

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# NAVIER-STOKESOVA ROVNICE - ŘEŠENÍ LAMINÁRNÍHO PROUDĚNÍ

NAVIER-STOKES EQUATION - THE LAMINAR FLOW SOLUTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

HANA KRAUSOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. SIMONA FIALOVÁ, Ph.D.



**LICENČNÍ SMLOUVA**  
**POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO**  
uzavřená mezi smluvními stranami:

**1. Paní**

Jméno a příjmení: Hana Krausová  
Bytem: Gen.Svobody 1221, 78391, Uničov  
Narozena (datum a místo): 3. 4. 1987, Šternberk

(dále jen autor)

a

**2. Vysoké učení technické v Brně**

Fakulta strojního inženýrství  
se sídlem Technická 2896/2, 61669, Brno - Královo Pole  
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:  
doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.

(dále jen nabyvatel)

**Čl. 1**

**Specifikace školního díla**

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- disertační práce
- diplomová práce
- bakalářská práce
- jiná práce, jejíž druh je specifikován jako .....

(dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: Navier-Stokesova rovnice - řešení laminárního proudění  
Vedoucí/ školitel VŠKP: Ing. Simona Fialová, Ph.D.  
Ústav: Ústav matematiky  
Datum obhajoby VŠKP: 23. 6. 2009

VŠKP odevzdal autor nabyvateli v<sup>1</sup>:

- tištěné formě — počet exemplářů 2
- elektronické formě — počet exemplářů 1

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.
3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.
4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

---

<sup>1</sup>hodící se zaškrtněte

## Čl. 2 Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
  - ihned po uzavření této smlouvy
  - 1 rok po uzavření této smlouvy
  - 3 roky po uzavření této smlouvy
  - 5 let po uzavření této smlouvy
  - 10 let po uzavření této smlouvy(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením §47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

## Čl. 3 Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne:

Nabyvatel

Autor

### **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá řešením Navier-Stokesových rovnic pro ideální, nestlačitelnou kapalinu. Výsledkem této práce je nalezení řešení pro rychlostní funkci ve tvaru funkční řady pomocí vlastních tvarů kmitu. Řešení bylo použito pro animaci vytvořenou pomocí softwaru Maple.

### **Summary**

This bachelor's thesis is concerned with the Navier-Stokes equations solution for ideal, incompressible liquid. The result of this thesis is finding the solution for the speed function in the form of the function series using oscillation eigen values. The solution was used for animation created in Maple software .

### **Klíčová slova**

Navier-Stokesova rovnice, kapalina, vlastní tvary kmitu

### **Keywords**

Navier-Stokes equations, liquid, oscillation eigen values

KRAUSOVÁ, H. *Navier-Stokesova rovnice - řešení laminárního proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 35 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Navier-Stokesova rovnice - řešení laminárního proudění* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Simony Fialové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Hana Krausová

Děkuji své školitelce Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, mnohé tipy, rady a nápady, které pomohly ke zlepšení obsahové stránky této práce.

Hana Krausová





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>11</b>
2.1	Einsteinova sumační symbolika (ESS) . . . . .	11
2.2	Laplaceova transformace . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Řešení laminárního 2D proudění v trubici</b>	<b>15</b>
3.1	Navier-Stokesova rovnice . . . . .	15
3.2	Odhad vlastní hodnoty . . . . .	18
3.3	Ortogonalita vlastních tvarů rychlosti . . . . .	19
3.4	Určení vztahu pro rychlostní funkci . . . . .	20
3.5	Vyřešení definovaného problému . . . . .	23
3.6	Grafické vyhodnocení . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>35</b>



# 1 Úvod

Navier-Stokesova rovnice popisuje laminární proudění nestlačitelné tekutiny. V podstatě se jedná o zákon zachování hybnosti v proudící kapalině. Klasifikací patří mezi nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Analyticky je řešitelná pouze v několika málo případech. Existuje mnoho jejích metod řešení - např. metoda konečných objemů, tlakových korekcí či spektrálních prvků.

Tato bakalářská práce se zabývá řešením Navier-Stokesovy rovnice pomocí rozvoje vlastních tvarů kmitu. Tato metoda výpočtů byla zvolena proto, že daný problém nebyl v žádné literatuře takto celkově řešen. Uvažujeme zde laminární proudění nestlačitelné (tedy ideální) kapaliny, u které zanedbáváme působení objemových sil, protože je velmi malé. V průběhu řešení je určen odhad vlastní hodnoty, který je nezbytný pro následující postup řešení. Dalším důležitým krokem je porovnání dvou členů vlastních tvarů rychlosti, z čehož získáme poznatek o ortogonalitě vlastních vektorů. Těchto vlastností je využito k určení vztahu pro rychlostní funkci, kterou hledáme ve tvaru funkční řady.

## 2 Základní pojmy

### 2.1 Einsteinova sumační symbolika (ESS)

ESS umožňuje matematický zápis pro vektorový a maticový počet pomocí indexů.

Každý *vektor* představuje N-tici čísel

$$\mathbf{a} = \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N),$$

kteřou lze popsat pomocí ESS jako  $a_i$  pro  $i = 1, \dots, N$ .

*Matici*, která má  $i$  sloupců a  $j$  řádků

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

lze zjednodušeně zapsat jako  $a_{ij}$ .

Při popisu matematických operací se v ESS využívá dvou speciálních symbolů  $\delta_{ij}$  a  $\varepsilon_{ijk}$ .

**Kroneckerovo delta**  $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Z tohoto zápisu vyplývá, že Kroneckerovo delta může být reprezentováno jednotkovou maticí

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1j} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Levi-Civítův tenzor**  $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{sudá permutace indexů } (ijk, jki, kji) \\ -1, & \text{lichá permutace indexů } (kji, jik, ikj) \\ 0, & \text{pro dva stejné indexy } (i = j, i = k, j = k) \end{cases}.$$

Několik příkladů použití ESS:

- skalární součin  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$   
např.:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

- vektorový součin  
 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = (\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$   
 např.:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
- součin matice  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  a vektoru  $\mathbf{b}$   
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = a_{ij} b_j$
- násobení matic  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ ,  $\mathbf{B} = \{b_{kj}\}$   
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\}_{ij} = a_{ik} b_{kj}$
- Hamiltonův nabla operátor  $\nabla$   
 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$   
 např.:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$
- Laplaceův delta operátor  $\Delta$   
 $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$   
 např.:  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$
- divergence vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$   
 $\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$   
 např.:  $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$
- rotace vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$   
 $(\text{rot } \mathbf{a})_i = \nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$   
 např.:  $\nabla \times \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right)$
- gradient skalární veličiny  $a$   
 $\overrightarrow{\text{grad}} a = \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_i}$   
 např.:  $\overrightarrow{\text{grad}} a = \left( \frac{\partial a}{\partial x_1}, \frac{\partial a}{\partial x_2}, \frac{\partial a}{\partial x_3} \right)$

## 2.2 Laplaceova transformace

V roce 1737 švýcarský matematik *Leonhard Paul Euler* (1707-1783) použil tuto transformaci při řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Avšak roku 1812 *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827), francouzský matematik, rozvinul jeho myšlenky a zavedl Laplaceovu transformaci. Na počátku 20. století britský matematik *Oliver Heaviside* (1850-1925) vyvinul operační kalkulus pro tuto transformační metodu a umožnil jednoduché řešení diferenciálních rovnic v teorii řízení.

**Laplaceova transformace** patří do skupiny integrálních transformací a je základním matematickým nástrojem pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

**Definice 1.** Nechť  $f = f(t)$  je funkce definovaná alespoň na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$ , pak *Laplaceovou transformací* funkce  $f(t)$  nazýváme funkci  $F(s)$  definovanou vztahem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-st) dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Za předpokladu, že příslušný nevládní integrál konverguje pro alespoň jedno  $s \in \mathbb{R}$ . Z intuitivního pohledu to znamená, že  $f(t)$  nesmí růst „příliš rychle“, tzn. rychleji než  $\exp(-st)$ .

Laplaceova transformace se označuje různě:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) \text{ nebo stručně } \mathcal{L}\{f\} = F(s).$$

Důležitou vlastností Laplaceovy transformace je *linearita*:

- Existuje-li  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  a  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , pak také existuje Laplaceova transformace jejich lineární kombinace a platí

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f(t) + c_2 \cdot g(t)\} = c_1 \cdot F(s) + c_2 \cdot G(s),$$

příčemž  $c_1, c_2$  jsou libovolné konstanty.

- Obdobně pro inverzní Laplaceovu transformaci  $\mathcal{L}^{-1}$ .

Při řešení je nezbytné znát Laplaceův obraz derivované funkce  $f(t)$ .

**Věta 1 (Obraz derivace).** *Nechť funkce  $f(t)$  je spojitá na otevřeném intervalu  $(0, \infty)$  a nechť pro všechny její derivace existují Laplaceovy obrazy. Označme  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ . Pak pro  $s > 0$  platí*

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Významným nástrojem pro výpočet inverzní Laplaceovy transformace je tzv. **konvoluce**.

**Definice 2.** Necht'  $f(t), g(t)$  jsou funkce definované na  $\langle 0, \infty \rangle$ . *Konvolucí* funkcí  $f, g$  nazýváme funkci  $f * g$  definovanou vztahem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

**Věta 2 (Obraz konvoluce).** *Je-li  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , pak*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s).$$

Význam konvoluční věty spočívá především ve výpočtu inverzní Laplaceovy transformace ze součinu Laplaceových obrazů

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t).$$

# 3 Řešení laminárního 2D proudění v trubici

K řešení tohoto proudění použijeme rozvoj podle vlastních tvarů rychlosti a tlaku.

## 3.1 Navier-Stokesova rovnice

Navier-Stokesova rovnice je matematickým vyjádřením zákona zachování hybnosti v proudící tekutině. Jedná se o diferenciální rovnici popisující laminární proudění nestlačitelné Newtonské tekutiny, kterou v 19. století odvodili *Claude Louis Marie Henri Navier* (1785-1836) a jeho žák *George Gabriel Stokes* (1819-1903).

Mějme obecný vektorový tvar Navier-Stokesovy rovnice (pro stlačitelnou tekutinu)

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \vec{c} - \nu \Delta \vec{c} - \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{c}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{A}, \quad (1)$$

pak z jednotek veličin lze vypozorovat, že každý člen má povahu zrychlení

$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}$	lokální zrychlení,
$\vec{c} \cdot \nabla \vec{c}$	konvektivní zrychlení,
$\nu \Delta \vec{c}$	zrychlení potřebné k překonání viskózního tření tekutiny,
$\frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{c})$	zrychlení od sil překonávajících stlačení,
$\frac{1}{\rho} \nabla p$	zrychlení způsobené tlakovými silami,
$\vec{A}$	vnější objemové zrychlení.

Protože budeme uvažovat nestlačitelnou kapalinu ( $\nabla \cdot \vec{c} = 0$ ), u které budeme zanedbávat působení objemových sil ( $\vec{A} = \vec{0}$ ), rovnice (1) se zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \vec{c} - \nu \Delta \vec{c} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (2)$$

Při použití Einsteinovy sumační symboliky lze upravenou Navier-Stokesovu rovnici (2) zapsat jako

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + c_i \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_i} - \nu \cdot \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

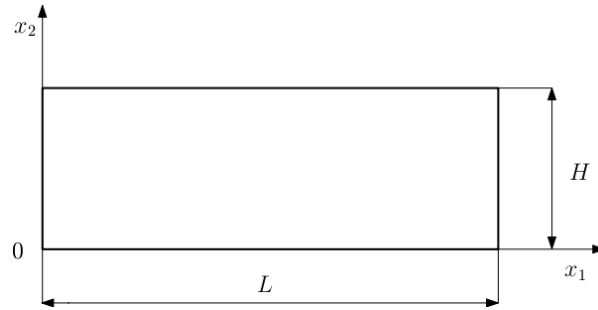
pro  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, i, \dots, n$ , kde  $n$  je dimenze prostoru.

Využitím rovnice kontinuity  $\frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0$  a vynásobením celé rovnice (3) hustotou  $\rho$  získáme následující vyjádření

$$\rho \cdot \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \cdot \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$



Nyní se budeme zabývat pouze trubicí o délce  $L$  a šířce  $H$  v souřadném systému  $x_1, x_2$ .



Obrázek 1: Rovinná trubice

V trubici se kapalina šíří laminárně, což znamená, že její částice se po průřezu nepohybují, proto rychlost ve směru osy  $x_2$  je nulová ( $c_2 = 0$ ), a rychlost ve směru osy  $x_1$  je závislá pouze na poloze v ose  $x_2$  a na čase  $t$

$$c_1 = c_1(x_2, t). \quad (4)$$

Dále uvažujeme, že se jedná o nestlačitelnou kapalinu

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, t), \quad (5)$$

a že rovnice kontinuity má tvar

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = 0.$$

Obdržíme tedy diferenciální rovnici druhého řádu

$$\rho \cdot \frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad (6)$$

doplněnou o okrajové podmínky popisující tlaky na koncích trubice a nepropustnost jejích stěn

$$\begin{aligned} x_1 = 0 : \quad & p(0, t) = p_1(t), \\ x_1 = L : \quad & p(L, t) = p_2(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_2 = 0 : \quad & w_1(0, t) = 0, \\ x_2 = H : \quad & w_1(H, t) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

přičemž  $w_1$  je rychlost na stěně trubice.

K řešení diferenciálních rovnic jsou nutné i počáteční podmínky, které se zpravidla udávají pro nulový čas

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad & p(x_1, 0) = \varphi(x_1, 0), \\ & c_1(x_2, 0) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

kde  $\varphi$  je blíže neurčená funkce závislá na poloze v ose  $x_1$  a na čase  $t$ .

Z rovnice (6) určíme tlak za předpokladů (4) a (5)

$$\rho \cdot \frac{\partial c_1}{\partial t} - \mu \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}. \quad (10)$$

Levá strana této rovnice je funkcí  $x_2, t$ , ale pravá strana závisí na  $x_1, t$ . Obě strany jsou tedy časově závislé. Po vydělení rovnice (10) hustotou  $\rho$  získáme tyto dva vztahy

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \nu \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} = h(t), \quad (11)$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} = h(t). \quad (12)$$

Zintegrováním rovnice (12) obdržíme vyjádření tlaku

$$p(x_1, t) = -\rho \cdot h(t) \cdot x_1 + K(t), \quad (13)$$

kde  $K(t)$  je integrační konstanta, kterou zjistíme po dosazení okrajových podmínek (7)

$$\begin{aligned} p(0, t) &= -\rho \cdot h(t) \cdot 0 + K(t) = p_1(t) \\ \Rightarrow K(t) &= p_1(t). \end{aligned}$$

Využitím druhé okrajové podmínky (7) získáme vztah pro  $h(t)$

$$\begin{aligned} p(L, t) &= -\rho \cdot h(t) \cdot L + p_1(t) = p_2(t) \\ \Rightarrow h(t) &= \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}. \end{aligned} \quad (14)$$

Tlaková funkce (13) tedy bude mít tvar

$$p(x_1, t) = p_1(t) - \frac{p_1(t) - p_2(t)}{L} \cdot x_1.$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že tlak bude lineárně závislý na  $x_1$ .

Dosadíme-li vztah (14) do (11), obdržíme diferenciální rovnici pro složku rychlosti  $c_1$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \nu \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}. \quad (15)$$

Z homogenní části této rovnice vyplývá, že pro složku rychlosti platí

$$c_1 = \exp(zt) \cdot w(x_2),$$

kde  $z$  je vlastní hodnota.

Použitím tohoto vyjádření v rovnici (15) získáme rovnici

$$zw \cdot \exp(zt) - \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot \exp(zt) = 0.$$

V obou členech se vyskytuje exponenciální funkce  $\exp(zt)$ , kterou můžeme tuto rovnici vydělit, protože tato funkce nikdy nenabývá nulové hodnoty. Obdržíme tedy diferenciální rovnici

$$zw - \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \quad (16)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} x_2 = 0 : \quad w &= 0, \\ x_2 = H : \quad w &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Řešením této diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami získáme vlastní tvary rychlosti, které nám pomohou při řešení rovnice (15).

## 3.2 Odhad vlastní hodnoty

Rovnici (16) skalárně vynásobíme komplexně sdruženou rychlostní funkcí  $w^*$

$$zw \cdot w^* = \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot w^*.$$

Nyní tuto rovnici zintegrujeme přes hranice trubice

$$z \int_0^H w \cdot w^* dx_2 = \nu \int_0^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot w^* dx_2. \quad (18)$$

Integrál na pravé straně upravíme použitím integrační metody per-partes

$$\int_0^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot w^* dx_2 = \left| \begin{array}{l} v' = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad v = \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ u = w^* \quad u' = \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \end{array} \right| = \left[ \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot w^* \right]_0^H - \int_0^H \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} dx_2. \quad (19)$$

Jestliže využijeme okrajových podmínek, které říkají, že rychlostní funkce  $w$  je na okrajích trubice nulová, tudíž i její komplexně sdružená rychlostní funkce  $w^*$  je zde nulová, pak rovnice (19) přejde do tvaru

$$\int_0^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot w^* dx_2 = - \int_0^H \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} dx_2. \quad (20)$$

Vyjádření integrálu z rovnice (20) dosadíme do (18)

$$z \int_0^H w \cdot w^* dx_2 = -\nu \int_0^H \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} dx_2$$

a odtud obdržíme vyjádření pro vlastní číslo  $z$

$$z = -\nu \cdot \frac{\int_0^H \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} dx_2}{\int_0^H w \cdot w^* dx_2} = -\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (21)$$

Výsledkem násobení funkce funkcí komplexně sdruženou je reálné číslo. Využitím této vlastnosti komplexních čísel zjišťujeme, že  $z$  nabývá záporných reálných hodnot.

### 3.3 Ortogonalita vlastních tvarů rychlosti

Porovnejme vlastní hodnoty  $k$ -tého a  $l$ -tého členu vlastních tvarů rychlosti. Vyjdeme z diferenciální rovnice (16)

$$z_k w_k - \nu \cdot \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_2^2} = 0, \quad (22)$$

$$\lambda_l w_l^* - \nu \cdot \frac{\partial^2 w_l^*}{\partial x_2^2} = 0, \quad (23)$$

kde  $k, l = 1, 2, \dots, n$ .

Rovnici (22) skalárně vynásobíme rychlostní funkcí  $w_l^*$  a vyjádření (23) funkcí  $w_k$

$$z_k w_k \cdot w_l^* - \nu \cdot \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_2^2} \cdot w_l^* = 0,$$

$$\lambda_l w_l^* \cdot w_k - \nu \cdot \frac{\partial^2 w_l^*}{\partial x_2^2} \cdot w_k = 0.$$

Zintegrováním a využitím úprav (19) a (20) získáme

$$z_k \int_0^H w_k w_l^* dx_2 - \nu \int_0^H \frac{\partial w_k}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_l^*}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

$$\lambda_l \int_0^H w_l^* w_k dx_2 - \nu \int_0^H \frac{\partial w_l^*}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_k}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Tyto dvě rovnice od sebe odečteme a obdržíme

$$(z_k - \lambda_l) \int_0^H w_k w_l^* dx_2 = 0. \quad (24)$$

Součin dvou výrazů je roven nule, pokud jeden či druhý je nulový. Řešení se tedy rozdělí na dvě varianty:

- Pokud  $k = l$ , potom z rovnice (24) vyplývá

$$\lambda_k = z_k \quad \text{pro } k = l.$$

- Jestliže  $k \neq l$  a tedy  $z_k \neq \lambda_l$ , pak podle (24) platí vztah

$$\int_0^H w_k w_l^* dx_2 = 0 \quad \text{pro } k \neq l. \quad (25)$$

Lze tedy usoudit, že vlastní vektory  $w_k$  a  $w_l^*$  jsou *ortogonální*. Z dřívějšího poznatku víme, že vlastní hodnoty jsou záporná reálná čísla a kinematická viskozita je kladné reálné číslo, proto i vlastní vektory  $w_k$  a  $w_l^*$  musí být reálné funkce. Tento závěr potvrzuje i rovnice (25).

### 3.4 Určení vztahu pro rychlostní funkci

Nyní řešíme homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu (16) s okrajovými podmínkami (17). Charakteristická rovnice příslušná k rovnici (16) má tvar

$$z - \nu\lambda^2 = 0.$$

Řešením této charakteristické rovnice jsou dva reálné různé kořeny

$$\lambda^2 = \frac{z}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{z}{\nu}}.$$

Získáme tedy fundamentální systém řešení

$$w_1 = \exp\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right), \quad w_2 = \exp\left(-\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right).$$

Obecné řešení obdržíme ve tvaru

$$w = C_1 \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) + C_2 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}. \quad (26)$$

Exponenciální funkci lze zapsat pomocí funkcí hyperbolických jako

$$\exp x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2} + \frac{\exp x - \exp(-x)}{2} = \cosh x + \sinh x,$$

přičemž  $\cosh x$  je sudá funkce [ $\cosh(-x) = \cosh x$ ] a  $\sinh x$  je lichá funkce [ $\sinh(-x) = -\sinh x$ ].

Těchto vlastností využijeme při úpravě obecného řešení (26)

$$\begin{aligned} w &= C_1 \cdot \left[ \cosh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) + \sinh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) \right] + \\ &+ C_2 \cdot \left[ \cosh\left(-\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) + \sinh\left(-\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) \right] = \\ &= \cosh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) \cdot (C_1 + C_2) + \sinh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) \cdot (C_1 - C_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Označme  $A = C_1 + C_2$  a  $B = C_1 - C_2$ , pak získáme vyjádření obecného řešení rovnice (16) ve tvaru

$$w = A \sinh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right) + B \cosh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right), \quad A, B \in \mathbb{C}. \quad (28)$$

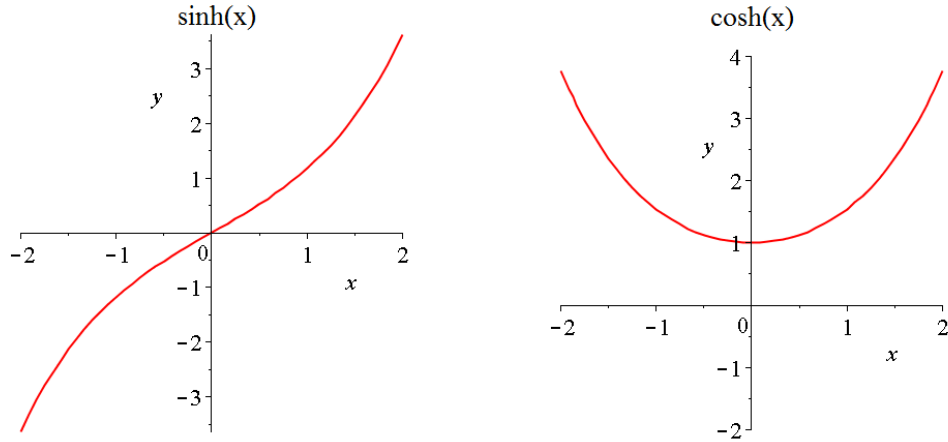
Konstanty  $A, B$  určíme dosazením okrajových podmínek (17) do právě získaného vztahu (28)

$$x_2 = 0 : \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = B = 0, \quad (29a)$$

$$x_2 = H : \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = A \sinh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} H\right) = 0,$$

$$A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sinh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} H\right) = 0. \quad (29b)$$

### 3.4 URČENÍ VZTAHU PRO RYCHLOSTNÍ FUNKCI



Obrázek 2: Grafy funkcí  $\sinh(x)$  a  $\cosh(x)$

S použitím podmínky (29a) obdržíme vyjádření rychlostní funkce  $w$

$$w = A \sinh\left(\sqrt{\frac{z}{\nu}} x_2\right). \quad (30)$$

Dosadíme-li vztah (21) do podmínky (29b), pak lze psát

$$\sinh\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} H\right) = 0, \quad \text{kde } i \text{ je imaginární jednotka.} \quad (31)$$

Nyní zde využijeme vztahu mezi funkcemi sinus a hyperbolický sinus

$$\sin(ix) = i \sinh x. \quad (32)$$

Víme, že funkce sinus je lichá [ $\sin(-x) = -\sin(x)$ ] a pro imaginární jednotku platí  $i^2 = -1$ . Zavedeme-li substituci  $x = iy$  a využijeme-li uvedených znalostí, pak vztah (32) přejde na rovnost

$$-\sin y = i \sinh(iy). \quad (33)$$

Úpravou imaginární jednotky v (33)

$$-\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{i}{i^2} = i$$

získáme vztah

$$\sinh(iy) = i \sin y. \quad (34)$$

Využitím rovnosti (34) v (31) a úpravami obdržíme vyjádření pro  $\alpha$

$$\begin{aligned} \sinh\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} H\right) &= i \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} H\right) = 0, \\ \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} H\right) &= 0, \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} H &= k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}, \\ \alpha &= \nu \cdot \left(\frac{k\pi}{H}\right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

### 3.4 URČENÍ VZTAHU PRO RYCHLOSTNÍ FUNKCI

Použitím vztahu (35) v (21) získáme výraz pro  $k$ -tou vlastní hodnotu

$$z_k = -\alpha = -\nu \cdot \left( \frac{k\pi}{H} \right)^2. \quad (36)$$

Dosazením (36) do (30) a využitím (34) lze určit vyjádření pro  $k$ -tou složku rychlostní funkce  $w$

$$\begin{aligned} w_k &= A_k \sinh \left( \sqrt{\frac{z_k}{\nu}} x_2 \right) \\ \Rightarrow w_k &= A_k \sinh \left( i \frac{k\pi}{H} x_2 \right) \\ \Rightarrow w_k &= i A_k \sin \left( \frac{k\pi}{H} x_2 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Získali jsme tedy výraz (37), ve kterém vystupuje konstanta  $A_k$ . Tu určíme tak, aby platila rovnost

$$\int_0^H w_k w_k^* dx_2 = 1. \quad (38)$$

Dosadíme-li do (38) za rychlostní funkce podle rovnice (37), pak tato rovnost přejde na tvar

$$\int_0^H A_k A_k^* \sin^2 \left( \frac{k\pi}{H} x_2 \right) dx_2 = 1.$$

Součin komplexního a komplexně sdruženého čísla je roven druhé mocnině velikosti tohoto čísla, tudíž můžeme právě obdrženy vztah dále upravit

$$|A_k|^2 \int_0^H \sin^2 \left( \frac{k\pi}{H} x_2 \right) dx_2 = 1.$$

Nyní zjednodušíme získaný integrál. Při integraci využijeme vyjádření pro druhou mocninu sinu pomocí dvojnásobného argumentu cosinu

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2y}{2}.$$

Postupnými úpravami při integrování získáváme

$$\begin{aligned} |A_k|^2 \int_0^H \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \cos \left( \frac{2k\pi}{H} x_2 \right) \right] dx_2 &= 1, \\ \frac{|A_k|^2}{2} \cdot \left( \left[ x_2 \right]_0^H - \left[ \frac{\sin \left( \frac{2k\pi}{H} x_2 \right)}{\frac{2k\pi}{H}} \right]_0^H \right) &= 1, \\ \frac{|A_k|^2}{2} \cdot \left( H - \frac{H}{2k\pi} \cdot \left[ \sin \left( \frac{2k\pi}{H} x_2 \right) \right]_0^H \right) &= 1. \end{aligned}$$

### 3.5 VYŘEŠENÍ DEFINOVANÉHO PROBLÉMU

Protože funkce sinus nabývá nulových hodnot v celočíselných násobcích čísla  $\pi$ , pak pro velikost konstanty  $A_k$  obdržíme vyjádření

$$|A_k|^2 \cdot \frac{H}{2} = 1 \Rightarrow |A_k| = \sqrt{\frac{2}{H}}.$$

Dříve - z rovnice (25) - jsme usoudili, že vlastní vektory  $w_k$  jsou reálné funkce. Z tohoto poznatku a z rovnice (37) vyplývá, že konstanta  $A_k$  musí být ryze imaginární číslo, proto  $A_k$  má hodnotu

$$A_k = -i \sqrt{\frac{2}{H}}.$$

Dosazením konstanty  $A_k$  do (37) získáme konečný vztah pro  $k$ -tou vlastní hodnotu rychlostní funkce  $w_k$

$$w_k = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right). \quad (39)$$

### 3.5 Vyřešení definovaného problému

Nyní využijeme výrazu (39) pro vlastní vektory  $w_k$  při řešení diferenciální rovnice (15) s okrajovými podmínkami (8) a počátečními podmínkami (9). Bude nás zajímat řešení tohoto problému

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \nu \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2} = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & : & c_1(0, t) &= 0, \\ x_2 = H & : & c_1(H, t) &= 0, \\ t = 0 & : & c_1(x_2, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Hledanou rychlostní funkci  $c_1$  budeme pomocí rozvoje vlastních tvarů rychlosti uvažovat ve tvaru funkční řady

$$c_1(x_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) w_k(x_2). \quad (42)$$

Dosadíme-li tento tvar pro  $c_1$  do rovnice (40), obdržíme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) w_k(x_2) - \nu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) w_k(x_2) = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}.$$

Jestliže zde využijeme vlastnosti funkčních řad, která říká, že derivace součtu je rovna součtu derivací, pak získáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} w_k(x_2) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \frac{\partial^2 w_k(x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}. \quad (43)$$



### 3.5 VYŘEŠENÍ DEFINOVANÉHO PROBLÉMU

Za  $w_k$  dosadíme z rovnice (39)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{H}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right) + \nu \sqrt{\frac{2}{H}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \left(\frac{k\pi}{H}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right) = \\ = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}. \end{aligned}$$

Z obou členů levé strany rovnice můžeme vytknout stejné výrazy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} + \nu \left(\frac{k\pi}{H}\right)^2 a_k(t) \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right) = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}.$$

Využijeme-li vztahů (39) a (36) obdržíme následující vyjádření

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} - z_k a_k(t) \right) w_k = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L}.$$

Nyní tuto rovnici skalárně vynásobíme funkcí  $w_l$  a zintegrujme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} - z_k a_k(t) \right) \int_0^H w_k w_l dx_2 = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L} \int_0^H w_l dx_2.$$

Vzhledem k podmínce ortogonality (25) a rovnosti (38) se předchozí rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial a_l(t)}{\partial t} - z_l a_l(t) = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L} \int_0^H \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{l\pi}{H} x_2\right) dx_2. \quad (44)$$

Integrál na pravé straně rovnice můžeme dále upravit

$$\begin{aligned} \int_0^H \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{l\pi}{H} x_2\right) dx_2 &= \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \left[ -\frac{\cos\left(\frac{l\pi}{H} x_2\right)}{\frac{l\pi}{H}} \right]_0^H = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [\cos(l\pi) - 1] = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [(-1)^l - 1] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [1 - (-1)^l]. \end{aligned} \quad (45)$$

Dosaďme upravený výraz pro integrál (45) do (44)

$$\frac{\partial a_l(t)}{\partial t} - z_l a_l(t) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L} \cdot [1 - (-1)^l]. \quad (46)$$

Vezmeme-li v úvahu počáteční podmínku (41) dosazenou do rovnice (43), pak získáme analogickou podmínku pro  $a(t)$

$$t = 0 \quad : \quad a(0) = 0.$$

### 3.5 VYŘEŠENÍ DEFINOVANÉHO PROBLÉMU

Abychom našli řešení rovnice (46), použijeme Laplaceovu transformaci

$$\mathcal{L}\{a_l\} = b_l(s),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial a_l}{\partial t}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{a_l\} - a_l(0) = s \cdot b_l(s),$$

$$\mathcal{L}\{p(t)\} = \sigma(s)$$

a obdržíme ekvivalentní zápis

$$sb_l(s) - z_l b_l(s) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho L} \cdot [1 - (-1)^l].$$

Úpravou získáme vyjádření pro  $b_l(s)$

$$b_l(s) = \frac{\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [1 - (-1)^l]}{\rho L} \cdot \frac{\sigma_1(s) - \sigma_2(s)}{s - z_l}.$$

Z tohoto výrazu použitím inverzní Laplaceovy transformace obdržíme vztah pro  $a_l(t)$

$$a_l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{b_l(s)\},$$

$$a_l(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [1 - (-1)^l]}{\rho L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sigma_1(s) - \sigma_2(s)}{s - z_l}\right\}. \quad (47)$$

Užitím konvoluční věty upravíme vyjádření inverzní Laplaceovy transformace na pravé straně rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sigma_1(s) - \sigma_2(s)}{s - z_l}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - z_l}\right\} = \\ &= [p_1(t) - p_2(t)] * e^{z_l t} = \\ &= \int_0^t [p_1(\tau) - p_2(\tau)] \cdot e^{z_l(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (48)$$

Dosaďme tento vztah (48) zpět do (47)

$$a_l(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [1 - (-1)^l]}{\rho L} \int_0^t [p_1(\tau) - p_2(\tau)] \cdot e^{z_l(t-\tau)} d\tau.$$

Označme si výraz

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot [1 - (-1)^l]}{\rho L} = \kappa. \quad (49)$$

### 3.5 VYŘEŠENÍ DEFINOVANÉHO PROBLÉMU

V případě, že změna tlaku bude konstantní

$$p_1(t) - p_2(t) = \Delta p = konst,$$

pak lze psát vztah pro  $a_l(t)$

$$a_l(t) = -\frac{\kappa}{z_l} \cdot \Delta p + \frac{\kappa}{z_l} \cdot e^{z_l t} \cdot \Delta p = -\frac{\kappa}{z_l} \cdot \Delta p \cdot (1 - e^{z_l t}). \quad (50)$$

Upravíme-li zlomek  $-\frac{\kappa}{z_l}$ , kde za  $\kappa$  dosadíme z rovnice (49), pak obdržíme

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{z_l} &= \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H}{l\pi} \cdot \left[1 - (-1)^l\right] \cdot \frac{H^2}{\rho L \nu (\pi l)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H^3}{(\pi l)^3 \rho L \nu} \cdot \left[1 - (-1)^l\right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Použijeme-li (51) v rovnici (50) získáme konečný vztah pro  $a_l(t)$

$$a_l(t) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{H^3}{(\pi l)^3 \rho L \nu} \cdot \left[1 - (-1)^l\right] \cdot (1 - e^{z_l t}) \cdot \Delta p. \quad (52)$$

Dosadíme-li tedy (52) a (39) do rovnice (42) obdržíme výraz

$$c_1(x_2, t) = \frac{2H^2 \Delta p}{\pi^3 \rho L \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \cdot (1 - e^{z_k t}) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right), \quad (53)$$

současně podle (36) platí

$$z_k = -\nu \cdot \left(\frac{k\pi}{H}\right)^2.$$

Z tohoto výrazu je zřejmé, že kmity se tlumí v závislosti na jejich tvaru, velikosti kinematické viskozity  $\nu$  a velikosti mezery  $H$ . Přičemž více jsou tlumeny vyšší tvary kmitů.

Při dostatečně velkém  $t$  rovnice (53) přejde na tvar

$$c_1(x_2) = \frac{2H^2 \Delta p}{\pi^3 \rho L \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right).$$

Vzmemme-li v úvahu pouze 1.vlastní tvar ( $k=1$ ), poté pro rychlostní profil platí

$$c_1(x_2) = \frac{4H^2}{\pi^3 \rho L \nu} \cdot \Delta p \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right). \quad (54)$$

Pokud by nás zajímala velikost rychlosti uprostřed trubice, pak bychom z (54) obdrželi vztah

$$c_1\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{4}{\pi^3} \cdot \frac{H^2}{\rho L \nu} \cdot \Delta p \doteq \frac{H^2}{7,75 \rho L \nu} \cdot \Delta p.$$

Přičemž přesná hodnota [5] je

$$c_1\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{H^2}{8 \rho L \nu} \cdot \Delta p.$$

Z porovnání posledních dvou výrazů je zřejmé, že maximální hodnota přesně stanovené rychlosti se od přibližné liší o 4%. Z čehož vyplývá, že aproximace funkce 1. vlastním tvarem rychlosti je poměrně přesná. S rostoucím počtem vlastních tvarů rychlosti by se aproximovaná a přesná hodnota k sobě stále více blížily.

Z výrazu (53) také plyne, že tvar rychlostního profilu závisí pouze na lichých vlastních tvarech rychlosti.

### 3.6 Grafické vyhodnocení

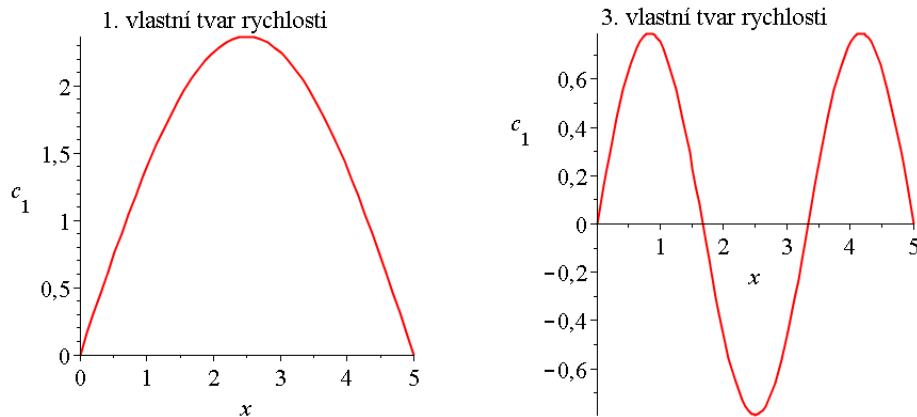
Různými výpočty jsme postupně dospěli k rovnici (53), tedy

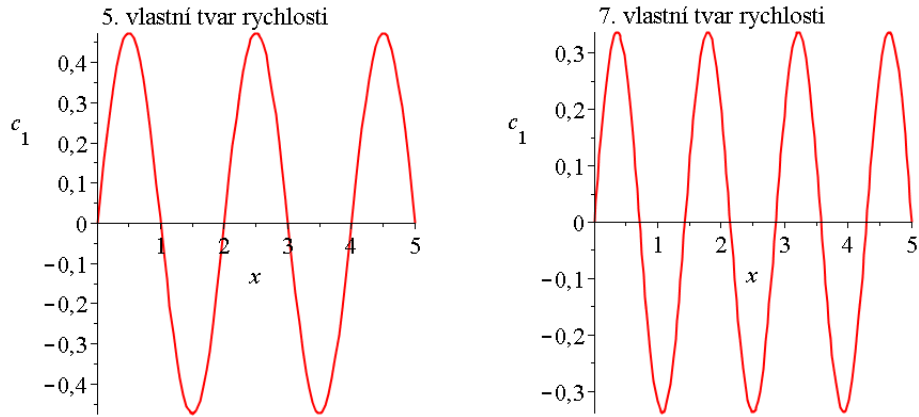
$$c_1(x_2, t) = \frac{2H^2 \Delta p}{\pi^3 \rho L \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \cdot (1 - e^{-z_k t}) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{H} x_2\right). \quad (55)$$

Pod tímto vyjádřením je těžké si představit průběh rychlostní funkce  $c_1$ . Proto zde uvedeme pár křivek vykreslených pomocí softwaru Maple. Použijeme následující hodnoty:

$$\begin{aligned} H &= 5 \text{ m}, \\ \Delta p &= 300 \text{ Pa}, \\ \rho &= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ L &= 12 \text{ m}, \\ \nu &= 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \\ t &= 200 \text{ s}. \end{aligned} \quad (56)$$

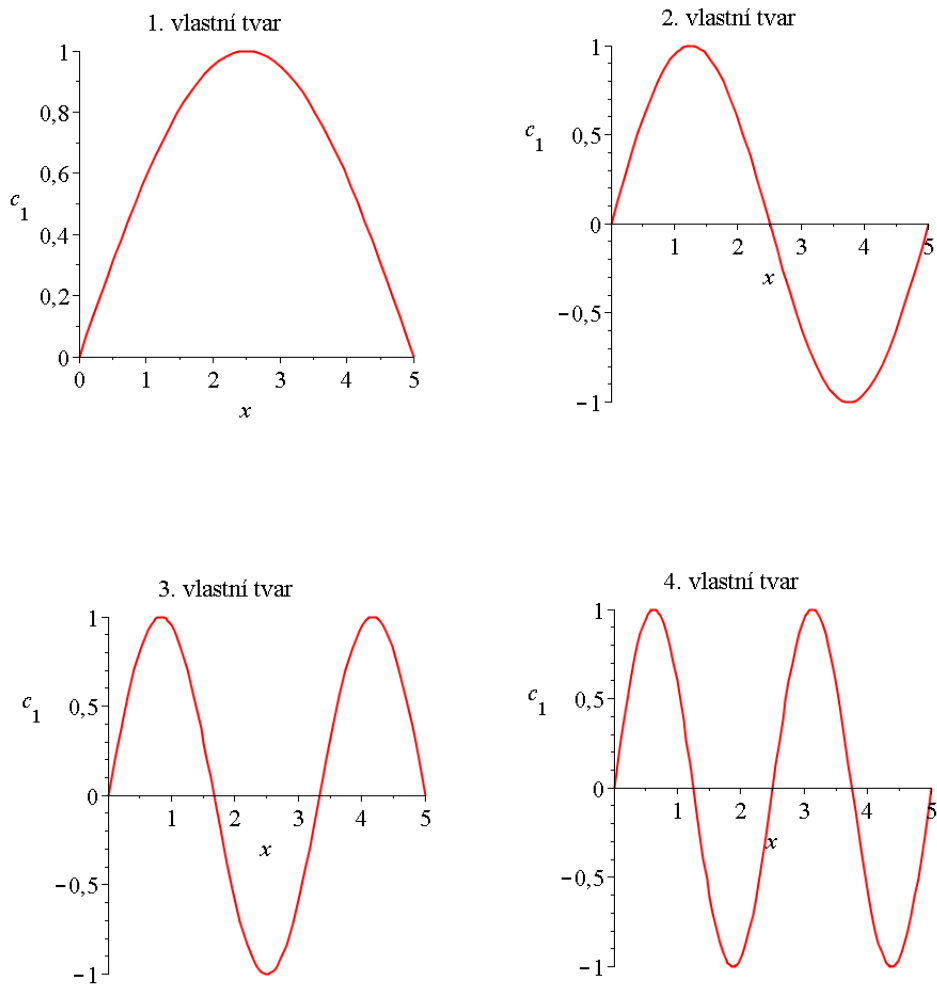
Z posledních poznatků už víme, že rychlostní profil závisí pouze na lichých vlastních tvarech rychlosti  $c_1$ . Sudé vlastní tvary jsou tedy nulové, proto znázorníme jen ty nenulové.





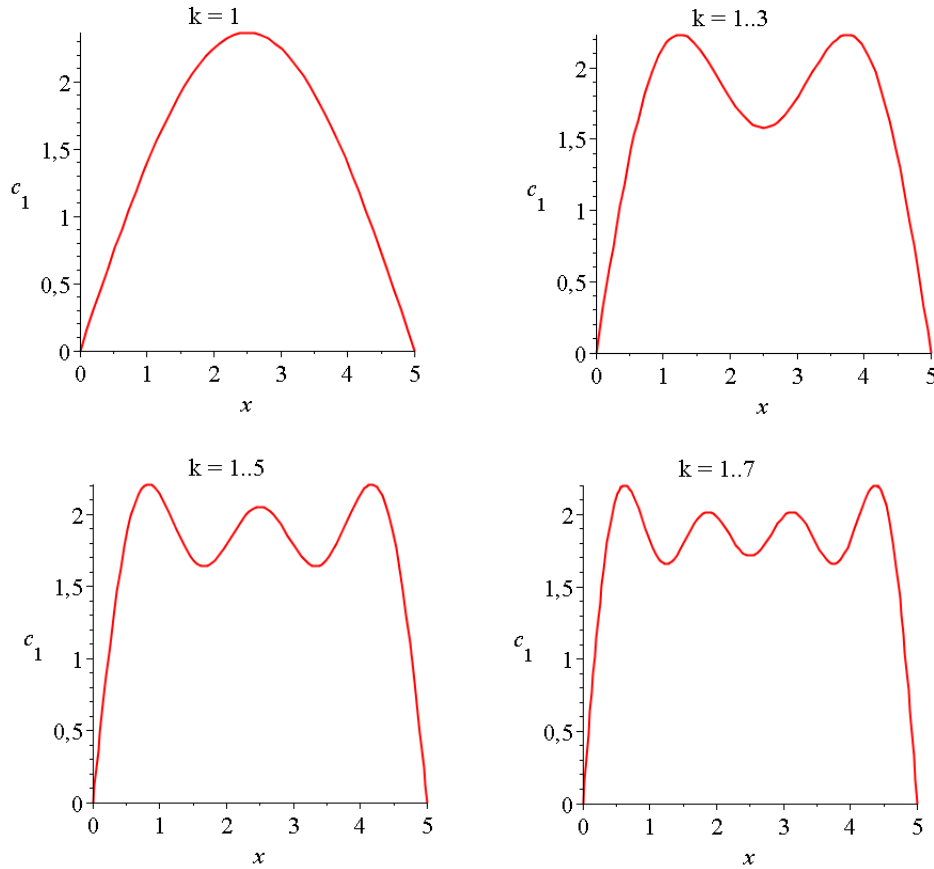
Obrázek 3: Vlastní tvary rychlosti

Pro srovnání zde uvádíme, jak vypadají vlastní tvary kmitu - sudé i liché.



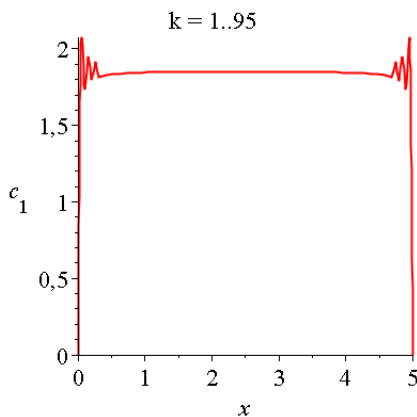
Obrázek 4: Vlastní tvary kmitu

Protože rovnice (55) je ve tvaru nekonečné řady, tak je vhodné zde uvést i částečné součty.



Obrázek 5: Součty vlastních tvarů rychlosti pro  $t = 200$  s

Zaměříme-li se pouze na první dvě vykreslení, zjistíme, že první člen reprezentuje rychlostní profil laminárního proudění a druhý obrázek se dosti podobá rychlostnímu profilu turbulentního proudění. Postupným navyšováním hodnoty  $k$  dospějeme pomalu až k pístovému rychlostnímu profilu. Tento jev je nežádoucí - je způsoben špatnou volbou časového kroku a zvolením příliš velké šířky trubice na její délku (viz str. 26 - velikost mezery).



Obrázek 6: Součet vlastních tvarů rychlosti po  $k = 95$

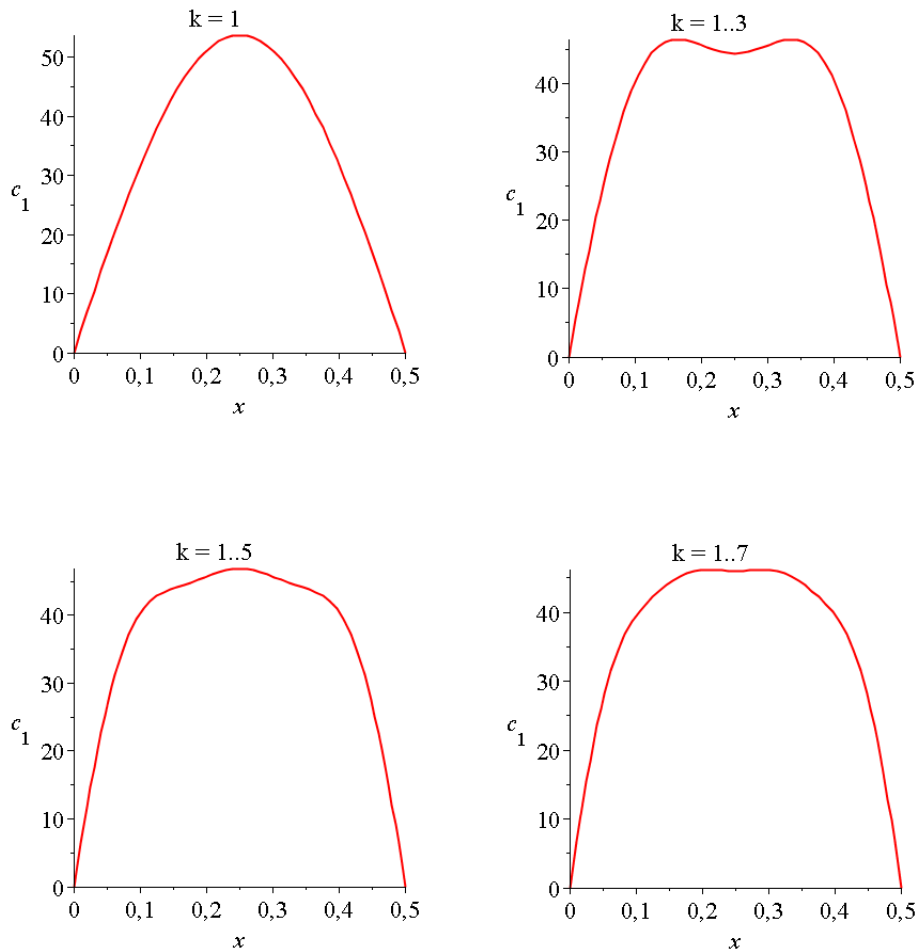
### 3.6 GRAFICKÉ VYHODNOCENÍ

Tímto pozorováním průběhu grafů zjišťujeme, že v čase  $t = 200$  s nemají vlastní tvary rychlosti vyšší než 80 vliv na skládání kmitů.

Předchozí grafy byly vykresleny pro čas  $t = 200$  s, což je relativně malý časový úsek. Proto se nyní zaměříme na vyšší časové hodnoty a užší trubici:

$$\begin{aligned}
 H &= 0,5 \text{ m}, \\
 \Delta p &= 300 \text{ Pa}, \\
 \rho &= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\
 L &= 12 \text{ m}, \\
 \nu &= 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \\
 t &= 5\,000 \text{ s}.
 \end{aligned} \tag{57}$$

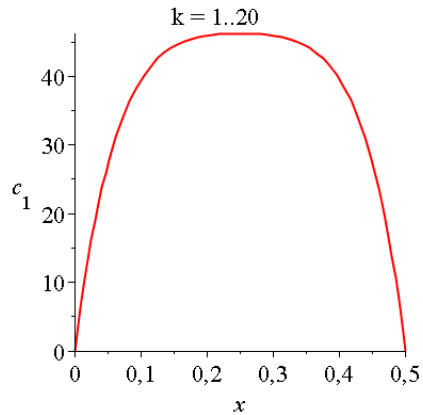
Za těchto nových podmínek budou částečné součty naší řady (55) vypadat takto:



Obrázek 7: Součty vlastních tvarů rychlosti pro  $t = 5\,000$  s

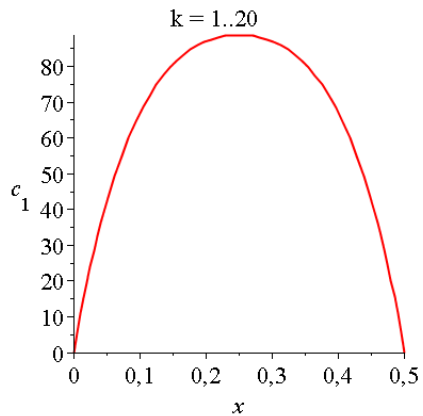
Jak lze zpozorovat, tak už při součtu prvních sedmi členů se blížíme k rychlostnímu profilu laminárního proudění.

Tento tvar se se vzrůstajícím počtem členů víceméně nemění.



Obrázek 8: Součet deseti lichých vlastních tvarů rychlosti pro  $t = 5\,000$  s

Kdybychom uvažovali čas  $t = 10\,000$  s, pak by součet deseti lichých členů řady vypadal následovně:



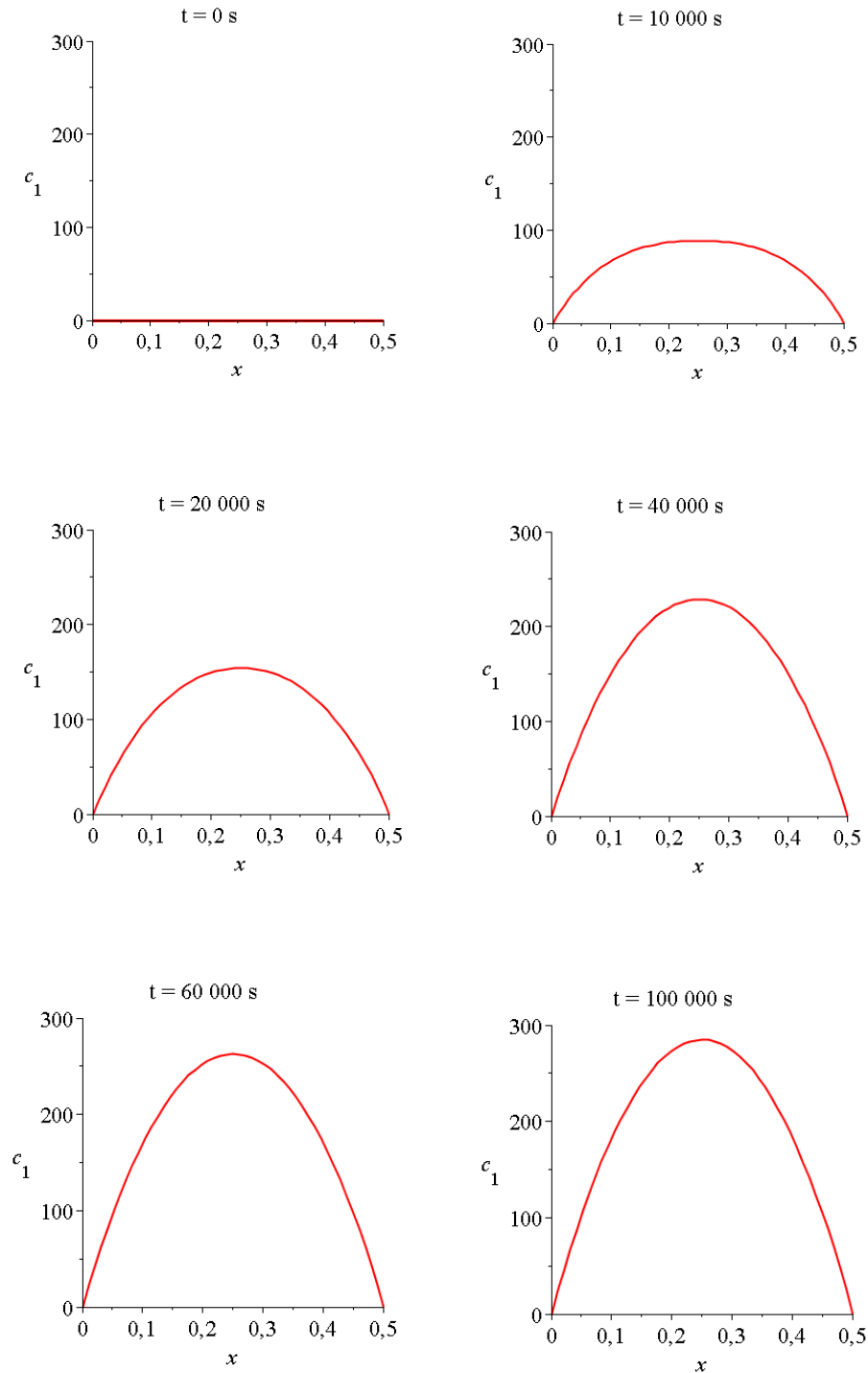
Obrázek 9: Součet deseti lichých vlastních tvarů rychlosti pro  $t = 10\,000$  s

Z čehož vyplývá, že se vzrůstajícím časem se čím dál více blížíme rychlostnímu profilu laminárního proudění.



### 3.6 GRAFICKÉ VYHODNOCENÍ

Nyní využijme těchto poznatků a zaměříme se na časovou souslednost rychlostního profilu pro trubici o šířce  $H = 0,5$  m, v časovém úseku  $t = 0$  s až  $t = 100\,000$  s. Budeme sledovat průběh součtu deseti lichých členů řady, protože součet více členů už nemá tak významný vliv.



Obrázek 10: Součet deseti lichých vlastních tvarů rychlosti pro různé časy

Se vzrůstajícím časem se rychlostní profil víceméně nemění.

## 4 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo najít řešení Navier-Stokesovy rovnice pro laminární proudění nestlačitelné kapaliny. Při řešení byly využity základní znalosti diferenciálních rovnic, vlastních čísel, ortogonalita vlastních vektorů, funkčních řad a vlastních tvarů kmitu. Výpočty jsme dospěli k závěru, že tvar rychlostního profilu závisí pouze na lichých vlastních tvarech rychlosti, protože sudé vlastní tvary jsou nulové. Porovnáním hodnoty rychlostní funkce aproximované 1.vlastním tvarem rychlosti uprostřed trubice a maximální hodnoty laminárního proudění jsme zjistili, že dané hodnoty se liší pouze o 4 %, tudíž daná aproximace je poměrně přesná.

Rychlostní funkci jsme našli ve tvaru funkční řady. K animaci tohoto řešení jsme využili software Maple. Z ní jsme zjistili, že pro větší časové hodnoty se daný rychlostní profil blíží předpokládanému laminárnímu rychlostnímu profilu.

Výsledky bakalářské práce mohou být využity v navazující diplomové práci, ve které se toto řešení zobecní nejdříve pro trubici kruhového průřezu pomocí transformace do válcových souřadnic a poté na obecný průřez. Další zobecnění se bude týkat přechodu od ideální kapaliny k reálné.

# Literatura

- [1] BRDIČKA, M. - SAMEK, L. - SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. 2. opr. vyd. Praha: Academia, 2000. 799 s. ISBN 80-200-0772-5.
- [2] DĚMIDOVIČ, Boris Pavlovič - MARON, Isaak Abramovič. *Základy numerické matematiky*. Přeložili Jan Kadlec, Jiří Kopáček a Alois Kufner. 1.vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. 721 s.
- [3] MAIN, Iain G. *Kmitý a vlny ve fyzice*. Přeložil Josef Preinhaelter. 1. vyd. Praha: Academia, 1990. 368 s. ISBN 80-200-0272-3.
- [4] POCHYLÝ, František - FIALOVÁ, Simona. *Řešení laminárního proudění rozvojem podle vlastních tvarů kmitu*. [Výzkumná práce.] Brno: VUT, FSI, 2009. VUT-EU13303-QR-02-09.
- [5] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002. 238 s. ISBN 80-214-2037-5.
- [6] ZDRAŽIL, Vladimír. *Kmitý*. 2. vyd. Brno: Vutium, 1997. 85 s. ISBN 80-214-0958-4.

# A Seznam použitých zkratek a symbolů

$f(t), g(t)$	předměty Laplaceovy transformace
$F(s), G(s)$	obrazy Laplaceovy transformace
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplaceova transformace předmětu $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	inverzní Laplaceova transformace obrazu $F(s)$
$*$ , $(f * g)(t)$	symbol pro konvoluci, konvoluce funkcí $f$ a $g$
$c$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	rychlost proudící tekutiny
$t$ (s)	čas
$A$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	vnější objemové zrychlení (zrychlení způsobené objemovými silami - např. tíhovou silou)
$\rho$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	hustota tekutiny
$p$ (Pa)	tlak v tekutině
$\mu$ ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	dynamická viskozita
$\nu$ ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	kinematická viskozita, která je rovna podílu dynamické viskozity a hustoty
$x_i$ (m), $i = 1, 2$	souřadnice systému
$L$ (m)	délka trubice
$H$ (m)	šířka trubice, mezera mezi stěnami trubice
$w, w_k$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	rychlosti na stěně trubice
$z, z_k, \lambda_k, \lambda_l$ ( $\text{s}^{-1}$ )	vlastní hodnoty
$\lambda$ ( $\text{m}^{-1}$ )	vlastní číslo
$w^*, w_k^*, w_l^*$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	komplexně sdružené rychlostní funkce
$\alpha$ ( $\text{s}^{-1}$ )	reálné číslo
$i$ (1)	imaginární jednotka