



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OBECNÉ ROTAČNÍ NURBS PLOCHY

NURBS SURFACES OF REVOLUTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondřej Sekáč

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Jana Procházková, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Ondřej Sekáč**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Jana Procházková, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Obecné rotační NURBS plochy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Seznámení se s problematikou NURBS křivek a ploch. Nastudování základních vlastností. V programové části navrhnout algoritmus pro vytváření NURBS rotačních ploch ze zadané NURBS křivky a osy rotace.

Cíle bakalářské práce:

1. Shrnutí základních teoretických poznatků.
2. Vytvoření programu obecných rotačních NURBS ploch.
3. Zobrazení výsledků.

Seznam doporučené literatury:

PIEGL, Les A. a Wayne TILLER. The NURBS book: with 334 figures in 578 parts. Berlin: Springer-Verlag, c1995. ISBN 3-540-55069-0.

BOOR, de Carl. A Practical Guide to Splines. Berlin: Springer-Verlag, 1978. ISBN 978-0-387-95366-3.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá rotačními NURBS plochami. NURBS plochy jsou racionálním rozšířením B-spline ploch, což umožňuje zobrazení kuželoseček, a tedy i anuloidu, kulové plochy a dalších rotačních ploch. Součástí této práce je programové zpracování vytváření NURBS rotačních ploch ve formě aplikace včetně popisu použitých algoritmů.

Summary

The goal of this bachelor's thesis is to give an overview of NURBS surfaces of revolution. NURBS surfaces are rational B-spline surfaces, which allows for construction of conics, hence anuloid, sphere and other surfaces of revolution. The thesis also contains an application that can create NURBS surfaces of revolution and description of algorithms used.

Klíčová slova

B-spline, NURBS, rotační plochy, De Boorův algoritmus

Keywords

B-spline, NURBS, surface of revolution, De Boor's algorithm

SEKÁČ, O. *Obecné rotační NURBS plochy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 42 s. Vedoucí Mgr. Jana Procházková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Obecné rotační NURBS plochy“ vypracoval samostatně pod vedením vedoucí práce Mgr. Jany Procházkové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Sekáč

Rád bych poděkoval vedoucí této práce Mgr. Janě Procházkové, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a cenné rady. Dále děkuji rodině za podporu při studiu.

Ondřej Sekáč

Obsah

Úvod	12
1 Základní teoretické pojmy	13
1.1 Afinní a projektivní prostory	13
1.2 B-spline křivky a plochy	14
1.3 NURBS křivky a plochy	19
1.4 Vlastnosti	21
1.4.1 Vlastnosti bázových funkcí	21
1.4.2 Vlastnosti křivek	22
1.4.3 Vlastnosti ploch	23
2 Rotační NURBS plochy	24
2.1 Odvození kružnicových oblouků	24
2.2 Rotační NURBS plochy – odvození	26
3 Programová část	29
3.1 Vytvoření uzlového vektoru	29
3.2 De Boorův algoritmus	29
3.2.1 De Boorův algoritmus pro NURBS křivku	29
3.2.2 De Boorův algoritmus pro bod NURBS plochy	31
3.3 Zobrazení rovnoběžkových kružnic	33
3.4 Program	34
3.5 Výstupy programu	37
Závěr	39
Literatura	39
Seznam použitých zkratk a symbolů	41
Seznam příloh	42

Úvod

V 60. letech minulého století se s postupným technologickým rozvojem zrodila disciplína zvaná počítačová grafika. Především při návrzích letadel, automobilů a lodí vznikla potřeba navrhovat oblé tvary, a tedy i nutnost přesné matematické reprezentace těchto křivek a ploch. Průkopníky rozvoje v této oblasti byli například Pierre Bézier, Paul de Casteljaou, Carl de Boor, Garrett Birkhoff nebo James Ferguson. Postupně vzniká obor s názvem Computer-Aided Design neboli CAD. [1]

Nejobecnější formou křivek jsou tzv. NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) křivky, používané nejen v technické praxi, ale také v designu, filmu, sochařství nebo například při modelování objektů ve virtuální realitě. NURBS se staly de facto standardem reprezentace křivek a ploch v počítačové grafice. Mezi jejich výhody patří hlavně rychlý a numericky stabilní výpočet, lokální kontrolovatelnost (při změně některého parametru dochází pouze k lokální změně křivky), invariance vůči transformacím, možnost konstrukce kuželoseček (především kružnicových oblouků) a různé způsoby ovládání křivky (řídící body, uzlový vektor, váhy).

Tato práce se zabývá rotačními NURBS plochami, což jsou plochy vzniklé rotací dané vstupní křivky kolem osy rotace. Takto můžeme vytvářet například kulovou plochu nebo anuloid. První kapitola se věnuje teoretickým poznatkům potřebných při vytváření obecných NURBS křivek a ploch. Nejprve jsou v části 1.1 popsány afinní a projektivní prostory a zobrazení na nich. V části 1.2 je uvedena definice B-spline křivek a ploch, které jsou dále v části 1.3 rozšířené pomocí homogenních souřadnic na NURBS křivky a plochy. V části 1.4 jsou shrnuty vlastnosti B-spline, resp. NURBS bazových funkcí, křivek a ploch. Druhá kapitola je věnována odvození NURBS reprezentace kružnicových oblouků (část 2.1) a popisu rotačních NURBS ploch i s příklady (část 2.2). Poslední kapitola popisuje důležité algoritmy použité v aplikaci `NURBS.exe`, která je součástí této práce a jsou zde zobrazeny výsledky získané pomocí této aplikace.

1 Základní teoretické pojmy

V následující kapitole si uvedeme definice a vlastnosti struktur použitých v této práci. V první části zavedeme afinní a projektivní prostory a zobrazení na nich. Poté v částech 1.2 a 1.3 popíšeme matematický aparát pro B-spline křivky a jejich racionální rozšíření NURBS.

1.1 Afinní a projektivní prostory

Computer Aided Design (CAD) a obecně počítačová grafika využívá matematických principů afinních a projektivních prostorů. Následující definice a další informace týkající se prostorů lze nalézt např. v [3, 4, 6, 8, 9].

Definice 1. Necht A_n je neprázdná množina, necht V_n je lineární prostor dimenze n , $n \in \mathbb{N}_0$ nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} a dále necht $\varphi : A_n \times A_n \rightarrow V_n$ je zobrazení takové, že platí:

- a) $\forall A \in A_n; \forall \mathbf{x} \in V_n: \exists! B \in A_n : \varphi(A, B) = \mathbf{x}$,
- b) $\forall A, B, C \in A_n : \varphi(A, C) \leq \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$.

Pak množinu A_n nazýváme *afinním prostorem*. Lineární prostor V_n nazýváme *zaměřením prostoru A_n* , dimenzi prostoru V_n nazýváme *dimenzí A_n* . Prvky $A \in A_n$ nazýváme *body* afinního prostoru. Uspořádanou dvojici (A, B) nazýváme *umístěním vektoru \mathbf{x} v prostoru A_n* . Místo $\mathbf{x} = \varphi(A, B)$ obvykle píšeme $\mathbf{x} = B - A$ nebo $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$.

Definice 2. Necht A, B, C jsou body na téže přímce, pak číslo

$$\lambda = (A, B, C) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}, \quad \lambda \neq 0 \quad (1.1)$$

nazýváme *dělicí poměr* bodů A, B, C .

Definice 3. Necht $\varphi : A_n \rightarrow A'_n$ je zobrazení afinního prostoru A_n do afinního prostoru A'_n , přímky $p \subset A_n$, $p' \subset A'_n$ takové, že $\varphi(p) = p'$. Dále necht $A, B, C \in p$ jsou tři různé body přímky p . Zobrazení φ nazýváme *afinní*, jestliže $(A, B, C) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C))$, tj. zobrazení zachovává dělicí poměr.

Definice 4. Necht E_n je afinní prostor, jehož zaměřením je unitární prostor V_n uspořádaných n -tic reálných čísel $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ libovolná báze V_n a $O \in E_n$. Afinní prostor nazýváme *euklidovským prostorem* a uspořádanou $(n+1)$ -tici $\langle O, e_1, \dots, e_n \rangle$ *kartézskou souřadnou soustavou*. Jestliže $X - O = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, píšeme obvykle $X = [x_1, \dots, x_n]$ a uspořádanou n -tici $[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme *kartézskými souřadnicemi* bodu X .

Definice 5. Necht V_{n+1} je lineární prostor dimenze $n+1$ nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} . Množinu P_n všech jednodimenzionálních podprostorů prostoru V_{n+1} nazýváme *projektivním prostorem* dimenze n . Každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in V_{n+1}$ nazýváme *aritmetickým bodem* projektivního prostoru. Množinu $\bar{X} = \{\mathbf{g} \in P_n; \mathbf{g} = k\mathbf{x}; k \neq 0\}$ nazýváme *geometrickým bodem* projektivního prostoru. Složky vektoru $\mathbf{g} = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $x_i \in \mathbb{R}$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu \bar{X} , píšeme $\bar{X} = [x_1, \dots, x_{n+1}]$.

1.2 B-SPLINE KŘIVKY A PLOCHY

Definice 6. Necht $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $D = [d_1, d_2]$ jsou čtyři různé body na téže přímce. Číslo

$$d = (A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}} \quad (1.2)$$

nazýváme *dvojpoměr* bodů A, B, C, D .

Definice 7. Necht $\varphi : P_n \rightarrow P'_n$ je zobrazení projektivního prostoru P_n do projektivního prostoru P'_n , necht $p \subset P_n$, $p' \subset P'_n$ jsou takové přímky, že $\varphi(p) = p'$. Dále necht $A, B, C, D \in p$ jsou čtyři různé body přímky p . Zobrazení φ nazýváme *projektivní*, jestliže $(A, B, C, D) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D))$, tj. zobrazení zachovává dvojpoměr.

Definice 8. Necht V_n je vektorový prostor. Lineární zobrazení $\varphi : V_n \rightarrow V - n$ nazýváme *lineární transformace (endomorfismus)* vektorového prostoru V_n .

Definice 9. Necht φ je lineární transformace vektorového prostoru V_n . Vektorový podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní* vzhledem k lineární transformaci φ , je-li $\varphi(U) \subseteq U$ tj. pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in U$ je $\varphi(\mathbf{u}) \in U$.

Definice 10. Každé projektivní zobrazení bodu $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]$ na bod $\mathbf{X}' [x'_1, \dots, x'_m]$ lze popsat soustavou rovnic

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

nebo maticově $\mathbf{X}'^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T$, kde \mathbf{A} je *matice určující zobrazení*.

Poznámka. V práci budeme nejčastěji používat matici rotace v projektivním prostoru kolem osy y o úhel α , která je ve tvaru

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

1.2 B-spline křivky a plochy

B-spline křivky jsou zobecněním Bézierových křivek, jejichž nevýhodou je potřeba velkého stupně křivky pro zobrazení složitějších tvarů a špatná lokální kontrolovatelnost (změna jednoho řídicího bodu změni tvar celé křivky). B-spline odstraňují tyto nedostatky, neboť jsou po částech polynomiální. Definiční obor křivky je rozdělen pomocí tzv. uzlů na podintervaly a na každém takovém intervalu je definovaná příslušná bázová funkce. Podrobně zpracovanou teorii týkající se B-spline nalezneme například v [10, 11].

Definice 11. Necht U je neklesající posloupnost $(m + 1)$ reálných čísel $u_0 \leq \dots \leq u_m$. Potom čísla u_i , kde $i = 0, \dots, m$, nazýváme *uzly*, množinu $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ nazýváme *uzlový vektor* a interval $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ nazýváme *i -tá uzlová rozteč*.

Poznámka. Každý uzlový vektor lze jednoduše převést na takový uzlový vektor, kde $u_0 = 0$ a $u_m = 1$.

Definice 12. Na daném uzlovém vektoru $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ jsou pro $i = 0, \dots, m - p - 1$ B-spline bázové funkce stupně $p = 0, \dots, m - 1$ definovány pomocí tzv. Cox-de Boorovy rekurentní formule

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (1.5a)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (1.5b)$$

Poznámka. V rovnici (1.5b) nám může vyjít $\frac{0}{0}$, proto definujeme $N_{i,p}(u) = \frac{0}{0} = 0$.

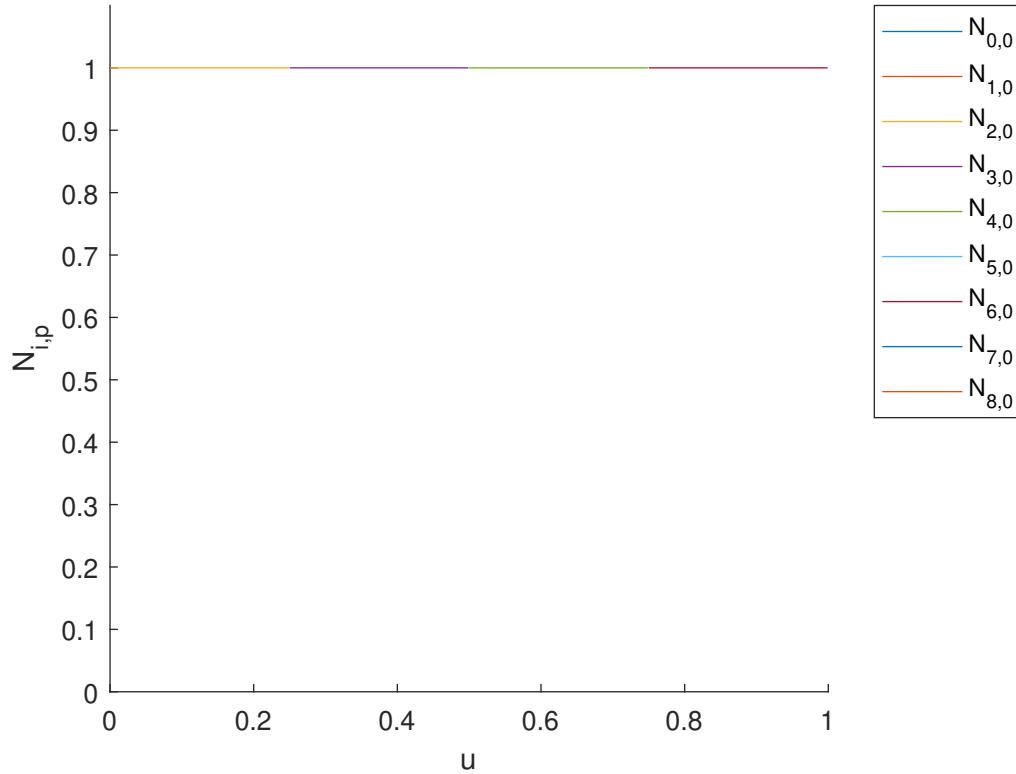
Příklad. Necht $U = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$ je uzlový vektor. Vypočítáme B-spline bázové funkce stupně 0, 1, 2. (Pro přehlednost budu zapisovat $N_{i,p}(u)$ jako $N_{i,p}$.)

$\mathbf{p} = \mathbf{0}$: Z rovnice (1.5a) vyjádříme bázové funkce stupně 0.

$$\begin{aligned} N_{0,0} &= N_{1,0} = 0, \\ N_{2,0} &= \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 0, 1/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ N_{3,0} &= \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 1/4, 1/2 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ N_{4,0} &= \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 1/2, 3/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ N_{5,0} &= 0, \\ N_{6,0} &= \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 3/4, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ N_{7,0} &= N_{8,0} = 0. \end{aligned}$$

Všechny nenulové bázové funkce stupně 0 můžeme vidět na obr. 1.1.

1.2 B-SPLINE KŘIVKY A PLOCHY



Obrázek 1.1: Bázové funkce stupně 0 pro $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$

$\mathbf{p} = \mathbf{1}$: Z rovnice (1.5) vyjádříme bázové funkce stupně 1:

$$N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0}N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0}N_{1,0} = 0,$$

$$N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0}N_{1,0} + \frac{0,25-u}{0,25-0}N_{2,0} = \begin{cases} 1-4u & \text{pro } u \in \langle 0, 1/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{2,1} = \frac{u-0}{0,25-0}N_{2,0} + \frac{0,5-u}{0,5-0,25}N_{3,0} = \begin{cases} 4u & \text{pro } u \in \langle 0, 1/4 \rangle, \\ 2-4u & \text{pro } u \in \langle 1/4, 1/2 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{u-0,25}{0,5-0,25}N_{3,0} + \frac{0,75-u}{0,75-0,5}N_{4,0} = \begin{cases} 4u-1 & \text{pro } u \in \langle 1/4, 1/2 \rangle, \\ 3-4u & \text{pro } u \in \langle 1/2, 3/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

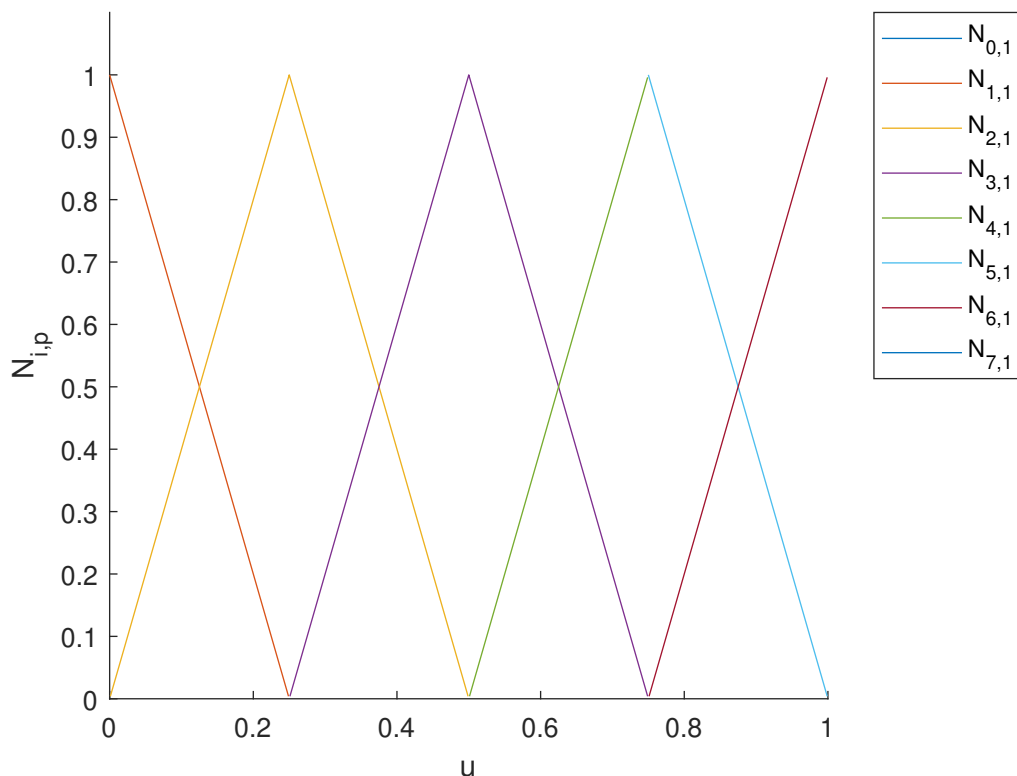
$$N_{4,1} = \frac{u-0,5}{0,75-0,5}N_{4,0} + \frac{0,75-u}{0,75-0,75}N_{5,0} = \begin{cases} 4u-2 & \text{pro } u \in \langle 1/2, 3/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{5,1} = \frac{u-0,75}{0,75-0,75}N_{5,0} + \frac{1-u}{1-0,75}N_{6,0} = \begin{cases} 4-4u & \text{pro } u \in \langle 3/4, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{6,1} = \frac{u-0,75}{1-0,75}N_{6,0} + \frac{1-u}{1-1}N_{7,0} = \begin{cases} 4u-3 & \text{pro } u \in \langle 3/4, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{7,1} = \frac{u-1}{1-1}N_{7,0} + \frac{1-u}{1-1}N_{8,0} = 0.$$

Všechny nenulové bázové funkce stupně 1 jsou zobrazeny na obr. 1.2.

Obrázek 1.2: Bázové funkce stupně 1 pro $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$

$\mathbf{p} = \mathbf{2}$: Nakonec vyjádříme bázové funkce stupně 2:

$$N_{0,2} = \frac{u-0}{0-0}N_{0,1} + \frac{0,25-u}{0,25-0}N_{1,1} = \begin{cases} (1-4u)^2 & \text{pro } u \in \langle 0, 1/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \frac{u-0}{0,25-0}N_{1,1} + \frac{0,5-u}{0,5-0}N_{2,1} = \begin{cases} -24u^2 + 8u & \text{pro } u \in \langle 0, 1/4 \rangle, \\ 8u^2 - 8u + 2 & \text{pro } u \in \langle 1/4, 1/2 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \frac{u-0}{0,5-0}N_{2,1} + \frac{0,75-u}{0,75-0,25}N_{3,1} = \begin{cases} 8u^2 & \text{pro } u \in \langle 0, 1/4 \rangle, \\ -16u^2 + 12u - 1,5 & \text{pro } u \in \langle 1/4, 1/2 \rangle, \\ 8u^2 - 12u + 4,5 & \text{pro } u \in \langle 1/2, 3/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{3,2} = \frac{u-0,25}{0,75-0,25}N_{3,1} + \frac{0,75-u}{0,75-0,5}N_{4,1} = \begin{cases} 8u^2 - 4u + 0,5 & \text{pro } u \in \langle 1/4, 1/2 \rangle, \\ -24u^2 + 28u - 7,5 & \text{pro } u \in \langle 1/2, 3/4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

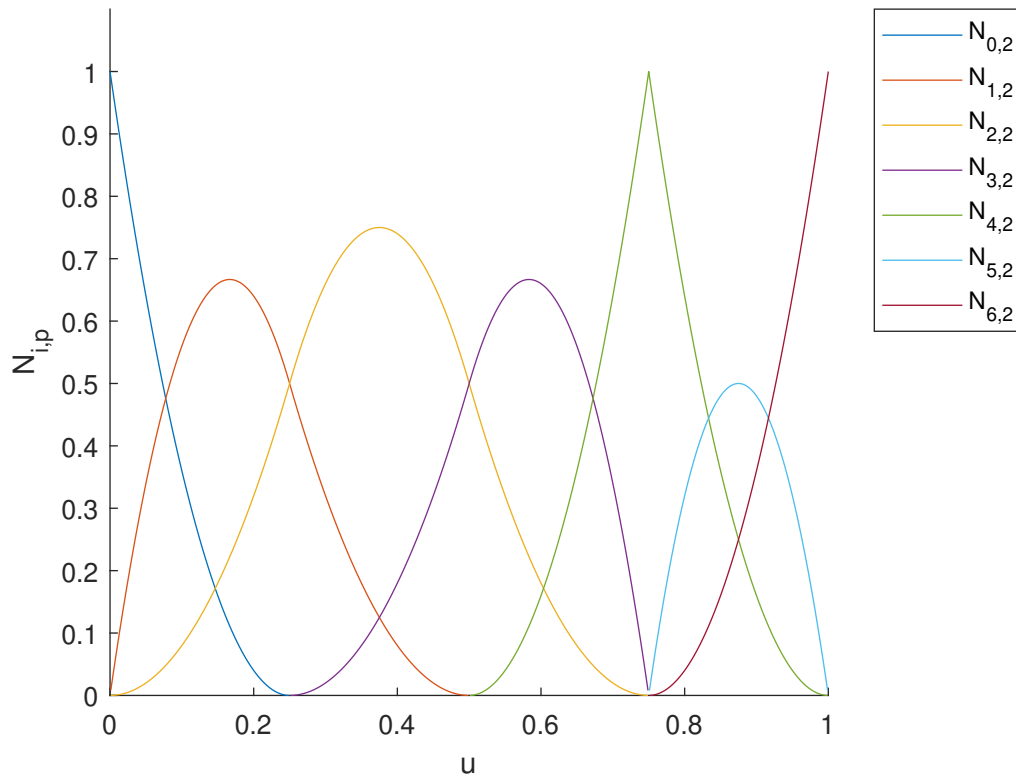
$$N_{4,2} = \frac{u-0,5}{0,75-0,5}N_{4,1} + \frac{1-u}{1-0,75}N_{5,1} = \begin{cases} 4(2u-1)^2 & \text{pro } u \in \langle 1/2, 3/4 \rangle, \\ 16(u-1)^2 & \text{pro } u \in \langle 3/4, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{5,2} = \frac{u-0,75}{1-0,75}N_{5,1} + \frac{1-u}{1-0,75}N_{6,1} = \begin{cases} -32u^2 + 56u - 24 & \text{pro } u \in \langle 3/4, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$N_{6,2} = \frac{u-0,75}{1-0,75}N_{6,1} + \frac{1-u}{1-1}N_{7,1} = \begin{cases} (4u-3)^2 & \text{pro } u \in \langle 3/4, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

1.2 B-SPLINE KŘIVKY A PLOCHY

Všechny nenulové bázové funkce stupně 2 můžeme vidět na obr. 1.3.

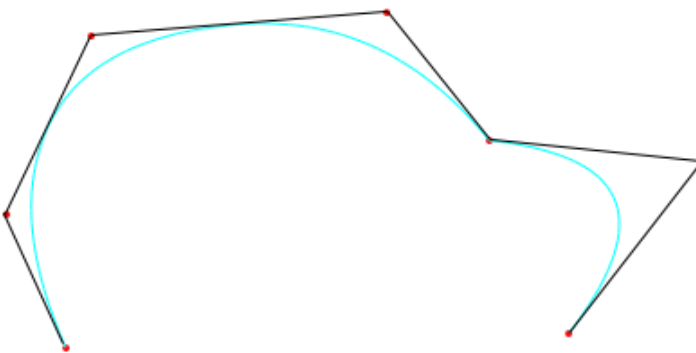


Obrázek 1.3: Bázové funkce stupně 2 pro $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$

Definice 13. Pro daný uzlový vektor $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ je *B-spline křivka stupně p* definovaná

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in \langle u_0, u_m \rangle, \quad (1.6)$$

kde $N_{i,p}$ jsou B-spline bázové funkce stupně p a \mathbf{P}_i jsou *řídící body*. Polygon tvořený řídicími body nazýváme *řídící polygon*.



Obrázek 1.4: B-spline křivka stupně 2 (modře) a její řídicí polygon (černě) pro $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$

Definice 14. Řekneme, že uzel má *násobnost* m , pokud se v uzlovém vektoru objeví m -krát.

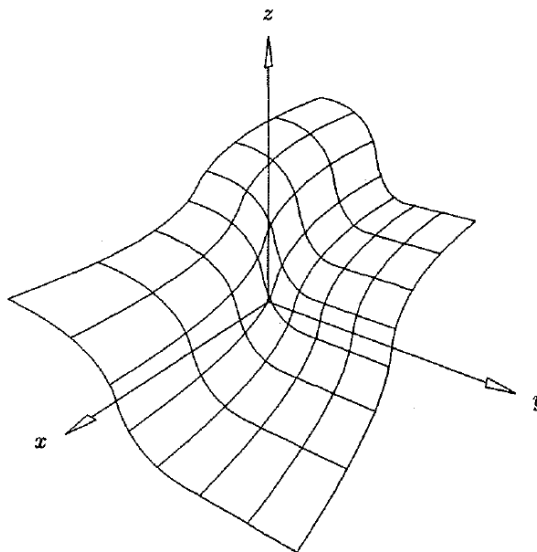
Definice 15. B-spline křivka se nazývá *sevřená*, pokud má první a poslední uzel násobnost $p + 1$. Spojnice prvních a posledních dvou řídicích bodů jsou tečnami v krajních bodech křivky, sevřená B-spline křivka $\mathbf{C}(u)$ tedy prochází koncovými body řídicího polygonu a platí $\mathbf{C}(u_0) = \mathbf{P}_0$ a $\mathbf{C}(u_m) = \mathbf{P}_n$. Křivka se nazývá *uzavřená* je-li prvních a posledních p řídicích bodů shodných. V ostatních případech se křivka nazývá *otevřená*.

Poznámka. Nadále se budeme zabývat výhradně sevřenými křivkami.

Definice 16. Mějme uzlový vektor $U = \{u_0, \dots, u_m\}$. Je-li hodnota výrazu $u_{i+1} - u_i$ konstantní pro všechna $i = p, p+1, \dots, m-p-1$, označujeme uzlový vektor jako *uniformní*, jinak hovoříme o *neuniformním* uzlovém vektoru.

Definice 17. B-spline plocha je definovaná nad sítí bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, $i \in \langle 0, m \rangle$, $j \in \langle 0, n \rangle$ se dvěma stupni p, q a dvěma uzlovými vektory $U = \{u_0, \dots, u_h\}$, $V = \{v_0, \dots, v_k\}$ takto

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, v \in \langle v_0, v_k \rangle. \quad (1.7)$$

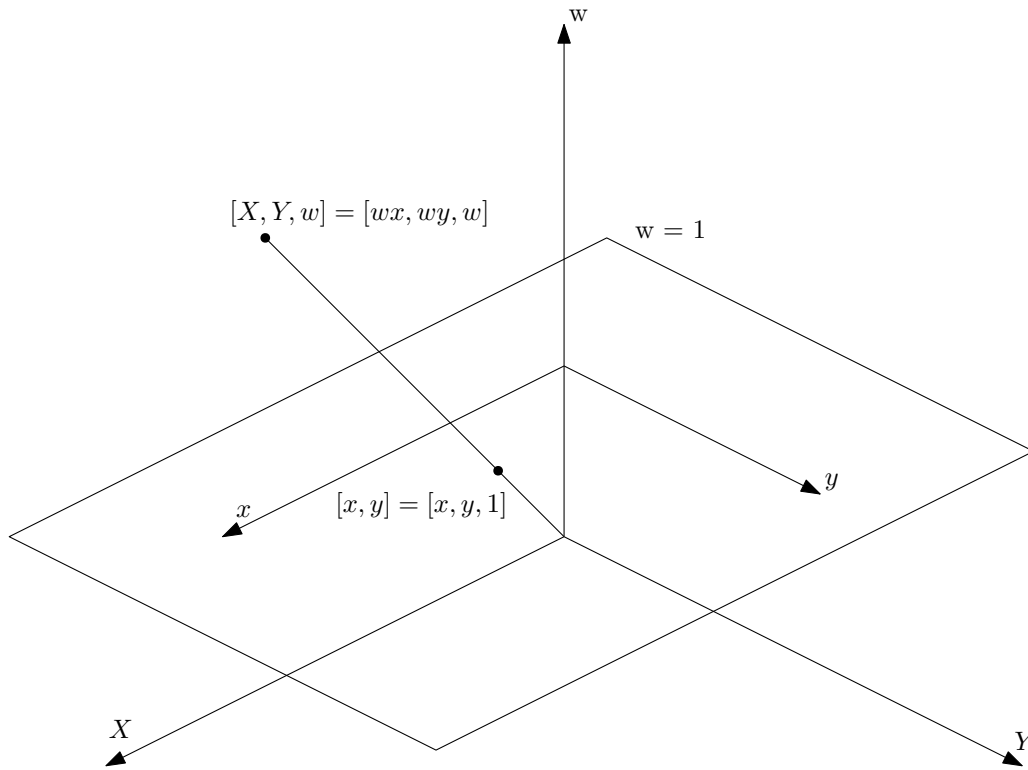


Obrázek 1.5: B-spline plocha [10]

1.3 NURBS křivky a plochy

B-spline bazové funkce jsou polynomy, proto pomocí nich nelze přesně popsat některé křivky (např. kuželosečky), které ke svému vyjádření potřebují racionální lomené funkce [10, 11]. Z tohoto důvodu zavádíme tzv. NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines – neuniformní racionální B-spline) křivky. Ke každému bodu je přiřazena váha w , která určuje, jakou silou tento bod ovlivňuje tvar křivky. Pro práci s váhami zavedeme homogenní souřadnice dle definice 5. Přejdeme tedy do projektivního prostoru a bodu $\mathbf{P} = [x, y, z]$ přiřadíme bod $\mathbf{P}^w = [X, Y, Z, w] = [wx, wy, wz, w]$ pro $w \in \mathbb{R}$, $w > 0$.

1.3 NURBS KŘIVKY A PLOCHY



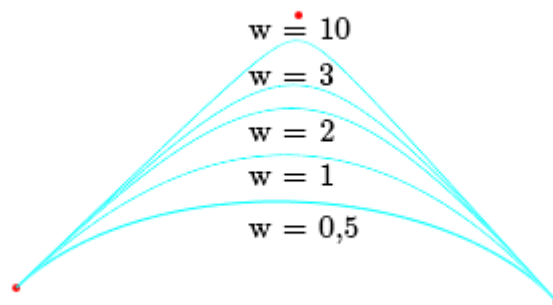
Obrázek 1.6: Reprezentace bodu kartézské soustavy v homogenních souřadnicích

Poznámka. Váhy bodů lze obecně uvažovat i záporné, viz [10], ale v práci se omezíme pouze na kladné hodnoty.

Definice 18. Pro řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, kterým jsou přiřazeny kladné váhy $\{w_0, \dots, w_n\}$, $w_i \in \mathbb{R}$ a uzlový vektor $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ je *NURBS křivka stupně p* určena předpisem

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w \implies \mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}, \quad u \in \langle u_0, u_m \rangle \quad (1.8)$$

kde $N_{i,p}$ jsou B-spline báze funkce stupně p .



Obrázek 1.7: Vliv váhy na tvar křivky

Věta 1. Rovnici (1.8) lze přepsat na tvar

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in \langle u_0, u_m \rangle \quad (1.9)$$

kde $R_{i,p}(u)$ jsou tzv. racionální bázové funkce tvaru

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} \quad (1.10)$$

Definice 19. NURBS plocha stupně p ve směru u a stupně q ve směru v vyjádřená pomocí homogenních souřadnic je tvaru

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w, \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle \quad (1.11)$$

a tedy

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle. \quad (1.12)$$

kde body $\mathbf{P}_{i,j}$, $i \in \langle 0, m \rangle$, $j \in \langle 0, n \rangle$ tvoří dvojrozměrnou řídicí síť, kladná reálná čísla $w_{i,j}$ jsou váhy a $N_{i,p}(u)$ a $N_{j,q}(v)$ jsou bázové funkce definované na uzlových vektorech $U = \{u_0, \dots, u_h\}$ a $V = \{v_0, \dots, v_k\}$.

Věta 2. Rovnici (1.12) lze přepsat na tvar

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,p;j,q}(u, v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle, \quad (1.13)$$

kde $R_{i,p;j,q}(u, v)$ jsou tzv. racionální bázové funkce tvaru

$$R_{i,p;j,q}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n N_{a,p}(u) N_{b,q}(v) w_{a,b}}, \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle. \quad (1.14)$$

1.4 Vlastnosti

V této části si uvedeme některé důležité vlastnosti B-spline a NURBS bázových funkcí, křivek a ploch. Protože NURBS jsou zobecněním B-spline (pro $w_0 = \dots = w_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$), sdílí většinu vlastností. Uvádím zde pouze některé důkazy, ostatní lze nalézt např. v [10, 11].

1.4.1 Vlastnosti bázových funkcí

Následující vlastnosti platí jak pro B-spline bázové funkce $N_{i,p}(u)$ definované rovnicí (1.5), tak pro racionální bázové funkce $R_{i,p}(u)$ definované rovnicí (1.10). Pro jednoduchost v textu uvádím pouze $N_{i,p}(u)$.

1.4 VLASTNOSTI

Věta 3 (Lokální podpora). *Bázová funkce $N_{i,p}(u)$ je nenulová na intervalu $\langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$ a nulová na intervalu $u \notin \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$*

Důkaz. $N_{i,1}(u)$ je lineární kombinací $N_{i,0}(u)$ a $N_{i+1,0}(u)$. Protože dle rovnice (1.5a) je funkce $N_{i,0}(u)$ nenulová na intervalu $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ a funkce $N_{i+1,0}(u)$ je nenulová na intervalu $\langle u_{i+1}, u_{i+2} \rangle$, tak $N_{i,1}(u)$ je nenulová na těchto dvou intervalech. Toto platí pro libovolné $p \geq 0$. \square

Věta 4 (Nezápornost). *$N_{i,p}(u) \geq 0$ pro všechna i, p a u .*

Důkaz. Zřejmé pro $p = 0$ z rovnice (1.5a). Dále předpokládáme, že $N_{i,p-1}(u) \geq 0$ pro $p \geq 0$ a libovolná, pevně zvolená i a u . Dle věty 3 platí $N_{i,p-1}(u) = 0$ pro $u \notin \langle u_i, u_{i+p} \rangle$. Pro $u \in \langle u_i, u_{i+p} \rangle$ je zlomek $\frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i}$ nezáporný. Dle předpokladu je funkce $N_{i,p-1}(u)$ nezáporná, a tedy první člen v (1.5b) je nezáporný. Toto platí ekvivalentně i pro druhý člen a tedy funkce $N_{i,p}(u)$ jsou nezáporné. \square

Věta 5. *Na libovolné uzlové rozteči $\langle u_j, u_{j+1} \rangle$ je nejvýše $p + 1$ bázových funkcí $N_{i,p}(u)$ nenulových. Konkrétně jde o funkce $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$.*

Věta 6. *Pro libovolnou uzlovou rozteč $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ platí $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$ pro všechna $u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle$.*

Věta 7. *Pro každý uzel násobnosti k je počet nenulových bázových funkcí stupně p nejvýše $p - k + 1$.*

Věta 8. *V uzlu násobnosti k má bázová funkce $N_{i,p}(u)$ spojitost C^{p-k} .*

1.4.2 Vlastnosti křivek

Poznámka. Pro každou b-spline křivku musí platit podmínka

$$m = n + p + 1, \quad (1.15)$$

kde p je stupeň, $n + 1$ počet řídicích bodů a $m + 1$ počet uzlů.

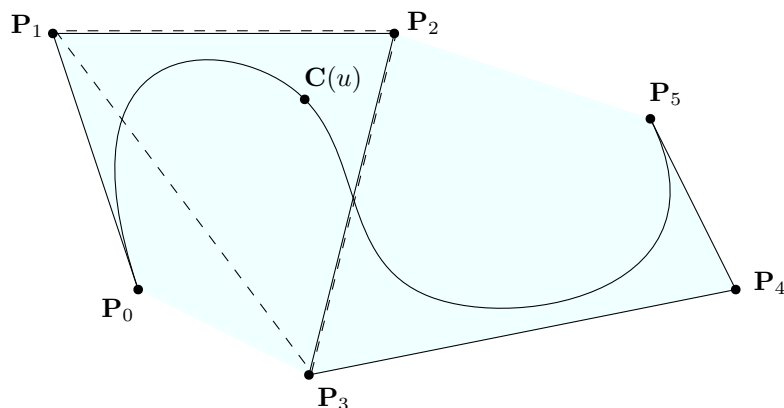
Věta 9 (Konvexní obal). *Křivka náleží konvexnímu obalu řídicího polygonu. Dále pokud $u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle$, potom $\mathbf{C}(u)$ náleží konvexnímu obalu řídicích bodů $\mathbf{P}_{i-p}, \mathbf{P}_{i-p+1}, \dots, \mathbf{P}_i$, viz obr. 1.8.*

Věta 10 (Lokální kontrolovatelnost). *Změna řídicího bodu \mathbf{P}_i ovlivní křivku $\mathbf{C}(u)$ pouze na intervalu $\langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$.*

Věta 11. *Křivka $\mathbf{C}(u)$ stupně p je C^{p-k} spojitá v bodě $\mathbf{C}(u_i)$, kde u_i je uzel násobnosti k .*

Věta 12. *Žádná přímka (resp. rovina) nemá více průsečíků s rovinnou (resp. prostorovou) křivkou než s jejím řídicím polygonem.*

Věta 13 (Invariance). *B-spline (resp. NURBS) křivky jsou afinně (resp. projektivně) invariantní.*



Obrázek 1.8: Křivka náleží konvexnímu obalu řídicího polygonu (modře), bod $C(u)$ pro $u \in \langle u_3, u_4 \rangle$ náleží konvexnímu obalu bodů $P_1P_2P_3$ (čárkovaně)

1.4.3 Vlastnosti ploch

Většina vlastností B-spline a NURBS ploch vyplývá z vlastností křivek popsaných výše. Pro jednoduchost opět $N_{i,p}(u)$ $N_{j,q}(v)$ značí jak B-spline bázové funkce, tak racionální bázové funkce $R_{i,p;j,q}(u,v)$ definované rovnicí 1.14.

Věta 14 (Nezápornost). $N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \geq 0$ pro všechna i, j, p, q, u a v .

Věta 15. Platí $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) = 1$ pro všechna $u \in \langle u_0, u_h \rangle$ a $v \in \langle v_0, v_k \rangle$.

Věta 16. $N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) = 0$ pokud $u \notin \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$ nebo $v \notin \langle v_j, v_{j+q+1} \rangle$.

Věta 17. Pro $u \in \langle u_{i_0}, u_{i_0+1} \rangle$ a $v \notin \langle v_{j_0}, v_{j_0+1} \rangle$ je nejvýše $(p+1)(q+1)$ bázových funkcí nenulových.

Věta 18 (Invariance). B-spline (resp. NURBS) plochy jsou afinně (resp. projektivně) invariantní.

Věta 19 (Konvexní obal). Pro $u \in \langle u_{i_0}, u_{i_0+1} \rangle$ a $v \in \langle v_{j_0}, v_{j_0+1} \rangle$ náleží bod $S(u, v)$ konvexnímu obalu řídicích bodů $P_{i,j}$, kde $i_0 - p \leq i \leq i_0$ a $j_0 - q \leq j \leq j_0$.

Věta 20 (Lokální kontrolovatelnost). Změna řídicího bodu $P_{i,j}$ (resp. váhy $w_{i,j}$) ovlivní plochu $S(u, v)$ pouze na intervalech $\langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$ a $\langle v_j, v_{j+q+1} \rangle$.

Věta 21. Plocha $S(u, v)$ je C^{p-s} (resp. C^{q-t}) spojitá ve směru u (resp. v) v bodě $S(u_i, v_j)$, pokud u_i (resp. v_j) je uzel násobnosti s (resp. t).

2 Rotační NURBS plochy

V rámci cílů této bakalářské práce jsem nastudoval teorii týkající se vytváření obecných NURBS křivek a ploch. V následující kapitole je vysvětlena tvorba rotačních NURBS ploch.

Rotační plocha $\mathbf{S}(u, v)$ vzniká rotačním pohybem tzv. *tvořící křivky* $\mathbf{C}(v)$ kolem osy rotace. Ve směru u vznikají tzv. *rovnoběžkové kružnice* (resp. kružnicové oblouky), ve směru v jsou to tvořící křivky. [7]

Nejprve je tedy potřeba odvodit vyjádření kružnic jako NURBS křivek, které budeme potřebovat pro zobrazení rovnoběžkových kružnic. Toto odvození, které je popsáno v části 2.1, jsem provedl ekvivalentně s [11]. Dále v části 2.2 odvodíme vztah pro plochu vzniklou rotací NURBS křivky $\mathbf{C}(v)$ podle [10].

2.1 Odvození kružnicových oblouků

Kružnici budeme vyjadřovat jako spojení kružnicových oblouků, kde každý je NURBS křivkou stupně 2 se třemi řídicími body, přitom požadujeme, aby procházel krajními body. Pro první oblouk tedy máme řídicí body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ s váhami $w_0 = 1, w_1$ a $w_2 = 1$ a uzlový vektor $\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$.

Obecně je kuželosečka zadána rovnicí o šesti neznámých ve tvaru

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (2.1)$$

Pro $F \neq 0$ můžeme rovnici vydělit F a získáváme rovnici o pěti neznámých tvaru

$$f : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1 = 0. \quad (2.2)$$

Poznámka. Pokud je $F = 0$, získáváme rovnou rovnici o pěti neznámých.

Protože oblouk prochází krajními body $\mathbf{P}_0 = [x_0, y_0]$ a $\mathbf{P}_2 = [x_2, y_2]$, získáváme

$$f(\mathbf{P}_0) = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + 1 = 0, \quad (2.3a)$$

$$f(\mathbf{P}_2) = ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + 1 = 0. \quad (2.3b)$$

Z definice 15 vyplývá, že spojnice bodů $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ jsou tečnami v krajních bodech \mathbf{P}_0 a \mathbf{P}_2 . Směrnice těchto tečen jsou tedy

$$k_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (2.4a)$$

$$k_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (2.4b)$$

Tyto směrnice lze také vyjádřit pomocí gradientu

$$\nabla f = (2ax + 2by + 2d, 2bx + 2cy + 2e) = (ax + by + d, bx + cy + e). \quad (2.5)$$

Směrnice mají potom tvar

$$k_0 = -\frac{ax_0 + by_0 + d}{bx_0 + cy_0 + e}, \quad (2.6a)$$

$$k_2 = -\frac{ax_2 + by_2 + d}{bx_2 + cy_2 + e}. \quad (2.6b)$$

Porovnáním rovnic (2.4) a (2.6) získáváme

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{ax_0 + by_0 + d}{bx_0 + cy_0 + e}, \quad (2.7a)$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{ax_2 + by_2 + d}{bx_2 + cy_2 + e}. \quad (2.7b)$$

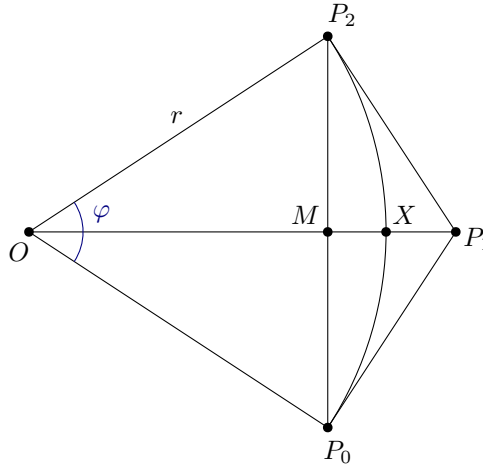
Zatím jsme tedy získali čtyři rovnice pro pět neznámých. Aby byl kružnicový oblouk jednoznačně určen, potřebujeme ještě další, pátou rovnici. Tuto rovnici získáme z vyjádření bodu na křivce pomocí rovnice (1.8). Obecně tedy dostáváme

$$\mathbf{C}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2u(1-u)w_1 \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2}{(1-u)^2 + 2u(1-u)w_1 + u^2}. \quad (2.8)$$

Nechť střed $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ je střed souřadného systému \mathbf{M} a tedy $\mathbf{P}_0 = -\mathbf{P}_2$, dále necht' φ je středový úhel kružnicového oblouku a $u = \frac{1}{2}$, potom

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{w_1}{1+w_1} \mathbf{P}_1. \quad (2.9)$$

Tuto situaci popisuje obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Kružnicový oblouk

Z pravoúhlého trojúhelníku \mathbf{OMP}_0 získáváme $|\mathbf{OM}| = r \cos(\varphi/2)$ a z pravoúhlého trojúhelníku $\mathbf{OP}_0\mathbf{P}_1$ získáváme $|\mathbf{OP}_1| = r / \sin(\varphi/2)$. Zřejmě

$$|\mathbf{MX}| = |\mathbf{OX}| - |\mathbf{OM}| = r - r \cos(\varphi/2) = r(1 - \cos(\varphi/2)), \quad (2.10)$$

a

$$|\mathbf{MP}_1| = |\mathbf{OP}_1| - |\mathbf{OM}| = \frac{r}{\cos(\varphi/2)} - r \cos(\varphi/2) = \frac{r(1 - \cos^2(\varphi/2))}{\cos(\varphi/2)}. \quad (2.11)$$

Dosazením rovnic (2.10) a (2.11) do rovnice (2.9) získáváme

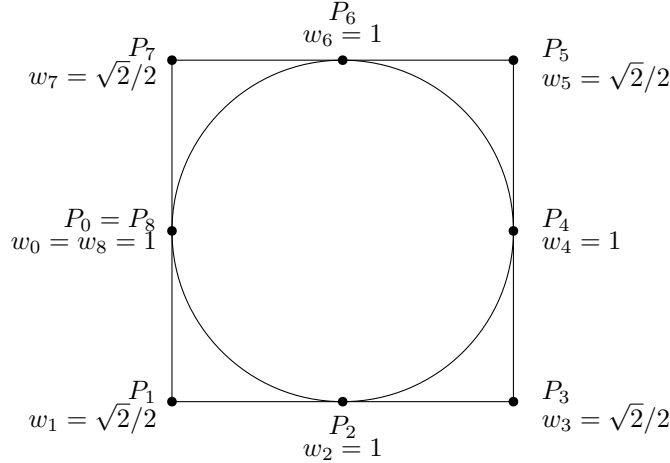
$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{P}_1} = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{M}}{\mathbf{P}_1 - \mathbf{M}} = \frac{|\mathbf{MX}|}{|\mathbf{MP}_1|} = \frac{w_1}{1+w_1} = \frac{\cos(\varphi/2)}{1 + \cos(\varphi/2)}. \quad (2.12)$$

2.2 ROTAČNÍ NURBS PLOCHY – ODVOZENÍ

Z tohoto vyplývá řešení

$$w_1 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (2.13)$$

Úplnou kružnici lze potom zobrazit například jako čtyři spojené kružnicové oblouky se středovými úhly $\varphi = 90^\circ$, řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_8$ tedy tvoří čtverec, viz obr. 2.2. Protože chceme, aby křivka procházela body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_6, \mathbf{P}_8$, uzlový vektor je $\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$.



Obrázek 2.2: Kružnice s řídicími body

2.2 Rotační NURBS plochy – odvození

Nechť $\mathbf{C}(v) = \sum_{j=0}^m R_{j,q}(v) \mathbf{P}_j$ je NURBS křivka stupně q na uzlovém vektoru V , $v \in V$. Křivku $\mathbf{C}(v)$ chceme rotovat kolem osy. Nechť tedy $\mathbf{C}(v)$ leží např. v rovině xy , osa rotace je shodná s osou y a úhel rotace je 360° . Pro plochu $\mathbf{S}(u, v)$, která vznikne touto rotací, zřejmě platí, že pro pevně zvolené \bar{u} je $\mathbf{S}(\bar{u}, v)$ tvořící křivka $\mathbf{C}(v)$ rotovaná o nějaký úhel kolem osy y a pro pevně zvolené \bar{v} je $\mathbf{S}(u, \bar{v})$ kružnice se středem na ose y ležící v rovině kolmé k této ose.

Při použití vyjádření kružnice z předchozí části 2.1, tedy pro uzlový vektor $U = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$ a váhy $w_i = \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$, má výsledná rotační plocha tvar

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,q}(u, v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad u \in U, v \in V \quad (2.14)$$

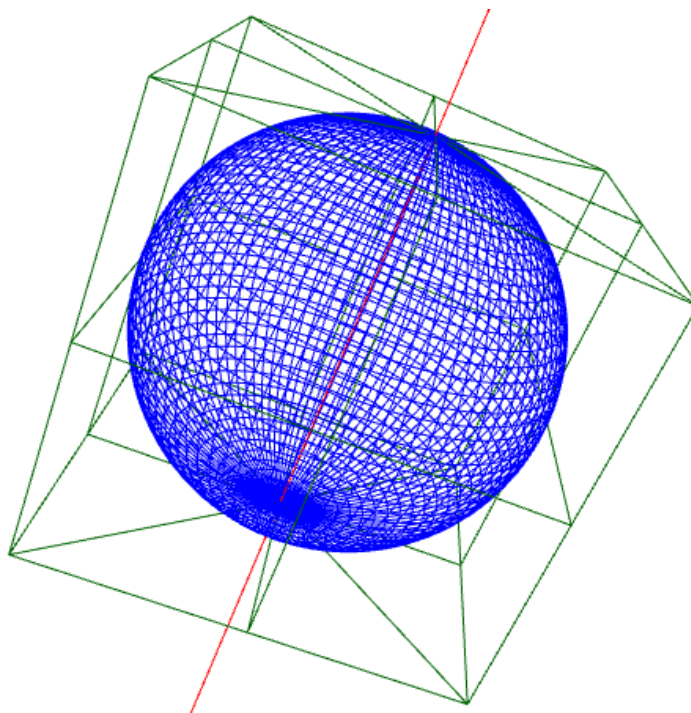
Velikost úhlu rotace φ určuje, kolik oblouků musíme vytvořit (hodnota n). Z toho lze poté určit úhel θ jako velikost těchto oblouků $\theta = \frac{\varphi}{n}$. Pro uzlový vektor U a váhy w_i platí:

$$\begin{aligned} \varphi \in (0^\circ, 90^\circ) : \quad n = 1, U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}, w_i = \{1, \cos(\theta/2), 1\}, \\ \varphi \in (90^\circ, 180^\circ) : \quad n = 2, U = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right\}, w_i = \{1, \cos(\theta/2), 1, \cos(\theta/2), 1\}, \\ \varphi \in (180^\circ, 270^\circ) : \quad n = 3, U = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1\right\}, \\ w_i = \{1, \cos(\theta/2), 1, \cos(\theta/2), 1, \cos(\theta/2), 1\}, \\ \varphi \in (270^\circ, 360^\circ) : \quad n = 4, U = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}, \\ w_i = \{1, \cos(\theta/2), 1, \cos(\theta/2), 1, \cos(\theta/2), 1, \cos(\theta/2), 1\} \end{aligned}$$

Obecně je tedy rotační plocha tvaru

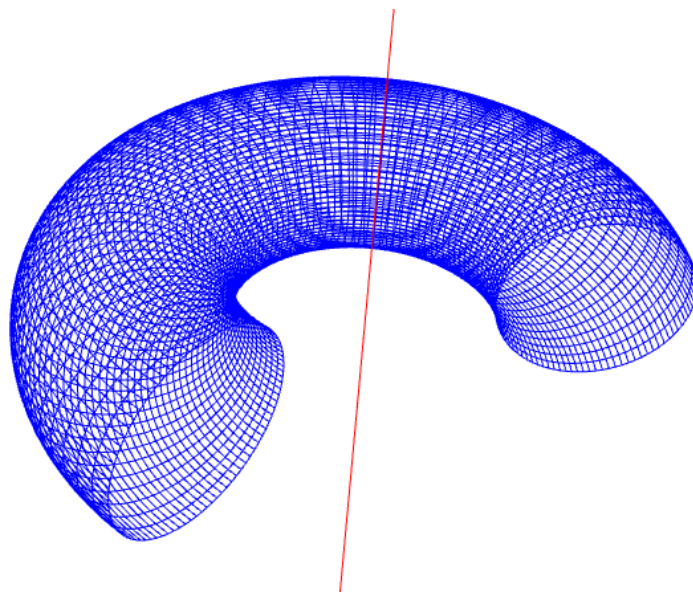
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,q}(u, v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad u \in U, v \in V \quad (2.15)$$

Ukázka rotačních ploch pro rotaci půlkružnice o úhel 360° a kružnice o 235° je na obr. 2.3 a 2.4.



Obrázek 2.3: Koule vzniklá rotací půlkružnice

2.2 ROTAČNÍ NURBS PLOCHY – ODVOZENÍ



Obrázek 2.4: Část anuloidu vzniklá rotací kružnice kolem osy s úhlem rotace $\varphi = 235^\circ$

3 Programová část

Součástí této bakalářské práce je program, který ze zadané NURBS křivky a osy rotace vytvoří rotační NURBS plochu. V této kapitole si uvedeme důležité algoritmy, které jsem použil.

3.1 Vytvoření uzlového vektoru

Připomeňme, že NURBS křivka musí splňovat rovnost $m = n + p + 1$. Je tedy potřeba zvolit, které dva z těchto tří prvků může uživatel u vstupní křivky ovlivnit. Protože práce s uzlovým vektorem je nejméně intuitivní, jako vstup do algoritmu jsem zvolil stupeň křivky p a počet řídicích bodů $n + 1$. Uzlový vektor generujeme pomocí algoritmu 1, který vytváří uniformní uzlový vektor pro sevřené křivky dle [11]. Podle části 2.1 potřebujeme pro zobrazení kuželoseček neuniformní uzlový vektor. Z tohoto důvodu může uživatel ručně upravit hodnoty automaticky vytvořeného uzlového vektoru.

Algoritmus 1 Generování uzlového vektoru

```

1: function GENERATEKNOTVECTOR( $n, p$ )
2:    $j = 1$ ;
3:   for  $i = 0, \dots, n + p + 2$  do
4:     if ( $i \leq p$ ) then
5:       knotVector [ $i$ ] = 0;
6:     else if ( $i \leq n$ ) then
7:       knotVector [ $i$ ] =  $j / (n - p + 1)$ ;
8:        $j++$ ;
9:     else
10:      knotVector [ $i$ ] = 1;
11:    end if
12:  end for
13:  return knotVector;
14: end function

```

3.2 De Boorův algoritmus

Pro výpočet bodů na křivce jsem zvolil tzv. de Boorův algoritmus [5, 11], který je rychlý a numericky stabilní, protože nepotřebuje výpočet básových funkcí. Tento algoritmus využijeme jak pro zadání vstupní křivky, tak pro zobrazení rotační plochy v prostoru.

3.2.1 De Boorův algoritmus pro NURBS křivku

Základní princip de Boorova algoritmu vyplývá z věty 7. Při zvýšení násobnosti uzlu u_i se snižuje počet nenulových básových funkcí na tomto uzlu. Pokud je násobnost rovna stupni p , existuje právě jedna nenulová básová funkce a její hodnota je rovna 1 (viz věta 6). Pokud $u = u_i$, je funkce $N_{i,p}(u)$ nenulová na intervalu $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ a bod křivky $\mathbf{C}(u)$ je ovlivněn právě jedním bodem \mathbf{P}_i (věta 10). Zřejmě tedy platí

$$\mathbf{C}(u) = N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \quad (3.1)$$

3.2 DE BOORŮV ALGORITMUS

De Boorův algoritmus využívá této vlastnosti – opakovaně vkládáme u do uzlového vektoru, dokud násobnost tohoto uzlu není p . Poslední vytvořený řídicí bod je totožný s bodem na křivce odpovídajícím u .

Pro řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, uzlový vektor $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ a stupeň p chceme do uzlového vektoru vložit nový uzel u tak, aby tvar křivky $\mathbf{C}(t)$ zůstal nezměněn. Předpokládejme, že nový uzel u leží v uzlové rozteči $\langle u_k, u_{k+1} \rangle$. Bod $\mathbf{C}(u)$ leží v konvexním obalu bodů $\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{k-1}, \dots, \mathbf{P}_{k-p}$ (věta 9) a bázové funkce pro všechny ostatní řídicí body jsou nulové (věta 3). Potřebujeme nalézt nové řídicí body $\mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_{k-1}, \dots, \mathbf{Q}_{k-p+1}$ takové, aby byl původní řídicí polygon $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ nahrazen polygonem $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{k-p}, \mathbf{Q}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k, \dots, \mathbf{P}_n$. Pro body \mathbf{Q}_i platí

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i) \mathbf{P}_{i-1} + a_i \mathbf{P}_i, \quad k - p + 1 \leq i \leq k, \quad (3.2a)$$

$$a_i = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i}. \quad (3.2b)$$

Analogicky s rovnicí (1.8) lze tuto rovnici přepsat pomocí homogenních souřadnic, tedy

$$\mathbf{Q}_i^w = (1 - a_i) \mathbf{P}_{i-1}^w + a_i \mathbf{P}_i^w, \quad k - p + 1 \leq i \leq k, \quad (3.3)$$

kde a_i splňuje (3.2b).

S ohledem na definici 15 a rovnice (3.1), (3.2b) a (3.3) lze De Boorův algoritmus pro NURBS křivku stupně p , kde $u \in \langle u_k, u_{k+1} \rangle$ a

$$s = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \neq u_k, \\ \text{násobnost uzlu } u_k & \text{pro } u = u_k, \end{cases} \quad (3.4)$$

zapsat pomocí algoritmu 2. V tomto algoritmu je potřeba nejdříve ošetřit speciální případy pro $u = 0$, $u = 1$ a $s = p$. Dále zde používáme funkci $\text{To4D}()$, která převádí bod do homogenních souřadnic $\mathbf{P}^w = [X, Y, Z, w] = [wx, wy, wz, w]$, a funkci $\text{To3D}()$, která převádí bod zpět do souřadnic kartézských $\mathbf{P} = [x, y, z] = [X/w, Y/w, Z/w]$.

Algoritmus 2 De Boorův algoritmus pro bod na NURBS křivce

```

1: function DEBOOR( $u, \{\mathbf{P}_i\}$ )
2:   if ( $u == 0$ ) then
3:     return  $\mathbf{C}(u) = \mathbf{P}_0$ ;
4:   end if
5:   if ( $u == 1$ ) then
6:     return  $\mathbf{C}(u) = \mathbf{P}_n$ ;
7:   end if
8:   if ( $s == p$ ) then
9:     return  $\mathbf{C}(u) = \mathbf{P}_k$ ;
10:  end if

11:  for  $i = k - p, \dots, k - s$  do
12:     $\mathbf{P}_{i,0}^w = \mathbf{P}_i.$ To4D();
13:  end for
14:  for  $r = 1, \dots, p - s$  do
15:    for  $i = k - p + r, \dots, k - s$  do
16:       $a_{i,r} = (u - u_i) / (u_{i+p-r+1} - u_i)$ ;
17:       $\mathbf{P}_{i,r}^w = (1 - a_{i,r}) \mathbf{P}_{i-1,r-1}^w + a_{i,r} \mathbf{P}_{i,r-1}^w$ ;
18:    end for
19:  end for
20:  return  $\mathbf{C}(u) = \mathbf{P}_{k-s,p-s}^w.$ To3D();
21: end function

```

3.2.2 De Boorův algoritmus pro bod NURBS plochy

Rovnici (1.11) lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^m N_{i,p}(u) \left(\sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w \right), \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle, \quad (3.5)$$

potom pro pevně zvolené i je člen v závorce NURBS křivkou definovanou řídicími body $\mathbf{P}_{i,j}$. Pokud tedy definujeme

$$\mathbf{Q}_i(v) = \sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle, \quad (3.6)$$

můžeme tyto body $\mathbf{Q}_i(v)$ získat de Boorovým algoritmem pro křivku uvedeným v části 3.2.1 a lze psát

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^m N_{i,p}(u) \mathbf{Q}_i(v), \quad u \in \langle u_0, u_h \rangle, \quad v \in \langle v_0, v_k \rangle. \quad (3.7)$$

Je zřejmé, že tyto body lze získat opět de Boorovým algoritmem pro křivku.

3.2 DE BOORŮV ALGORITMUS

De Boorův algoritmus pro bod NURBS plochy stupně p ve směru u a stupně q ve směru v definované na síti řídicích bodů $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ a uzlových vektorech $U = \{u_0, \dots, u_h\}$ a $V = \{v_0, \dots, v_k\}$ lze pro $u \in \langle u_c, u_{c+1} \rangle$, $v \in \langle v_d, v_{d+1} \rangle$,

$$a = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \neq u_c, \\ \text{násobnost uzlu } u_c & \text{pro } u = u_c, \end{cases}$$

a

$$b = \begin{cases} 0 & \text{pro } v \neq v_d, \\ \text{násobnost uzlu } v_d & \text{pro } v = v_d, \end{cases}$$

zapsat pomocí algoritmu 3.

Algoritmus 3 De Boorův algoritmus pro bod NURBS plochy

```

1: function DEBOORSURFACE( $u, v, \{\mathbf{P}_{i,j}\}$ )
2:   for  $i = c - p, \dots, c - a$  do
3:      $\mathbf{Q}_i = \text{DEBOOR}(v, \{\mathbf{P}_{i,d-q}, \dots, \mathbf{P}_{i,d-b}\});$ 
4:   end for
5:   return  $\mathbf{S}(u, v) = \text{DEBOOR}(u, \{\mathbf{Q}_{c-p}, \dots, \mathbf{Q}_{c-a}\});$ 
6: end function

```

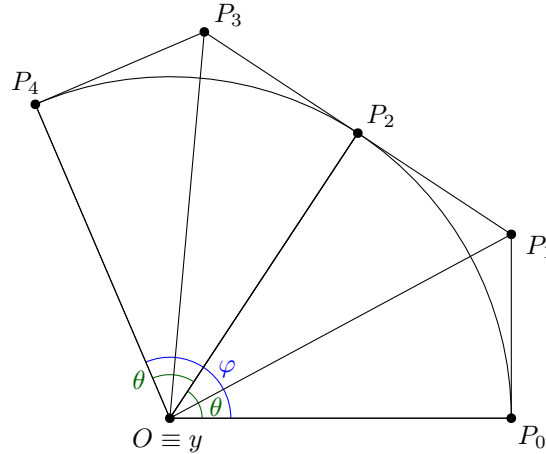
Poznámka. Stejně jako v případě de Boorova algoritmu pro křivku, je nutné nejdříve ošetřit speciální případy pro $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ a $v = 1$. To je popsáno v tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Speciální případy

$v \backslash u$	0	(0; 1)	1
0	$\mathbf{P}_{0,0}$	$\text{DeBoor}(u, \{\mathbf{P}_{i,0}\})$	$\mathbf{P}_{n,0}$
(0; 1)	$\text{DeBoor}(u, \{\mathbf{P}_{0,j}\})$	$\text{DeBoorSurface}(u, v, \{\mathbf{P}_{i,j}\})$	$\text{DeBoor}(u, \{\mathbf{P}_{n,j}\})$
1	$\mathbf{P}_{0,m}$	$\text{DeBoor}(u, \{\mathbf{P}_{i,m}\})$	$\mathbf{P}_{n,m}$

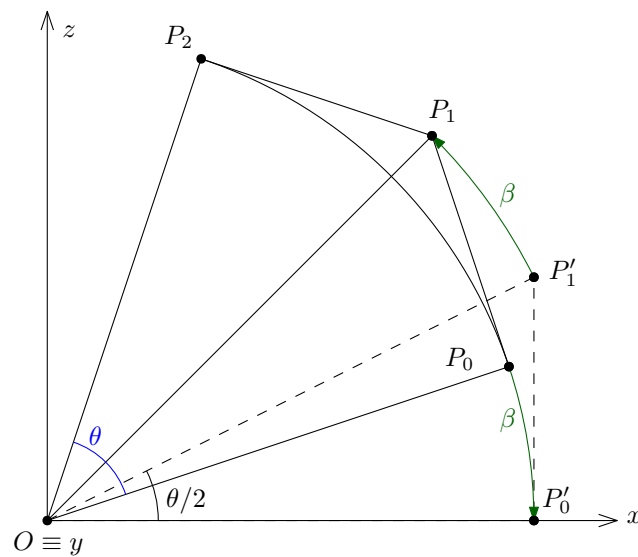
3.3 Zobrazení rovnoběžkových kružnic

NURBS křivky jsou afinně invariantní (viz věta 13), proto můžeme rotovat pouze řídicí body a na nich počítat výslednou křivku. Mějme tedy situaci, kdy chceme rotovat bod \mathbf{P}_0 o úhel φ . Potřebujeme tedy sestavit kružnicový oblouk se středovým úhlem φ . Rozdělme tento úhel na stejně velké úhly θ , tak, aby $\theta \leq 90^\circ$. Výsledný kružnicový oblouk bude spojením menších kružnicových oblouků se středovými úhly θ , viz obr. 3.1. Body $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4$, atd. získáme jednoduše rotací kolem osy y (funkce $\text{RotateY}(\mathbf{P}_0, \theta)$), viz rovnice (1.4).



Obrázek 3.1: Rozdělení kružnicového oblouku

Odvození souřadnic bodů $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3$, atd. ilustruje obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Odvození bodu \mathbf{P}_1

Nejdříve rotujeme bod \mathbf{P}_0 do bodu \mathbf{P}'_0 tak, že bod \mathbf{P}'_0 leží na ose x . Úhel této rotace je

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{z_0}{x_0} \right). \quad (3.8)$$

Potom souřadnice bodu \mathbf{P}'_0 jsou

$$x'_0 = x_0 \cos(-\beta) - z_0 \sin(-\beta), \quad (3.9a)$$

$$z'_0 = 0. \quad (3.9b)$$

3.4 PROGRAM

Z pravoúhlého trojúhelníka $\mathbf{OP}'_0\mathbf{P}'_1$ vypočítáme souřadnice bodu \mathbf{P}'_1 :

$$x'_1 = x'_0, \quad (3.10a)$$

$$z'_1 = x'_1 \tan(\theta/2). \quad (3.10b)$$

Bod \mathbf{P}'_1 rotujeme zpět o úhel β a získáváme souřadnice bodu \mathbf{P}_1

$$x_1 = x'_1 \cos(\beta) - z'_1 \sin(\beta), \quad (3.11a)$$

$$z_1 = x'_1 \sin(\beta) + z'_1 \cos(\beta). \quad (3.11b)$$

Dle rovnice (2.13) spočítáme váhu bodu \mathbf{P}_1

$$w_1 = w_0 \cos(\theta/2). \quad (3.12)$$

Tento postup, který provádí funkce `MiddlePoint(P, θ)`, opakujeme tolikrát, kolik je menších kružnicových oblouků se středovým úhlem θ . Celý kružnicový oblouk se středovým úhlem φ , resp. jeho řídicí polygon a uzlový vektor poté získáme pomocí algoritmu 4.

Algoritmus 4 Kružnicový oblouk

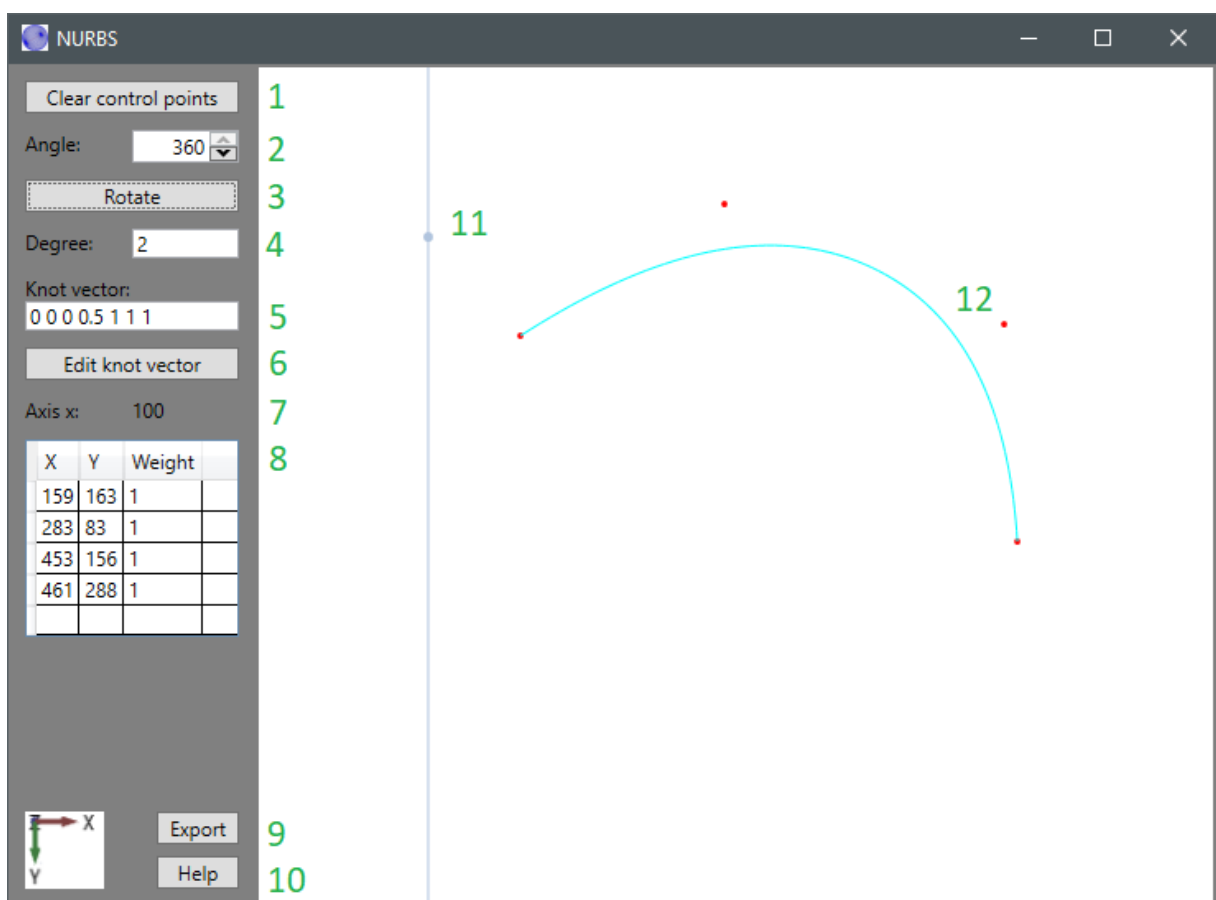
```
1: function ARC(P0, φ)
2:   P[0] = P0;
3:   if (φ ≤ 90) then
4:     arcs = 1;
5:     knotVector = {0, 0, 0, 1, 1, 1};
6:   else if (φ ≤ 180) then
7:     arcs = 2;
8:     knotVector = {0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1, 1, 1};
9:   else if (φ ≤ 270) then
10:    arcs = 3;
11:    knotVector =
12:      {0, 0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1};
13:   else if (φ ≤ 360) then
14:    arcs = 4;
15:    knotVector =
16:      {0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1};
17:   if arcs ≥ 1 then
18:     P[1] = MIDDLEPOINT(P[0], φ);
19:     P[2] = ROTATEY(P[0], φ);
20:   end if
21:   if arcs ≥ 2 then
22:     P[3] = MIDDLEPOINT(P[2], φ);
23:     P[4] = ROTATEY(P[2], φ);
24:   end if
25:   if arcs ≥ 3 then
26:     P[5] = MIDDLEPOINT(P[4], φ);
27:     P[6] = ROTATEY(P[4], φ);
28:   end if
29:   if arcs ≥ 4 then
30:     P[7] = MIDDLEPOINT(P[6], φ);
31:     P[8] = ROTATEY(P[6], φ);
32:   end if
33:   return P;
34: end function
```

3.4 Program

Zvolil jsem jazyk C#, což je moderní, jednoduchý, mnohoúčelový, objektově orientovaný programovací jazyk, vyvíjený společností Microsoft pro platformu .NET. Pro design uživatelského prostředí byla zvolena knihovna Windows Presentation Foundation (WPF), která je součástí .NET. Jedná se o nástupce knihovny Windows Forms, oproti které má řadu výhod (vektorová grafika, hardwarová akcelerace pomocí DirectX, atd.) [2]. Pro výstupní 3D okno jsem zvolil open-source knihovnu Helix Toolkit, která poskytuje jednoduché nástroje pro práci s 3D prostorem [12].

Při spuštění programu `NURBS.exe` se uživateli zobrazí vstupní okno, viz obr. 3.3, s následujícími ovládacími prvky:

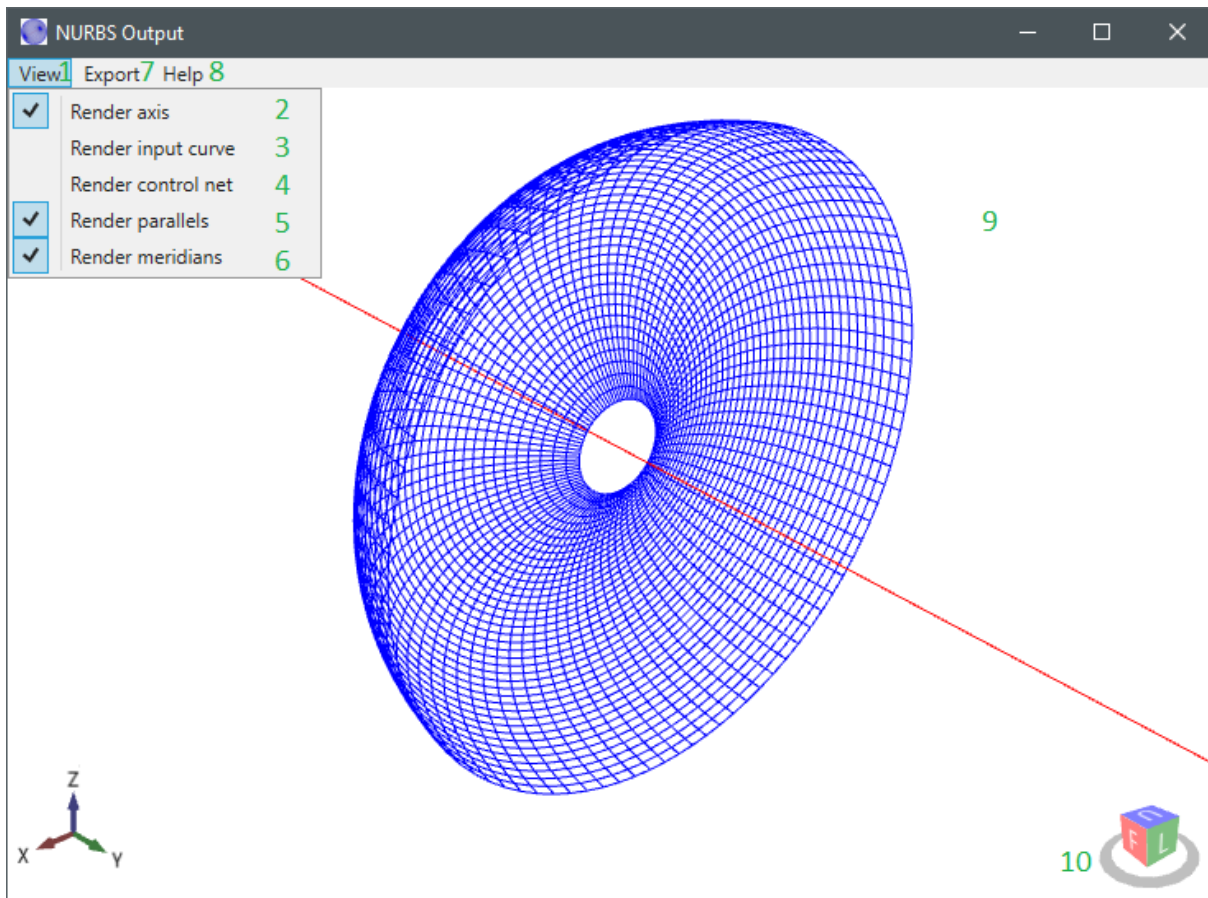
1. smaže všechny řídicí body,
2. nastavení úhlu rotace,
3. rotuje zadanou křivku (otevře výstupní okno),
4. stupeň křivky,
5. uzlový vektor,
6. možnost ruční úpravy uzlového vektoru,
7. x -ová souřadnice osy rotace,
8. tabulka popisující řídicí body (souřadnice, váha),
9. uloží zadanou křivku jako obrázek,
10. zobrazí nápovědu,
11. osa rotace (bod lze přesouvat pomocí myši),
12. křivka s řídicími body (lze přesouvat pomocí myši, mazat).



Obrázek 3.3: Vstupní okno programu

3.4 PROGRAM

Po stisknutí tlačítka **Rotate** se zobrazí výstupní okno s danou rotační plochou, viz obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Výstupní okno programu

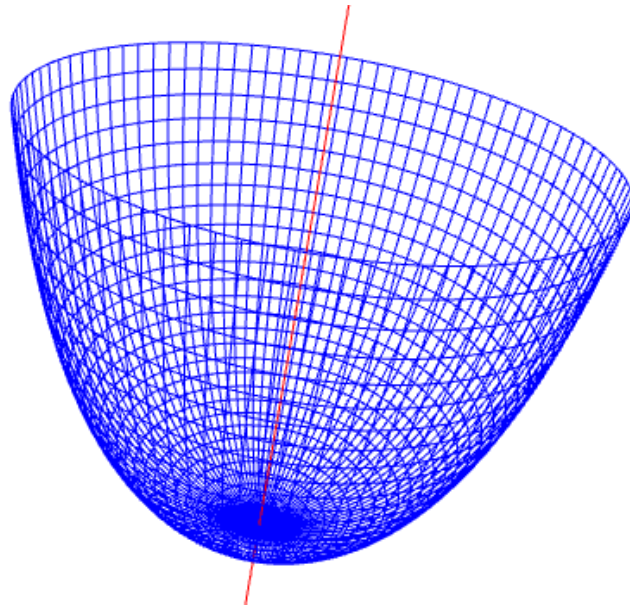
1. zobrazí menu voleb vykreslení,
2. vykreslí osu rotace,
3. vykreslí vstupní křivku,
4. vykreslí řídicí síť,
5. vykreslí rovnoběžkové kružnice,
6. vykreslí poledníky (rotované vstupní křivky),
7. uloží výslednou rotační plochu jako obrázek,
8. zobrazí nápovědu,
9. okno 3D prostoru,
10. ovládací kostka.

Poznámka. Vstupní okno používá běžný souřadný systém používaný v počítačové grafice (viz obr. 3.3 vlevo dole) – bod $[0; 0]$ se nachází vlevo nahoře. Výstupní okno přepočítává souřadnice tak, že osa rotace je shodná s osou y , souřadnice x zůstávají stejné.

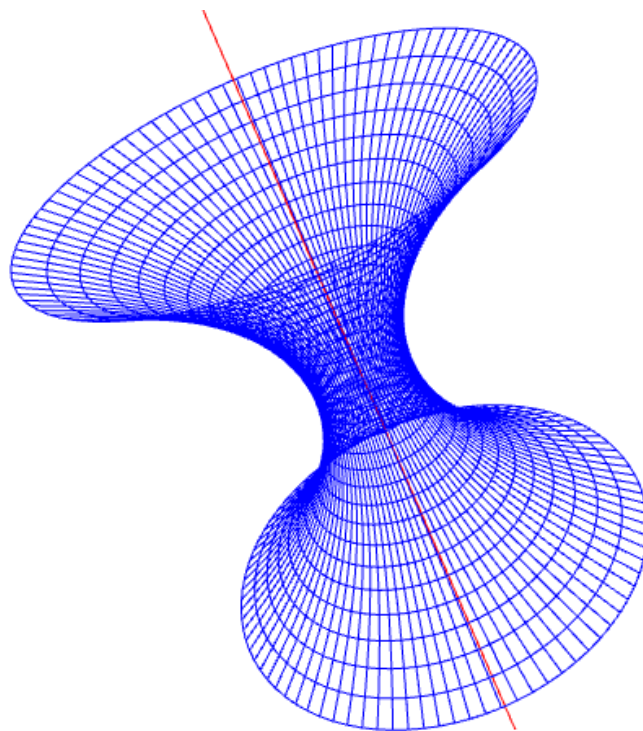
3.5 Výstupy programu

V této části jsou zobrazeny různé druhy rotačních ploch, které byly vytvořeny vytvořeným programem.

Na obr. 3.5 a 3.6 můžeme vidět kvadriky, konkrétně rotační paraboloid a hyperboloid, což jsou algebraické plochy 2. stupně.



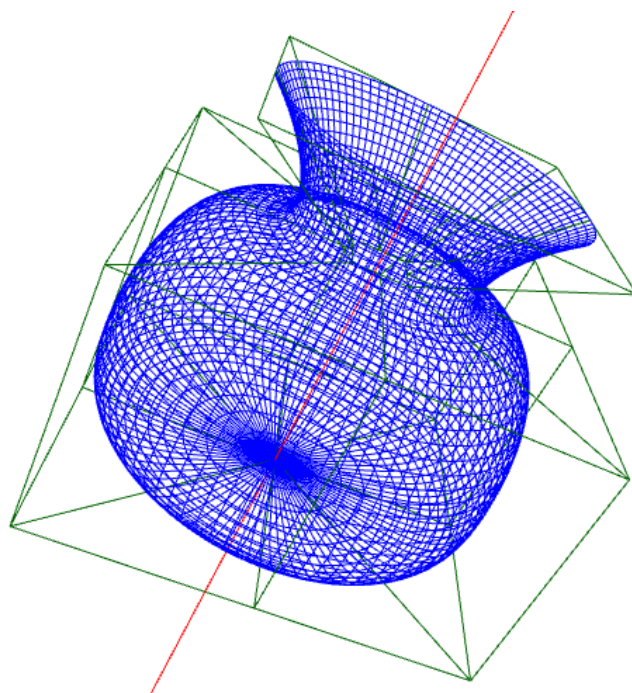
Obrázek 3.5: Rotační paraboloid



Obrázek 3.6: Rotační hyperboloid

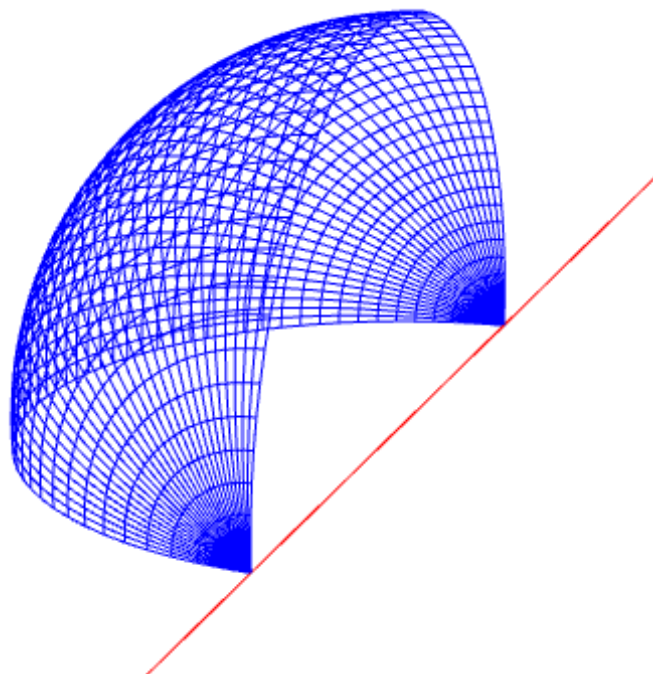
3.5 VÝSTUPY PROGRAMU

Na obr. 3.7 vidíme obecnou Rotační NURBS plochu, konkrétně model vázy včetně řídicí sítě.



Obrázek 3.7: „Váza“ se sítí řídicích bodů (zeleně)

V programu lze zadat libovolný úhel rotace $\varphi \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, můžeme tedy docílit například čtvrtkoule (obr. 3.8).



Obrázek 3.8: „Čtvrtkoule“

Závěr

Prvním cílem této bakalářské práce je shrnutí základních teoretických poznatků týkajících se obecných NURBS ploch. Nejprve je v části 1.1 zpracován matematický aparát – afinní a projektivní prostory a zobrazení na nich – potřebný při definici B-spline křivek a ploch a jejich racionálního rozšíření zvaného NURBS v částech 1.2 a 1.3. Dále jsou popsány vlastnosti těchto křivek a ploch v části 1.4.

V části 2.1 následuje odvození kružnicových oblouků jako NURBS křivek, kterého se využívá při tvorbě rotačních ploch. Jedná se o plochy, které vznikají rotací vstupní NURBS křivky kolem osy rotace. Pro ilustraci je v části 2.2 uvedeno několik příkladů rotačních NURBS ploch – anuloid, kulová plocha.

Dalším cílem práce bylo programové zpracování problematiky rotačních NURBS ploch a jejich zobrazení. Pro splnění tohoto cíle jsem vytvořil aplikaci `NURBS.exe` (viz příloha). V kapitole 3 jsem zpracoval důležité algoritmy a postupy – generování uzlového vektoru, De Boorův algoritmus a algoritmus pro vytváření rovnoběžkových kružnic. Dále je v části 3.4 popsáno ovládání aplikace a nakonec jsou v části 3.5 zobrazeny výsledky, které byly touto aplikací získány.

Literatura

- [1] Spline (mathematics). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics))
- [2] ALBAHARI, Joseph a Ben ALBAHARI. *C# 7. 0 in a Nutshell: The Definitive Reference*. Sebastopol: O'Reilly Media, Incorporated, 2017. ISBN 978-1-491-98765-0. Dostupné také z: <https://books.google.cz/books?id=HrE5DwAAQBAJ>
- [3] ČADEK, Martin. *Lineární algebra a geometrie III.* [online]. Brno, 2003 [cit. 2018-04-16]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~cadek/la3/SKRIPTA.pdf>
- [4] HORÁK, Pavel a Josef JANYŠKA. *Analytická geometrie* [online]. Brno, 2009 [cit. 2018-04-16]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~janyska/AFPR-H.pdf>
- [5] JANKAUSKAS, Kestutis. Time-Efficient Nurbs Curve Evaluation Algorithms. In: TARGAMADZE, Aleksandras, Rimantas BUTLERIS a Rita BUTKIENE, ed. *Information Technologies' 2010* [online]. Kaunas: Kaunas University of Technology, 2010, s. 60-69 [cit. 2018-04-03]. ISSN 2029-0020. Dostupné z: <http://isd.ktu.lt/it2010/material/>
- [6] JANYŠKA, Josef. *Geometrická zobrazení* [online]. 2018 [cit. 2018-04-16]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf>
- [7] LINKEOVÁ, Ivana. *Aplikovaná geometrie* [online]. Praha, 2015 [cit. 2018-04-16]. Dostupné z: <http://www.linkeova.cz/skripta/ApGeom/AppGeom.pdf>
- [8] MARTIŠEK, Dalibor. *Matematické principy grafických systémů*. Brno: Littera, 2002. ISBN 80-85763-19-2.
- [9] MARTIŠEK, Dalibor. 03 - Projektivní prostor. In: *Počítačová geometrie a grafika: Přednáška* [online]. Brno: ÚM FSI VUT v Brně, c2005, s. 34-57 [cit. 2018-04-16]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Prednaska/sc-1245-sr-1-a-261/default.aspx>
- [10] PIEGL, Les A. a Wayne TILLER. *The NURBS Book*. 2nd ed. New York: Springer, c1997. Monographs in visual communication. ISBN 35-406-1545-8.
- [11] SHENE, Ching-Kuang. *CS3621 Introduction to Computing with Geometry Course Notes* [online]. Michigan: Michigan Technological University, c1997-2014, Last update: May 4, 2011 [cit. 2018-04-03]. Dostupné z: <http://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>
- [12] *Helix Toolkit: 3D for .NET* [online]. c2018 [cit. 2018-04-04]. Dostupné z: <http://www.helix-toolkit.org/>

Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{R}	reálná čísla
\mathbf{A}, \mathbf{B}	matice
\mathbf{A}^T	transponovaná matice
\mathbf{u}, \mathbf{v}	vektory
A_n	afinní prostor
V_n	lineární prostor
E_n	Euklidovský prostor
P_n	projektivní prostor
$(A, B, C), (A, B, C, D)$	dvojpoměr tří, resp. čtyř bodů na přímce
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline (neuniformní racionální B-spline) křivky, resp. plochy
$\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i,j}$	body řídicího polygonu nebo řídicí sítě
\mathbf{P}^w	homogenní souřadnice bodu \mathbf{P}
$w_i, w_{i,j}$	váha bodu NURBS křivky resp. NURBS plochy
$N_{i,p}(u)$	B-spline báze funkce stupně p
$R_{i,p}(u)$	racionální báze funkce stupně p
U	uzlový vektor
u_i	uzel

Seznam příloh

Součástí práce je CD, které obsahuje:

- `NURBS.exe` – spustitelný soubor programu pro vytváření rotačních NURBS ploch
- `\src\` – adresář se zdrojovými soubory