VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÝ POPIS DYNAMICKÉHO VÝMĚNÍKU TEPLA

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF DYNAMIC HEAT EXCHANGER

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — **JIŘÍ HVOŽĎA**

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — **Ing. TEREZA BROŽOVÁ, Ph.D.**

SUPERVISOR

BRNO 2019

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Jiří Hvožďa**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**Ing. Tereza Brožová, Ph.D.**
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematický popis dynamického výměníku tepla

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Tepelný výměník je zařízení, které slouží k předávání tepla mezi teplejším a chladnějším médiem. Jeho konfigurace má výrazný vliv na proces předávání tepla, který je možné popsat pomocí diferenciálních rovnic. Vhodný popis této problematiky vede ke zlepšení jak samotného procesu, tak i výsledného produktu.

Cíle bakalářské práce:

V rámci bakalářské práce bude provedena rešerše řešitelnosti obyčejných diferenciálních rovnic. Dále bude studován dynamický tepelný výměník a jeho teplotní průběh v závislosti na čase. V práci bude zanedbán vliv polohy.

Seznam doporučené literatury:

BERGMAN, T. L. a INCROPERA, F. P. Fundamentals of heat and mass transfer. 7th ed. Hoboken, NJ: Wiley, c2011. ISBN 978-0470-50197-9.

HIRSCH, M. W., SMALE, S. a DEVANEY, R. L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. 3rd ed. Waltham, MA: Academic Press, c2013. ISBN 9780123820105.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato bakalářská práce se zabývá analýzou dynamického tepelného výměníku se zanedbáním vlivu polohy. Problém je popsán systémem obyčejných diferenciálních rovnic. V souvislosti s tím obsahuje nezbytný teoretický základ obyčejných diferenciálních rovnic a termomechaniky, rešerši řešitelnosti obyčejných diferenciálních rovnic a přehled typů tepelných výměníků dle různých hledisek.

Summary
This bachelor's thesis deals with an analysis of a dynamic heat exchanger, with neglect to position, described by the system of ordinary differential equations. It includes necessarily theoretical basis of ordinary differential eqations and thermomechanics, a study of ordinary differential eqations' solution existence, overview of types of heat exchangers according to various aspects.

Klíčová slova
obyčejná diferenciální rovnice, existence a jednoznačnost řešení obyčejné diferenciální rovnice, počáteční úloha, okrajová úloha, přenos tepla, součinitel prostupu tepla, tepelný výměník, tepelný výměník s polymerními dutými vlákny

Keywords
ordinary differential equation, existence and uniqueness for ordinary differential equation, initial value problem, boundary value problem, heat transfer, overall heat transfer coefficient, heat exchanger, polymeric hollow fiber heat exchanger

HVOŽĎA, Jiří. *Matematický popis dynamického výměníku tepla.* Brno, 2019. 50 s. Dostupné také z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116967. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Tereza Brožová.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Matematický popis dynamického výměníku tepla“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené práce dále prohlašuji, že jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení §11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně ....

Jiří Hvožďa

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat své vedoucí bakalářské práce Ing. Tereze Brožové, Ph.D. za její odborné vedení, cenné připomínky a rady. Dále bych chtěl poděkovat Laboratoři přenosu tepla a proudění za umožnění provedení praktického měření, především Erikovi Bartuliovi za pomoc při experimentu. Také svým kolegům spolužákům Apoleně Šustkové a Róbertu Brachnovi, že jsem si s nimi mohl promluvit o své práci. V neposlední řadě děkuji své rodině, Vlastě a Adamu Hvožďovým, Vlastě a Jaroslavu Kundrátovým za veškerou podporu, kterou mi poskytují nejen během studia, ale celého života.

.....

Jiří Hvožďa

Obsah

Úvod **12**

1 Obyčejné diferenciální rovnice **13**
1.1 Počáteční problém a existence řešení ODR1 . . . 13
1.2 Počáteční problém a existence řešení ODRn . . . 14
1.3 Počáteční problém a existence řešení SODR1 . . . 15
1.4 Okrajová úloha, existence řešení okrajové úlohy . . . 15

2 Základní pojmy termomechaniky **20**
2.1 Základní pojmy termodynamiky . . . 20
2.1.1 Termodynamické zákony . . . 21
2.2 Přenos tepla . . . 22
2.2.1 Způsoby přenosu tepla . . . 22
2.2.2 Pojmy související s hydromechanikou . . . 23

3 Tepelné výměníky **26**
3.1 Přehled výměníků tepla . . . 26
3.1.1 Dělení výměníků z hlediska způsobů předávání tepla . . . 26
3.1.2 Dělení výměníků z hlediska procesu přenosu tepla . . . 26
3.1.3 Dělení výměníků z hlediska vzájemného proudění médií . . . 26
3.1.4 Dělení rekuperátorů z hlediska geometrie konstrukce . . . 27
3.1.5 Dělení výměníků z hlediska mechanismu přenosu tepla . . . 28
3.2 Matematický popis dynamického tepelného výměníku . . . 28
3.2.1 ODR tepelného výměníku . . . 28
3.2.2 Určení součinitele prostupu tepla . . . 30
3.2.3 Účinnost tepelného výměníku . . . 34

4 Tepelný výměník s polymerními dutými vlákny **35**
4.1 Měření . . . 35
4.2 Teplotní průběh . . . 39

Závěr **41**

Literatura **42**

Seznam obrázků **45**

Seznam tabulek **45**

Seznam použitých zkratek a symbolů **46**

5 Apendix **48**

6 Vztahy pro analýzu dat **50**

Úvod

Tepelný výměník je zařízení sloužící k přenosu tepla mezi dvěma (nebo více) médii. Průběh teploty ve výměníku bývá zpravidla vyjádřen pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Při zanedbání vlivu polohy se může popis teploty ve výměníku vyjádřit pomocí soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Kvůli zafixování bodu, ve kterém je teplota pozorována, dochází ke ztrátě informací z okolí bodu. Na druhou stranu, problém je snadno řešitelný pomocí tradičních metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic, nebo pomocí numerických metod, které fungují velmi spolehlivě.

V práci se obecně uvažuje nestacionární děj, tedy takový, kdy teplota výměníku není proměnná v čase. Řešení zjednodušené soustavy nám poskytuje cenné informace o ustálení systému, přechodu mezi dějem nestacionárním a stacionární. Ukazuje se, že tepelné výměníky s polymerními dutými vlákny, jsou skvělou volbou v situacích, kdy je zapotřebí rychlá reakce na změnu teploty.

Práce je dělena do čtyř kapitol. První kapitola obsahuje základní pojmy teorie obyčejných diferenciálních rovnic a rešerši existence a jednoznačnosti jejich řešení. Ve druhé kapitole je shrnuta teorie týkající se termomechaniky, jedná se především o termodynamické zákony a pojmy vysvětlující přenos tepla. Třetí kapitola se skládá z přehledu typů výměníků a spojení poznatků z první a druhé kapitoly pro odvození vztahů pro matematický popis tepelného výměníku. Tepelnému výměníku s polymerními dutými vlákny, aplikaci rovnic z třetí kapitoly na konkrétní příklad a vyhodnocení měření je věnována čtvrtá kapitola.

1 Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice (budeme značit zkratkou ODR) je rovnice, jejíž neznámá je funkce jedné proměnné, a která obsahuje derivace této neznámé funkce podle jedné proměnné. Rovnice tohoto typu hrají zásadní roli při modelování mnoha technických a přírodovědných problémů, výpočtů týkajících se pružnosti a pevnosti materiálů, řízení jaderných reakcí, šíření tepla, apod.

Z převážné části matematického aparátu se věnujeme problematice počáteční úlohy, jedná se totiž o stavební pilíř teorie ODR, navíc, právě pomocí počátečního problému popíšeme teplotní průběh v závislosti na čase, se zanedbáním vlivu polohy, dynamického tepelného výměníku (viz. kapitola 3). Výsledná funkce nám ukazuje, jak se bude systém vyvíjet v závislosti na počáteční podmínce, kterou je rovnice doplněna. Dalším typem úlohy je úloha okrajová, která hraje velmi důležitou roli v technické praxi. Je doplněna podmínkami na hranici. V mechanice může okrajový problém popisovat průhyb nosníku, kde okrajové podmínky předepsané na jeho koncích popisují velikosti sil a momentů. V termomechanice popisuje přenos tepla v ustáleném stavu, okrajové podmínky vyjadřují teplotu, tepelný tok na hranici. Dále formalizujme základní pojem ODR.

Definice 1.1. *Buďte $n \in \mathbb{N}$, $y^{(i)}$ i-tá derivace funkce y, $i = 1, 2, \ldots, n$. Funkci $(n+2)$ proměnných ve tvaru*

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnici řádu n.

V celé této kapitole uvažujeme, že $n \in \mathbb{N}$, nebudeme to již dále uvádět. Aby tyto rovnice měly řešení určeno jednoznačně, je třeba s danou rovnicí uvažovat i doplňující podmínky, jejichž počet je roven řádu rovnice [1].

V textu se postupně budeme věnovat ODR1, ODRn a SODR1 (soustava diferenciálních rovnic 1. řádu). Uvedeme počáteční a okrajové úlohy, důležitá tvrzení týkající se existence řešení a vztahu ODRn a SODR1. Důkazy nejsou součástí práce, uvádíme zdroje, kde jsou k nalezení. Velkou roli v řešitelnosti okrajových úloh ODR hrají takzvané lineární ODR.

Definice 1.2. [2] *Buď $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right)$ ODRn, řekneme, že tato rovnice je lineární (značíme LODRn), jestliže je lineární vzhledem ke hledané funkci y a ke všem jejím derivacím $y', y'', \ldots, y^n$.*

1.1 Počáteční problém a existence řešení ODR1

Nejprve uveďme definici počáteční úlohy. Původ názvu úlohy plyne z toho, že se podmínka zpravidla předepisuje v bodě, který představuje časový počátek [2]. Okrajovou úlohu nemá v ODR1 smysl uvažovat.

Definice 1.3. [3] *Nechť Ω je oblast v rovině $\mathbb{R}^2$ a (x_0, y_0) bod v oblasti Ω. Diferenciální rovnici doplněnou podmínkou v bodě x_0*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.1}$$

nazveme počáteční úlohou prvního řádu. Kde $f(x, y)$ je daná funkce definovaná v oblasti Ω.

Řešením úlohy (1.1) rozumíme funkci $y(x)$ definovanou na otevřeném intervalu I obsahující bod x_0, která má spojitou derivaci na I, tj. $y \in C^1(I)$, a která ve všech bodech intervalu I splňuje rovnost

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

V problematice řešení ODR se potýkáme s problémem, že existují jen některé typy úloh (např. lineární ODR), které můžeme analyticky vyřešit. Navíc reálné děje těmito typy v mnoha případech popsat nejdou, proto se neobejdeme bez řešení přibližného (numerického). Informace, zda-li nějaké řešení existuje, je velmi vhodná při numerickém řešení [1]. K zjištění těchto skutečností nám poslouží Peanova věta a Picardova věta. V těchto tvrzení se vyskytují pojmy spojitost (definice 5.1) a lipschitzovskost (definice 5.2 a poznámka 5.3), které uvádíme v apendixu práce.

Věta 1.4 (Peanova Věta)**.** [2] *Nechť funkce $f(x, y)$ definovaná v $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je spojitá v okolí bodu $(x_0, y_0) \in \Omega$. Potom úloha* (1.1) *má řešení $y(x)$ v okolí bodu x_0.*

Věta 1.5 (Picardova Věta)**.** [3] *Nechť funkce $f(x, y)$ definovaná na Ω je spojitá a navíc lipschitzovská v proměnné y v okolí bodu (x_0, y_0). Potom existuje okolí I bodu x_0, na kterém existuje právě jedno řešení úlohy* (1.1)*.*

Důkazy obou vět spočívají v konstrukci posloupnosti přibližných řešení [3]. Je nutné ukázat, že posloupnost konverguje, a že její limita je řešení úlohy (1.1). K samotnému důkazu Peanovy věty je zapotřebí věta Arzelàova-Ascoliho, k důkazu věty Picardovy je zapotřebí věta Banachova o pevném bodu kontraktivního zobrazení. Viz. [3], [4], [5], [6].

1.2 Počáteční problém a existence řešení ODRn

Je zřejmé, že v mnoha technických odvětvích by ODR1 nebyly dostatečné, potřebujeme pracovat i s dalšími derivacemi modelujícími zrychlení, moment, tepelný tok apod. Proto je nutné umět pracovat s ODRn. Nejprve uvedeme pojem počáteční úlohy.

Definice 1.6. *Nechť Ω je oblast $\mathbb{R}^{n+1}$ a $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ bod v oblasti Ω, diferenciální rovnici doplněnou podmínkou v bodě x_0*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)}(x_0) = \gamma_k \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.2}$$

nazveme počáteční úlohou n. řádu. Kde $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ je daná funkce v oblasti Ω.

Pro počáteční úlohu (1.2) platí analogická věta k větám 1.4, 1.5.

Věta 1.7 (O existenci a jednoznačnosti řešení ODRn)**.** [3] *Nechť funkce $f(x, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ je spojitá v okolí bodu $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Potom existuje řešení úlohy* (1.2) *v okolí x_0. Nechť funkce $f(x, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ je navíc i lipschitzovská v proměnných $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ v okolí bodu $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Potom řešení úlohy* (1.2) *je určeno jednoznačně.*

1.3 Počáteční problém a existence řešení SODR1

Silnou metodou při řešení nových problémů je převedení problému na úlohu, kterou dokážeme vyřešit. V této části ukážeme, že libovolný počáteční problém ODRn můžeme převést na počáteční problém SODR1. Pokračujme definicí počátečního problému SODR1.

Definice 1.8. *Nechť Ω je oblast $\mathbb{R}^{n+1}$ a $(x_0, \boldsymbol{\gamma})$ bod v oblasti Ω, soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu doplněnou podmínkami v bodě x_0*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma} \tag{1.3}$$

nazveme počáteční úlohou pro soustavu n rovnic prvního řádu. Kde $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, I otevřený interval obsahující x_0, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y}' = (y_1', \ldots, y_n')$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorové funkce.

Řešením úlohy (1.3) na intervalu I rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $y_i \in C^1(I)$ pro všechna $x \in I$.

Dokažme, že libovolný počáteční problém ODRn lze převést na počáteční problém SODR1 [2]. Mějme počáteční úlohu ODRn.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)}(x_0) = \gamma_k \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.4}$$

Zaveďme transformaci

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad y_3 := y'', \ldots, \quad y_n := y^{(n-1)}.$$

Úlohu (1.4) převedeme na soustavu.

$$\begin{array}{rcl|rcl} y_1' & = & y_2 & y_1(x_0) & = & \gamma_0 \\ y_2' & = & y_3 & y_2(x_0) & = & \gamma_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n-1}' & = & y_n & y_{n-1}(x_0) & = & \gamma_{n-2} \\ y_n' & = & f(x, y_1, \ldots, y_n) & y_n(x_0) & = & \gamma_{n-1} \end{array}$$

Je zřejmé, že se jedná o počáteční problém soustavy n rovnic prvního řádu. Navíc je možné libovolný počáteční problém soustavy ODRn převést na počáteční problém SODR1 [3]. Dále poznamenejme, že opačná implikace tohoto tvrzení obecně neplatí.

Věta 1.9 (O existenci a jednoznačnosti řešení SODR1)**.** [3] *Nechť každá složka $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ vektorové funkce $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ je spojitá v okolí bodu $(x_0, \boldsymbol{\gamma})$, $i = 1, 2, \ldots n$. Potom existuje řešení úlohy* (1.3) *v okolí x_0. Nechť každá složka $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ vektorové funkce $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ je navíc i lipschitzovská v proměnných $y_1, \ldots, y_n$ v okolí bodu $(x_0, \boldsymbol{\gamma})$. Potom řešení $\boldsymbol{y}(x)$ úlohy* (1.3) *je určeno jednoznačně.*

1.4 Okrajová úloha, existence řešení okrajové úlohy

Okrajová úloha se od počátečního problému liší tím, že podmínky předepisujeme ve více bodech, na hranici. V případě deformace (resp. ohřevu) tenké tyče se jedná o levý a pravý

konec tyče. U počáteční úlohy existuje v podstatě jediný možný způsob zadání počátečních podmínek [3]. U okrajových úloh existuje více variant. Požadujeme, aby počet podmínek byl roven řádu diferenciální rovnice. Pro názornost rozmanitosti podmínek uveďme rovnici 2. řádu $y'' = f(x, y, y')$ na intervalu $J = (a, b)$. Na každém konci intervalu J můžeme předepsat jednu ze tří podmínek:

Podmínka	Matematický zápis
Dirichletova	$y(a) = A_d$
Neumannova	$y'(a) = A_n$
Robinova (Newtonova)	$y'(a) + \alpha y(a) = A_r$

Tabulka 1.1: Příklady okrajových podmínek rovnice 2. řádu.

Dostáváme devět kombinací okrajových podmínek pro rovnici 2. řádu, to ale nejsou všechny. Obecně můžeme uvažovat i nelineární kombinace podmínek ve tvaru

$$f\left(y(a), y'(a), y(b), y'(b)\right) = A,$$

například: $\left(y'(a)\right)^2 + \left(y(a)\right)^2 = A$, $y'(a)y(a) = A$, $y'(a) = \sin\left(y(a)\right)$ [3]. V případě, kdy neznámá $y(x)$ má význam vedení tepla, pak A_d předepisuje teplotu v místě a, A_n předepisuje tepelný tok v místě a a A_r popisuje závislost tepelného toku na teplotě v místě a. $A, \alpha, A_d, A_n, A_r \in \mathbb{R}$. Formulace a tvar podmínek závisí na fyzikální interpretaci problému. Uveďme definici okrajové úlohy ODRn obsahující všechny varianty okrajových podmínek (i nelineárních).

Definice 1.10. *Nechť Ω je oblast $\mathbb{R}^{2n+1}$ a interval $J = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Diferenciální rovnici*

$$y^{(2n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}\right) \tag{1.5}$$

doplněnou podmínkami v bodech a, b

$$f_i\left(y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)\right) = A_i, \quad f_i\left(y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)\right) = B_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

nazveme okrajovou úlohou $2n$. řádu. Kde $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ je daná funkce v oblasti Ω, $A_i, B_i \in \mathbb{R}$.

U počáteční úlohy jsme měli věty, které stanovovaly řešitelnost a jednoznačnost úloh jen na základě spojitosti a lipschitzovskosti. U okrajových problémů takové věty nemůžeme jednoduše vyslovit. Mimo jiné je to způsobeno tím, že i jedna úloha může mít v závislosti na okrajových podmínkách jedno, žádné, nebo nekonečně mnoho řešení [2], [3], [7]. Uveďme jednoduchý příklad, který tento fakt demonstruje:

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(b) = B_d. \tag{1.6}$$

Obecné řešení úlohy (1.6) má tvar $y(x) = c_1 \cos(x\pi) + c_2 \sin(x\pi)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, po dosazení první podmínky dostáváme $y(x) = c_2 \sin(x\pi)$. Naše pozorování zanesme do tabulky 1.2.

Tyto úvahy vedou na myšlenku, zda-li by okrajová úloha nešla převést na počáteční problém, kde existenci řešení můžeme snadno ověřit [8]. Dále se omezme pouze na lineární

b	B_d	$y(b)$	počet řešení
$\in \mathbb{Z}$	$\neq 0$	$B_d = c_2 0$	žádné
$\in \mathbb{Z}$	$= 0$	$0 = c_2 0$	nekonečně mnoho
$\notin \mathbb{Z}$	$\in \mathbb{R}$	$B_d = c_2 \sin(b\pi)$	právě jedno

Tabulka 1.2: Různý počet řešení okrajové úlohy.

úlohy, okrajový problém doplněný lineárními okrajovými podmínkami. Skutečně existuje metoda přesunu okrajových podmínek [8]. Myšlenku této metody ukažme na příkladu okrajové úlohy LODR2, s libovolnou kombinací okrajových podmínek z tabulky 1.1 na intervalu $J = (a, b)$. Uvažujme množinu řešení diferenciální rovnice, která splňuje pouze jednu z okrajových podmínek. Tato podmínka vytváří vazbu mezi konstantami, na nichž závisí obecné řešení, a uvažovaná množina řešení bude tak záviset jen na jedné konstantě. Pomocí derivace můžeme tuto konstantu vyloučit. Každé řešení naší diferenciální rovnice bude splňovat v každém bodě intervalu J diferenciální rovnici 1. řádu, která bude také lineární. Řešení dané rovnice splňující pouze jednu z okrajových podmínek bude tedy splňovat okrajovou podmínku stejného typu v libovolném bodě intervalu J. Takto jsme přesunuli jednu z okrajových podmínek do libovolného bodu intervalu J, tedy všechny podmínky můžeme přesunout do jednoho bodu a řešit počáteční problém. Nyní tento myšlenkový pochod na základě [8] zformalizujme.

Věta 1.11 (O přesunu okrajové podmínky SLODR1)**.** *Mějme okrajovou úlohu SLODR1 na intervalu $J = (a, b)$ ve tvaru*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \tag{1.7}$$

s okrajovými podmínkami

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}. \tag{1.8}$$

Kde $\boldsymbol{U}$ je matice (typu $n \times n$) koeficientů soustavy spojitých na J, $\boldsymbol{f}$ je vektor (délky n) pravých stran spojitých na J, $\boldsymbol{A}$, resp. $\boldsymbol{B}$ je matice maximální hodnosti (typu $n_1 \times n$, resp. $n_2 \times n$) s reálnými prvky, $\boldsymbol{a}$, resp. $\boldsymbol{b}$ je vektor (délky n_1, resp. n_2) s prvky $\in \mathbb{R}$, $n_1 + n_2 = n$. Nechť dále matice $\boldsymbol{R}(x)$, resp. $\boldsymbol{Z}(x)$ typu $n_1 \times n$, resp. $n_2 \times n$ je definován diferenciální rovnicí

$$\boldsymbol{R}' = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}(x), \quad resp.\ \boldsymbol{Z}' = -\boldsymbol{Z}\boldsymbol{U}(x),$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{R}(a) = \boldsymbol{A}, \quad resp.\ \boldsymbol{Z}(b) = \boldsymbol{B}.$$

A konečně $\boldsymbol{r}$, resp. $\boldsymbol{z}$ je vektor délky n_1, resp. n_2 definovaný

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{f}(x), \quad resp.\ \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{Z}(x)\boldsymbol{f}(x),$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{a}, \quad resp.\ \boldsymbol{z}(b) = \boldsymbol{b}.$$

Pak pro libovolné $x_0 \in J$ sestavíme soustavu n rovnic

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}(x_0) \\ \boldsymbol{Z}(x_0) \end{pmatrix} \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}(x_0) \\ \boldsymbol{z}(x_0) \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

soustava (1.9) *má jedno řešení právě tehdy, když okrajová úloha* (1.7) *s podmínkami* (1.8) *má jedno řešení. Soustava* (1.9) *nemá řešení právě tehdy, když okrajová úloha* (1.7) *s podmínkami* (1.8) *nemá řešení. Navíc, jestliže okrajová úloha* (1.7) *s podmínkami* (1.8) *má řešení $\boldsymbol{y}(x)$, pak vektor $\boldsymbol{y}(x_0)$ je řešením rovnice* (1.9)*. Naopak soustava* (1.9) *má řešení $\boldsymbol{\zeta}$, pak vektor $\boldsymbol{y}(x)$, určen jako řešení rovnice* (1.7) *s počátečními podmínkami $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{\zeta}$, je řešením okrajové úlohy* (1.7) *s podmínkami* (1.8)*.*

Ukázali jsme, jak pro každou okrajovou úlohu SLODR1 vyšetřit existenci a jednoznačnost řešení. V podkapitole 1.3 jsme ukázali, že libovolný počáteční problém ODRn lze převést na počáteční problém SODR1. Pomocí podobných postupů naznačme převod okrajové úlohy LODRn na SLODR1. Mějme diferenciální rovnici (1.5), která je lineární. Doplňme ji lineárními okrajovými podmínkami ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y^{(i)}(a) = A_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y^{(i)}(b) = B_i, \quad \alpha_i, \beta_i, A_i, B_i \in \mathbb{R},$$

tak, že platí

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i| > 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} |\beta_i| > 0. \tag{1.10}$$

Požadavek (1.10) klademe, aby nedošlo k situaci, kdy všechna α_i, nebo β_i jsou rovny nule. Dále zaveďme stejnou transformaci jako v podkapitole 1.3, tedy

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad y_3 := y'', \ldots, \quad y_n := y^{(n-1)}. \tag{1.11}$$

Rovnici (1.5) převedeme na soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{2n-1}' & = & y_n \\ y_{2n}' & = & f(x, y_1, \ldots, y_{2n}) \end{array} \quad \text{, doplněnou okrajovými podmínkami}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_{i+1}(a) = A_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_{i+1}(b) = B_i.$$

Shrňme poznatky, které nám dávají návod pro vyšetření existence jednoznačnosti řešení okrajové úlohy LODRn. Pomocí transformace (1.11) můžeme libovolnou LODRn převést na SLODR1. Jestliže tato SLODR1 splňuje předpoklady věty 1.11, můžeme ji převést na soustavu (1.9). Jestliže jsme schopni tuto soustavu vyřešit, tedy determinant matice

soustavy je nenulový, pak existuje právě jedno řešení. To můžeme nalézt buďto vyřešením soustavy (1.9), nebo vyřešením původní LODRn. Numerická metoda, která řeší okrajový problém LODRn na základě myšlenky převedení okrajové úlohy na počáteční, se anglicky nazývá „invariant imbedding method“[9]. Pro vyšetření existence řešení okrajové úlohy LODRn existují i další metody, založeny na nalezení n nezávislých řešení viz. [2], [3]. Pro Dirichletovu úlohu, tedy okrajový problém LODR2 pouze s Dirichletovými podmínkami, platí věta.

Věta 1.12. *(O jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy LODR2)* [2] *Buď* $J = (a, b) \in \mathbb{R}$. *Lineární diferenciální rovnice druhého řádu*

$$y'' + u_2(x)y' + u_1(x)y = u_0(x),$$

doplněná libovolnými Dirichletovými podmínkami v bodech a, b, *má jednoznačné řešení, jestliže funkce* u_2, u_1, u_0 *jsou spojité na intervalu* J *a* u_1 *je navíc na tomto celém intervalu záporná.*

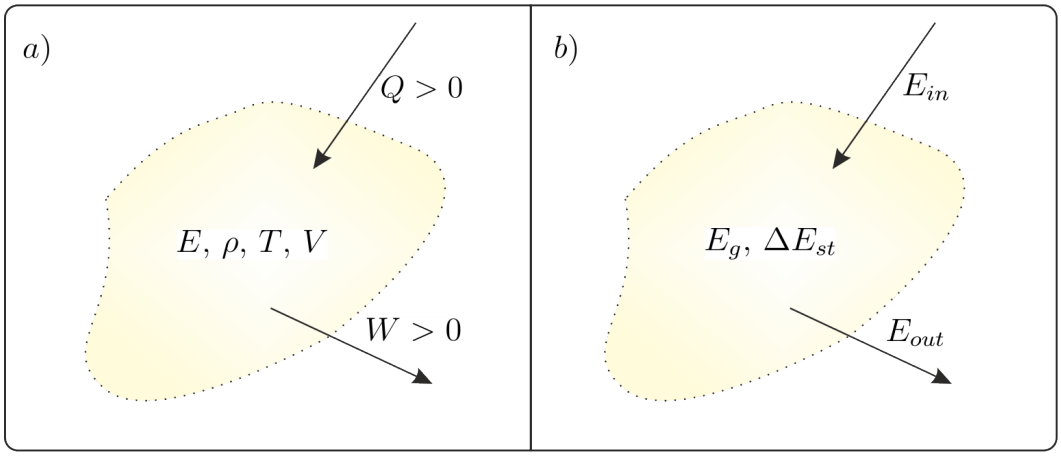
2 Základní pojmy termomechaniky

Abychom mohli aplikovat matematické znalosti na popis přenosu tepla v dynamickém tepelném výměníku, musíme nejprve porozumět základním pojmům termomechaniky. Termomechanika je vědní obor zahrnující termodynamiku a přenos tepla (termokinetika) [10]. Termodynamika se zabývá změnou stavu vlivem působení tepla a práce [10], nicméně se zabývá právě jen konečnými stavy a nevysvětluje povahu interakce látek [11], nezabývá se metodami, kterými se dá spočíst velikost tepelného toku [10], proto potřebujeme pracovat i s přenosem tepla. Tuto kapitolu rozdělíme na dvě části, v první se budeme věnovat termodynamice, především termodynamickým zákonům. Ve druhé části zavedeme pojem přenosu tepla, způsoby přenosu, uvedeme důležité vztahy a souvislosti mezi termomechanikou a hydromechanikou.

2.1 Základní pojmy termodynamiky

V úvodu této kapitoly jsme naznačili definici pojmu termodynamiky. Uveďme korektnější verzi. Termodynamika je věda o změnách stavu izolované soustavy (tj. souhrn látek, účelně omezených vůči okolí), vlivem působení tepla a práce [10]. Pro správné pochopení a dobrou orientaci v problematice zaveďme klíčový pojem energie. Je to veličina, která vyjadřuje schopnost soustavy konat práci, fyzikální, chemické či jiné změny, a to uvnitř soustavy, nebo i mimo ni [10]. Energii budeme značit E, práci W a teplo Q, jednotka všech těchto veličin je J. Energie, jakožto i jiné veličiny (např. tlak, teplota), tedy popisuje stav soustavy. Mluvíme-li o teple a práci, tak to má smysl, pokud popisují nějaký děj [12]. Teplo i práce jsou formy energie. Pojem teplo vysvětleme pomocí termodynamických zákonů.

Pro další úvahy musíme zvolit znaménkovou konvenci. Teplo se do soustavy přivádí právě tehdy, když je $Q > 0$. Teplo se ze soustavy odvádí právě tehdy, když je $Q < 0$. Soustava koná práci právě tehdy, když $W > 0$. A naopak soustava spotřebovává práci právě tehdy, když $W < 0$, viz. obrázek 2.1 a).



Obrázek 2.1: a) Konvence značení, b) energetická bilance, vytvořeno dle [10], [11].

2.1.1 Termodynamické zákony

Celkové množství energie izolované soustavy zůstává zachováno [10]. Toto je znění prvního termodynamického zákona, jedná se o speciální případ zákonu zachování energie [11]. Vyjádřeme tento vztah matematicky [11]

$$\Delta E_{st} = E_{in} - E_{out} + E_g, \tag{2.1}$$

ΔE_{st} je změna celkové energie izolované soustavy za čas $\Delta\tau$, E_{in} (resp. E_{out}) je tepelná a mechanická energie vstupující do (resp. vystupující ze) soustavy za čas $\Delta\tau$ a symbolem E_g označme tepelnou a mechanickou energii vzniklou různými ději (např. chemickou reakcí, prací motoru, apod.) za $\Delta\tau$, zkráceně mluvíme o generované energii [11]. Veličiny demonstrujeme na obrázku 2.1 *b*). A protože první termodynamický zákon musí být splněn v každém okamžiku ($\Delta\tau \to 0$) dostáváme rovnici bilance toků energie [10]

$$\frac{\mathrm{d}E_{st}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}E_{in}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}E_{out}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}E_g}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.2}$$

Předpokládejme, že generující energie je nulová, médium pro přenos energie je nestlačitelná kapalina se zanedbatelnou změnou kinetické a potenciální energie, vykonávající (resp. přijímající) zanedbatelnou prací. Dále předpokládáme ustálený stav, tedy $\frac{\mathrm{d}E_{st}}{\mathrm{d}\tau} = 0$. Potom podle [11] vztah (2.2) převedeme na

$$q = \Phi(i_{out} - i_{in}) = \Phi c_p(T_{out} - T_{in}). \tag{2.3}$$

Kde q je tepelný tok ve W, Φ hmotnostní tok v kgs^{-1}, i je entalpie v J, c_p je měrná tepelná kapacita média za konstantního tlaku v $Jkg^{-1}K^{-1}$, T_{out} (resp. T_{in}) je teplota na výstupu (resp. na vstupu) v K. A pro teplo platí obdobný vztah, někdy též nazýván kalorimetrickou rovnicí [12],

$$Q = mc_p(T_{out} - T_{in}),$$

kde m je hmotnost v kg. Takto kvantifikujeme velikost energie, které nazýváme teplo. Ukažme potřebu dalších pravidel na následujícím příkladu. Mějme střelu letící nenulovou rychlostí, střela má bezpochyby kinetickou energii, po dopadu se střela zastaví. Část kinetické energie se spotřebuje na deformaci střely a místa dopadu. Zbylá kinetická energie se změní na tepelnou energii, ohřeje se střela i místo dopadu. Ze zkušenosti je ale zřejmé, že není možné, ochladit místo dopadu a střelu, a tak dodat střele kinetickou energii [10]. Formulujme druhý zákon termodynamiky.

Teplo nemůže samovolně přecházet z tělesa o teplotě nižší na těleso o teplotě vyšší [10]. Matematicky zapíšeme druhý zákon termodynamiky jako

$$\mathrm{d}S \geq \frac{\mathrm{d}Q}{T},$$

kde $\mathrm{d}S$ je změna entropie v JK^{-1}, $\mathrm{d}Q$ je teplo předávané mezi soustavou a okolím. Pomocí entropie posuzujeme směr vývoje termodynamických soustav [10]. Pro tepelně izolované soustavy platí $\mathrm{d}Q = 0$, tedy $\mathrm{d}S \geq 0$. Pro úplnost a pozdější vysvětlení pojmů souvisejících s přenosem tepla uveďme třetí termodynamický zákon.

Entropie čistých krystalických látek je při teplotě $T = 0\,K$ nulová. Konečným počtem dějů nelze ochladit soustavu na absolutní nulu. [10]
Matematicky můžeme tento zákon zapsat následovně

$$\lim_{T \to 0\,K} S = 0. \tag{2.4}$$

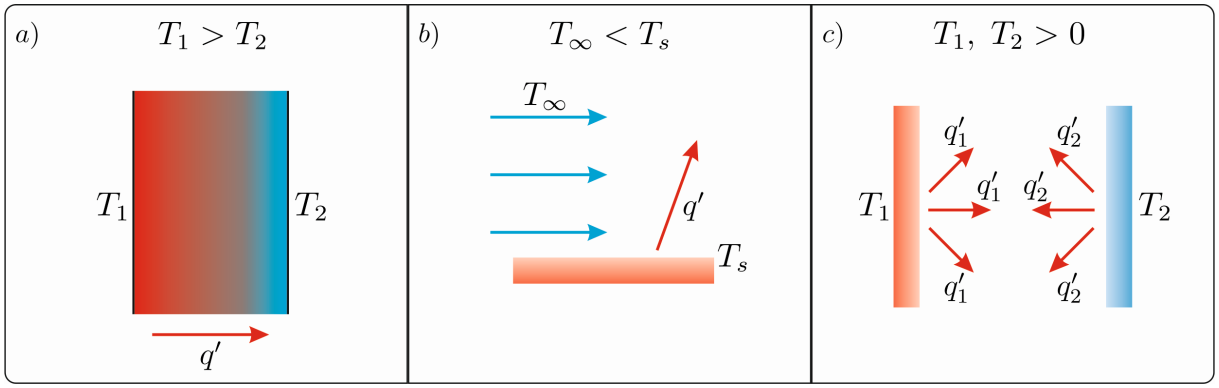
2.2 Přenos tepla

Začneme jednoduchou, ale výstižnou definicí. Mějme dvě tělesa A, B. Teplotu tělesa A označme jako T_A a tělesa B jako T_B. Dále platí, že $T_A \neq T_B$. Přenosem tepla rozumíme tepelnou energii, která se přesune z jednoho tělesa na druhé vlivem rozdílných teplot těles [11]. Definici můžeme ještě zobecnit, když místo těles uvažujeme molekuly látky. Z pohledu termodynamiky jsme předpokládali, že soustava je v tepelné rovnováze se svým okolím [10]. Termokinetika nám odpoví na otázky, jak lze přenést požadované množství tepla do (resp. ze) soustavy a zda ho můžeme přenést přes rozumně velkou plochu (teplosměnnou plochu) v reálný čas [10].

2.2.1 Způsoby přenosu tepla

Rozlišujeme tři základní mechanismy přenosu tepla:

- Vedení (kondukce)
- Proudění (konvekce)
- Záření (radiace)



Obrázek 2.2: *a*) vedení pevnou látkou, nebo neproudící kapalinou, *b*) konvekce mezi proudící kapalinou a povrchem pevné látky, *c*) záření dvou povrchů. Vytvořeno dle [11].

Vedení tepla lze charakterizovat jako přenos energie z částic s větší energií do částic s menší energií vlivem vzájemné interakce mezi částicemi [11]. Pro ilustraci uveďme názorný příklad zdi domu. Z jedné části má zeď teplotu pokoje T_1 a z druhé teplotu venkovní T_2. Teplota po celé tloušťce zdi je proměnná viz. obr 2.2 *a*). Kdybychom v nějakém okamžiku zeď ideálně izolovali od okolního prostředí, teplota by se po určitém čase ustálila v závislosti na termodynamických zákonech. Pro vektor hustoty tepelného toku $\mathbf{q}'$ v Wm^{-2} při vedení tepla platí Fourierův zákon [10], [11]

$$\mathbf{q}' = -k\boldsymbol{\nabla}T \tag{2.5}$$

a pro tepelný tok platí $q = q'A$, k v $Wm^{-1}K^{-1}$ nazýváme tepelnou vodivostí, A je plocha v m^2 kolmá na tepelný tok, přes kterou se přenáší teplo, $\boldsymbol{\nabla}T$ chápeme ve smyslu definice 5.4. Schopnost látky předávat teplo vyjadřujeme tepelnou vodivostí, její hodnota závisí především na materiálu, s rostoucí teplotou hodnota roste. Je zřejmé, že pro plyny

bude k velmi malé, pro kapaliny je velikost k přibližně (0 - 1) $Wm^{-1}K^{-1}$. Pro pevné látky až 400 $Wm^{-1}K^{-1}$ [10]. Hodnoty máme tabelované pro dané materiály.

Prouděním rozumíme dva mechanismy předávání tepla, prvně, tepelnou difuzi (tedy předávání tepla na úrovni molekul, jedná se o podobný mechanismus, který způsobuje předávání tepla vedením), a za druhé předávání tepla pohybem tekutiny v nějakém prostředí [11]. V našem textu se zaměříme na tepelný přenos pohybující se tekutiny obtékající povrch, viz. obr. 2.2 *b*). Pro názornost opět uveďme názorný příklad, při proudění vody v topení dochází mezi kapalinou a stěnou topení k přenosu tepla konvekcí. Pro přenos tepla prouděním platí Newtonův ochlazovací zákon [10], [11]

$$q' = \alpha(T_s - T_\infty), \tag{2.6}$$

α v $Wm^{-2}K^{-1}$ je součinitel přestupu tepla závisející na vlastnostech mezní vrstvy ovlivněné geometrií, způsobem pohybu média a jeho vlastnostmi, T_s je teplota povrchu pevného prostřední, T_∞ je teplota volného proudu kapaliny.

Přenosem tepla **zářením** rozumíme přenos energie pomocí elektromagnetických vln. Oproti ostatním přenosům je zřejmé, že není zapotřebí médium k přenosu tepla, ba dokonce radiace je efektivnější ve vakuu [11]. Z každého povrchu, který má teplotu vyšší než 0 K, je vyzařována energie [10]. A podle třetího termodynamického zákona (2.4) má každý povrch po konečném počtu dějů teplotu větší než 0 K, a tedy vyzařuje nějakou energii. Na základě této jednoduché úvahy vidíme, že řešit problém předávání energie zářením, je velmi komplikovaný, neb každý povrch emituje nějakou energii [10].

Pro popis přenosu tepla tepelných výměníků uvažujeme pouze kondukci a konvekci. Z výše uvedeného je zřejmé, že dochází i k přenosu tepla zářením. Tento vliv je ale vzhledem k vlivům vedení a proudění zanedbatelný.

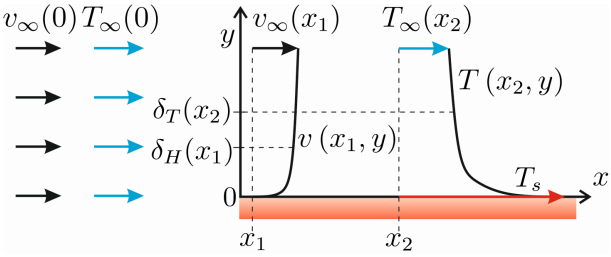
2.2.2 Pojmy související s hydromechanikou

U charakterizace přenosu tepla prouděním jsme uvedli pojmy, které jsme dříve nevysvětlili, přistupme k jejich objasnění. Jedná se především o pojem mezní vrstvy úzce související s hydromechanikou. Zavedeme pojem hydrodynamické a tepelné mezní vrstvy. Představme si desku, ke které přitéká tekutina rychlostí $v_\infty(0)$, v ms^{-1} a teplotou $T_\infty(0)$ (mluvíme o rychlosti a teplotě volného proudu tekutiny) [10]. Dále předpokládejme, že deska je vyhřívána na teplotu $T_s > T_\infty(x)$. Vlivem viskozity (veličina charakterizující vnitřní tření) tekutiny je rychlost tekutiny v blízkosti desky výrazně ovlivněna, a to do takové míry, že přímo na povrchu desky je rychlost tekutiny nulová [11]. Hydrodynamickou mezní vrstvu v místě x definujeme jako interval $(0, \delta_H(x))$, a to pomocí tloušťky $\delta_H(x) \in \mathbb{R}_0^+$, takové, že

$$v\left(x, \delta_H(x)\right) = 0,99 v_\infty(x) \text{ a navíc platí, že } \delta_H(x) = \min_{y \in \mathbb{R}_0^+} \left\{ v(x,y) \geq 0,99 v_\infty(x) \right\}.$$

A analogicky zavedeme tepelnou mezní vrstvu jako interval $(0, \delta_T(x))$, pojmy demonstrujeme na obrázku 2.3. $\delta_T(x) \in \mathbb{R}_0^+$ určíme jako

$$\begin{aligned} T_s - T\left(x, \delta_T(x)\right) &= 0,99\left(T_s - T_\infty(x)\right) \text{ a navíc platí, že} \\ \delta_T(x) &= \min_{y \in \mathbb{R}_0^+} \left\{ \left(T_s - T\left(x,y\right)\right) \geq 0,99\left(T_s - T_\infty(x)\right) \right\}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.3: Hydrodynamická mezní vrstva v bodě x_1 a tepelná mezní vrstva v bodě x_2. Vytvořeno dle [10], [11].

Poznamenejme, že s rostoucím x se budou mezní vrstvy (hydrodynamická i tepelná) zvětšovat [11]. Obecně nemůžeme říct, že by se velikost obou vrstev vyvíjela stejně rychle, tedy ve stejném místě mohou být tloušťky vrstev různé. Pro plyny platí, že tloušťky obou mezních vrstev se vyvíjejí přibližně stejně, pro kapaliny se tepelná mezní vrstva vyvíjí většinou výrazně pomaleji, než hydrodynamická mezní vrstva. Pro tekuté kovy je tomu přesně naopak [10]. Nyní odvoďme vztah mezi podmínkami v mezní vrstvě a koeficientem přestupu tepla α. Pro libovolné $x > 0$ a $y = 0$ platí podle Fourierova zákona (2.5)

$$q'_s = -k \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0}. \tag{2.7}$$

Dále vyjádřeme Newtonův zákon (2.6) pro hustotu tepelného toku na povrchu (dolní index s)

$$q'_s = \alpha(T_s - T_\infty). \tag{2.8}$$

Z rovnic (2.7), (2.8) vyjádřeme koeficient přestupu tepla

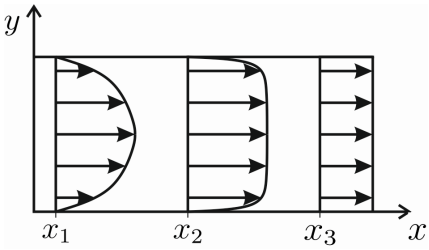
$$\alpha = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}. \tag{2.9}$$

Vidíme, že koeficient α je silně závislý na teplotním gradientu $\frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}$, jmenovatel vztahu (2.9) je konstanta nezávislá na x, $\delta_T(x)$ roste s rostoucím x, a tedy $\frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}$ musí klesat pro rostoucí x [11]. A proto s rostoucím x klesá hustota tepelného toku q'_s a i teplotní koeficient přestupu α klesá [11]. Tímto poukazujeme na to, že α nemůže být jednoduše vlastností materiálu. Dále zdůrazněme, že pro reálnou tekutinu hydrodynamická mezní vrstva existuje vždy. A teplotní mezní vrstva existuje právě tehdy, když jsou teploty povrchu a volného proudu rozdílné [11].

Vzhledem k tomu, že v další kapitole se budeme věnovat dynamickému tepelnému výměníku, krátce se ještě věnujme typům proudění. Rozlišujeme dva typy proudění reálných tekutin:

- Laminární - částice se pohybují ve vrstvách (lamelách), nemohou se pohybovat napříč průřezem [13].
- Turbulentní - částice se mohou pohybovat průřezem, tvoří se víry, zpětný pohyb, chaotické chování. V blízkosti stěny se tvoří laminární podvrstva [13].

Na obr. 2.4 zobrazme rychlostní profily v uzavřeném potrubí. V bodě x_1 se jedná o laminární proudění, v bodě x_2 o turbulentní proudění časově středované a konečně v bodě x_3



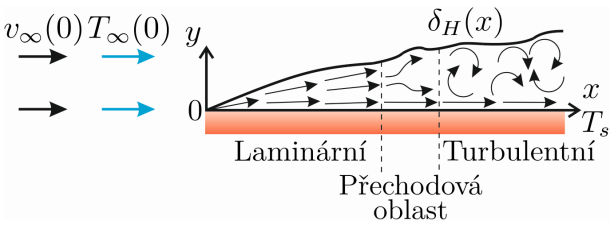
Obrázek 2.4: Rychlostní profily v uzavřeném potrubí. Vytvořeno dle [13].

rychlostí profil ideální kapaliny. Ideální kapalina je taková kapalina, která je neviskózní, nestlačitelná, a během děje se nevypařuje [13].

V termomechanice a hydromechanice využíváme několik bezrozměrných kritérií. Pomocí jednoho z nich, Reynoldosova čísla (značíme Re), dokážeme přibližně určit, o jaké proudění se jedná. Pro Re platí vztah [13]

$$Re = \frac{v_\infty d}{\mu},$$

kde d v m je charakteristický rozměr povrchu (rovinná deska - vzdálenost x, kruhové potrubí - průměr), po kterém proudí tekutina, μ v $m^2 s^{-1}$ je kinematická viskozita, určená jako podíl dynamické viskozity a hustoty tekutiny, kinematická viskozita je tabelovaná veličina. Proudění je v uzavřeném potrubí laminární, jestliže je $Re < 2320$, pro $Re > Re_{kr}$ musíme pro posouzení typu proudění použít Nikuradseho (viz. [13]), nebo Moodyho (viz. [11]) diagram. Mimo jiné z těchto diagramů plyne, že existuje i přechodová oblast mezi laminárním a turbulentním prouděním, viz. obrázek 2.5. I Přesto, že laminární a turbulentní proudění jsou velmi odlišná, tak pro průběh součinitele přestupu tepla udáváme, že je v obou případech kvalitativně shodný, tedy s rostoucí tloušťkou mezní vrstvy klesá [10].



Obrázek 2.5: Vývoj hydrodynamické mezní vrstvy, změna typu proudění při obtékání tekutiny rovinné desky. Vytvořeno dle [11].

V sekci 2.1.1 jsme uvedli speciální případ zákonu zachování energie, první termodynamický zákon. Pro další odvozování vztahů týkajících se tepelných výměníků budeme potřebovat i zákon zachování hmoty. V oblasti proudění tento zákon nazýváme rovnicí kontinuity. Obecně ji uvažujeme ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho v) = 0,$$

ρ je hustota média v kgm^{-3}, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho v)$ chápeme ve smyslu definice (5.5). A pro nestlačitelné kapaliny dostáváme

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot v = 0.$$

Což nám dává, že tok na vstupu se rovná toku na výstupu

$$\Phi_{in} = \Phi_{out}. \tag{2.10}$$

3 Tepelné výměníky

Tepelný výměník je soustava, která umožňuje předávání tepla mezi dvěma, nebo více médii s různými teplotami [11]. V tomto textu se budeme zabývat výměníky se dvěma médii. Teplejší médium nazvěme ohřívajícím médiem a chladnější médium ohřívaným médiem. Přenesenou tepelnou energii využíváme např. na vytápění, technologický ohřev nebo na výrobu elektrické energie [14]. Teplosměnnou plochou A rozumíme velikost plochy styku médií v tepelném výměníku, která zprostředkovává výměnu tepla mezi médii [11]. Vzhledem k širokému užití tepelných výměníku se dále budeme věnovat jejich dělení z různých hledisek.

3.1 Přehled výměníků tepla

3.1.1 Dělení výměníků z hlediska způsobů předávání tepla

Rekuperátor. Ohřívané i ohřívající médium jsou oddělena stěnou o určité ploše (teplosměnná plocha) a tloušťce [15]. Využíváme je jako vysokotlaké a nízkotlaké ohříváky, kondenzátory parních turbín, chladiče kondenzátu, chladiče oleje, spalinové výměníky, ohříváky vzduchu [14].
Regenerátor. Vymezený prostor vyplní ohřívající médium, to ohřeje tento prostor a další výhřevnou náplň (např. žáruvzdorné plechy, kovové plechy, kuličky), a poté jej opustí. Dále přivedeme do tohoto prostoru ohřívané médium, které získá teplo od výhřevné náplně a stěn prostoru. Tento proces cyklicky opakujeme. Může dojít k částečnému míšení obou médií [14]. Tepelná energie není přenášena pomocí stěny jako v případě rekuperátorů [15]. Nejrozšířenější aplikace tohoto typu výměníku v energetice je ohřívák vzduchu kotle spaliny - vzduch, označovaný jako Ljungström [14].
Směšovací. Obě média se sloučí a vytvoří směs o určité teplotě. V těchto výměnících neexistuje teplosměnná plocha. Používají se na vstřik vody do páry jako regulace teploty přehřáté páry, ohřev napájecí vody [14].
Kontaktní. Média jsou v rozdílných fázích, po vzájemném kontaktu a předání tepla jsou od sebe opět rozděleny, teplosměnná plocha je dána povrchem částic pevné fáze [14].

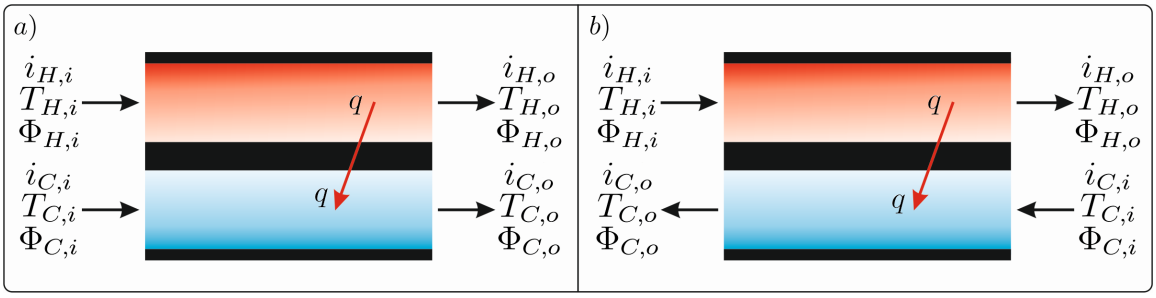
3.1.2 Dělení výměníků z hlediska procesu přenosu tepla

Přímý kontakt. Ohřívající a ohřívané médium jsou v přímém styku, přenos tepla není uskutečňován pomocí stěny [15]. Například chladící věže jaderných elektráren, kde pracovní látka je ochlazována proudícím vzduchem, směšovací, kontaktní výměníky.
Nepřímý kontakt . Přenos tepla zajišťuje nepropustná stěna oddělující ohřívající a ohřívanou látku. Nedochází ke smíchání látek [15]. Příkladem takového výměníku je libovolný rekuperátor.

3.1.3 Dělení výměníků z hlediska vzájemného proudění médií

Protiproudý (Antiparalelní). Směry os proudů ohřívajícího a ohřívaného média jsou rovnoběžné a mají opačný smysl [14].
Souproudý (Paralelní). Směry os proudů ohřívajícího a ohřívaného média jsou rovnoběžné a mají souhlasný smysl.

Křížový. Osy proudů zahřívaného a zahřívajícího média jsou mimoběžné a v kolmém průmětu spolu svírají pravý úhel [14].
Šikmý vzájemný proud. Osy proudů zahřívaného a zahřívajícího média jsou mimoběžné a v kolmém průmětu spolu svírají jiný úhel, než celý násobek $\frac{\pi}{2}$.
S kombinovaným prouděním. Ve výměníky se kombinuje více typů proudění [14].



Obrázek 3.1: Vyobrazení veličin v a) souproudém zapojení, b) protiproudém zapojení.

3.1.4 Dělení rekuperátorů z hlediska geometrie konstrukce

Trubkový [14]. V další kapitole se budeme věnovat právě trubkovému výměníku s polymerními vlákny, věnujme proto těmto výměníkům větší pozornost. Teplosměnné plochy tvoří trubky různých materiálů. Můžeme je dále dělit na dvoutrubkové, kotlové a vlásenkové.

Dvoutrubkový se skládá ze dvou soustředných trubek o různých rozměrech. Jednou z trubek prochází ohřívané médium a druhou ohřívající. Je vhodný pro chlazení, ohřívání, kde jsou zapotřebí malé teplosměnné plochy (do $50m^2$). Výhodou rovných trubek je jednoduchá výroba, možnost využití minimální tloušťky materiálu (pokles nákladů, hmotnosti), dobré podmínky pro čištění, jednoduchá výměna poškozené trubky. Naopak nevýhodou jsou problémy s teplotní dilatací trubek.

Kotlový je složen z válcového pláště, ve kterém jsou umístěny trubky kruhového průřezu. Jedno médium proudí válcovým pláštěm a druhé trubkami. Mají široké využití jako chladiče maziva, výkonové kondenzátory, součástí jaderných elektráren a v chemickém průmyslu. Do kotlových výměníků mohou být umístěny přepážky, které prodlužují trajektorii proudění.

Vlásenkové výměníky s U-trubicemi se značně využívají v energetice. Díky tvaru trubek opadává starost s dilatací materiálu, trubky se mohou volně roztahovat, můžeme používat velmi malé tloušťky materiálu, dobře vyplníme prostor pláště. K nevýhodám patří nemožnost čistit trubky, nemožnost výměny segmentu trubky. Podobně jako U-trubky můžeme použít trubky ve tvaru šroubovice, přináší podobné výhody i nevýhody.
Deskový [14]. Teplosměnnými plochami jsou tenké desky z plechů tloušťky desetin milimetru z různých materiálů (uhlíková ocel, nerezová ocel, titan, nikl) s vylisovanými drážkami, kterými proudí médium. Požadujeme, aby média byla dostatečně čistá, aby nebyly zaneseny kanálky. Existují dvě skupiny kanálků. Jedna určena pro ohřívající a druhá v bezprostřední blízkosti pro ohřívané médium. Slouží pro výměnu libovolné kombinace plynu, kapaliny a dvoufázového proudu. Přidáním další desky je snadné zvýšit výkon výměníku. Desky spojujeme pájením, nebo stažením šroubovými svorníky. V obou případech je kladen velký důraz na řešení problému těsnění, využíváme speciální pryže, silikon, nitril.

3.1.5 Dělení výměníků z hlediska mechanismu přenosu tepla

Jednofázový. Při výměně tepla nedochází ke změně skupenství média [15].
Dvoufázový. Při výměně tepla dochází ke změně skupenství alespoň jednoho média [15].

3.2 Matematický popis dynamického tepelného výměníku

V této části odvodíme SODR1 popisující průběh teploty dynamického tepelného výměníku se zanedbáním vlivu polohy. Dále ukážeme, jak jsme schopni určit součinitel prostupu tepla tepelným výměníkem pomocí měření teplot na vstupu a výstupu. A konečně uvedeme vztahy k posouzení účinnosti tepelného výměníku.

3.2.1 ODR tepelného výměníku

Zanedbáváme vliv polohy, tedy pevně zafixujeme polohu, kde vyšetřujeme průběh teploty v čase. Vyjdeme ze zákona zachování energie (2.1), ztráty do okolí jsou nulové, uvnitř výměníku neprobíhá žádný chemický, jaderný, elektrický, ani elektromagnetický děj, generovaná energie je nulová. Tedy změna celkové energie uvnitř ohřívajícího (resp. ohřívaného) okruhu je rovna rozdílu přicházejících a odcházejících tepel, dostáváme

$$\Delta E_{st} = Q_i - Q_o. \tag{3.1}$$

Spodní index H (resp. C) značí ohřívající (resp. ohřívané) médium, dolní index i (resp. o) znamená hodnota na vstupu (resp. na výstupu). Změna celkové energie se projeví jako změna vnitřní energie za časový úsek $\Delta\tau = \tau_b - \tau_a$, předpokládáme, že nedochází k přeměně fáze látky proudící ve výměníku,

$$\Delta E_{st} = E_{\tau_b} - E_{\tau_a} = c_p(p,T)\Phi(\tau_b)T(\tau_b) - c_p(p,T)\Phi(\tau_a)T(\tau_a).$$

Měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku se obecně v závislosti na teplotě a tlaku mění, v našem případě uvažujeme, že dochází k takovým teplotním a tlakovým změnám, že můžeme vliv jejich změn pro vývoj c_p zanedbat. Tedy $c_p = c = konst$. Funkce T, Φ jsou spojité v čase a mají derivace v intervalu (τ_a, τ_b), proto z (5.6) pro oba okruhy platí

$$\Delta E_{st} = c\Phi(\tau_b)T(\tau_b) - c\Phi(\tau_a)T(\tau_a) = c\int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{\mathrm{d}\left(\Phi(\tau)T(\tau)\right)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.2}$$

Pro teplo Q_{fl} přivedené a odvedené během $\Delta\tau$ vlivem proudění média platí

$$Q_{fl} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} (q_o - q_i)\,\mathrm{d}\tau = c\int_{\tau_a}^{\tau_b} (\Phi_o(\tau)T_o(\tau) - \Phi_i(\tau)T_i(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

Ve výměníku nemůže nikde zanikat, ani vznikat hmota, platí rovnice kontinuity (2.10), proto $\Phi_i(\tau) = \Phi_o(\tau)$. V případě, kdy by $\Phi_i(\tau) \neq \Phi_o(\tau)$, pak by to například v konkrétním případě znamenalo, že máme ve výměníku díru, kterou by část hmoty unikalo,

případně že se jedná o špatně izolovaný výměník. Výměník, který popisujeme nemá vady, kterými by mohla unikat hmota a je tepelně izolovaný. Navíc je zřejmé, že v jednom bodě v konkrétním čase musí být teplota stejná, tedy $T_i(\tau) = T_o(\tau)$, a proto

$$Q_{fl} = 0. \tag{3.4}$$

Předpokládáme, že v pevně zvoleném čase je teplota v průřezu konstantní, teplosměnná plocha a součinitel prostupu tepla h v $Wm^{-2}K^{-1}$ jsou konstantní. Pro teplo Q_{cond} předávané ohřívajícím médiem ohřívanému pomocí kondukce přes teplosměnnou plochu platí

$$Q_{cond} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} q_{cond}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_a}^{\tau_b} hA\left(T_H\left(\tau\right) - T_C\left(\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{3.5}$$

Jestliže chceme vyjádřit teplosměnnou plochu mezi okruhy v bodě, pak bychom její velikosti přiřadili nulovou hodnotu, a proto pro oba okruhy dostáváme z (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) triviální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}T_H}{\mathrm{d}\tau} = 0,\ \frac{\mathrm{d}T_C}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

S řešením

$$T_H(\tau) = T_H(0),\ T_C(\tau) = T_C(0).$$

Toto je ale řešení, které by nám nic neřeklo o systému. Proto pozorujme výměník v bodě a v jeho malém okolí, kde je sice teplota konstantní (proto je pořád v platnosti rovnice (3.4)), ale už existuje teplosměnná plocha. Za těchto předpokladů zřejmě platí, že $Q_i = Q_{cond}$ pro ohřívaný okruh a $Q_o = Q_{cond}$ pro ohřívající okruh. Pro teplý okruh dosazením rovnic (3.2), (3.5) do (3.1) plyne

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} \left(c\Phi_H(\tau)\frac{\mathrm{d}T_H(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + hA\left(T_H\left(\tau\right) - T_C\left(\tau\right)\right)\right)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.6}$$

Nechť dále je průtok konstantní v čase. Rovnici (3.6) vydělíme výrazem $(\tau_b - \tau_a)$ a přejdeme k limitě $(\tau_b - \tau_a) \to 0$, použijeme lemma o limitě průměru (5.7). Dostáváme rovnici

$$c\Phi_H\frac{\mathrm{d}T_H}{\mathrm{d}\tau} = -hA\left(T_H\left(\tau\right) - T_C\left(\tau\right)\right),$$

kterou vydělíme součinem $c\Phi_H$, a označíme konstanty

$$h_H^* = \frac{hA}{c\Phi_H},\ h_C^* = \frac{hA}{c\Phi_C}. \tag{3.7}$$

Analogicky postupujeme pro ohřívaný okruh a dostáváme soustavu dvou ODR1

$$T_H' = -h_H^*T_H + h_H^*T_C, \tag{3.8}$$
$$T_C' = +h_C^*T_H - h_C^*T_C. \tag{3.9}$$

Podle věty (1.9) existuje řešení soustavy (3.8), (3.9), jestliže jsou funkce h_H^*, h_C^* spojité, navíc, vzhledem k tomu, že se jedná o konstanty, zřejmě tedy h_H^*, h_C^* jsou lipschitzovské v proměnných T_H, T_C, a tedy existuje právě jedno řešení, které můžeme dokonce pomocí standardních metod naleznout. Buďte $T_H(0) = T_{H0}$, $T_C(0) = T_{C0}$ počáteční podmínky, potom soustava (3.8), (3.9) má řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} T_H(\tau) \\ T_C(\tau) \end{pmatrix} = \left(T_{H0} - \frac{T_{H0} - T_{C0}}{\frac{1}{h_C^*}\left(\frac{1}{h_C^*} + \frac{1}{h_H^*}\right)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{T_{H0} - T_{C0}}{\left(\frac{1}{h_C^*} + \frac{1}{h_H^*}\right)} e^{(-h_H^* - h_C^*)\tau} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_C^*} \\ -\frac{1}{h_H^*} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Uvážíme-li, že konstanty h_H^*, h_C^* jsou nutně kladné, potom pro rostoucí τ klesá vliv druhého člene pro vývoj teploty v (3.10). Tedy je zřejmé, že pro dostatečně velké τ bude teplota ohřívajícího i ohřívaného média téměř stejná (dokonce v případě $\tau \to \infty$ naprosto stejná). Ve skutečnosti ale pozorujeme, že se teploty ustálí na rozdílných teplotách. Tento nedostatek je způsoben pozorováním průběhu teploty pouze v závislosti na čase, kdybychom v rovnici (3.3) předpokládali, že $T_i(\tau) \neq T_o(\tau)$, potom bychom popis teploty výrazně vylepšili a více se přiblížili reálnému ději. Z toho by ale přímo plynulo, že by teplota musela být závislá na poloze, což by vedlo na popis pomocí parciálních diferenciálních rovnic, které nejsou předmětem této práce. V sekci 4.2 určíme pomocí rovnic (3.8), (3.9) za jak dlouho se námi zkoumaný tepelný výměník ustálí.

3.2.2 Určení součinitele prostupu tepla

Jednou z nejdůležitějších informací při analýze tepelného výměníku je součinitel prostupu tepla [11]. Udává, kolik tepla projde stěnou o velikosti 1 m^2, pokud je teplotní spád 1 K [16]. Tedy chceme konstruovat tepelné výměníky tak, aby měly co největší koeficient prostupu tepla. Ukázali jsme, jak určit průběh teploty v tepelném výměníku v konkrétní pozici pomocí SODR1 (3.10). K tomu, abychom získali konkrétní hodnoty, musíme zjistit součinitel prostupu tepla. Provedeme analýzu tepelného výměníku pomocí středního logaritmického teplotního spádu ΔT_m. Z obrázku 3.1 plyne definice veličin pro popis souproudého a protiproudého zapojení tepelného výměníku.

Vyjdeme z prvního termodynamického zákona (2.2). Předpokládáme ustálený stav, nulovou generující energii, tepelnou izolaci od okolí, malé změny kinetické a potenciální energie, hustota tepelného toku je konstantní, potom pro ohřívající a ohřívané médium dostáváme přírůstek tepelného toku

$$\mathrm{d}q = \Phi_H \,\mathrm{d}\left(i_{H,i} - i_{H,o}\right) = \Phi_C \,\mathrm{d}\left(i_{C,o} - i_{C,i}\right), \tag{3.11}$$

dále předpokládáme, že médium nemění skupenství, měrná tepelná kapacita je konstantní. Pak můžeme entalpii i vyjádřit pomocí měrné tepelné kapacity a teploty, vztah (3.11) upravíme na

$$\mathrm{d}q = \Phi_H c_H \,\mathrm{d}(T_{H,i} - T_{H,o}) = \Phi_C c_C \,\mathrm{d}(T_{C,o} - T_{C,i}) = \mathrm{d}q. \tag{3.12}$$

Pro výpočet tepelného toku platí vztah [10]

$$\mathrm{d}q = h\Delta T \,\mathrm{d}A, \tag{3.13}$$

položme teplotní spád $\Delta T = T_H - T_C$, pak je zřejmě ΔT funkcí polohy, a tedy i součinitel prostupu tepla je funkcí polohy. My ale chceme tepelnému výměníku přiřadit konkrétní hodnotu. Proto určíme střední logaritmický teplotní spád ΔT_m.

Označme $\Delta T_H = T_{H,i} - T_{H,o}$ a $\Delta T_C = T_{C,o} - T_{C,i}$. Z druhého termodynamického zákona plynou poznatky pro hodnoty ΔT_H, ΔT_C, zaveďme je do tabulky 3.1.

Zapojení	ΔT_H	ΔT_C
Souproudé	> 0	> 0
Protiproudé	> 0	< 0

Tabulka 3.1: Hodnoty ΔT_H, ΔT_C pro souproudé a protiproudé zapojení.

Nejprve odvodíme situaci pro souproudé zapojení. Z tabulky 3.1 a rovnice (3.12) plyne

$$\mathrm{d}q = -\,\mathrm{d}q_H = \mathrm{d}q_C = -\Phi_H c_H\,\mathrm{d}(\Delta T_h) = \Phi_C c_C\,\mathrm{d}(\Delta T_c).$$

Výraz $\mathrm{d}(\Delta T)$ má smysl, protože ΔT je spojitá funkce závislá na prostorové souřadnici, pro změnu rozdílu teplot platí

$$\mathrm{d}(\Delta T) = \mathrm{d}(\Delta T_H) - \mathrm{d}(\Delta T_C) = -\frac{\mathrm{d}q}{\Phi_H c_H} - \frac{\mathrm{d}q}{\Phi_C c_C} = -\,\mathrm{d}q\left(\frac{1}{\Phi_C c_C} + \frac{1}{\Phi_H c_H}\right). \tag{3.14}$$

Do rovnice (3.14) dosadíme za $\mathrm{d}q$ rovnici (3.13)

$$\mathrm{d}(\Delta T) = -h\Delta T\left(\frac{1}{\Phi_C c_C} + \frac{1}{\Phi_H c_H}\right)\mathrm{d}A, \tag{3.15}$$

obě strany rovnice (3.15) vydělíme ΔT a rovnici zintegrujeme

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{1}{\Delta T}\,\mathrm{d}(\Delta T) = -\int_A h\left(\frac{1}{\Phi_C c_C} + \frac{1}{\Phi_H c_H}\right)\mathrm{d}A = -Ah\left(\frac{1}{\Phi_C c_C} + \frac{1}{\Phi_H c_H}\right).$$

Levou stranu zintegrujeme jako $\ln(\Delta T)$, dosadíme meze a dostáváme rovnici

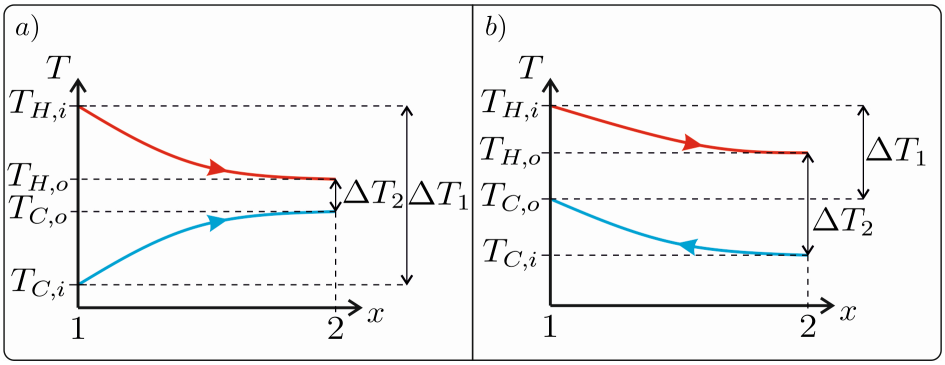
$$\ln\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -Ah\left(\frac{1}{\Phi_C c_C} + \frac{1}{\Phi_H c_H}\right) = -Ah\left(\frac{T_{C,o} - T_{C,i}}{q} + \frac{T_{H,i} - T_{H,o}}{q}\right). \tag{3.16}$$

Obě strany rovnice (3.16) vynásobíme q, vydělíme levou stranou (3.16) a roznásobíme závorku na pravé straně -1. Potom pro tepelný tok dostáváme vztah

$$q = Ah\frac{1}{\ln\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}\left((T_{H,o} - T_{C,o}) - (T_{H,i} - T_{C,i})\right) = Ah\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = Ah\Delta T_m. \tag{3.17}$$

Vidíme, že pro určení součinitele prostupu tepla tepelného výměníku potřebujeme znát velikost teplosměnné plochy A, musíme být schopni měřit rozdíl teplot na vstupu ΔT_1 a na výstupu ΔT_2, tepelný tok určíme z prvního termodynamického zákona. Analogicky bychom postupovali u protiproudého, dojdeme ke stejnému vztahu - rovnice (3.17), rozdíl je v definici ΔT_1, ΔT_2, které určíme jako

$$\Delta T_1 = T_{H,i} - T_{C,o},\ \Delta T_2 = T_{H,o} - T_{C,i}.$$



Obrázek 3.2: Průběh teploty ve výměníku, *a*) souproudý, *b*) protiproudý. Vytvořeno dle [11].

Tyto rozdíly demonstrujeme na obrázku 3.2, 1 značí levý konec a 2 pravý konec výměníku.

Ne vždy můžeme měřit teplotu na vstupu a výstupu výměníku, existují i další způsoby, jak určit součinitel prostupu tepla. Jeden z těchto přístupů je založen na analogii mezi elektrickými odpory a tepelnými odpory. Uvažujme přenos tepla mezi médii a rovinnou deskou (resp. válcovou stěnou). Částí, kterou se přenos tepla uskutečňuje pouze vedením, snadno přiřadíme tepelný odpor pomocí tloušťky materiálu rovinné stěny D (resp. vnitřního poloměru válcové stěny r, kterou proudí médium, a tloušťkou válcové stěny D_r) a tepelné vodivosti materiálu

$$R_{cond} = \frac{D}{k}, \text{ resp. } R_{cond} = \frac{1}{2\pi k}\ln\left(\frac{r+D_r}{r}\right). \tag{3.18}$$

Pro tepelný odpor média, kterým se přenáší teplo konvekcí, přiřadíme hodnotu na základě součinitele přestupu tepla (resp. součinitele přestupu tepla a r)

$$R_{conv} = \frac{1}{\alpha}, \text{ resp. } R_{conv} = \frac{1}{2\pi r\alpha} \tag{3.19}$$

Celkový odpor soustavy určíme jako součet jednotlivých odporů v případě řazení za sebou

$$R = \sum_j R_{cond,j} + \sum_j R_{conv,j}, \tag{3.20}$$

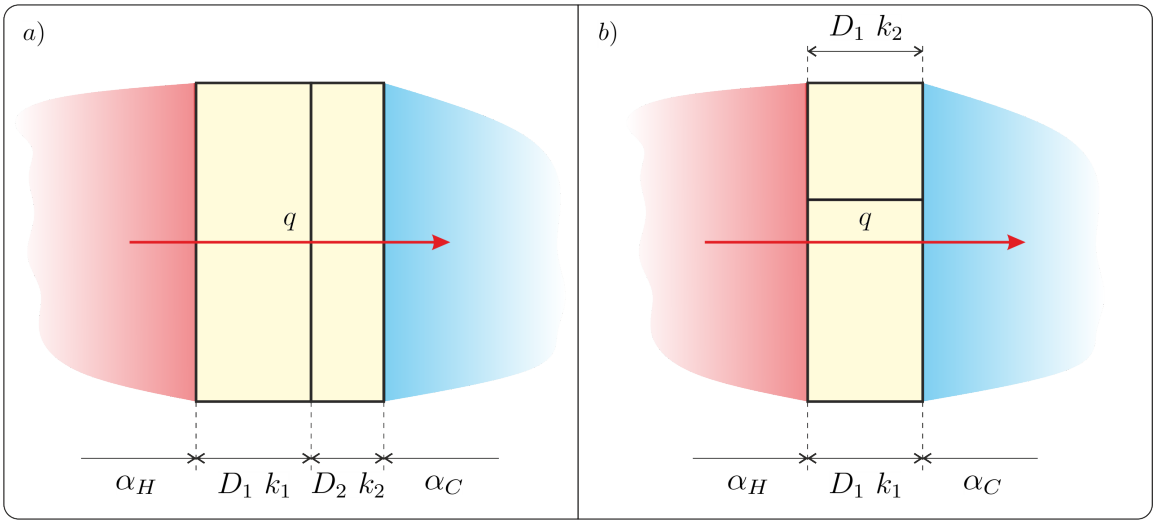
nebo určíme převrácenou hodnotu tepelného odporu jako součet převrácených hodnot v případě řazení odporů vedle sebe

$$\frac{1}{R} = \sum_j \frac{1}{R_{cond,j}} + \sum_j \frac{1}{R_{conv,j}}. \tag{3.21}$$

Přesně tak, jak je tomu v případě elektrických odporů. A součinitel prostupu tepla h určíme jako převrácenou hodnotu celkového odporu

$$h = \frac{1}{R}, \tag{3.22}$$

h má tedy význam vodivosti. Tyto úvahy vedou na rovnici (3.13), kterou jsme využili při odvození středního logaritmického teplotního spádu. Vztahy (3.18), (3.19) jsou platné pouze pro případ rovinné desky (resp. válcové stěny), pro další jednoduché případy jsme



Obrázek 3.3: Schéma *a*) izolované stěny, *b*) stěny s proměnnou tepelnou vodivostní oddělující ohřívající a ohřívané médium. Vytvořeno dle [10], [11].

schopni odvodit podobné rovnice. Nicméně výrazy (3.20) až (3.22) platí naprosto obecně. Uveďme dva konkrétní příklady složené rovinné stěny. Na obrázku 3.3 *a*) vidíme schéma izolované stěny oddělující ohřívané a ohřívající médium. Zřejmě se jedná o řazení za sebou. Celkový tepelný odpor tohoto případu spočítáme jako

$$R = R_{cond,1} + R_{cond,2} + R_{conv,1} + R_{conv,2} = \frac{D_1}{k_1} + \frac{D_2}{k_2} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

A na obrázku 3.3 *b*) vidíme stěnu, která se skládá z různých materiálů, oddělující média. Jedná se o kombinaci řazení za sebou a vedle sebe. Pro celkový odpor dostáváme

$$R = \left(\frac{1}{R_{cond,1}} + \frac{1}{R_{cond,2}}\right)^{-1} + R_{conv,1} + R_{conv,2} = \left(\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_1}\right)^{-1} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

V sekci 2.2.2 jsme ukázali, že určit součinitel přestupu tepla je obtížné, proto i určení součinitele prostupu tepla, za předpokladu znalosti součinitele přestupu tepla, není snadný úkol. Podrobnosti o této metodě viz. [10], [11].

Dalším způsobem určení součinitele prostupu tepla je teorie podobnosti. Tato metoda nám pomůže v dobře prozkoumaných problémech. Vycházíme ze tří bezrozměrných vztahů

$$Nu = \frac{hd}{k},\ Re = \frac{vd}{\mu},\ Pr = \frac{c\rho\mu}{k},$$

Nusseltova, Reynoldsova a Prandtlova čísla. Během zkoumání problémů se stanoví kriteriální rovnice typu

$$Nu = DRe^{m_1}Pr^{m_2},$$

kde konstanty D, m_1, m_2 jsou určeny experimentálně, nebo řešením parciálních diferenciálních rovnic. Tyto konstanty jsou kvantifikovány literaturou popisující daný problém. Pomocí literatury postupujeme určením charakteristického rozměru d a určující teploty. Určíme Pr závisející jen na tabelovaných hodnotách pro daný materiál a teplotu. Vypočítáme Re a pomocí příslušné kriteriální rovnice určíme Nu, díky kterému snadno vypočítáme součinitel prostupu tepla h [10]. Konkrétní hodnoty konstant D, m_1, m_2 pro jednoduché případy viz. [14].

3.2.3 Účinnost tepelného výměníku

K posouzení účinnosti výměníku tepla můžeme využít dva přístupy, v závislosti na známých a měřených hodnotách. V případě, kdy jsme schopni určit střední teplotní spád, a tedy i součinitel prostupu tepla, můžeme dle [17] využít vztah ve tvaru

$$\varepsilon_{cl} = \frac{q}{q_{opt}} = \frac{q}{hA\left(T_{avgH} - T_{avgC}\right)},\ T_{avgH} = \frac{T_{H,i} + T_{H,o}}{2},\ T_{avgC} = \frac{T_{C,i} + T_{C,o}}{2}.$$

Protože je v platnosti druhý termodynamický zákon, pak

$$\varepsilon_{cl} \in \langle 0, 1 \rangle .$$

Druhý přístup k posouzení účinnosti tepelného výměníku můžeme využít v případě, kdy nejsme schopni určit střední teplotní spád. Tato metoda se nazývá NTU. K určení hodnoty účinnosti ε ve smyslu metody NTU nám postačí základní parametry výměníku, vstupní teploty, měrné tepelné kapacity a hmotnostní toky médií [16]. Nejprve musíme zavést pojem maximální možný tepelný tok [16]

$$q_{max} = \min\left\{\Phi_H c_{p,H}, \Phi_C c_{p,C}\right\}\left(T_{H,i} - T_{C,i}\right) = C_{min}(T_{H,i} - T_{C,i}).$$

Je přirozené definovat účinnost jako podíl aktuálního a maximálního tepelného toku [11]

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{max}},\ \varepsilon \in (0, 1).$$

NTU (Number of Transfer Units) je bezrozměrné číselné kritérium, pomocí kterého se charakterizuje schopnost výměníků tepla přenášet teplo za konkrétních podmínek [16]. Platí [11]

$$NTU = \frac{hA}{C_{min}}. \tag{3.23}$$

A pro vztah mezi ε a NTU lze pro souproudé resp. protiproudé zapojení odvodit vztahy (viz. [11])

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left(-NTU\left(1 + C_r\right)\right)}{1 + C_r} \tag{3.24}$$

$$NTU = -\frac{\ln\left(1 - \varepsilon(1 + C_r)\right)}{1 + C_r}, \tag{3.25}$$

resp.

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left(-NTU(1 - C_r)\right)}{1 - C_r \exp\left(-NTU(1 - C_r)\right)} \tag{3.26}$$

$$NTU = \frac{1}{C_r - 1} \ln\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon C_r - 1}\right), \tag{3.27}$$

kde

$$C_r = \frac{C_{min}}{\max\left\{\Phi_H c_{p,H}, \Phi_C c_{p,C}\right\}}.$$

V případě posouzení účinnosti strojů, například motorů, chceme, aby byla účinnost, co největší. V případě účinnosti tepelných výměníků je tomu jinak. Jestliže $\varepsilon \to 1$, pak $NTU \to \infty$. A z definice (3.23) vidíme, že buďto $hA \to \infty$, nebo $C_{min} \to 0$. A to znamená, že tepelný výměník má buďto zbytečně obrovskou teplosměnnou plochu A [16], a nebo hmotnostní tok obou médií se blíží nule.

4 Tepelný výměník s polymerními dutými vlákny

V této části krátce popíšeme polymerní tepelné výměníky, poukážeme jaké mají výhody, jaké nevýhody. K jakému vylepšení během výzkumů došlo, aby byly nevýhody minimalizovány. Poté uvedeme tepelný výměník, na kterém jsme provedli měření v Laboratoři přenosu tepla a proudění. Vyhodnotíme účinnost, součinitel prostupu tepla, tepelný tok. Hodnoty použijeme pro zobrazení průběhu teploty v pevně zvolených místech výměníku v závislosti na čase.

Hlavní část výměníků se skládá z malých polymerních trubiček, které nazýváme dutá vlákna [18], o vnějším průměru $(0,5 - 1,3)\,mm$ [16]. V závislosti na účelu výměníku se vlákna vyrábí z různých polymerů, například z polypropylenu (PP), polyethylenu (PE), polyvinylfluoridu (PVDF), perfluoroalkoxu (PFA) [19], polyamidu (PA), polykarbonátu (PC) [18]. Mezi hlavní výhody oproti kovovým tepelným výměníkům patří:

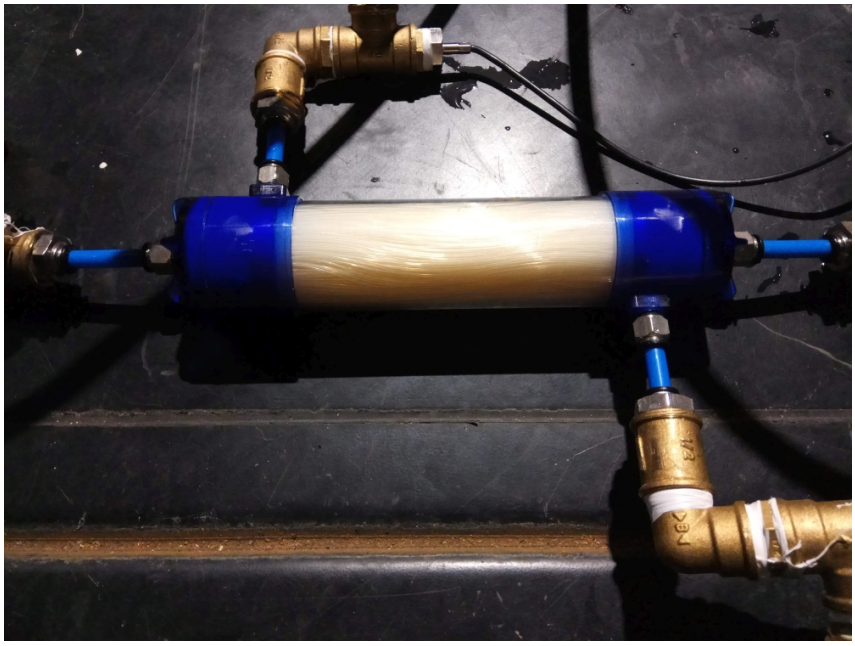
- Lepší tvarovatelnost [16]
- Kotlový výměník s dutými vlákny je 4-5 krát lehčí, než velikostně srovnatelný kovový [16]
- Méně se zanáší [18]
- Vysoký poměr teplosměnné plochy a objemu [18]
- Významná chemická a korozní odolnost [19]
- Rychlá reakce na změnu teploty [19]
- Nízká cena, běžné polymery jsou levnější než kov [19]
- Šetrnější pro životní prostředí, celkově je zapotřebí asi poloviční energie na zpracování jednotky hmotnosti plastu než kovu [20]

Na druhou stranu je všeobecně známo, že tepelná vodivost polymerů je malá, konkrétně (0,1 - 0,4) $Wm^{-1}K^{-1}$, což je asi 100-300 krát méně než tepelná vodivost kovů [20]. Proto podle (3.18) bude tepelný odpor veliký. Tento problém můžeme vyřešit pomocí přidání tepelně vodivostních příměsí, např. grafitu do PP [20]. Nebo opět s přihlédnutím ke vztahu (3.18) vidíme, že ke snížení tepelného odporu povede snížení tloušťky stěny vlákna. Skutečně používat vlákna malých průměrů a malé tloušťce stěny je klíčové pro vysokou tepelnou výkonnost [19]. V našem případě rozumíme malou tloušťkou stěny hodnoty okolo (0,05-0,3) mm. Dle [21] může součinitel prostupu tepla polymerního tepelného výměníku v zapojení voda-voda dosahovat hodnot (647 - 1314) $Wm^{-2}K^{-1}$. Tyto výsledky jsou srovnatelné s hodnotami uváděnými pro běžné kovové kotlové tepelné výměníky [16].

4.1 Měření

V dalším se věnujeme tepelnému výměníku s polymerními dutými vlákny (obrázek 4.1), který zařadíme dle podkapitoly 3.1, jako rekuperátor, tedy nutně tepelný výměník s nepřímým kontaktem, umožňující protiproudé a souproudé zapojení. Z hlediska geometrie se

jedná o trubkový rekuperátor, speciálně kotlový. Válcový plášť, kterým protéká ohřívající médium, je z tvrzeného plastu, ohřívané médium protéká dutými vlákny. V našem měření jsme pracovali s tímto výměníkem jako jednofázovým. Ve výměníku se nachází 1700 dutých vláken o vnitřním průměru 0,8 mm. Efektivní délka vláken je 19 cm a celková teplosměnná plocha je 0,81 m^2.



Obrázek 4.1: Měřený tepelný výměník s polymerními dutými vlákny.

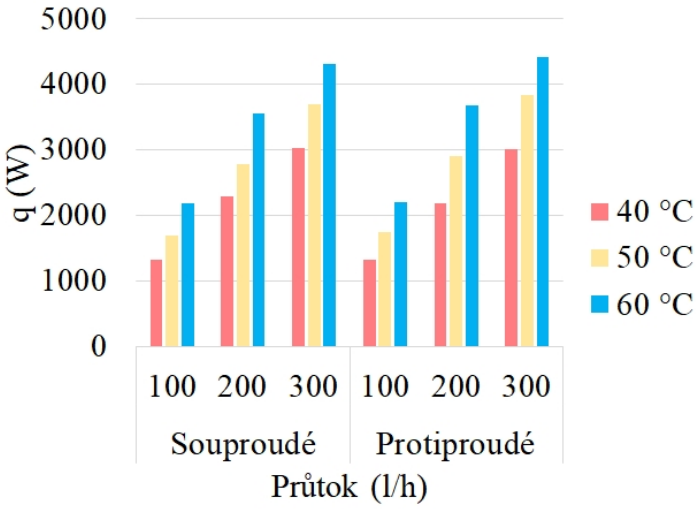
Proveďme krátký myšlenkový experiment. Mějme výměník nekonečné délky, který můžeme zapojit jako souproudý i protiproudý, navíc naměřené hodnoty nejsou závislé na tom, jestli vyměníme vstupy za výstupy a výstupy za vstupy. Zajímá nás, kdy takovýto výměník bude mít větší tepelný výkon. Uvažujeme konstantní tok, konstantní měrnou tepelnou kapacitu. Potom dle (2.3) bude maximální tepelný tok právě tehdy, když bude rozdíl teplot v okruhu maximální. Pro souproudé zapojení platí $T_{C,o} = T_{H,o}$ určeno jako vážený průměr v závislosti na tocích jednotlivých okruhů. A pro protiproudý zřejmě platí $T_{C,i} = T_{H,o}$. K většímu teplotnímu spádu zjevně dochází při protiproudém zapojení, tedy i většímu tepelnému toku. Proto podle (3.13) má protiproudé zapojení větší součinitel prostupu tepla. Vycházeli jsme z předpokladu nekonečnosti tepelného výměníku, kterou v praxi nemůžeme zaručit. Proto se nabízí přirozená otázka, zda-li vždy platí, že protiproudé zapojení je lepší, než-li souproudé.

Měření jsme provedli v kalorimetrické místnosti v Laboratoři přenosu tepla a proudění. Izolovaný tepelný výměník jsme postupně zapojili jako protiproudý a souproudý. Vždy tak, že vlákny protékalo ohřívané médium. Měřili jsme teplotu na vstupu a výstupu obou médií a tlakovou ztrátu okruhů. Pracovali jsme s obecně uznávaným omezením, že tlaková ztráta musí být menší než 50 kPa. Průtok studeného okruhu jsme nastavili na 400 lh^{-1}, proudící voda byla odebírána z vodovodního řádu o teplotě 10 °C. Průtok vody v teplém okruhu jsme pro teploty 40 °C, 50 °C a 60 °C měnili na 100 lh^{-1}, 200 lh^{-1} a 300 lh^{-1}. Analýzu dat provedeme následovně:

- Pro určení hmotnostního toku, měrné tepelné kapacity použijeme vztahy ze sekce 6
- Dle (2.3) vypočítáme tepelný tok soustavy.

- Z (3.17) určíme střední logaritmický teplotní spád,
- ze kterého, s pomocí (3.13), vyjádříme součinitel prostupu tepla.
- Dále snadno vyhodnotíme NTU z (3.23) a pro souproudé (resp. protiproudé) zapojení účinnost z (3.24) (resp. (3.26)).

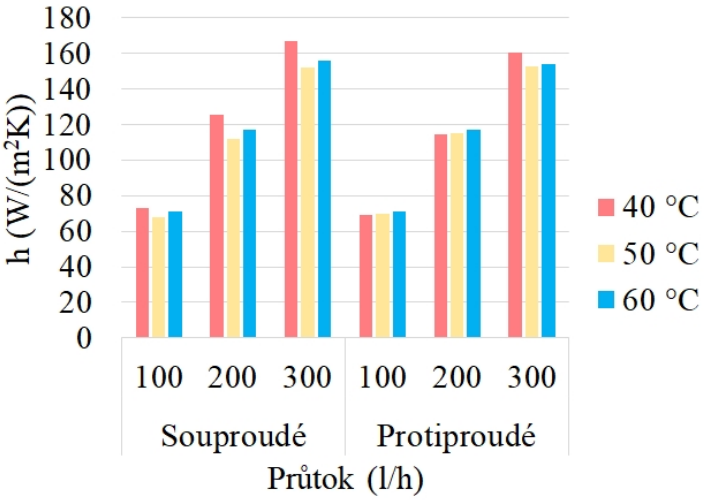
Hodnoty tepelného výkonu se pohybují v rozmezí (1300-4400) W. Z obrázku 4.2 je patrné, že rozdíl výkonů v souproudém a protiproudém zapojení je malý. Průměrně se liší o 2 %, a to tak, že protiproudé zapojení má vyšší hodnoty tepelného výkonu. Formulujme hypotézu, že výkon obou zapojení je pro stejnou teplotu a stejný průtok totožný vzhledem k alternativní hypotéze, že tepelné výkony obou zapojení pro stejnou teplotu a stejný průtok jsou různé. Tuto hypotézu zamítáme ve všech případech na základě znaménkového testu s p hodnotou menší než 0,01.



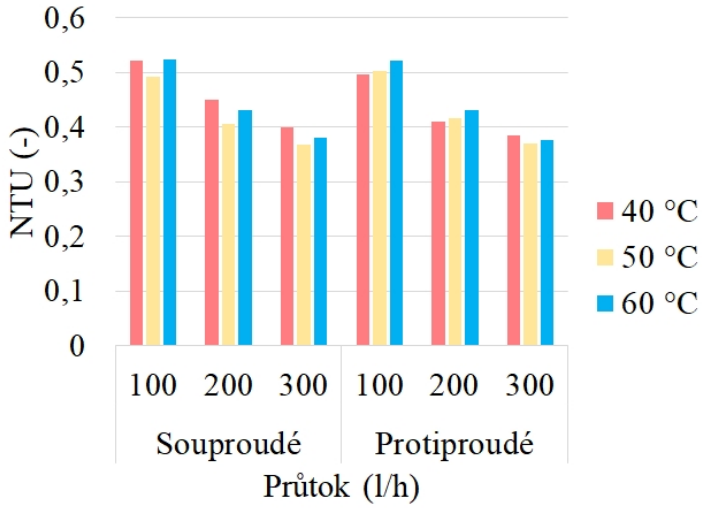
Obrázek 4.2: Tepelný výkon výměníku.

Na obrázku 4.3 je vývoj součinitele prostupu tepla. Není divu, že s růstem teploty a toku vstupující ohřívající kapaliny roste jeho hodnota. Je to způsobeno růstem tepelného toku. Součinitel prostupu tepla nabývá hodnot mezi (70-170) $Wm^{-2}K^{-1}$. Pro teplotu 40 °C nabývá vyšších hodnot součinitele prostupu tepla protiproudé zapojení, průměrně o 1,5 %, pro vyšší teploty souproudé, a to průměrně o 3,5 %. Formulujme hypotézu, že součinitel prostupu tepla je pro stejnou teplotu a stejný průtok při souproudém a protiproudém zapojení totožný, vzhledem k alternativní hypotéze, že se součinitel prostupu tepla při různém zapojení liší. Na základě znaménkové testu tuto hypotézu ve všech případech zamítáme s p hodnotou menší než 0,01.

Pro vyhodnocení účinnosti tepelného výměníku jsme uvedli NTU metodu. Optimální hodnoty NTU jsou uváděny okolo 2, tehdy dosahuje účinnost okolo 80%. Dle obrázku 4.4 vidíme, že i hodnota NTU je málo závislá na zapojení tepelného výměníku Pohybuje se od 0,35 do 0,50 a tomu příslušící účinnost v rozmezí od 27% do 38%. NTU při souproudém zapojení nabývá průměrně o 1,5 % větší hodnoty, než při protiproudém. Formulujme hypotézu, že NTU je pro protiproudé a souproudé zapojení při stejné teplotě a průtoku stejné, vzhledem k alternativní hypotéze, že se NTU protiproudého a souproudého zapojení při stejné teplotě a průtoku liší. Tuto hypotézu zamítáme ve všech případech na základě znaménkové testu s p hodnotou menší než 0,01.



Obrázek 4.3: Součinitel prostupu tepla výměníku.



Obrázek 4.4: NTU výměníku.

Vidíme, že na základě znaménkových testů (stručně viz. poznámka 5.8), můžeme jednoznačně rozhodnout, v jakých případech je které zapojení lepší. Poznamenejme, že se jedná o malé rozdíly v rámci jednotek procent. Na základě těchto malých odlišností konfigurací je těžké rozhodnout, které zapojení je v tomto konkrétním případě lepší. Protiproudé zapojení vykazuje rychlejší reakci na změnu v systému, a proto bychom vybrali právě toto zapojení, navíc, rozdíl součinitele prostupu tepla je nepatrný pro takto malé hodnoty a kdybychom dokázali zvýšit účinnost výměníku na hodnoty 80 %, pak by neznamenala vyšší účinnost výhodnější chování systému.

Celkově nám ale toto pozorování dává důležitější informace o tomto výměníku, než je výhodnější způsob zapojení. Naměřili jsme velmi malý součinitel prostupu tepla, účinnost a pozorujeme závislost tlakové ztráty na zvolení vstupu a výstupu. Problém spočívá v kompletaci vláken. V našem případě jde o spojení pár desítek vláken na jejich koncích. Takto vytvořené svazky se opět spojí na koncích a vzniká teplosměnné jádro tepelného výměníku, které vkládáme do plastového pláště. Po měření jsme na výměníku pozorovali, že tyto svazky držely při sobě, médium tedy nemohlo proudit mezi vlákny uvnitř svazků a aktivní teplosměnná plocha byla menší, než námi spočítaná. Skutečně ze vztahu (3.17)

vidíme, že čím menší je teplosměnná plocha, tím větší je součinitel prostupu tepla (za předpokladu stejného výkonu a středního logaritmického spádu).

Tento problém můžeme vyřešit spojením všech vláken zároveň v jeden svazek. Tím zamezíme tvorby podsvazků, mezi které se nemůže dostat médium. Dále pomůže omezení počtu vláken uvnitř pláště, v aktuální konfiguraci dosedají vlákna na sebe po celé délce a dochází k velkému omezení aktivní teplosměnné plochy. Další řešení spočívá v tom, že vlákna neumístíme rovnoběžně, ale tak, aby se křížila, čímž dochází k bodovým kontaktům vláken. Uvedeným vylepšením se v tomto textu dále nevěnujeme. Využijme vypočtené hodnoty pro aplikaci SODR1 (3.10).

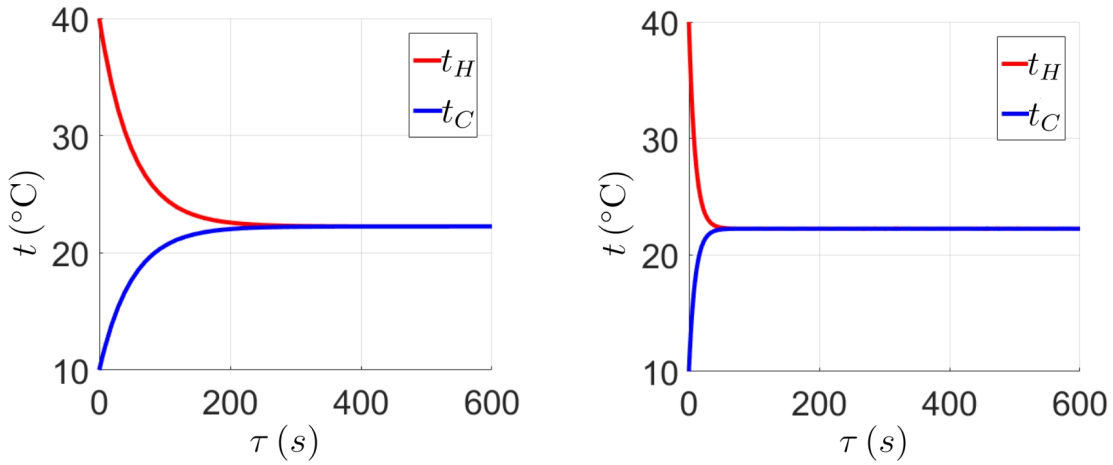
4.2 Teplotní průběh

Uvažujme tepelný výměník s polymerními dutými vlákny analyzován v předchozí části. Zvolme průtok ohřívaného média $400\,lh^{-1}$ a ohřívajícího 300 lh^{-1}. Dále $t_{C,i} = 10\,°\mathrm{C}$ a $t_{H,i} = 40\,°C$. Měrná tepelná kapacita vody je $4186\,Jkg^{-1}K^{-1}$. Určeme, že šířka, kde měříme konstantní teplotu, je $5\,mm$, pak velikost teplosměnné plochy je $2{,}4\,dm^2$. Další konstanty určíme z tabulky 4.1. Součinitel prostupu tepla je námi vypočtená hodnota, vybrali jsme takovou konfiguraci, kde je maximální, tedy souproudé zapojení. A konečně konstanty h_C^*, h_H^* jsme určili z (3.7). Po dosazení všech potřebných konstant do (3.10)

Zapojení	$t_H(0)\,(°\mathrm{C})$	$t_C(0)\,(°\mathrm{C})$	$h\,(Wm^{-2}K^{-1})$	$h_C^*\,(-)$	$h_H^*\,(-)$
Souproudé	40	10	170	0,0043	0,0063

Tabulka 4.1: Hodnoty pro určení řešení SODR1.

dostáváme přesné řešení počátečního problému na vstupu obou médií do výměníku, viz. obrázek 4.5 a). Vidíme, že k výraznému ustálení systému dojde během 5 minut. Skutečně,



(a) Neoptimální struktura teplosměnné plochy

(b) Optimální struktura teplosměnné plochy

Obrázek 4.5: Vykreslení řešení SODR1 průběhu teploty

teplotní rozdíl klesne pod 5 % původní hodnoty za čas 2,5 minuty. V podkapitole 4.1 jsme ukázali, že měřený výměník nemá optimální strukturu teplosměnné plochy, z toho důvodu je součinitel prostupu tepla malý, a tedy konstanty h_H^*, h_C^* jsou taktéž malé, což

z povahy řešení (3.7) vede k závěru, že proces ustalování bude prodloužen. Dále jsme uvedli možná řešení, jak vylepšit tento výměník. U tepelných výměníků s dutými polymerními vlákny, které mají optimální strukturu teplosměnné plochy měříme součinitel prostupu tepla v rozmezí (600-1000) $Wm^{-2}K^{-1}$. Na obrázku 4.5 b) vidíme průběh teploty tepelného výměníku s polymerními dutými vlákny, který je podobný námi měřenému výměníku. Jeho teplosměnná plocha má optimální strukturu a součinitel prostupu tepla je 900 $Wm^{-2}K^{-1}$. Vidíme, že k výraznému ustálení systému dojde během jedné minuty. Skutečně, teplotní rozdíl klesne pod 5 % původní hodnoty za 30 sekund. Poznamenejme, že podobný výměník můžeme vytvořit z námi měřeného výměníku využitím většího plastového pláště, díky čemuž se vlákna nedotýkají po celé délce a zvětší se aktivní teplosměnná plocha. Z těchto úvah a z měření vyplývá, že tepelné výměníky s polymerními dutými vlákny velmi rychle reagují na změnu podmínek, díky této vlastnosti je možné výměníky tohoto typu využívat pro předehřev vody, nebo pro řízení bouřlivých chemických reakcí, například při výrobě chemikálií.

Závěr

Cílem práce bylo provedení rešerše řešitelnosti obyčejných diferenciálních rovnic, popis vývoje teploty dynamického tepelného výměníku se zanedbáním vlivu polohy.

V první kapitole jsou obsažena důležitá tvrzení, především se jedná o Peanovu a Picardovu větu (resp. jejich analogy), které v případě spojitosti dat zaručují existenci řešení počátečního problému ODR1 (resp. SODR1, ODRn).

Třetí kapitola obsahuje aplikaci teorie z předchozích částí. Byl odvozen vztah popisující průběh teploty v dynamickém tepelném výměníku. Ukazuje se, že problematika přenosu tepla je příliš komplikovaná na to, aby se dala popsat nezávisle na poloze. Jestliže je zafixován bod, pak mezi okruhy tepelného výměníku neexistuje teplosměnná plocha, tedy teplo předávané mezi okruhy je nulové, navíc z rovnice kontinuity plyne, že veškerá energie, která do průřezu vejde z něho ihned odejde. Takovýto případ se deformuje na rovnici derivace funkce je rovna nule, jejímž řešením je konstanta rovna počáteční podmínce, a tak je soustava ustálena okamžitě. V případě kdy se uvažuje nějaké okolí bodu, ve kterém je teplota konstantní, pak existuje teplosměnná plocha a dochází k prostupu tepla mezi okruhy, nicméně kvůli tomu, že teplota je v okolí konstantní (a kvůli platnosti rovnici kontinuity), tak všechno teplo, které do okruhu přijde, ihned odejde. Problém tedy připomíná případ, kdy dvě média jsou přivedena do prostoru, kde dojde k ustálení teploty přes teplosměnnou plochu. Tížené řešení bychom obdrželi v případě zohlednění vývoje teploty v okolí bodu v závislosti na poloze, čímž by došlo k opuštění ODR a využití parciálních diferenciálních rovnic, což není obsahem této práce.

V poslední části práce jsou uvedeny výsledky měření konkrétního tepelného výměníku s polymerními dutými vlákny při různém zapojení. Na základě znaménkového testu bylo zamítnuto (pomocí softwaru Minitab® 18), že výkon, součinitel prostupu tepla a NTU jsou nezávislé na zapojení. Kromě změny zapojení byl zohledněn vliv změny průtoku teplého okruhu na hodnoty 100, 200 a 300 lh^{-1}. Naměřený tepelný výkon tepelného výměníku se pohybuje od 1300 do 4400 W. Vyšší průtok vytváří větší tepelný výkon. Protiproudé zapojení dosahuje průměrně o 2 % vyšší tepelný výkon. Součinitel prostupu tepla dosahuje nízkých hodnot od 70 do 170 $Wm^{-2}K^{-1}$. Pro nejmenší teplotu 40 °C dosahuje vyšších hodnot protiproudé zapojení, pro vyšší teploty vede souproudé zapojení, a to průměrně o 3,5 %. Souproudé zapojení výměníku vykazuje průměrně o 1,5 % vyšší hodnoty NTU, které se pohybují v rozmezí 0,35 a 0,5 a tomu odpovídající účinnost od 27 % do 38 %. Nízké hodnoty součinitele prostupu tepla a účinnosti naznačují, že s výměníkem není něco v pořádku. Jedná se o příliš velký počet vláken uvnitř plastové pláště, kvůli tomu se vlákna dotýkají po celé délce a dochází k výraznému omezení aktivní teplosměnné plochy, což vede k neefektivnímu využití celé soustavy. Dále tepelný výměník vykazoval obrovské tlakové ztráty, které značně limitovaly průtok uvnitř pláště. Omezením počtu vláken uvnitř výměníku budou tyto problémy vyřešeny, to povede ke zvýšení tepelného výkonu a účinnosti soustavy.

Literatura

[1] ČERMÁK, Jan. *Základy teorie ODR*. [online] 2007 [cit. 2019-04-10]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Zaklady-teorie-ODR/sc-48-sr-1-a-17/default.aspx

[2] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.

[3] FRANCŮ, Jan. *Obyčejné diferenciální rovnice.* [online]. 2018 [cit. 2019-02-12]. Dostupné z: http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu

[4] PERKO, Lawrence. *Differential equations and dynamical systems*. 3rd ed. New York: Springer, c2001. ISBN 0-387-95116-4.

[5] HIRSCH, Morris W., Stephen SMALE a Robert L. DEVANEY. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. 3rd ed. Waltham, MA: Academic Press, c2013. ISBN 9780123820105.

[6] KOLMOGOROV, A. N. a Sergej Vasilievič FOMIN. *Introductory real analysis*. [1st ed.]. Přeložil Richard A. SILVERMAN. New York: Dover Publications, 1970. ISBN 0-486-61226-0.

[7] ČERMÁK, L. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*, učební text FSI VUT Brno. [on-line]. 2019 [cit. 2019-04-10]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Numericke-metody-II/sc-1246-sr-1-a-263/default.aspx

[8] VITÁSEK, Emil. *Metoda přesunu okrajových podmínek*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie [online]. 2007(52), str. 231 - 237 [cit. 2019-03-16]. ISSN 0032-2423. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/141362

[9] BABUŠKA, I., Práger, M., Vitásek, E.: *Numerical Processes in Differential Equations*. London–New York–Sydney, Interscience Publishers 1966.

[10] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6.

[11] BERGMAN, T. L. a Frank P. INCROPERA. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 7th ed. Hoboken, NJ: Wiley, c2011. ISBN 978-0470-50197-9.

[12] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed. *Fyzika*. 2., přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.

[13] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3578-0.

[14] BALÁŠ, Marek. *Kotle a výměníky tepla*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2013. ISBN 978-80-214-4770-7.

[15] KAKAC, S. a A. PRAMUANJAROENKIJ. *Heat exchangers: selection, rating, and thermal design*. 3rd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, c2012. ISBN 978-1-4398-4990-3.

[16] BROŽOVÁ, Tereza *Fázové změny na povrchu tepelných výměníků s dutými vlákny*: dizertační práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Laboratoř přenosu tepla a proudění, 2018. 106 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.

[17] BROŽOVÁ, T. *Řešení inverzních úloh v oblasti výměníků hmoty a tepla.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 51 s. Vedoucí doc. RNDr. Jan Čermák, CSc

[18] *Polymeric Heat Exchangers with Hollow Fibres, Heatlab.* Heatlab [online]. Copyright ©2011 [cit. 2019-05-10]. Dostupné z: http://www.heatlab.cz/research/polymeric-heat-exchangers-with-hollow-fibres

[19] ASTROUSKI, I. Brno: *Polymeric Hollow Fiber Heat Exchanger Design.* Brno University of Technology, Faculty of Mechanical engineering, 2016. 91 pp., Supervisor of doctoral thesis: prof. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.

[20] ASTROUSKI, I.; RAUDENSKÝ, M. *The study of polymeric hollow fiber heat exchangers.* In engineering mechanics 2012. 1. Svratka: 2012. p. 47-57. ISBN: 978-80-86246-40-06

[21] ZARKADAS, D.M., SIRKAR, K.K. *Polymeric Hollow Fiber Heat Exchangers: An Alternative for Lower Temperature Applications* [online]. [cit. 2019-4-15]. DOI: 10.1021/ie040143k. ISBN 10.1021/ie040143k. Dostupné z: http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ie040143k

[22] FRANCŮ, Jan. *5. Limita a spojitost.* [online]. 2016 [cit. 2019-04-08]. Dostupné z: http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu

[23] NECHVÁTAL, Luděk. *5 Zobrazení metrických prostorů.* [online]. 2018 [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspII/sc-1226-sr-1-a-267/default.aspx

[24] NECHVÁTAL, Luděk. *7 Parciální a směrová derivace, gradient.* [online]. 2018 [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspII/sc-1226-sr-1-a-267/default.aspx

[25] FRANCŮ, Jan. *11. Vektorové pole.* [online]. 2016 [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Vektorove-operatory/sc-1233-sr-1-a-246/default.aspx

[26] NECHVÁTAL, Luděk. *21 Plošný integrál.* [online]. 2018 [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspII/sc-1226-sr-1-a-267/default.aspx

[27] FRANCŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice.* Páté opravené vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2017. ISBN 978-80-214-5577-1.

[28] NECHVÁTAL, Luděk. *21 Určitý Riemannův integrál.* [online]. 2018 [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspII/sc-1226-sr-1-a-267/default.aspx

[29] ANDĚL, Jiří. *Statistické metody.* 4., upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 8073780038.

[30] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky.* 3., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-8-7378-001-2.

Seznam obrázků

Obrázek 2.1: *a*) Konvence značení, *b*) energetická bilance 20
Obrázek 2.2: *a*) vedení pevnou látkou, nebo neproudící kapalinou, *b*) konvekce mezi proudící kapalinou a povrchem pevné látky, *c*) záření dvou povrchů 22
Obrázek 2.3: Hydrodynamická mezní vrstva v bodě x_1 a tepelná v bodě x_2 24
Obrázek 2.5: Vývoj hydrodynamické mezní vrstvy, změna typu proudění při obtékání tekutiny rovinné desky 25
Obrázek 3.1: Vyobrazení veličin v *a*) souproudém zapojení, *b*) protiproudém zapojení 27
Obrázek 3.2: Průběh teploty ve výměníku, *a*) souproudý, *b*) protiproudý 32
Obrázek 3.3: Schéma *a*) izolované stěny, *b*) stěny s proměnnou tepelnou vodivostní oddělující ohřívající a ohřívané médium 33
Obrázek 4.1: Měřený tepelný výměník s polymerními dutými vlákny 36
Obrázek 4.2: Tepelný výkon výměníku 37
Obrázek 4.3: Součinitel prostupu tepla výměníku 38
Obrázek 4.4: NTU výměníku 38
Obrázek 4.5: Vykreslení řešení SODR1 průběhu teploty 39

Seznam tabulek

Tabulka 1.1: Příklady okrajových podmínek rovnice 2. řádu 16
Tabulka 1.2: Různý počet řešení okrajové úlohy 17
Tabulka 3.1: Hodnoty ΔT_H, ΔT_C pro souproudé a protiproudé zapojení 31
Tabulka 4.1: Hodnoty pro určení řešení SODR1 39

Seznam použitých zkratek a symbolů

SYMBOL	JEDNOTKA	VÝZNAM
A	m^2	plocha, teplosměnná plocha
c	$Jkg^{-1}K^{-1}$	měrná tepelná kapacita
C	JK^{-1}	tepelná kapacita
d	m	charakteristický rozměr
D	-	konstanta určující kriteriální rovnice Nu
E	J	energie
ΔE	J	změna energie
h	$Wm^{-2}K^{-1}$	součinitel prostupu tepla
h^*	-	konstanta průběhu teploty
i	J	entalpie
k	$Wm^{-1}K^{-1}$	tepelná vodivost
m	kg	hmotnost
m_1, m_2	-	konstanty určující kriteriální rovnice Nu
Nu	-	Nusseltovo číslo
NTU	-	Number of Transfer Units, bezrozměrné číselné kritérium
Pr	-	Prandtlovo číslo
q	W	tepelný tok
q'	Wm^{-2}	hustota tepelného toku
Q	J	teplo
R	m^2KW^{-1}	tepelný odpor
Re	-	Reynoldsovo číslo
S	JK^{-1}	entropie
t	°C	teplota
T	K	teplota
ΔT	K	teplotní spád
v	ms^{-1}	rychlost
W	J	práce
α	$Wm^{-2}K^{-1}$	součinitel přestupu tepla
δ	m	tloušťka mezní vrstvy
ε	-	účinnost
η	Pas	dynamická viskozita
μ	m^2s^{-1}	kinematická viskozita
ρ	kgm^{-3}	hustota
τ	s	čas
Φ	kgs^{-1}	hmotnostní tok
Φ_{flow}	lh^{-1}	objemový tok

DOLNÍ INDEX	VÝZNAM
∞	volného proudu
1	levý kraj
2	pravý kraj
avg	průměrný
$cond$	při vedení
$conv$	při proudění
C	ohřívané médium
cl	při znalosti součinitel prostupu tepla
fl	způsobené prouděním
g	generující
H	ohřívající médium, hydrodynamický
i, in	vstup do systému
m	střední logaritmický
max	maximální
min	minimální
opt	optimální
o, out	výstup ze systému
p	při konstantním tlaku
r	poměr minimální a maximální hodnoty
s	na povrchu
T	tepelný
τ_a	v čase τ_a
τ_b	v čase τ_b

5 Apendix

V této části uvedeme důležité matematické poznatky využité při analýze tepelného výměníku, které přímo nesouvisí s teorií ODR, a proto nebyly uvedeny v první kapitole.

Definice 5.1. [22] *Řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}_0$ definičního oboru funkce f, jestliže ke každému ε-okolí bodu $f(\boldsymbol{x}_0)$ existuje δ-okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$ takové, že platí*

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že funkce f je spojitá, jestliže je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

Definice 5.2. [4] *Řekneme, že spojitá funkce $f(x, \xi_0, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, je lipschitzovská v proměnné ξ_i, jestliže existuje kladná konstanta L taková, že pro libovolné dva prvky $(x, \xi_0, \ldots, \xi_{i1}, \ldots, \xi_{n-1}), (x, \xi_0, \ldots, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$|f(x, \xi_0, \ldots, \xi_{i1}, \ldots, \xi_{n-1}) - f(x, \xi_0, \ldots, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{n-1})| \leq L|\xi_{i1} - \xi_{i2}|. \tag{5.1}$$

Poznámka 5.3. Definice spojitosti splňuje intuitivní představy o spojitosti, požadujeme, aby se hodnoty měnily plynule, beze skoků. Krátce si přibližme méně průzračný pojem lipschitzovskost. V případě prostoru $\mathbb{R}^2$ a funkce $f(x, y)$ je podmínka (5.1) ekvivalentní s požadavkem na spojitost parciální derivace $f(x, y)$ podle y [3], z níž plyne omezenost této parciální derivace a tím i lipschitzovskost (tento fakt lze dokázat pomocí věty o střední hodnotě viz. [23]). Význam konstanty L v prostoru $\mathbb{R}^2$ vyjádříme následovně

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L.$$

Definice 5.4 (Gradient funkce)**.** [24] *Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce a X_0 v definičního oboru $D(f)$. Nechť pro $\forall i = 1, 2, \ldots n$ existuje $f'_{x_i}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$. Pak vektor*

$$\boldsymbol{\nabla} f(X_0) = \left(f'_{x_1}(X_0), f'_{x_2}(X_0), \ldots, f'_{x_n}(X_0)\right)$$

nazveme gradientem funkce f v bodě X_0. Existují-li parciální derivace na $M \subseteq D(f)$, pak vektorovou funkci $\boldsymbol{\nabla} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n})$ nazveme gradientem funkce f.

Definice 5.5 (Divergence)**.** [25], [26] *Buď $(\Omega, \mathbf{F}(X))$ spojitě diferencovatelné vektorové pole dimenze $n \in \mathbb{N}$, $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Divergenci vektorové funkce $\mathbf{F}$ rozumíme*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}'_{x_i}.$$

Lemma 5.6. [27] *Buď $f(x)$ spojitá funkce, která má derivaci v intervalu (x_a, x_b). Pak platí*

$$f(x_b) - f(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Důkaz plyne z definice určitého integrálu, z Newtonovy-Leibnizovy formule viz. [28]. □

Lemma 5.7. [27] *Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v okolí bodu x^*, $B(x^*, r)$ otevřená koule se středem v bodě x^* a poloměrem r. Pak platí*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{B(x^*, r)} \int_{B(x^*,r)} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x^*)$$

Důkaz. Jedná se o aplikaci věty o limitě průměru. □

Poznámka 5.8. Testování hypotéz jsme prováděli pomocí seřazení dat pro souproudé a protiproudé zapojení podle velikosti. Vytvořili jsme dvojice a prvky ve dvojicích jsme od sebe odečetli, dále jsme zkontrolovali, jestli takto získaná data mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou (pomocí t-testu), nicméně data nesplňovala normalitu (na základě testů Anderson-Darling, Ryan-Joiner a ani Kolmogorov-Smirnov), a tedy nemohli jsme tento test použít. Proto jsme otestovali data na symetrii okolo mediánu k využití Wilcoxonovu testu, došli jsme k závěru, že data nejsou symetrická. A tak jsme použili neparametrický znaménkový test, pomocí kterého jsme všechny hypotézy zamítli s p hodnotou menší než 0,01. Vyhodnocování hypotéz jsme prováděli v softwaru Minitab® 18. Více o těchto testech a obecně o statistických metodách [29], [30].

6 Vztahy pro analýzu dat

Přepočet absolutní teploty

$$T\,(K) = t\,(^{\circ}C) + 273,15$$

Výpočet hmotnostního toku z průtoku

$$\Phi\ \left(kgs^{-1}\right) = \frac{\Phi_{flow}\ (lh^{-1})\,\rho\ (kgm^{-3})}{1000 \cdot 3600}$$

Určení teplosměnné plochy tepelného výměníku s polymerními vlákny

$$A\ \left(m^2\right) = [\text{PočetVláken}] \cdot [\text{ObvodPodstavyVlákna}] \cdot [\text{DélkaVlákna}]$$

Měrná tepelná kapacita vody, t je průměrná hodnota teplot na vstupu a výstupu

$$\begin{aligned} c_p\ \left(Jkg^{-1}K^{-1}\right) =& 0,00000000134t^6\,(^{\circ}C) - 0,00000049506t^5\,(^{\circ}C) + 0,0000709647t^4\,(^{\circ}C) - \\ &- 0,00486456928t^3\,(^{\circ}C) + 0,1675985094t^2\,(^{\circ}C) - \\ &- 2.81027645351t\,(^{\circ}C) + 4201.37207505393 \end{aligned}$$

Hustota vody, t je průměrná hodnota teplot na vstupu a výstupu

$$\rho\ \left(kgm^{-3}\right) = -\,0,00027t^3\,(^{\circ}C) + 0,01047t^2\,(^{\circ}C) - 0,2716t\,(^{\circ}C) + 1002$$