof. RNDr. Tomáš Šikola, CSc. Ředitel ústavu	doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc. Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce je věnována elektrodynamice metamateriálů, které mají současně zápornou permitivitu a permeabilitu. Je ukázáno, že takové prostředí je popsáno záporným indexem lomu, což má výrazné důsledky v oblasti optiky. Mezi ně patří zejména „opačný“ lom, který je demonstrován simulací interakce gaussovského monochromatického svazku s prostředím s indexem lomu $n = -1$ v programu COMSOL Multiphysics. Dále je studováno šíření elektromagnetické energie v tomto prostředí: nejprve je ukázáno, že rychlost šíření elektromagnetické energie je rovna grupové rychlosti, která má opačný směr než rychlost fázová. Poté jsou zformulovány Fresnelovy vztahy ve tvaru, který je platný pro kladný i záporný index lomu.

Summary

The bachelor work deals with electrodynamics of metamaterials for which both the electric permittivity and magnetic permeability are simultaneously negative. It is shown that the double negative media are described by a negative refraction index which has an important impact on optics laws. In particular, the negative refraction is demonstrated by simulation of interaction of the Gauss monochromatic beam impinging on a negative refractive material. Next, the electromagnetic energy propagation in the negative refractive materials is studied. It is shown that the energy propagation velocity equals the group velocity, which has the opposite sign than the phase velocity. Finally, Fresnel formulas valid both for positive and negative refraction index are given.

Klíčová slova

Elektrodynamika prostředí se záporným indexem lomu, energie elektromagnetického pole v disperzním prostředí, metamateriály, záporná permitivita, záporná permeabilita, záporný index lomu, Poyntingův vektor, grupová rychlost, rychlost šíření energie, Fresnelovy vztahy.

Keywords

Electrodynamics of negative refractive materials, electromagnetic energy in dispersive media, metamaterials, Left-Handed light, double negative media, negative permittivity, negative permeability, negative index of refraction, Poynting vector, group velocity, energy propagation velocity, Fresnel formulas.

LÁSKA, M. *Fyzika metamateriálů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, fakulta strojního inženýrství, 2009. 44 s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Petr Dub, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma „Fyzika metamateriálů“ vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Petra Duba, CSc. Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpal, jsou uvedeny v seznamu použité literatury. Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu ustanovení §11 zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestně právních důsledků vyplývajících z ustanovení §152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne: …… ……..

podpis

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. RNDr. Petru Dubovi, CSc, který moji práci trpělivě pročítal, vedl mě a svými připomínkami napomohl moji práci zkvalitnit. Zároveň bych rád poděkoval Ing. Jakubu Zlámalovi, Ph.D., který obohatil moji bakalářskou práci prostřednictvím simulačního programu *Comsol Multiphysics.*

Děkuji své rodině za poskytnutí zázemí při studiu na Fakultě strojního inženýrství a za to, že jsem mohl na této úloze nerušeně pracovat.

Obsah

1 Úvod

„The physics of negative refractive materials can be extremely counter-intuitive. „Standard“ notions and intuitions of electromagnetic theory can be misleading, and unexpected situations arise with the negative refractive materials. This has mostly … been responsible for the initial severe criticism and debate as well as the later explosion of research in this area“ [1].

Před 40 lety se ruský fyzik V. Veselago [2] teoreticky zabýval otázkou, jak by se šířila elektromagnetická vlna v prostředí, které by mělo jak permitivitu ε, tak permeabilitu μ současně záporné. V přírodě se však takové látky nevyskytují; zatímco permitivita např. u kovů je ve viditelné oblasti záporná, jejich permeabilita je kladná (μ_r se neliší příliš od jedné). Veselagova práce se stala podnětem k hledání umělých materiálů (nyní nazývaných *metamateriály*), charakterizovaných efektivní permitivitou a efektivní permeabilitou, které by byly na témže frekvenčním intervalu současně záporné. Materiály, které by měly ve stejné frekvenční oblasti zápornou permitivitu a permeabilitu, lze uměle vyrobit. Základními stavebními kameny těchto metamateriálů nejsou atomy, ale útvary jako jsou tenké kovové tyčinky a mikrorezonátory. Takové materiály byly poprvé zkonstruovány na konci devadesátých let pro oblast mikrovln (např. přehledové články [1] a [3]). V současné době se pomocí nanotechnologií začínají vyrábět metamateriály pro oblasti infračerveného až viditelného záření [4], [5].

V prostředí, kde ε a μ jsou současně kladné (*double positive media*), tvoří vektory $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ pravotočivou soustavu, zatímco v prostředí, kde ε a μ jsou obě záporné (*double negative media*), je tato trojice $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ levotočivá. Proto se takové prostředí označuje jako L-materiál (z ang. *Left-Handed material* nebo také *Left-Handed light*). L-materiál je také popsán záporným indexem lomu.

V předkládané práci nejprve podrobně pojednáme o indexu lomu, který je dán řešením rovnice $n^2 = \varepsilon\mu$. Ukážeme, že je třeba být pečlivý při odmocňování tohoto výrazu, neboť permitivita[1] $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + \mathrm{i}\varepsilon''(\omega)$ a permeabilita $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + \mathrm{i}\mu''(\omega)$ jsou komplexní funkce frekvence, jejichž reálné a imaginární složky jsou svázány Kramersovými-Kronigovými relacemi, které plynou z kauzality. Následující 3. kapitola je věnována energii elektromagnetického pole v izotropním disperzním prostředí a jejímu šíření. Především ukážeme souvislost rychlosti šíření energie s grupovou rychlostí. Ve 4. kapitole pojednáme nejprve o Fresnelových vzorcích, které jsou v učebnicích optiky a elektrodynamiky uváděny ve tvaru, který je použitelný jen pro prostředí, kde ε, μ a tedy i n, jsou současně kladné. Budeme pečlivě sledovat odvození Fresnelových vztahů tak, aby výsledek byl použitelný pro kladný i záporný index lomu. V druhé části této kapitoly se

[1] Nadále budeme permitivitou rozumět relativní permitivitu a budeme ji označovat ε bez indexu r (analogicky pro permeabilitu).

budeme zabývat případem, kdy elektromagnetická vlna dopadá z vakua na prostředí s indexem lomu $n = -1$. V Dodatku A jsou uvedeny Kramersovy-Kronigovy relace a jejich důsledky potřebné pro naše úvahy. Dodatek B je věnován permitivitě a permeabilitě metamateriálů.

2 Index lomu

Materiály se záporným indexem lomu přináší vědcům široké pole působnosti. Index lomu je pro optiku klíčový a z každé jeho změny plynou pro tuto oblast fyziky důsledky. Přitom je myšlenka záporného indexu lomu podstatou správné interpretace fundamentálních zákonů optiky.

2.1 Maxwellovy rovnice

Elektromagnetické pole v látce je popsáno čtyřmi vektory, intenzitou elektrického pole $\vec{E}$, elektrickou indukcí $\vec{D}$, intenzitou magnetického pole $\vec{H}$ a magnetickou indukcí $\vec{B}$. Tyto vektory pole jsou svázány Maxwellovými rovnicemi

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_r , \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_r + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \tag{2.4}$$

Dále budeme uvažovat prostředí, v němž se nebudou vyskytovat volné proudy, $\vec{j}_r$ = 0, a volné náboje $\rho_r = 0$.

2.2 Rovinná vlna

Základním rysem Maxwellových rovnic je, že jejich řešení lze nalézt ve tvaru harmonických rovinných vln

$$\vec{E},\ \vec{D},\ \vec{H},\ \vec{B}\ \sim\ \exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]. \tag{2.5}$$

Dosadíme-li rovnici (2.5) do vztahu (2.1) až (2.4), dostaneme

$$\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{D} = 0 , \tag{2.1a}$$

$$\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 , \tag{2.2a}$$

$$\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E} = \mathrm{i}\omega\vec{B} , \tag{2.3a}$$

$$\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{H} = -\mathrm{i}\omega\vec{D}\,. \tag{2.4a}$$

Dále budeme uvažovat lineární izotropní prostředí, v němž

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\vec{E}\ , \tag{2.6}$$

$$\vec{B} = \mu_0\mu(\omega)\vec{H}\ , \tag{2.7}$$

kde permitivita $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ a permeabilita $\mu = \mu(\omega)$ závisí na frekvenci. Pro permitivitu ε_0 a permeabilitu μ_0 vakua platí $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$.

Dosadíme-li (2.6) a (2.7) do (2.1a) a (2.4a), dostaneme

$$\varepsilon_0\varepsilon(\omega)\vec{k}\cdot\vec{E} = 0\,, \tag{2.1b}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{B} = 0\,, \tag{2.2b}$$

$$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}\,, \tag{2.3b}$$

$$\vec{k}\times\vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{E}\,. \tag{2.4b}$$

První dvě rovnice (2.1b) a (2.2b) vyjadřují, že (pokud $\varepsilon(\omega)\neq 0$) pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou *transverzální*. Z rovnic (2.3b) a (2.4b) dostaneme jednu rovnici pro $\vec{B}$ a jednu pro $\vec{E}$

$$\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{E} = -\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{E}\,,$$

$$\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{B} = -\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{B}\,.$$

Protože platí $\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{E} = \vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}) - k^2\vec{E}$, kde vzhledem k (2.1b) $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$, jsou výsledné rovnice ve tvaru

$$\left[k^2 - \frac{\omega}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right]\vec{E} = 0\,, \tag{2.8a}$$

$$\left[k^2 - \frac{\omega}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right]\vec{B} = 0\,. \tag{2.8b}$$

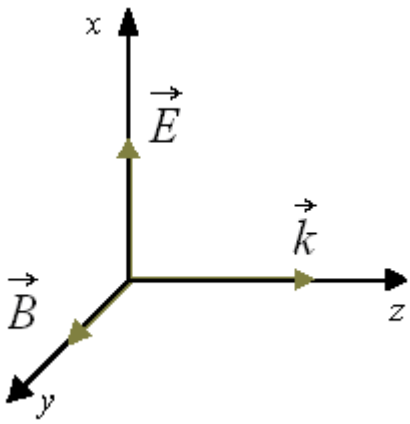
Z rovnic (2.8a,b) plyne, že má-li $\vec{E}\neq 0$ a $\vec{B}\neq 0$, musí platit

$$k^2 = \frac{\omega}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\,, \tag{2.9}$$

kde součin relativní permitivity a relativní permeability je kvadrát indexu lomu,

$$n^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\,. \tag{2.10}$$

Z rovnic (2.1b) až (2.4b) je patrné, že trojice $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ tvoří pravotočivý systém. Vzhledem k tomu, že prostředí je izotropní, můžeme osy *x*, *y*, *z* volit libovolně. Zvolíme je tedy tak, jak je znázorněno na obr. 1.



Obr. 1 $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ tvoří pravotočivý systém.

Vyjádříme-li vlnový vektor pomocí indexu lomu, pak rovinná vlna z obr. 1 bude mít tvar

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t - n\frac{z}{c}\right)\right]. \tag{2.11}$$

2.3 Záporný a kladný index lomu

Index lomu vyjádříme z rovnice (2.10)

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\,,$$

kde $\varepsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$ jsou obecně komplexní,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + \mathrm{i}\varepsilon''(\omega)\text{, kde } \varepsilon' = \Re e(\varepsilon) \text{ a } \varepsilon'' = \Im m(\varepsilon), \tag{2.12}$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) + \mathrm{i}\mu''(\omega)\text{, kde } \mu' = \Re e(\mu) \text{ a } \mu'' = \Im m(\mu). \tag{2.13}$$

Reálné a imaginární složky jsou svázány Kramersovými-Kronigovými relacemi, z nichž plyne, že s disperzí je spojena absorpce (viz Dodatek A). Imaginární část permitivity a permeability vyjadřují disipaci energie v látce, což je charakteristické pro pasivní materiály. Z toho plyne (pro časovou závislost $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$) [6, s. 274]

$$\varepsilon'' > 0\,,\ \mu'' > 0\,. \tag{2.14}$$

Opačným případem je energiově aktivní prostředí (např. laser), ve kterém dochází k zesílení energie a kde platí

$$\varepsilon'' < 0\,,\ \mu'' < 0\,.$$

Reálné části permitivity a permeability mohou přitom být jak kladné tak i záporné. Případem, kdy $\varepsilon'\mu' < 0$, což vede k evanescentním vlnám, se nebudeme zabývat. Nadále se budeme zabývat případem, kdy $\varepsilon'\mu' > 0$. Poslední nerovnost může nastat buď pro

a) $\varepsilon' > 0$ a $\mu' > 0$,

nebo pro

b) $\varepsilon' < 0$ a $\mu' < 0$.

Zatímco případ a) charakterizuje běžné optické prostředí, případ b) nastává u metamateriálů.

Protože $\varepsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$ jsou obecně komplexní funkce, je komplexní i index lomu

$$n(\omega) = n'(\omega) + \mathrm{i}n''(\omega),\ \text{kde}\ n' = \Re e(n)\ \text{a}\ n'' = \Im m(n). \tag{2.15}$$

Dosadíme-li (2.15) za index lomu do (2.10), dostaneme výraz

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\exp\left(-n''\frac{\omega}{c}z\right)\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t - n'\frac{z}{c}\right)\right].$$

Bez ztráty na obecnosti budeme předpokládat, že elektromagnetická vlna dopadá z vakua zleva na prostředí vyplňující poloprostor $z > 0$. Pokud pro $z \to \infty$ pole nemá divergovat, pak musí platit

$$n'' > 0\,. \tag{2.16}$$

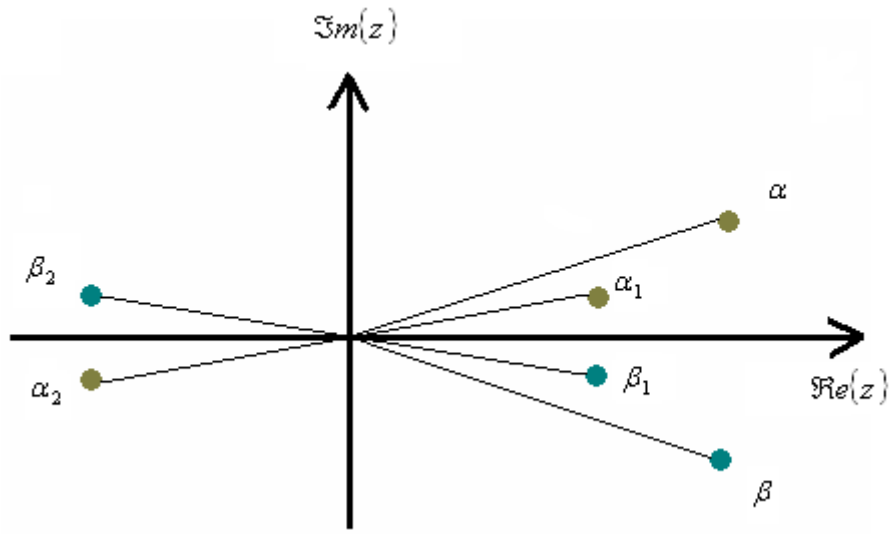
Dosazením (2.12) a (2.13) do (2.11) dostaneme

$$n^2 = (\varepsilon' + \mathrm{i}\varepsilon'')(\mu' + \mathrm{i}\mu'') = (\mu'\varepsilon' + \varepsilon''\mu'') + \mathrm{i}(\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu'), \tag{2.17}$$

kde $\Re e(n^2) = (\mu'\varepsilon' + \varepsilon''\mu'')$ a $\Im m(n^2) = (\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu')$. Tedy pro

a) $\varepsilon' > 0$ a $\mu' > 0$ je $\Im m(n^2) > 0$ (viz bod α na obr. 2), a n je znázorněno body α_1, α_2.

b) $\varepsilon' < 0$ a $\mu' < 0$ je $\Im m(n^2) < 0$ (viz bod β na obr. 2), a n je znázorněno body β_1, β_2.



Obr. 2 Gaussova rovina pro n^2 (body α a β) a n (body α_1, α_2 a β_1, β_2). Body α, α_1, α_2 přísluší případu, kdy $\varepsilon' > 0$ a $\mu' > 0$. Body β, β_1, β_2 přísluší případu, kdy $\varepsilon' < 0$ a $\mu' < 0$.

Vzhledem k tomu, že pro imaginární část indexu lomu má platit podmínka (2.16), fyzikální smysl má v případě

a) n, pro které $\Re e(n) > 0$, (bod α_1),

b) n, pro které $\Re e(n) < 0$, (bod β_2).

Ve frekvenční oblasti, kde je slabá disipace klademe $\varepsilon'' \to 0$ a $\mu'' \to 0$ a

a) pro $\varepsilon > 0$ a $\mu > 0$ dostáváme $n = +\sqrt{\varepsilon\mu}$,

b) pro $\varepsilon < 0$ a $\mu < 0$ dostáváme $n = -\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Často se indexem lomu míní jen jeho reálná část, tj. $\Re e(n)$. Detailní studie pro všechny případy kombinací znamének reálných a imaginárních částí permitivity $\varepsilon(\omega)$ a permeability $\mu(\omega)$ je provedena v [7].

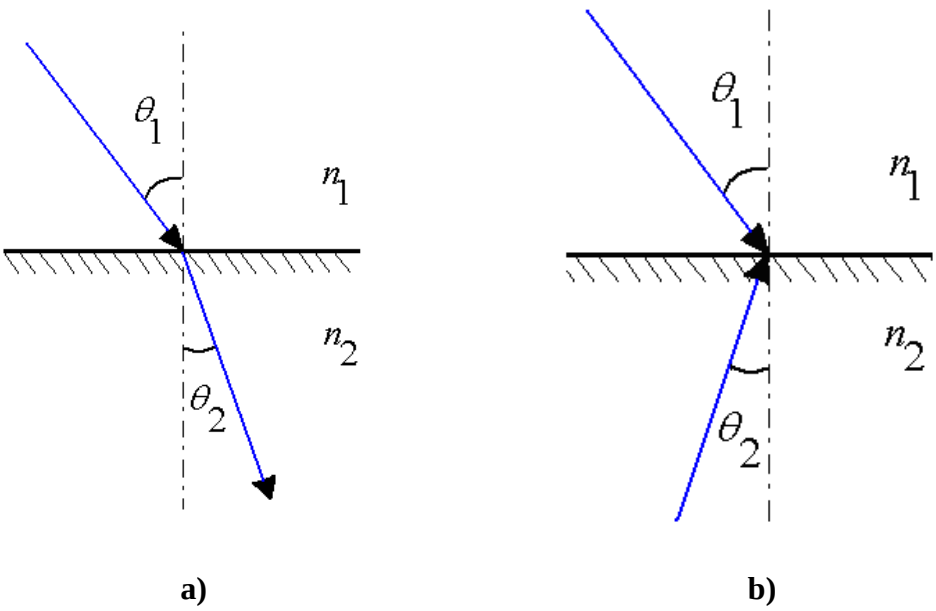
2.4 Snellův zákon

Snellův zákon patří k základním zákonům popisující šíření vlnění, které přechází z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí o indexu lomu n_2. Je důležitou součástí geometrické optiky, kde popisuje lom paprsku světla a obecně elektromagnetického záření na rovinném rozhraní. Snellův zákon je vyjádřen rovnicí

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}\,. \tag{2.18}$$

Rovnice (2.18) zůstává v platnosti i pro šíření elektromagnetického záření v prostředí o záporném indexu lomu, kdy $n_2 < 0$ (viz obr. 3).

Shelby et al. [8] provedli experiment dokazující, že Snellův zákon je platný i pro materiály se záporným indexem lomu. Experiment spočíval v měření úhlů světelných svazků procházející hranolem vyrobeného z metamateriálu. Z tohoto experimentálního uspořádání lze určit efektivní index lomu n_{ef} daného materiálu.



Obr. 3 Snellův zákon. **a)** $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ **b)** $n_1 > 0$, $n_2 < 0$.

3 Šíření energie

V této kapitole budeme studovat energii a její šíření v izotropním disperzním neohraničeném prostředí. Šíření energie je charakterizováno rychlostí v_E, která je uvedena do souvislostí s grupovou rychlostí v_g.

3.1 Energie elektromagnetického pole v látce

Z Maxwellových rovnic (2.3) a (2.4), kde $\rho_v = 0$, $\vec{j}_v = 0$, plyne zákon zachování energie v látce (tzv. Poyntingův teorém)

$$-\operatorname{div}\vec{S} = \left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right), \tag{3.1}$$

kde na levé straně vystupuje Poyntingův vektor vyjadřující rychlost přenosu energie na jednotku plochy,

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}, \tag{3.2}$$

a pravá strana vyjadřuje časovou derivaci hustoty energie elektromagnetického pole

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{3.3}$$

Hustota energie elektromagnetického pole se obvykle vyjadřuje vztahem [9, s. 121]

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2. \tag{3.4}$$

Tento vztah zřejmě nelze převzít pro prostředí, kde $\varepsilon < 0$ a $\mu < 0$, protože potom by byla hustota energie záporná. Vztah (3.4) lze totiž interpretovat jako hustotu energie elektromagnetického pole pouze pro prostředí bez disperze[2]. Z Kramersových-Kronigových relací plyne, že záporná permitivita a permeabilita nutně vyžaduje disperzi. Odvodit vztah, který by vyjadřoval hustotu energie elektromagnetického pole v prostředí s disperzí, není

[2] *In the presence of dispersion, no such simple interpretation is possible. Moreover, in the general case of arbitrary dispersion, the electromagnetic energy cannot be rationally defined as a thermodynamic quantity. This is because the presence of dispersion in general signifies a dissipation of energy, i.e. a dispersive medium is also an absorbing medium.* [6, s. 272]

triviální. Poprvé jej odvodil v roce 1921 L. Brillouin. Pro střední hodnotu hustoty energie platí [6, s. 275]

$$< u_\omega >= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\varepsilon_0\varepsilon(\omega)\omega]|E_\omega|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\mu_0\mu(\omega)\omega]|H_\omega|^2\right\}, \tag{3.5}$$

kde $\frac{1}{2}$ před hranatou závorkou vystupuje z důvodu časového středování. Z termodynamických důvodů musí být střední hodnota hustoty energie kladná. Z Kramersových-Kronigových relací ve frekvenční oblasti, kde je slabá absorpce (tedy daleko od rezonance), plyne (viz dodatek A)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\varepsilon(\omega)\omega] > 0\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\mu(\omega)\omega] > 0 \tag{3.6}$$

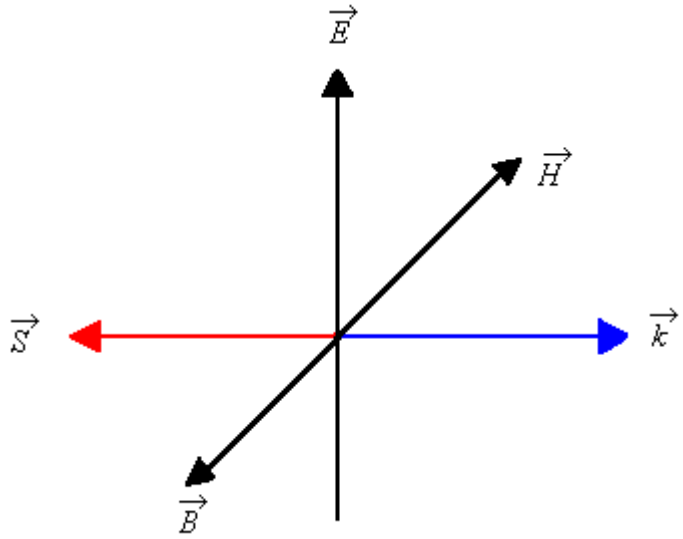
a tudíž vskutku $< u_\omega > \ > 0$. Kdybychom neuvažovali v rovnici (3.5) disperzi, tak $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\varepsilon_0\varepsilon\omega) = \varepsilon_0\varepsilon$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\mu_0\mu\omega) = \mu_0\mu$. Výsledně by se tedy výraz (3.5) rovnal střední hodnotě výrazu (3.4).

3.2 Poyntingův vektor

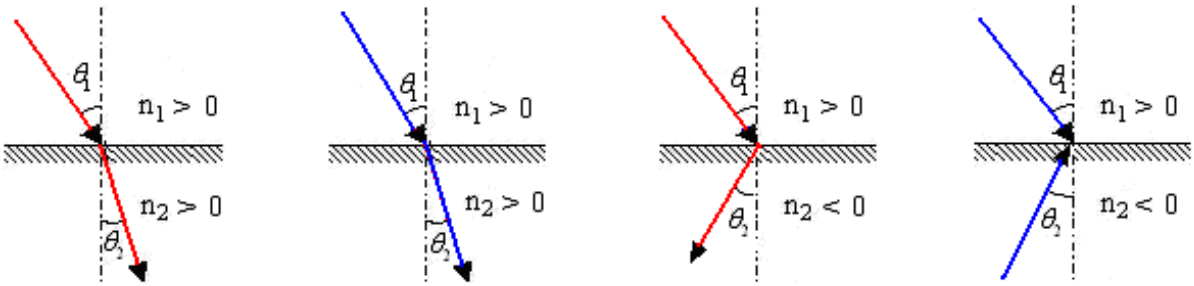
Poyntingův vektor $\vec{S}$ popisuje tok energie a jeho směr udává v každém bodě směr šíření energie. V dielektrickém prostředí je Poyntingův vektor definován vztahem (3.2). Vyjádříme-li intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ pomocí magnetické indukce $\vec{B}$, dostaneme

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0\mu(\omega)}\vec{E}\times\vec{B}\,. \tag{3.7}$$

Pro materiály se zápornou permeabilitou μ míří Poyntingův vektor na opačnou stranu, než je tomu u běžných materiálů. Proto se v literatuře prostředí se současně zápornými ε a μ označuje jako *L-materiál*. L říká, že trojice vektorů $\vec{E}, \vec{B}, \vec{S}$ tvoří v izotropním prostředí levotočivý ortogonální systém. Na obr. 4 je vidět pravotočivý systém $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ a levotočivý systém $\vec{E}, \vec{B}, \vec{S}$. Poyntingův vektor $\vec{S}$ je v rovinné vlně antiparalelní s vlnovým vektorem $\vec{k}$. Elektromagnetická vlna se na rovinném rozhraní s L-materiálem láme na opačnou stranu od kolmice než v běžném materiálu (obr. 5).



Obr. 4 Šíření energie a fáze v L-materiálech. Poyntingův vektor $\vec{S}$ je v rovinné vlně antiparalelní s vlnovým vektorem $\vec{k}$.



a) b) c) d)

Obr. 5 Snellův zákon. Materiál s kladným indexem lomu $n_2 > 0$ (a) tok energie, (b) vlnový vektor, a materiál se záporným indexem lomu $n_2 < 0$ (c) tok energie, (d) vlnový vektor.

3.3 Rychlosti světla v prostředí

V látkovém prostředí se definují tři rychlosti: fázová rychlost v_f, grupová rychlost v_g a rychlost šíření energie v_E.

Fázová rychlost je dána vztahem

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \tag{3.8}$$

kde n je index lomu, o kterém bylo pojednáváno v kap. 2.3.

Grupová rychlost je dána vztahem

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{n_g}, \tag{3.9}$$

kde

$$n_g = n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \tag{3.10}$$

je grupový index lomu [10, s. 52].

Rychlost šíření elektromagnetické energie je v izotropním prostředí rovnoběžná s Poyntingovým vektorem a pro její velikost platí [10, s. 52]

$$v_E = \frac{\left|\left\langle \vec{S} \right\rangle\right|}{< u_\omega >}, \tag{3.11}$$

kde $\left|\left\langle \vec{S} \right\rangle\right|$ vyjadřuje velikost střední hodnoty Poyntingova vektoru a $< u_\omega >$ je střední hodnota hustoty energie daná vztahem (3.5).

Ve výrazech pro Poyntingův vektor a hustotu energie vystupuje intenzita elektrického pole $\vec{E}$ a intenzita magnetického pole $\vec{H}$. Tyto veličiny jsou v rovinné vlně svázány rovnicemi (2.3b) a (2.4b), z nichž plyne

$$\left|\vec{H}_\omega\right|^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon(\omega)}{\mu_0 \mu(\omega)} \left|\vec{E}_\omega\right|^2. \tag{3.12}$$

Pomocí (3.12) upravíme výraz pro střední hodnotu Poyntingova vektoru (3.2)

$$\left|\left\langle \vec{S} \right\rangle\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon(\omega)}{\mu_0 \mu(\omega)}} \left|E_\omega\right|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\mu_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{\mu(\omega)\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)\mu(\omega)}} \left|E_\omega\right|^2 = \frac{1}{2c\mu_0}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{\mu^2(\omega)}} \left|E_\omega\right|^2, \tag{3.13}$$

kde $\frac{1}{2}$ opět vystupuje z důvodu časového středování. Klíčové je správně odmocnit výraz $\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)/\mu^2(\omega)}$, aby výsledek byl platný nejen pro kladné $\varepsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$, ale i pro jejich současně záporné hodnoty. Obecně platí

$$\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{\mu^2(\omega)}} = \frac{\sqrt{n^2}}{\left|\mu(\omega)\right|} = \frac{n}{\mu(\omega)} > 0, \tag{3.14}$$

protože

a) pro $\varepsilon(\omega) > 0$ a $\mu(\omega) > 0$ je $\sqrt{n^2} = +n$ a $\left|\mu(\omega)\right| = \mu(\omega)$,

b) pro $\varepsilon(\omega) < 0$ a $\mu(\omega) < 0$ je $\sqrt{n^2} = -n$ a $\left|\mu(\omega)\right| = -\mu(\omega)$.

Dosazením (3.14) do (3.13) získáme

$$\left|\left\langle \vec{S} \right\rangle\right| = \frac{n}{2c\mu_0\mu(\omega)}\left|E_\omega\right|^2 . \tag{3.15}$$

Nyní se věnujme střední hodnotě hustoty energie. Rovnici (3.5) můžeme pomocí vztahu (3.12) upravit do tvaru

$$\left\langle u_\omega \right\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left[2\varepsilon(\omega) + \omega\frac{\partial\varepsilon(\omega)}{\partial\omega} + \frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}\frac{\partial\mu(\omega)}{\partial\omega}\omega\right]\left|E_\omega\right|^2 . \tag{3.16}$$

Derivací se přesvědčíme, že platí

$$\frac{1}{\mu(\omega)\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right] = 2\varepsilon(\omega) + \omega\frac{\partial\varepsilon(\omega)}{\partial\omega} + \frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}\frac{\partial\mu(\omega)}{\partial\omega}\omega . \tag{3.17}$$

Protože $\varepsilon\mu = n^2$, lze výraz (3.17) upravit do podoby

$$\frac{1}{\mu\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2\varepsilon\mu\right) = \frac{1}{\mu\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2 n^2\right) = \frac{1}{\mu\omega}2n\omega\left(n + \omega\frac{\partial n}{\partial\omega}\right) = \frac{2nn_g}{\mu} = \frac{2nc}{v_g\mu} , \tag{3.18}$$

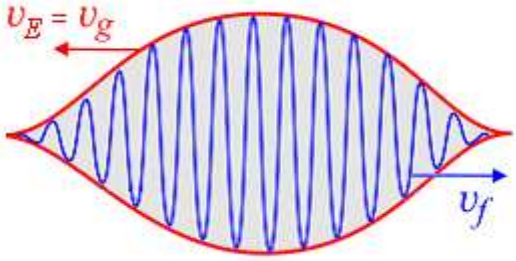
kde jsme přihlédli k rovnici (3.10) definující grupový index lomu n_g. Po těchto úpravách dostaneme konečnou podobu výrazu pro hustotu energie

$$\left\langle u_\omega \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 nn_g}{2\mu(\omega)}\left|E_\omega\right|^2 = \frac{\varepsilon_0 nc}{2\mu(\omega)v_g}\left|E_\omega\right|^2 . \tag{3.19}$$

Střední hodnota hustoty energie je kladná. To vyžaduje, aby

a) pro $\mu(\omega) > 0$ platilo $n\,n_g > 0$,
b) pro $\mu(\omega) < 0$ platilo $n\,n_g < 0$.

Tyto nerovnosti vyplývají z Kramersových-Kronigových relací (viz Dodatek A).



Obr. 6 Grupová a fázová rychlost v materiálu vykazující současně záporné ε a μ.

Dosazením za $\left|\left\langle \vec{S} \right\rangle\right|$ z rovnice (3.15) a za $\langle u_\omega \rangle$ z rovnice (3.19) do definice rychlosti šíření energie (3.11) dostaneme

$$v_E = v_g \,. \tag{3.20}$$

Grupová rychlost tedy určuje rychlost šíření energie, která má u L-materiálů opačný směr než fázová rychlost (3.8), viz obr. 6. Zdůrazněme, že všechny výše uvedené vztahy byly odvozeny pro slabou absorpci, mimo oblast rezonance[3].

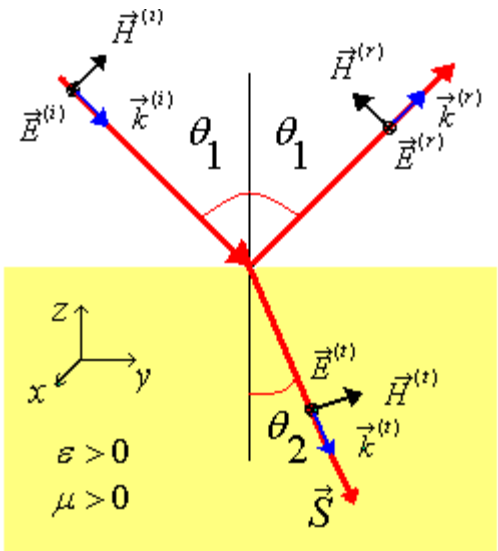
[3] V oblasti rezonance může být grupová rychlost záporná, ale i větší než rychlost světla. Grupová rychlost v této oblasti nemá význam šíření energie [10].

4 Interakce elektromagnetické vlny s rozhraním

V této kapitole budeme studovat interakci elektromagnetické vlny s rozhraním. Nejprve kriticky posoudíme Fresnelovy vztahy a uvedeme je ve tvaru platném pro kladný i záporný index lomu. Poté budeme studovat rozhraní vakuum-prostředí se záporným indexem lomu $n = -1$, kdy všechna energie prochází a žádná se neodráží zpět.

4.1 Fresnelovy vztahy

Dopadá-li elektromagnetická vlna na materiálové rozhraní, část dopadajícího záření se láme, šíří se do prostředí, a část se odráží. Je-li rozhraní rovinné a rozlehlé, pak ze symetrie plyne, že tečné složky vlnových vektorů všech vln jsou stejné. Pouze jejich složka z se mění v závislosti na indexu lomu. Z toho dostaneme Snellův zákon, o kterém bylo pojednáno v čl. 2.4. K získání amplitudy odražené vlny $r = E^{(r)} / E^{(i)}$ a amplitudy lomené vlny $t = E^{(t)} / E^{(i)}$, kde $E^{(i)}$, $E^{(r)}$, $E^{(t)}$ jsou pořadě intenzity elektrického pole dopadající, odražené a lomené vlny, musíme v místě materiálového rozhraní $(z = 0)$ využít okrajové podmínky požadující spojitost tečných složek intenzit $\vec{E}_t$ a $\vec{H}_t$. V případě izotropního prostředí lze řešit odděleně případ *S-polarizace*, $E^{(i)}$ je kolmé k rovině dopadu, a *P-polarizaci*, $E^{(i)}$ leží v rovině dopadu. Výklad Fresnelových vztahů je uveden ve všech učebnicích optiky a elektromagnetismu. V knize *Elektrodynamika kontinua* od L. D. Landaua [6, p. 295] jsou Fresnelovy vztahy odvozeny pro $\mu = 1$, což je pro náš případ nepoužitelné. Jiný přístup k řešení problému volí



Obr. 7 Interakce rovinné elektromagnetické vlny s izotropním homogenním (neabsorbujícím) prostředím s kladným indexem lomu (*S-polarizace*). Tok energie je vyjádřen Poyntingovým vektorem $\vec{S}$ (červená barva).

ve své knize *Classical Electrodynamics* J. D. Jackson [11, kap. 7], který přímo s μ počítá. Jackson ale nakonec provádí algebraické úpravy platné jen pro $n > 0$. O Fresnelových vztazích, které by byly platné i pro záporný index lomu, není v literatuře soustavněji pojednáno, a proto se jimi budeme zabývat pro kladný i záporný index lomu[4].

S-polarizace

Ze spojitosti $\vec{E}_t$ v rovině rozhraní $(z = 0)$ plyne

$$E_x^{(i)} + E_x^{(r)} = E_x^{(t)} \tag{4.1}$$

a ze spojitosti $\vec{H}_t$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(E_x^{(i)} - E_x^{(r)}\right)\cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_x^{(t)}\cos\theta_2 = 0\,, \tag{4.2}$$

kde byla užita rovnice (2.3a). Z rovnic (4.1) a (4.2) plyne

$$r_s = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta_2} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\mu_1^2}}\cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\mu_2^2}}\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\mu_1^2}}\cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\mu_2^2}}\cos\theta_2}\,, \tag{4.3}$$

kde dle Snellova zákona (2.18)

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}\,. \tag{4.4}$$

Poněvadž pro *n* kladné i záporné platí (3.14), tj.

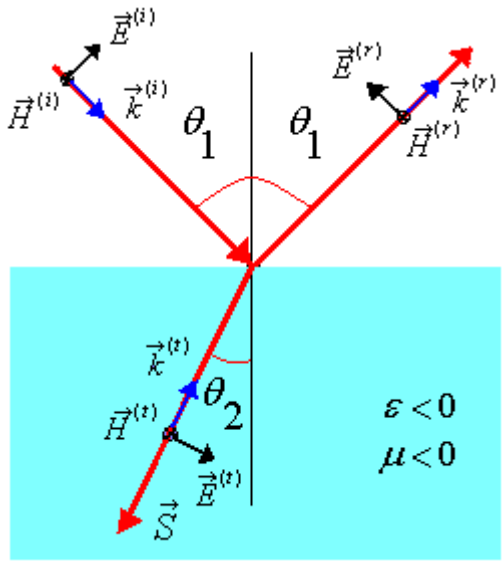
$$\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu^2}} = \frac{n}{\mu}\,,$$

rovnici (4.3) můžeme upravit do podoby[5]

$$r_s = \frac{\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_1 - \frac{n_2}{\mu_2}\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}}{\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2}\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}}\,, \tag{4.5}$$

[4] Při výpočtech byl sledován postup uvedený v [11].

[5] Pro všechny případy uvažujme, že $\theta_1 < \theta_m$, kde θ_m je mezní úhel.



Obr. 8 Interakce rovinné elektromagnetické vlny s izotropním homogenním (neabsorbujícím) prostředím se záporným indexem lomu (*S-polarizace)*. Tok energie je vyjádřen Poyntingovým vektorem $\vec{S}$ (červená barva).

která je platná pro kladný i záporný index lomu. Jackson provedl úpravu, která platí jen pro kladný index lomu, a proto jako Fresnelův vztah uvádí rovnici (viz (7.39) v [11])

$$r_s = \frac{n_1 \cos\theta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1}}{n_1 \cos\theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1}} . \tag{4.6}$$

Je zřejmé, že pokud bude $\mu_2 < 0$, čitatel v (4.6) bude větší než jmenovatel a $|r_s| > 1$, což není fyzikálně možné.

Pro koeficient propustnosti $t_s = 1 + r_s$ pak platí

$$t_s = \frac{E_y^{(t)}}{E_y^{(i)}} = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_1}{\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2}\sqrt{1-(n_1/n_2)^2 \sin^2\theta_1}} . \tag{4.7}$$

Koeficient propustnosti platný pouze pro kladný index lomu zní (viz (7.39) v [11]):

$$t_s = \frac{2 \cdot n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1}} . \tag{4.8}$$

P-polarizace

Pro úplnost uvedeme Fresnelovy vztahy pro *p-polarizaci* (které jsem vypočetl) platné pro kladný i záporný index lomu:

$$r_p = \frac{\frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_1 - \frac{n_1}{\mu_1}\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}}{\frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_1 + \frac{n_1}{\mu_1}\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}}, \tag{4.9}$$

$$t_p = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_1}{\frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_1 + \frac{n_1}{\mu_1}\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}}. \tag{4.10}$$

V Jacksonově učebnici nalézáme Fresnelovy koeficienty ve tvaru (viz (7.41) v [11])

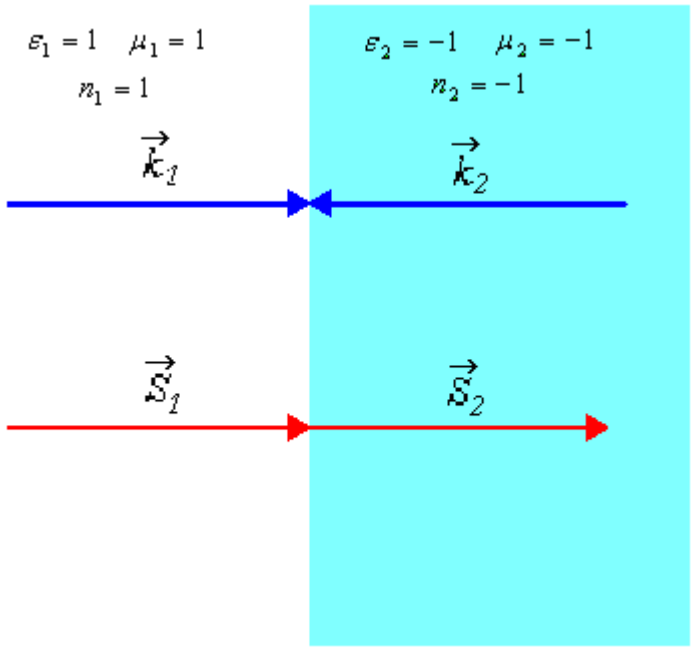
$$r_p = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_1 - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_1 + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}}, \tag{4.11}$$

$$t_p = \frac{2n_1n_2\cos\theta_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_1 + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}}, \tag{4.12}$$

které jsou platné pouze pro $n_2 > 0$.

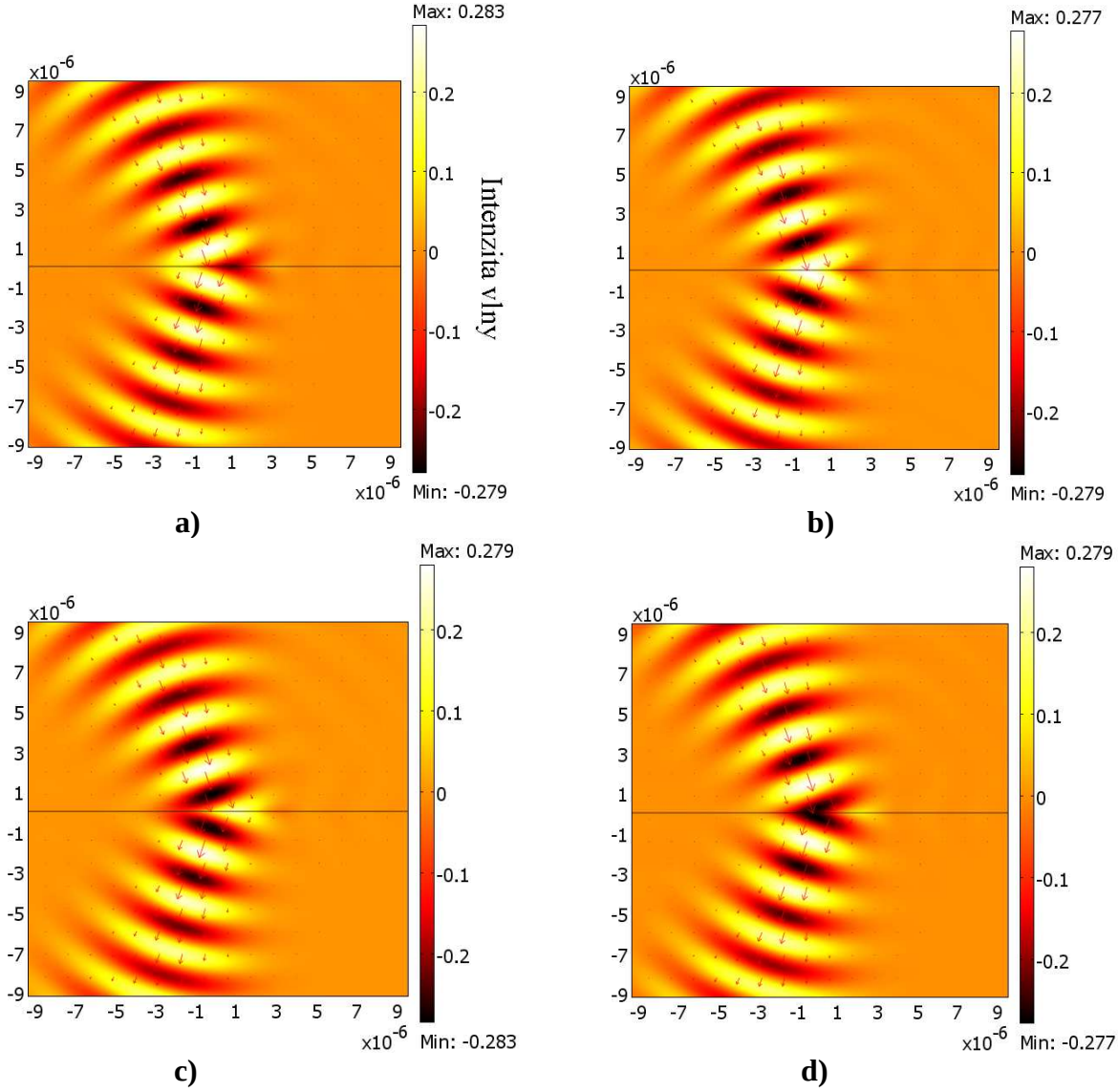
4.2 Příklad: rozhraní vakuum – prostředí s $n = -1$.

Vše, co bylo doposud řečeno, názorně objasníme na příkladu, kdy dopadá elektromagnetická vlna z vakua $n_1 = 1$ na prostředí se záporným indexem lomu $n_2 = -1$, kdy nedochází k odrazu (viz (4.6), (4.9)). Nejprve uvažujme *kolmý dopad* rovinné monochromatické vlny. V tomto případě $\vec{E}$ a $\vec{H}$ leží v rovině rozhraní $(z = 0)$, a proto jsou spojité. Z definice Poyntingova vektoru $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ tedy ihned plyne, že platí $\vec{S}_1 = \vec{S}_2$, zatímco pro vlnové vektory platí $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$ (viz obr. 9), index 1 označuje vakuum a index 2 prostředí s indexem lomu $n_2 = -1$.

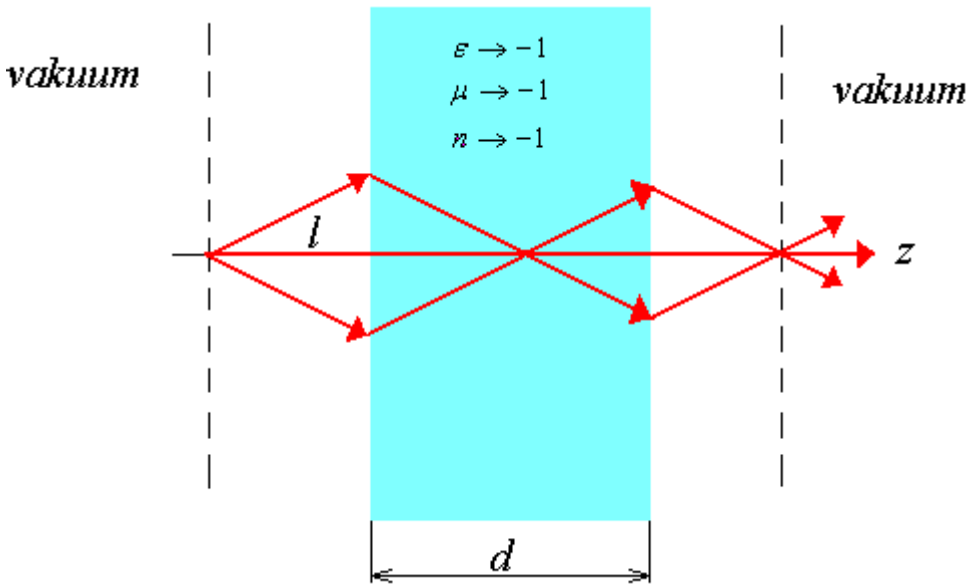


Obr. 9 Šíření elektromagnetické vlny z prostředí s $n_1 = 1$ do prostředí s $n_2 = -1$ (kolmý dopad).

Při *šikmém dopadu* svazku z vakua na materiálové rozhraní nastává lom. Na obr. 10 je řešen problém lomu gaussovského monochromatického svazku dopadajícího pod úhlem 30° na prostředí s indexem lomu $n = -1$. Svazek měl vlnovou délku 2,5 μm a byl polarizovaný kolmo k rovině dopadu. Je vidět, že fáze vlny se šíří opačným směrem než Poyntingův vektor $\vec{S}$.



Obr. 10 Demonstrace opačného lomu. Byl řešen stacionární 2D problém lomu gaussovského monochromatického svazku dopadajícího pod úhlem 30° z vakua na prostředí se záporným indexem lomu. Svazek měl vlnovou délku 2,5 μm a byl polarizovaný kolmo k rovině dopadu zaostřený na rozhraní materiálů (minimální poloměr ve waistu 2 μm). Obrázky a) až d) znázorňují lom elektromagnetické vlny v časových intervalech odpovídající posuvu o $1/4$ vlnové délky. Je vidět, že fáze vlny v oblasti s $n = -1$ se šíří opačným směrem než Poyntingův vektor $\vec{S}$, který je znázorněn šipkami. Vedle obrázku je vždy znázorněna stupnice vyznačující intenzitu elektrického pole. V obrázcích jsou na horizontálních (x) a vertikálních (z) osách rozměry oblasti v metrech. Vertikální osa je kolmá na rovinu rozhraní. V horní části každého obrázku ($z > 0$) je kladný index lomu $n = 1$ a ve spodní části ($z < 0$) je záporný index lomu $n = -1$ a $\mu = \varepsilon = -1$. Obrázky byly získány pomocí RF (radiofrequency) modulu programu COMSOL Multiphysics. (Výpočty provedl J. Zlámal).



Obr. 11 Materiál s $n = -1$ láme světelné paprsky na opačnou stranu od kolmice, než je tomu u běžných materiálů. Světlo, které vychází z bodového zdroje v předmětové rovině (pro $l < d$), je fokusováno uvnitř destičky a následně i v obrazové rovině. Obraz vzniká ve vzdálenosti $2d$ od objektu (upraveno dle [12]).

Zajímavá situace nastává v případě, kdy máme vrstvu se záporným indexem lomu umístěnou ve vakuu. Obr. 11 demonstruje případ dvojitého rozhraní, kdy je vnitřní vrtsva s indexem lomu $n = -1$ a $\mu = \varepsilon = -1$ obklopena vakuem. Veškerá energie destičkou prochází a žádná její část se neodráží zpět. Lze vidět, že paprsky vycházející z bodového zdroje v předmětové rovině jsou dvakrát lámány a fokusovány. Poprvé uvnitř destičky a podruhé v obrazové rovině. Poprvé detailně teoreticky popisuje tuto *superčočku* J. B. Pendry [13]. Tento fokusující prvek není čočkou v běžném slova smyslu, protože např. nefokusuje paprsky z nekonečna. Zatím se hledají možnosti realizace těchto superčoček.

Limitujícím faktorem realizace superčoček je jejich vlastní výroba. Je jednoduché provádět simulace a výpočty, ale samotné experimenty jsou velmi náročné. Pendry opět přišel s myšlenkou z roku 2006, že by metamateriály mohly lámat světlo kolem daného objektu a tím jej udělat pro lidské oko neviditelným. Mnoho vědců nyní pracuje na vývoji metamateriálových struktur, které by vykazovaly tyto požadované vlastnosti. Jak je vidět z dřívějších prací, realizace superčoček má významné praktické využití. „Vyrobit je je opravdu velmi jednoduché“, říká Pendry. „Je jen otázkou udělat to správně“ [15].

5 Závěr

V této bakalářské práci byly provedeny podrobné výpočty a byla věnována pozornost místům, kde v elektrodynamice a optice dochází k odlišnostem metamateriálů od běžných materiálů. Výpočty vyžadují v těchto místech zvýšenou obezřetnost.

Z Maxwellových rovnic pro lineární izotropní prostředí byl v první kapitole odvozen vztah pro index lomu $n^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)$. Detailně jsme poukázali na problematiku jeho odmocňování, které může vést k záporné hodnotě. Podstatné je, že záporný index lomu lze získat pouze pro určitou frekvenční oblast, ve které jsou permitivita ε a permeabilita μ současně záporné. Je to důsledek kauzality, z níž plynou Kramersovy-Kronigovy relace, které svazují reálné a imaginární části permitivity a permeability. Dále jsme studovali šíření energie v neohraničeném izotropním disperzním prostředí. Bylo detailně ukázáno, že v oblasti mimo rezonanci se grupová rychlost v_g rovná rychlosti šíření elektromagnetické energie v_E, která má opačný směr než rychlost fázová. Fresnelovy vztahy jsme podrobili kritice a jejich odvození jsme věnovali pozornost tak, aby výsledek byl platný pro kladný i záporný index lomu. Na závěr jsme se zabývali šířením energie tenkou vrstvičkou s $n = -1$ obklopenou vakuem. To by mohlo nalézt využití např. u tzv. superčoček [13], [15].

Materiály se záporným indexem lomu nám kladou otázku, do jaké míry lze v optice a oblastech aplikací převzít vztahy běžné elektrodynamiky. Lze pro všechny případy formálně nahradit $n \to -n$? Odpověď zní: nelze. Zatímco Snellův zákon se zachovává, Poyntingův vektor $\vec{S}$ je zde antiparalelní s vlnovým vektorem $\vec{k}$, což má za následek, že se grupová rychlost šíří v opačném směru než rychlost fázová.

Využití metamateriálů v celé oblasti frekvenčního spektra přináší do budoucna mnoho možností. Nicméně tato problematika vyžaduje ještě mnoho úsilí. Praktické aplikace budou požadovat nízkozrátové materiály, což je velká výzva pro materiálové designéry.

Dodatek A Kramersovy-Kronigovy relace a jejich důsledky

Odezva na podmět $F_{in}(t')$ v lineárním prostředí je dána vztahem

$$F_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') F_{in}(t'). \tag{A1}$$

Při interakci elektromagnetického záření s prostředím je podmětem $F_{in}(t')$ intenzita elektrického pole $\vec{E}$ (respektive intenzita magnetického pole $\vec{H}$) a odezvou $F_{out}(t)$ je elektrická indukce $\vec{D}$ (respektive magnetická indukce $\vec{B}$).

Vzhledem ke *kauzalitě* pro odezvovou funkci platí:

$$g(t-t') = 0 \text{ pro } t' > t. \tag{A2}$$

Tato podmínka zásadním způsobem určuje chování permeability a permitivity: platí pro ně Kramersovy-Kronigovy relace [6], které se odvozují pomocí teorie komplexních funkcí.

Fourierovou transformací (A1) dostaneme

$$F_{out}(\omega) = G(\omega) F_{in}(\omega), \tag{A3}$$

kde $F_{out}(\omega)$, $F_{in}(\omega)$ jsou pořadě Fourierovy obrazy $F_{out}(t)$, $F_{in}(t')$ a $G(\omega)$ je Fourierova transformace odezvové funkce,

$$G(\omega) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\,\tau\, G(\tau) \exp(i\omega t).$$

V elektromagnetismu je Fourierova transformace odezvové funkce $G(\omega)$ permitivita $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + \mathrm{i}\,\varepsilon''(\omega)$ a permeabilita $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + \mathrm{i}\,\mu''(\omega)$, kde $\varepsilon'(\omega) = \Re e(\varepsilon(\omega))$, $\varepsilon''(\omega) = \Im m(\varepsilon(\omega))$, $\mu'(\omega) = \Re e(\mu(\omega))$, $\mu''(\omega) = \Im m(\mu(\omega))$. Reálné a imaginární části permitivity $\varepsilon(\omega)$ a permeability $\mu(\omega)$ jsou svázány Kramersovými-Kronigovými relacemi

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega)}{x-\omega} \mathrm{d}x, \tag{A4a}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega) - 1}{x-\omega} \mathrm{d}x, \tag{A4b}$$

$$\mu'(\omega)-1=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu''(\omega)}{x-\omega}\mathrm{d}x\,, \tag{A5a}$$

$$\mu''(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'(\omega)-1}{x-\omega}\mathrm{d}x\,, \tag{A5b}$$

kde P vyjadřuje hlavní hodnotu integrálu.

Ve frekvenční oblasti, kde je *slabá absorpce*, vychází z Kramersových-Kronigových relací podstatné nerovnosti [6, s. 281]

$$\frac{d}{d\omega}(\varepsilon(\omega)\omega)>0\ , \tag{A6a}$$

$$\frac{d}{d\omega}(\mu(\omega)\omega)>0\,. \tag{A6b}$$

Tyto nerovnosti jsou důležité pro diskusi střední hodnoty hustoty energie $\langle u_\omega \rangle$ (viz odst. 3.5).

S užitím (A6a,b) také dokážeme, že

a) pro $\varepsilon(\omega)>0$, $\mu(\omega)>0$ je $n\,n_g>0$,
b) pro $\varepsilon(\omega)<0$, $\mu(\omega)<0$ je $n\,n_g<0$.

Důkaz:

Nerovnici (A6a) vynásobíme μ a nerovnici (A6b) vynásobíme ε a obě nerovnosti sečteme. Pro $\varepsilon>0$ a $\mu>0$ dostaneme

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\varepsilon\omega)=\omega\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}+\varepsilon\mu>0\,, \tag{A7a}$$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\mu\omega)=\omega\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\omega}+\varepsilon\mu>0\,, \tag{A7b}$$

zatímco pro $\varepsilon<0$ a $\mu<0$ dostaneme

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\varepsilon\omega)=\omega\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}+\varepsilon\mu<0\,, \tag{A8a}$$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\mu\omega)=\omega\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\omega}+\varepsilon\mu<0\,. \tag{A8b}$$

Rovnice (A7a) a (A7b), resp. rovnice (A8a) a (A8b) sečteme a po úpravách dostaneme

$$\omega\left(\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}+\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)+2\varepsilon\mu=\omega\frac{\partial n^2}{\partial\omega}+2n^2=n\left(\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}+n\right)=n\,n_g\begin{cases}>0\\<0\end{cases}, \qquad \text{(A9)}$$

kde horní nerovnost platí pro $\varepsilon > 0$ a $\mu > 0$ (kdy i $n > 0$) a spodní nerovnost platí pro $\varepsilon < 0$ a $\mu < 0$ (kdy i $n < 0$). Z relace (A9) také plyne, že n_g je vždy kladné. Zdůrazněme, že výše uvedené vztahy byly odvozeny pro slabou absorpci, mimo oblast rezonance.

Dodatek B Permitivita a permeabilita metamateriálů

Permitivita $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+\mathrm{i}\varepsilon''(\omega)$ a permeabilita $\mu(\omega)=\mu'(\omega)+\mathrm{i}\mu''(\omega)$ charakterizují elektrické a magnetické vlastnosti materiálů. Jejich imaginární části $\varepsilon''(\omega)$ a $\mu''(\omega)$ popisují ztráty v prostředí a jsou vždy kladné; jinak by při průchodu elektromagnetické vlny materiálem došlo k jejímu zesílení, což je možné např. u laseru. Reálné části permitivitty $\varepsilon'(\omega)$ a permeability $\mu'(\omega)$ mohou být kladné i záporné. Dvojice $\varepsilon'(\omega)$, $\varepsilon''(\omega)$ a $\mu'(\omega)$, $\mu''(\omega)$ jsou svázány Kramersovými-Kronigovými relacemi, které plynou z kauzality.

U běžně se vyskytujících materiálů nelze dosáhnout ve viditelné frekvenční oblasti současně záporné reálné části permitivity a permeability. Materiály, které vykazují zápornou *permitivitu* ve frekvenční oblasti viditelného spektra, jsou např. kovy (stříbro, hliník), jejichž komplexní permitivitu lze vyjádřit z *Drudeho modelu* [14, s. 293].

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+\mathrm{i}\varepsilon''(\omega)=1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\gamma)}, \tag{B1}$$

kde

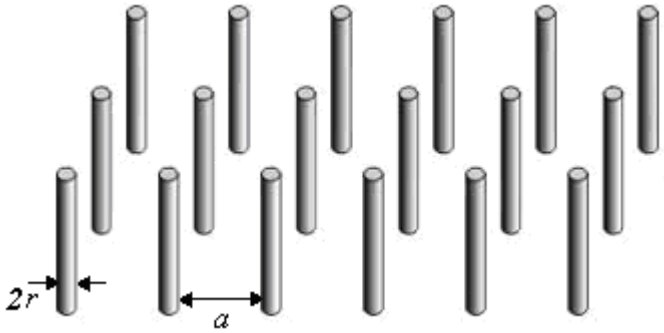
$$\omega_\mathrm{p}^2=\frac{ne^2}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0} \tag{B2}$$

je plasmová frekvence, $n\approx 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$ je koncentrace elektronů, m_e je hmotnost elektronu a $\gamma\approx 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$ je tlumení.

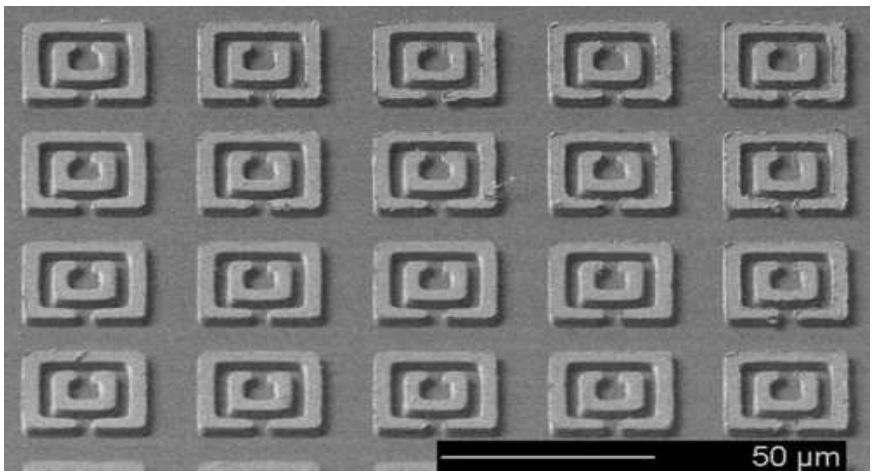
Materiály, které by ve stejné frekvenční oblasti měly permitivitu a permeabilitu současně zápornou, lze uměle vyrobit. Základními stavebními kameny těchto *metamateriálů* nejsou atomy, ale útvary jako jsou tenké kovové tyčinky a mikrorezonátory (obr. 12, 13). Metamateriál lze považovat za kontinuum, a tedy jej lze popisovat pomocí efektivní permitivity a efektivní permeability, v případě záření s vlnovými délkami $\lambda >> a$, kde a je rozměr základní buňky metamateriálů (vzdálenosti drátků nebo rozměr mikrorezonátorů). Nejprve byly zkonstruovány metamateriály pro oblasti mikrovln a v současné době se pomocí nanotechnologií začínají vyrábět metamateriály pro oblasti infračerveného až viditelného záření [4], [5].

Jako příklad prostředí se záporným indexem lomu uvedeme materiál, který zkonstruoval v roce 2000 David R. Smith pomocí kombinace pole drátků (se zápornou permitivitou) spolu s polem štěrbinových rezonátorů (se zápornou permeabilitou), viz obr. 14. Metamateriál se zápornou efektivní permitivitou, již lze vyjádřit pomocí *Drudeho modelu*, je vytvořen ze stejných periodicky uspořádaných kovových drátků (viz obr. 12). V tomto případě je ve výrazu pro plasmovou frekvenci (B2) koncentrace elektronů nahrazena efektivní elektronovou koncentrací

$$n_\mathrm{ef}=n\frac{r^2\pi}{a^2}, \tag{B4}$$



Obr. 12 Materiál se zápornou permitivitou: systém periodicky uspořádaných hliníkových drátků [10, s. 213].



Obr. 13 Materiál se zápornou permeabilitou: systém štěrbinových rezonátorů [3].

a) **b)**

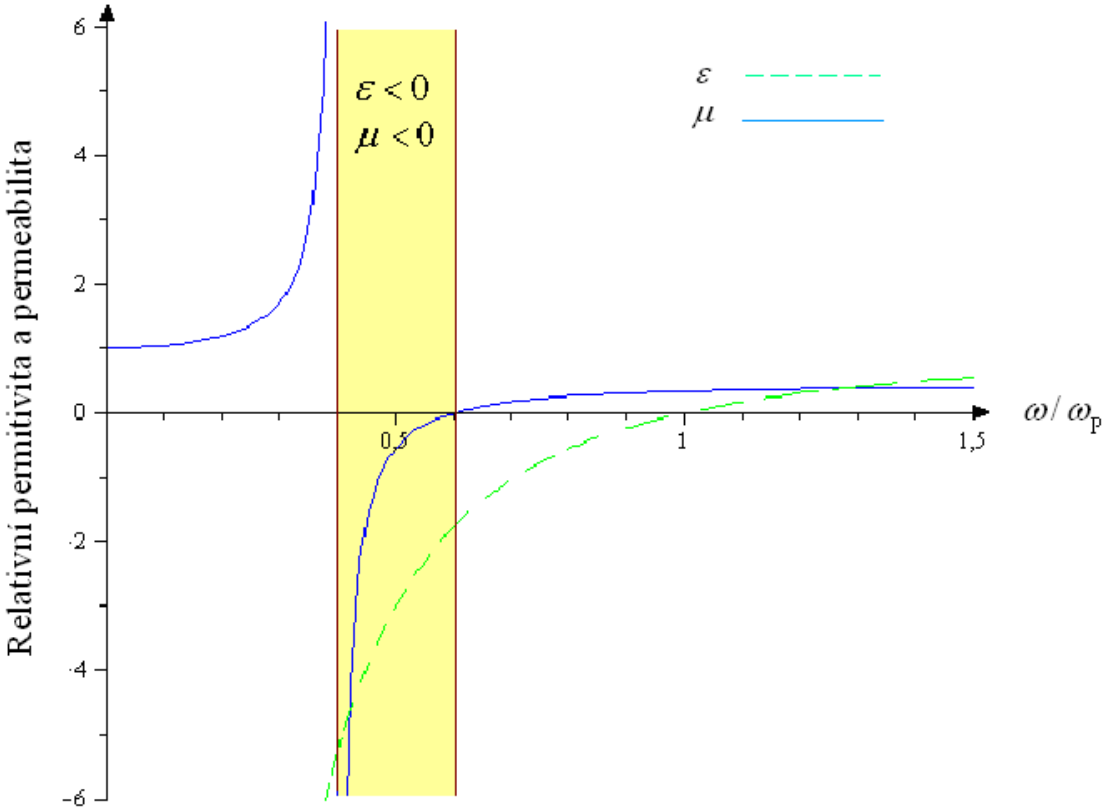
Obr. 14 a) Struktura metamateriálu zkonstruovaného z pole drátků a štěrbinových rezonátorů [3]. **b)** Struktura štěrbinových rezonátorů v měděném obvodu spojená s měděnými drátky vykazující současně zápornou permitivitu a permeabilitu. Struktura má na výšku 1 cm [12].

kde r je poloměr drátku a a je rozměr buňky, a hmotnost elektronu je nahrazena efektivní hmotností m_{ef}, která je určena vlastní indukčnosti tyčinky. Frekvenční závislost efektivní permitivity takového materiálu je na obr. 15. Pro hliníkové drátky s $r = 1\,\mu\text{m}$ a $a = 1\,\text{mm}$ leží „efektivní“ plasmová frekvence v oblasti mikrovln $\left(10^0\ \text{GHz}\right)$. Tato oblast je zajímavá proto, že pro ni lze z mikrorezonátorů o rozměrech řádově v desítkách mikrometrů vytvořit metamateriál se zápornou permeabilitou.

Vyrobit prostředí se zápornou *permeabilitou* μ je mnohem náročnější. První návrh pochází od J. Pendryho z roku 1999 [12]. Materiály se zápornou permeabilitou μ zahrnují feromagnetické systémy opakujících štěrbinových rezonátorů, viz obr. 13. Permeabilitu takového materiálu lze popsat *Lorenzovým modelem*

$$\mu_{\text{ef}}(\omega) = \mu'_{\text{ef}}(\omega) + \text{i}\mu''_{\text{ef}}(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + \text{i}\omega\Gamma}, \tag{B3}$$

kde F vyjadřující stupeň zaplnění buňky materiálem je analogií síly oscilátoru, ω_0 je resonanční frekvence v oblasti mikrovln, a Γ je tlumení. Frekvenční závislost efektivní permeability takového materiálu je na obr. 15.



Obr. 15 Frekvenční závislost efektivní permitivity a permeability metamateriálu. Permitivita je popsána *Drudeho modelem* (B1) s plasmovou frekvencí ω_p a permeabilita *Lorenzovým modelem* (B3), kde resonanční frekvence $\omega_0 = 0{,}4\omega_p$ a síla oscilátoru $F = 0{,}56$. Barevně je vyznačena oblast, kde jsou permitivita a permeabilita současně záporné.

Literatura

[1] Ramakrishna S. A.: Physics of negative refractive index materials. *Rep. Prog. Phys*. **68** (2005) 449.

[2] Veselago V. G.: The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ. *Sov. Phys. Usp.* **10** (1968) 509.

[3] Pendry J. B., Smith D. R.: Reversing light with negative refraction. *Phys. Today*, June 2004, 37.

[4] Shalaev V. M.: Optical negative-index metamaterials. *Nature Photonics* **1** (2007) 41.

[5] Lezec H. J. et al.: Negative refraction at visible frequencies. *Science* **316** (2007) 430.

[6] Landau L. D., Lifšic J. M, Pitajevskij L.P.: *Electrodynamics of Continuous Media* (2nd ed.), Butterworth-Heinemann, 2000.

[7] Ramakrishna S. A., Martin O. J. F.: Resolving the wave vector in negative refractive index media. *Optics Letters* **30** (2005) 2626.

[8] Shelby R.A., Smith D. R., Schultz S.: Experimental verification of a negative index of refraction. *Science* **292** (2001) 77.

[9] Kvasnica J.: *Teorie elektromagnetického pole*, Academia, Praha 1985.

[10] Milonni P. W.: *Fast light, Slow Light and Left Handed Light* (Series in Optics and Optoelectronics), IOP Publ., Bristol-Philadelphia 2005.

[11] Jackson J.D.: *Classical Electrodynamics*, (3rd ed.), J. Wiley, 1999.

[12] Pendry J. B.: Negative refraction. *Contem. Phys*. **45** (2004) 191.

[13] Pendry J. B.: Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Phys. Rev. Lett*. **85** (2000) 3966.

[14] Kittel Ch.: *Úvod do Fyziky pevných látek*, Academica, Praha, 1985.

[15] Brumfield G.: Ideal focus. *Nature* **459** (2009) 504.