

TRAJEKTORIE AUTONOMNÍCH ROVNIC V ROVINĚ I. LINEÁRNÍ SOUSTAVY A ROVNICE

JAN FRANČŮ

ABSTRAKT. Článek se zabývá trajektoriemi řešení autonomních soustav dvou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a jedné lineární rovnice druhého řádu. Za předpokladu existence a jednoznačnosti řešení jsou analyzovány všechny případy izolovaných i neizolovaných singulárních bodů ilustrovaná konkrétními příklady včetně fázových portrétů. Navíc je probrán implicitní popis trajektorií v kartézských i v polárních souřadnicích.

ÚVOD

Obyčejné diferenciální rovnice se využívají při modelování řady jevů ve fyzice, mechanice, biologii, ekonomii i dalších oblastech. Řešení ve tvaru předpisu funkce však neříká mnoho o chování veličiny, kterou jsme modelovali. Názornější informací dává graf řešení, který však lze znázornit v rovině jen v případě jedné rovnice prvního řádu. Pokud rovnice splňuje podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení v nějaké oblasti, grafy řešení tvoří „rovnoběžné“ neprotínající se křivky.

Tato vlastnost už není u rovnice druhého řádu. Protože řešení je určeno dvěma počátečními podmínkami, hodnotou a derivací, každým bodem prochází nekonečně mnoho grafů řešení s různými směrnici. Podobně grafem řešení soustavy dvou rovnic prvního řádu je křivka v prostoru \mathbb{R}^3 , kterou také nelze znázornit v rovině.

Problém řeší trajektorie řešení. V případě soustavy dvou rovnic prvního řádu trajektorie je průmět grafu řešení do prostoru hodnot, kterým je rovina. Jestliže rovnice nebo soustava rovnic je autonomní, tj. nezávisí na proměnné x : „okolnosti“ jevu se v čase x nemění, závisí jenom na aktuálních hodnotách řešení. Řešení vycházející ze stejného bodu v různých časech mají sice různé grafy (posunuté v čase x) ale stejné trajektorie. Jsou to křivky nebo body v rovině. Trajektorie nekonstantních řešení jsou lokálně „rovnoběžné“ křivky, v okolí konstantního řešení – jeho trajektorií je tzv. singulární bod – se trajektorie chovají různě.

Příkladem reálné situace je pohyb hrotu pera po papíru (bez zvedání od papíru). Trajektorie tohoto pohybu je křivka, kterou pero na papíře zanechalo. Ke křivce přidáváme orientaci podle směru pohybu při rostoucím čase.

2010 MSC. Primární 34A30.

Klíčová slova. autonomní diferenciální rovnice a systémy, trajektorie, typy singulárních bodů, implicitní popis trajektorií v kartézských a polárních souřadnicích.

V případě autonomní rovnice druhého řádu k hodnotě řešení $y(x)$ přidáme jako druhou souřadnici hodnotu derivace řešení $y'(x)$. Dostáváme tak body $(y(x), y'(x))$ v rovině, které tvoří křivku, tj. trajektorii v tzv. fázovém prostoru.

Trajektorie řešení tak dává názornou informaci o chování řešení. Zajímavé je zejména chování trajektorií v okolí trajektorie konstantního řešení, tzv. singulárního bodu. Z obrázku lze také zjistit typ a vlastnosti singulárního bodu.

Obecné řešení $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x)$ dvoudimenzionální soustavy lineárních diferenciálních rovnic je určeno dvěma konstantami c_1, c_2 . Trajektorie je tak křivka zapsaná v parametrickém tvaru. Většinou není snadné určit tyto konstanty pro trajektorii procházející daným bodem $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Implicitní popis trajektorie ve tvaru $F(y_1, y_2) = k$ umožňuje určit konstantu k dosazením souřadnic bodu a tím určit hledanou trajektorii. Pro tento účel se v řadě případů hodí implicitní popis v kartézských souřadnicích, v řadě případů je však vhodnější popis v polárních souřadnicích.

Cílem článku je probrat všechny případy a možnosti trajektorií v okolí singulárních bodů lineární soustavy dvou rovnic a rovnice druhého řádu a jejich popis v implicitním tvaru v kartézských i polárních souřadnicích. V první sekci formulujeme autonomní soustavy a rovnice, trajektorie řešení a jejich vlastnosti. Druhá sekce se zabývá trajektoriemi v okolí singulárního bodu v rovině, třetí analyzuje singulární body lineárních rovnic. Čtvrtá sekce se zabývá implicitním popisem trajektorií a pátá přináší příklady všech typů singulárních bodů lineárních rovnic v rovině, jejich fázových portrétů a implicitních popisů trajektorií. V poslední sekci jsou výsledky implicitního popisu trajektorií zhodnoceny.

Implicitní popis trajektorií v kartézských souřadnicích jsem přidal z podnětu doc. M. Kureše. Doplnil jsem implicitní popis trajektorií v polárních souřadnicích. Oba, hlavně ten druhý, jsou asi výsledky nové.

1. AUTONOMNÍ SOUSTAVY, ROVNICE A JEJICH TRAJEKTORIE

Rovnici nebo soustavu rovnic nazveme *autonomní*, jestliže rovnice nebo soustava nezávisí na nezávislé proměnné. Rovnice prvního řádu $y'(x) = f(x, y)$ je tedy autonomní, pokud funkce $f(x, y)$ nezávisí na proměnné x , rovnici prvního řádu tak můžeme zapsat ve tvaru $y' = f(y)$. Autonomní lineární rovnice $y' + ay = b$ má koeficienty a, b konstantní.

Autonomní soustava rovnic

Soustavu n autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ lze obecně zapsat ve tvaru $y'_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$. Tato soustava je *autonomní*, protože funkce f_i nezávisí na proměnné x . Označme $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ vektorovou funkci řešení a $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ vektorovou funkci pravých stran, kde funkce $f_i(y_1, \dots, y_n) \equiv f_i(\mathbf{y})$. Soustavu n autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu lze tak zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(x)). \quad (1.1)$$

Piccardova věta dává existenci a jednoznačnost řešení v případě, kdy pravé strany $f_i(y_1, \dots, y_n)$, jsou lokálně lipschitzovské v proměnných y_i .

Věta 1.1. *Nechť G je oblast (otevřená souvislá množina) v \mathbb{R}^n a vektorová funkce $\mathbf{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lokálně lipschitzovká v oblasti G , tj. pro každou kompaktní (omezenou a uzavřenou) podmnožinu $K \subset G$ existuje kladná konstanta L (může záviset na množině K) taková, že*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}})| \leq L |\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}|, \quad \forall \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}} \in K, \quad (1.2)$$

kde $|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}|$ je vzdálenost bodů v \mathbb{R}^n . Potom pro každý bod $\gamma \in G$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ má soustava (1.1) právě jedno řešení $\mathbf{y}(x)$ splňující podmínku $\mathbf{y}(x_0) = \gamma$.

Pokud funkce \mathbf{f} je jen spojitá, řešení existuje, ale nemusí být jediné.

Autonomní lineární soustavu n rovnic lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b} \quad (1.3)$$

s maticí konstantních koeficientů $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a konstantním vektorem \mathbf{b} na pravé straně. Pravá strana $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b}$ je lipschitzovská v celém \mathbb{R}^n . Platí proto

Věta 1.2. *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom pro každý bod $\gamma \in \mathbb{R}^n$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ soustava (1.3) má právě jedno řešení $\mathbf{y}(x)$ splňující podmínku $\mathbf{y}(x_0) = \gamma$.*

Ve fyzikálních aplikacích obvykle nezávisle proměnnou x je čas. Pojem autonomní systém diferenciálních rovnic je proto přirozený – popisuje jevy, při kterých se s časem x nemění podmínky, které tvoří data úlohy.

Trajektorie, jejich vlastnosti a druhy

Trajektorie řešení je průmět grafu řešení v prostoru $I \times \mathbb{R}^n$ do prostoru hodnot, tzv. fázového prostoru, kterým je \mathbb{R}^n :

Definice 1.3. Trajektorie $\langle \mathbf{y} \rangle$ řešení $\mathbf{y}(x)$ na intervalu I je množina hodnot, kterých řešení nabývá

$$\langle \mathbf{y} \rangle := \{ \mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in I \}. \quad (1.4)$$

Pokud trajektorie je křivka, orientujeme ji podle rostoucího x . Trajektorie konstantního řešení je bod, zvaný *singulární trajektorie*.

Poznamenejme, že zatímco graf řešení je křivka v \mathbb{R}^{n+1} , trajektorie řešení $\mathbf{y}(x)$ je množina hodnot řešení, tj. křivka, případně bod v definičním oboru G funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, která je podmnožinou tzv. fázového prostoru \mathbb{R}^n . Šipka ukazuje orientaci „pohybu“ hodnoty řešení po trajektorii při rostoucím x .

Budeme se zabývat jen trajektoriemi úplných (také maximálních) řešení, tj. řešení na maximálním intervalu, které už nelze prodloužit na větší interval. Budeme předpokládat, že podmínky existence a jednoznačnosti řešení jsou splněny.

Věta 1.4. *Nechť $\mathbf{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $\mathbf{y}(x)$ úplné řešení rovnice (1.1). Potom pro jeho trajektorii platí:*

- (a) *Trajektorie $\langle \mathbf{y} \rangle$ řešení \mathbf{y} je souvislá množina v oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$.*

- (b) Je-li $\mathbf{y}(x)$ úplné řešení definované na intervalu (a, b) , potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ funkce $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$ je také úplné řešení na posunutém intervalu $(a + c, b + c)$ a má stejnou trajektorii.
- (c) Jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je lokálně lipschitzovská, dvě úplná řešení mají buď disjunktní trajektorie nebo jejich trajektorie jsou totožné.
- (d) Pokud $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je lokálně lipschitzovská, existují jen tři druhy trajektorií:
 (α) singulární bod – trajektorie konstantního řešení,
 (β) uzavřená neprotínající se křivka – trajektorie periodického řešení,
 (γ) neprotínající se křivka bez koncových bodů – ostatní trajektorie.

Náčrt důkazů. (a) Tvrzení je důsledkem vlastnosti spojitého zobrazení: *Spojitě zobrazení souvislou množinu – interval – zobrazí na souvislou množinu.*

(b) Označme $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$. Tvrzení je důsledkem následující rovnosti $\mathbf{y}'_c(x) = \mathbf{y}'(x - c) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(x - c)) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_c(x))$.

(c) Jestliže trajektorie dvou řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ mají společný bod, díky jednoznačnosti obě řešení mají stejné pokračování a tím i stejnou trajektorii.

(d) Konstantní řešení dává singulární trajektorii – případ (α). Jestliže se trajektorie úplného nekonstantního řešení protíná, tj. řešení nabývá stejné hodnoty pro různá $x_1 < x_2$, potom z jednoznačnosti plyne, že řešení je periodické a jeho trajektorie je uzavřená neprotínající se křivka – případ (β). Jestliže se trajektorie neprotíná, řešení je prostá křivka, případ γ. \square

V případě $n = 2$ grafem řešení je křivka v \mathbb{R}^3 . Trajektorie řešení je množina (křivka nebo bod) v rovině, které už lze načrtnout. Budeme se proto zabývat soustavou dvou rovnic, i když příslušná tvrzení platí i pro soustavu více rovnic.

Rovnice n -tého řádu

Rovnice n -tého řádu $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ je autonomní, pokud funkce f nezávisí na x . Autonomní rovnici lze proto zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.5)$$

rovnici doplníme n počátečními podmínkami v určitém bodě x_0 :

$$y(x_0) = \gamma_0, \quad y'(x_0) = \gamma_1, \quad y''(x_0) = \gamma_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}. \quad (1.6)$$

Pro řešení rovnice n -tého řádu platí analogické tvrzení:

Věta 1.5. *Nechť G je oblast v \mathbb{R}^n a $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkce spojitá v G , $x_0, \gamma_i \in \mathbb{R}$. Potom existuje funkce $y(x)$ splňující rovnici (1.5) a počáteční podmínky (1.6). Pokud f je navíc lokálně lipschitzovská v G , viz Větu 1.1, potom řešení je jediné.*

Každou rovnici n -tého řádu (1.5) lze převést na soustavu n rovnic prvního řádu

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \quad y'_3 = y_4, \quad \dots, \quad y'_n = f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

přičemž nové neznámé jsou

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Počáteční podmínky (1.6) přitom přejdou na

$$y_1(x_0) = \gamma_0, \quad y_2(x_0) = \gamma_1, \quad y_3(x_0) = \gamma_2, \dots, \quad y_n(x_0) = \gamma_{n-1}.$$

Trajektorie řešení rovnice n -tého řádu

Trajektorie rovnice n -tého řádu definujeme jako trajektorii vektorového řešení příslušné soustavy n rovnic prvního řádu, přičemž první složka y_1 odpovídá hodnotě řešení a další složky derivacím řešení. Trajektorie tedy bude křivka nebo bod ve fázovém prostoru \mathbb{R}^n , se souřadnicemi $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$:

Definice 1.6. Trajektorie řešení $y(x)$ rovnice (1.5) na intervalu I je množina

$$\langle \mathbf{y} \rangle := \{(y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in I\}.$$

Pokud $y(x)$ není konstantní, trajektorie je křivka, její orientaci vyznačíme šipkou.

Trajektorie řešení rovnice n -tého řádu mají stejné vlastnosti jako trajektorie řešení soustavy n rovnic formulované ve Větě 1.4.

V tomto článku se budeme zabývat jen rovnicemi druhého řádu $y'' = f(y, y')$. Trajektorie řešení jsou křivky případně body v rovině, na „vodorovnou“ osu y vynášíme hodnoty $y(x)$, na „svislou“ osu hodnoty derivace $y'(x)$. Kromě vlastností z Věty 1.4 navíc platí vlastnosti, které nám usnadní zjistit orientaci trajektorií.

Věta 1.7. *Trajektorie konstantních řešení leží na ose y , tj. $y' = 0$. Trajektorie s kladnou souřadnicí y' jsou orientovány v kladném směru, tj. vpravo, trajektorie se zápornou souřadnicí y' jsou orientovány v záporném směru, tj. vlevo.*

2. TRAJEKTORIE V OKOLÍ SINGULÁRNÍCH BODŮ

Vraťme se k soustavě dvou rovnic prvního řádu, kterou zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \text{tj.} \quad y_1' = f_1(y_1, y_2), \quad y_2' = f_2(y_1, y_2). \quad (2.1)$$

Předpokládáme, že funkce $f_1(y_1, y_2)$, $f_2(y_1, y_2)$ jsou definované a lokálně lipschitzovské v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Podle Věty 1.1 každým bodem \mathbf{y} množiny G prochází právě jedna trajektorie. Víme, že trajektorie jsou buď body, tzv. singulární body – trajektorie konstantních řešení, nebo regulární body trajektorií, které jsou neprotínající se uzavřené nebo otevřené křivky. Různé trajektorie jsou disjunktní, oblast G v rovině y_1, y_2 se tak rozpadne na body a neprotínající se křivky.

Souřadnice singulárního bodu \mathbf{y}_0 splňují soustavu $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$. Uvažujme bod \mathbf{y}^* , kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$. Protože funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je spojitá, regulární bod \mathbf{y}^* , kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$, má okolí, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ jsou také nenulové. Díky tomu každým bodem okolí prochází také regulární trajektorie. Tyto trajektorie v okolí \mathbf{y}^* tvoří množinu navzájem disjunktních „rovnoběžných“ a „suhlasně orientovaných“ neprotínajících se křivek, které lze „spojitě převést“ jednu na druhou se zachováním orientace.

V singulárním bodě – trajektorii konstantního řešení – je situace odlišná, trajektorie se mohou chovat různě, viz např. Příklady 5.2, 5.3, 5.4.

Typy izolovaného singulárního bodu

Budeme se zabývat *izolovanými* singulárními body, to jsou body \mathbf{y}_0 , v jejichž ryzím okolí (tj. okolí bodu \mathbf{y}_0 bez bodu \mathbf{y}_0) je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Situaci trajektorií v okolí neizolovaných singulárních bodů probereme později.

Definice 2.1. Uvažujme trajektorie řešení soustavy rovnic (2.1). Necht \mathbf{y}_0 je izolovaný singulární bod soustavy rovnic (2.1), tj. izolované řešení soustavy rovnic $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Bod \mathbf{y}_0 se nazývá:

střed – pokud existuje ryzí okolí U bodu \mathbf{y}_0 , ve kterém každým bodem $\mathbf{y} \in U$ prochází uzavřená trajektorie obsahující ve svém vnitřku bod \mathbf{y}_0 .

atraktivní uzel – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie směřující do tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

neatraktivní uzel – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie z bodu \mathbf{y}_0 vycházející, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

atraktivní ohnisko – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie blížící se k bodu \mathbf{y}_0 , ale směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

neatraktivní ohnisko – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z bodu \mathbf{y}_0 a směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

sedlo – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém existují jak trajektorie, které se k \mathbf{y}_0 blíží, tak trajektorie, které se od něj vzdalují, tj. existují řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ taková, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}_0.$$

Poznámky 2.2.

- (a) V literatuře lze najít také jiné názvy. Singulárnímu bodu *střed* se říká také *centrum*, *atraktivní* (uzel nebo ohnisko) se nazývá také *přitahující* a *neatraktivní* (uzel nebo ohnisko) se nazývá také *odpužující*.
- (b) Uzel a ohnisko se liší limitou tečného vektoru. V případě atraktivního uzlu se trajektorie při $x \rightarrow \infty$ blíží k singulárnímu bodu „přímo“, tj. limita orientovaného úhlu, který svírá tečný vektor s osou y je konečná. V případě atraktivního ohniska se trajektorie blíží k singulárnímu bodu po spirále „obíhající“ singulární bod nekonečně mnoho krát, tj. orientovaný úhel tečny nemá konečnou limitu, ale jde do $\pm\infty$.
V případě neatraktivního uzlu nebo ohniska jde o limity pro $x \rightarrow -\infty$.
- (c) Singulární body v rovině, tj. v případě soustavy dvou rovnic, mohou být pouze uvedených typů: střed, uzel, ohnisko a sedlo.
- (d) Zatím jsme se zabývali izolovanými singulárními body. V případě, kdy singulární body v rovině tvoří křivku, mohou nastat tyto případy:

- (α) Body křivky jsou atraktivní uzly, tj. ke každému bodu se blíží po jedné trajektorii z obou stran.
- (β) Body křivky jsou neatraktivní uzly, tj. z každého bodu vycházejí po jedné trajektorii na obě strany.
- (γ) Trajektorie v okolí křivky singulárních bodů vedou „rovnoběžně“ podél křivky jako v případě střed.
- (e) Singulární trajektorie mohou zaplnit plochu, například soustava $y_1' = 0$, $y_2' = 0$ má jen konstantní řešení a singulární body tvoří celou rovinu.
- (f) Existují autonomní soustavy rovnic, které nemají žádný singulární bod, například $y_1' = 1$, $y_2' = 2$.
- (g) Jestliže $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$ splňuje $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, singulární bod \mathbf{y}_0 přesuneme do počátku vztahem $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^*(x) + \mathbf{y}_0$. Potom $\mathbf{0}$ bude singulárním bodem rovnice $(\mathbf{y}^*)' = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}^*)$, kde $\mathbf{f}^*(\mathbf{y}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{y}^* + \mathbf{y}_0)$. Trajektorie se jen posunou o vektor \mathbf{y}_0 . Proto stačí studovat jen případ singulárního bodu v počátku.

3. SINGULÁRNÍ BODY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Uvažujme autonomní soustavu lineárních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, kde matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} jsou konstantní. Singulárními body jsou trajektorie konstantních řešení, která jsou řešeními soustavy algebraických rovnic $\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Podle Frobeniovy věty v závislosti na hodnotě $h(\mathbf{A})$ matice soustavy \mathbf{A} a hodnotě $h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ mohou nastat tři případy:

- (a) jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava má právě jedno řešení,
- (b) jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení,
- (c) jestliže $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava nemá řešení.

V případě (a), kdy $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ má právě jeden singulární bod, který označíme \mathbf{y}_0 . Substitucí $\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \mathbf{y}_0$ dostáváme soustavu diferenciálních rovnic bez pravé strany $(\mathbf{y}^*)' = \mathbf{A}\mathbf{y}^*$, která má triviální řešení $\mathbf{y}^*(x) = \mathbf{0}$. Je to jediný singulární bod. V dalším proto budeme zkoumat soustavu dvou rovnic bez pravé strany. Přidáním pravé strany \mathbf{b} do soustavy se všechny trajektorie jen posunou o vektor \mathbf{y}_0 . Případy (b) a (c) probereme později.

Soustava dvou lineárních rovnic

Uvažujme soustavu rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, kde \mathbf{A} je konstantní matice typu 2×2 . Tato soustava má obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x),$$

kde $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$ jsou nezávislá řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Pro $c_1 = c_2 = 0$ dostáváme nulové řešení, které dává jediný singulární bod $\mathbf{0} \equiv (0, 0)$. Trajektorie v jeho okolí jsou určeny pomocí řešení $\mathbf{u}_1(x)$ a $\mathbf{u}_2(x)$, která závisejí na kořenech λ_1, λ_2 charakteristického polynomu

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}).$$

Je-li matice \mathbf{A} regulární, kořeny λ_1, λ_2 jsou nenulové. Jediným singulárním bodem je počátek $\mathbf{0}$, který je tím pádem izolovaný. Podle hodnoty diskriminantu $D = \text{Tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A})$ kvadratické rovnice $P(\lambda) = 0$ rozlišujeme tři případy:

- (1) $D > 0$ – rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 a existují dva nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, které splňují rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Získali jsme tak dvě řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i x}$. Je-li $\lambda_i > 0$, řešení $\mathbf{u}_i(x)$ se od počátku vzdaluje do nekonečna:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = \infty.$$

V případě $\lambda_i < 0$ řešení $\mathbf{u}_i(x)$ je atraktivní, z nekonečna se blíží k počátku:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = 0.$$

Ve všech případech limita směrnice tečny trajektorie existuje a je konečná. Dostáváme tak tři případy kořenů λ_i a tím i singulárních bodů:

- (1a) oba kořeny jsou kladné $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – počátek je **neatraktivní uzel**,
 (1b) jeden je záporný a druhý kladný: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ – vychází **sedlo**,
 (1c) oba kořeny jsou záporné: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ dostáváme – **atraktivní uzel**.
 (2) $D = 0$ – rovnice má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = \lambda$. Rozlišíme dva případy podle hodnoty matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:
 (2a) Pokud $\text{h}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, máme dva nezávislé vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ splňující $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ a tím i dvě řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}_i e^{\lambda x}$, trajektorie jsou polopřímky.
 (2b) Pokud $\text{h}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 1$, existuje „dvojice“ nenulových vektorů \mathbf{v}, \mathbf{w} taková, že $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Vektory dávají řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{\lambda x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{\lambda x} + \mathbf{w} e^{\lambda x}$. Jak pro $x \rightarrow \infty$, tak pro $x \rightarrow -\infty$ v součinu $x e^x$ „převládne“ e^x nad x . Dostáváme tak stejný typ singulárního bodu, jen trajektorie řešení $\mathbf{u}_2(x)$ jsou zakřivené.

V obou případech:

- (2aa),(2ab) $\lambda > 0$ trajektorie se vzdalují od počátku – **neatraktivní uzel**,
 (2ba),(2bb) $\lambda < 0$ trajektorie se blíží k počátku – **atraktivní uzel**.
 (3) $D < 0$ – rovnice má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$. Obecné řešení je $\mathbf{y}(x) = (c_1 \mathbf{v}_1 \cos(\nu x) + c_2 \mathbf{v}_2 \sin(\nu x)) e^{\mu x}$, kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou vhodné vektory. Reálná část μ určuje, zda se řešení blíží nebo vzdaluje od počátku. Imaginární část $\nu \neq 0$ dává „rychlost“ rotace okolo počátku. Rozlišíme opět tři případy:
 (3a) reálná část μ kořenů λ je kladná – počátek je **neatraktivní ohnisko**,
 (3b) reálná část μ kořenů je záporná – vychází **atraktivní ohnisko**,
 (3c) reálná část μ kořenů je nulová – dostáváme **střed**.

Zbývá případ soustav dvou lineárních rovnic se singulární maticí \mathbf{A} . Pak:

- (4) Nechť jeden kořen λ_1 je nulový a druhý λ_2 nenulový. Matice \mathbf{A} je singulární, řešení rovnice $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ tvoří přímku určenou vektorem \mathbf{v}_1 , který splňuje rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Body přímky jsou trajektorie konstantních řešení $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v}_1$.

Pro jejich klasifikaci převezmeme názvy pro izolované singulární trajektorie. Druhý kořen λ_2 dává řešení $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x}$. Podle znaménka λ_2 platí, že do (nebo z) každého singulárního bodu přímky vedou dvě trajektorie:

- (4a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ – singulární body jsou **neatraktivní uzly**, trajektorie se rovnoběžně vzdalují od singulárních bodů,
 (4b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ – singulární body jsou **atraktivní uzly**, trajektorie se rovnoběžně přibližují k singulárním bodům.
 (5) Nula je dvojnásobný kořen. Podle hodnoty matice \mathbf{A} máme dva případy:
 (5a) $h(\mathbf{A}) = 1$ – singulární body tvoří přímku určenou vektorem \mathbf{v} , který je nenulovým řešením $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$. Trajektorie druhého řešení $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}x + \mathbf{w}$ jsou rovnoběžné s přímkou singulárních bodů – body nazveme **středy**,
 (5b) $h(\mathbf{A}) = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, singulární body tvoří celou rovinu.
 (6) Zbývá ještě analyzovat případ (c) soustavy dvou diferenciálních rovnic s pravou stranou, kdy $h(\mathbf{A}) = 0 < 1 = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ a soustava $\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ nemá řešení. Potom soustava diferenciálních rovnic nemá singulární body a všechny trajektorie jsou „rovnoběžné“ stejně orientované otevřené křivky nebo přímky.

Rovnice druhého řádu

Autonomní rovnici druhého řádu lze zapsat ve tvaru $y'' = f(y, y')$. Transformací $(y(x), y'(x)) \mapsto (y_1(x), y_2(x))$ lze rovnici převést na soustavu dvou rovnic $y_1' = y_2, y_2' = f(y_1, y_2)$. Autonomní lineární rovnice druhého řádu zapsaná ve tvaru

$$L(y) \equiv y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

má konstantní koeficienty $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ i pravou stranu $b \in \mathbb{R}$. Pokud $a_0 \neq 0$, potom rovnice má konstantní řešení $y(x) = b/a_0$, které představuje jediný singulární bod. Transformací $y(x) = y^*(x) + b/a_0$ přesuneme singulární bod do nuly, získáme tak lineární rovnici bez pravé strany $L(y) \equiv y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ s obecným řešením

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde $u_1(x), u_2(x)$ jsou nezávislá řešení rovnice $L(y) = 0$, která lze snadno určit pomocí kořenů λ_1, λ_2 charakteristického polynomu $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. Převodem $y_1(x) = y(x)$ a $y_2(x) = y'(x)$ získáme soustavu rovnic $y_1' = y_2, y_2' = -a_0 y_1 - a_1 y_2$ která dává stejný charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ jako původní rovnice. Podle kořenů λ_1, λ_2 dostáváme stejné výsledky jako pro autonomní soustavu dvou rovnic studovanou v předchozích odstavcích.

Souhrn

Odvodili jsme následující tvrzení o typech singulárních bodů.

Věta 3.1. *Uvažujme soustavu dvou lineárních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ s regulární maticí \mathbf{A} a odpovídající charakteristický polynom $P(\lambda)$ s nenulovými kořeny λ_1, λ_2 nebo rovnici druhého řádu $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ a odpovídající charakteristický polynom $P(\lambda)$ s nenulovými kořeny λ_1, λ_2 . Potom izolovaný singulární bod $\mathbf{0}$ je:*
neatraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,
atraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,

sedlo, pokud jeden kořen je kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,

neatraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu > 0$, $\nu \neq 0$),

atraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu < 0$, $\nu \neq 0$),

střed, pokud kořeny jsou komplexně sdružené a mají nulovou reálnou část, tj. $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, ($\nu \neq 0$).

V případě jednoho nulového kořene singulární body nejsou izolované, ale tvoří přímku a v případě $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ celou rovinu. Pokud $h(\mathbf{A}) = 1$, singulární body jsou:

neatraktivní uzel, pokud druhý nenulový kořen je kladný,

atraktivní uzel, pokud druhý nenulový kořen je záporný,

střed, pokud nula je dvojnásobný kořen, ale $h(\mathbf{A}) = 1$.

4. IMPLICITNÍ POPIS TRAJEKTORII

Vzorce pro obecné řešení $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v}_1 \phi(x) + c_2 \mathbf{v}_2 \psi(x)$ určují trajektorie $\langle \mathbf{y} \rangle$ jednotlivých řešení \mathbf{y} pro dané c_1, c_2 jako křivky v parametrickém tvaru. Přitom zobrazení, které řešení $\mathbf{y}(x)$ s parametry c_1, c_2 přiřadí jeho trajektorii $\langle \mathbf{y} \rangle$, kromě singulárních řešení, není prosté: řešení $\mathbf{y}(x)$ a $\mathbf{y}(x - c)$ mají stejnou trajektorii.

Obrácená úloha: Najít trajektorii, která prochází daným bodem \mathbf{y} vede na soustavu dvou často nelineárních rovnic $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v}_1 \phi(x) + c_2 \mathbf{v}_2 \psi(x)$ pro neznámé c_1, c_2, x , která většinou není snadno řešitelná. Implicitní popis trajektorie ve tvaru $\Psi(y_1, y_2) = k$ umožňuje snadno určit trajektorii, která prochází daným bodem \mathbf{y} . Stačí dosadit jeho souřadnice do rovnice a dostáváme konstantu k implicitního popisu $\Psi(x, y) = k$. Nevýhodou implicitního popisu křivky je, že nedává orientaci trajektorie, tu nutno určit jiným způsobem.

V Příkladech 5.2, 5.3, 5.4 lze trajektorie snadno popsat implicitně pomocí polynomů. Ve všech případech lineárních rovnic i soustav lze sice trajektorie popsat implicitně, často však funkce $\Psi(y_1, y_2)$ není polynom, popis trajektorie je jen lokální a křivka obsahuje i body, které trajektorii nepatří. Ukážeme, že v některých případech je vhodnější implicitní popis trajektorie v polárních souřadnicích.

Implicitní popis trajektorií v kartézských souřadnicích

Obecné řešení $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ zapsané ve tvaru $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v}_1 \phi(x) + c_2 \mathbf{v}_2 \psi(x)$ s nezávislými vektory $\mathbf{v}_1 = (v_1^1, v_1^2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (v_2^1, v_2^2)^T$ a $c_1, c_2 \neq 0$ lze pomocí Cramerova pravidla upravit na tvar

$$\frac{|\mathbf{y}, \mathbf{v}_2|}{c_1 |\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|} = \phi(x), \quad \frac{|\mathbf{v}_1, \mathbf{y}|}{c_2 |\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|} = \psi(x),$$

kde $|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|$ značí determinant $v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2$. Pokud funkce $F(\xi, \eta)$ splňuje rovnici $F(\phi(x), \psi(x)) = 0$, potom pro $c_i \neq 0$ trajektorie jsou určeny implicitní rovnicí

$$F\left(\frac{|\mathbf{y}, \mathbf{v}_2|}{c_1 |\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|}, \frac{|\mathbf{v}_1, \mathbf{y}|}{c_2 |\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|}\right) = 0. \quad (4.1)$$

V případě nenulových reálných kořenů $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou $\phi(x) = e^{\lambda_1 x}$, $\psi(x) = e^{\lambda_2 x}$ je

$$F(\xi, \eta) = |\xi|^{\lambda_2} - |\eta|^{\lambda_1}.$$

Pokud poměr $\lambda_1 : \lambda_2$ je racionální číslo, umocněním dostaneme polynom. V případě dvojnásobného kořene, kdy $\phi(x) = e^{\lambda x}$, $\psi(x) = x e^{\lambda x}$, vyhovují například funkce

$$F(\xi, \eta) = \lambda \frac{\eta}{\xi} - \ln |\xi| \quad \text{nebo} \quad F(\xi, \eta) = \exp\left(\frac{\lambda \eta}{\xi}\right) - \xi.$$

V případě komplexně sdružených kořenů, kdy $\phi = e^{\mu x} \cos(\nu x)$, $\psi = e^{\mu x} \sin(\nu x)$, kde $\mu, \nu \neq 0$, podmínku splňuje například funkce

$$F(\xi, \eta) = 2\mu \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \nu \ln(\xi^2 + \eta^2).$$

Pro $\mu = 0$, $\nu \neq 0$ vyhovuje funkce typu $F(\xi, \eta) = a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = k$, což dává elipsu, případně kružnici. Výsledek můžeme ověřit v systému MAPLE, příkaz

`implicitplot([F(x, y) = k1, F(x, y) = k2, F(x, y) = k3], x = -3..3, y = -3..3)`

vykreslí tři trajektorie ve čtverci $(-3, 3) \times (-3, 3)$.

Implicitní rovnice však někdy dává jen část trajektorie nebo obsahuje i body, které trajektorii nepatří. Postup ukážeme v další části na konkrétních příkladech.

Implicitní popis trajektorií v polárních souřadnicích

Polární souřadnice $y_1 = r \cos(\theta)$, $y_2 = r \sin(\theta)$ je zobrazení

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

kteří je prosté na pruhu pro θ z intervalu šířky 2π : $\theta \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$. Rovnice $r = k$ pro $k > 0$ dává kružnice, viz trajektorie Příkladu 5.2, rovnice $\theta = k$ polopřímky, viz trajektorie Příkladu 5.3.

V případě elipsy to už tak snadné není. Elipsu v základní poloze lze implicitně a parametricky popsat

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad y_1 = a \cos x, \quad y_2 = b \sin x. \quad (4.2)$$

Odvodíme její implicitní popis v polárních souřadnicích r, θ . Z (4.2) plyne

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 = (a^2 - b^2) \cos^2 x + b^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{b \sin x}{a \cos x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} x.$$

Využitím vzorce $\cos^2 x = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ a vztahu $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \theta \cdot a/b$ dostáváme

$$\begin{aligned} r^2 &= (a^2 - b^2) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + b^2 = (a^2 - b^2) \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \theta} + b^2 = \\ &= (a^2 - b^2) \frac{b^2 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} + b^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Rovnice elipsy v základním tvaru a ve tvaru pootočeném o úhel θ_0 je proto

$$r = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}, \quad r = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + b^2 \cos^2(\theta - \theta_0))^{1/2}}.$$

Při převodu popisu trajektorie do polárních souřadnic (r, θ) vycházíme z rovnic

$$\operatorname{tg} \theta = y_2(x)/y_1(x), \quad r^2 = y_1^2(x) + y_2^2(x).$$

Dosazením obecného řešení do první rovnice se snažíme získat vyjádření funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ pomocí proměnné θ , které potom dosadíme do druhé rovnice.

Dostaneme tak závislost $r = f(\theta, k)$, kde k závisí na konstantách c_1, c_2 . Výpočet můžeme ověřit v systému MAPLE, například příkaz

```
polarplot(min(f(theta), 5), theta = 0..2 * Pi)
```

vykreslí jednu trajektorii v kruhu o poloměru 5.

Postup ukážeme v konkrétních příkladech v další části.

5. PŘÍKLADY

Přestože pojem trajektorie má význam především pro autonomní soustavu rovnic, nebo rovnice vyššího řádu, začneme jednorozměrným případem, kdy hodnoty řešení jsou reálná čísla a trajektorie jsou úsečky nebo body na přímce.

Rovnice prvního řádu

Autonomní rovnice prvního řádu je rovnice tvaru $y' = f(y)$. Necht' funkce $f(y)$ je definovaná, spojitá a lipschitzovská na množině $G \subset \mathbb{R}$. Body $y \in G$, kde $f(y) = 0$ jsou singulární body, trajektorie konstantních řešení. Otevřené úsečky, kde $f(y) > 0$, jsou trajektorie rostoucích řešení, jsou orientované vpravo. Otevřené úsečky, kde $f(y) < 0$, jsou trajektorie klesajících řešení, jsou orientované vlevo. Pro určení trajektorií řešení rovnice $y' = f(y)$ tak není nutné pracně počítat řešení.

Příklad 5.1. Určete trajektorie řešení rovnice $y' = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$.

Řešení: Pravá strana rovnice je polynom $f(y) = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$, který má kořeny $-1, 0, 1, 3$, přičemž kořen 0 je dvojnásobný. Rovnice proto má čtyři konstantní řešení, které dávají čtyři singulární trajektorie: body $y = -1, y = 0, y = 1, y = 3$. Otevřené úsečky mezi singulárními body jsou trajektorie nekonstantních řešení: pro $f(y) > 0$ orientované vpravo a pro $f(y) < 0$ orientované vlevo. Polynom $f(y)$ je pro $y > 3$ kladný, v jednoduchých kořenech mění znaménko, v dvojnásobném kořenu znaménko nemění. Trajektorie jsou na obr. 1.



Obrázek 1. Trajektorie řešení rovnice $y' = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$.

Z obrázku je navíc vidět, že singulární řešení $y(x) = 1$ je stabilní a atraktivní, ostatní řešení $y(x) = -1, y(x) = 0, y(x) = 3$ jsou nestabilní a neatraktivní. \square

Soustavy dvou rovnic prvního řádu – izolované singulární body

V následujících příkladech určíme obecné řešení, fázový portrét řešení, typ singulárního bodu i příslušné implicitní rovnice pro trajektorie v kartézských nebo polárních souřadnicích. Ve všech příkladech nebudeme zmiňovat singulární trajektorii - počátek $(0, 0)$. Začneme případy, kdy načrt trajektorií je snadný.

Příklad 5.2. Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$.

Řešení: Do zderivované první rovnice $y_1'' = -y_2'$ dosadíme za neznámou y_2' z druhé rovnice. Dostáváme tak rovnici $y_1'' + y_1 = 0$, jejímž obecným řešením je funkce $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Z rovnice $y_2 = -y_1'$ dopočítáme $y_2(x)$. Je to případ (3c) střed. Získali jsme obecné řešení:

$$y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y_2(x) = c_1 \sin x - c_2 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Snadno lze ověřit, že pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

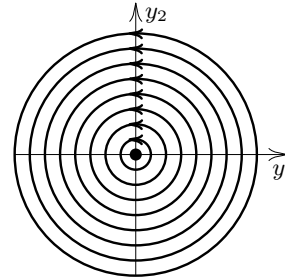
$$y_1^2(x) + y_2^2(x) = c_1^2 + c_2^2. \quad (5.1)$$

Trajektorie jsou kružnice se středem v počátku. Tečný vektor kružnice s $c_1 > 0$, $c_2 = 0$, v $x = \frac{\pi}{2}$ dává orientaci $(-\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$ kružnic v bodech $(0, c_1)$. Singulární trajektorie je *střed*, případ (3c).

Rovnice (5.1) dává také implicitní popis trajektorií v kartézských i polárních souřadnicích

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv y_1^2 + y_2^2 = k > 0, \quad \Psi(r, \theta) \equiv r = k > 0.$$

Trajektorie jsou na obr. 2. □



Obrázek 2. Trajektorie řešení soustavy $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$.

Příklad 5.3. Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.

Řešení: Rovnice $y_1' = y_1$ má řešení $y_1(x) = c_1 e^x$, rovnice $y_2' = y_2$ dává $y_2 = c_2 e^x$, obecné řešení je

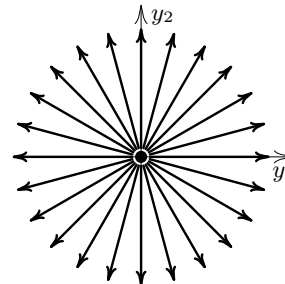
$$y_1(x) = c_1 e^x, \quad y_2(x) = c_2 e^x.$$

Protože $y_2/y_1 = c_2/c_1$ je konstantní a e^x je rostoucí, trajektorie jsou otevřené polopřímky z počátku orientované „ven“, viz obr. 3. Singulární trajektorie je neatraktivní uzel, případ (2aa).

Z rovnice plyne také implicitní popis trajektorií v kartézských i polárních souřadnicích

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv \frac{y_2}{y_1} = k, \quad \Psi(r, \theta) \equiv \theta = k,$$

k prvnímu nutno doplnit polopřímky $y_1 = 0$. □



Obrázek 3. Trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.

Příklad 5.4. Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$.

Řešení: Rovnice $y_1' = y_1$ má řešení $y_1(x) = c_1 e^x$, rovnice $y_2' = -y_2$ dává $y_2 = c_2 e^{-x}$. Obecné řešení je

$$y_1(x) = c_1 e^x, \quad y_2(x) = c_2 e^{-x}. \quad (5.2)$$

Trajektorie pro $c_1 = 0$ je pro $c_2 > 0$ kladná část a pro $c_2 < 0$ záporná část osy y_2 orientované k počátku. Pro $c_2 = 0$ dostáváme kladnou a zápornou část osy y_2 , trajektorie jsou orientovány „ven“.

Ostatní trajektorie tvoří čtyři systémy větví hyperbol $y_2 = c_1 c_2 / y_1$, orientované „shora doprava“, „shora doleva“, „zdola doprava“ a „zdola doleva“, viz obr. 4. Singulární bod je *sedlo*, případ (1b). Implicitní popis trajektorií v kartézských souřadnicích

$$y_1 y_2 = c_1 c_2, \quad \Phi(y_1, y_2) \equiv y_1 y_2 = k.$$

Z rovnic (5.2) plyne $\operatorname{tg} \theta = y_2 / y_1 = \frac{c_2}{c_1} e^{-2x}$, což dává $e^{-2x} = \frac{c_1}{c_2} \operatorname{tg} \theta$. Proto platí

$$\begin{aligned} r^2 &= y_1^2 + y_2^2 = c_1^2 e^{2x} + c_2^2 e^{-2x} = c_1 c_2 (\operatorname{cotg} \theta + \operatorname{tg} \theta) \\ &= c_1 c_2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) = \frac{c_1 c_2}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{2c_1 c_2}{\sin(2\theta)}, \end{aligned}$$

odkud plyne implicitní rovnice trajektorií v polárních souřadnicích:

$$r = \left(\frac{2c_1 c_2}{\sin(2\theta)} \right)^{1/2}, \quad \Psi(r, \theta) \equiv r^2 \sin(2\theta) = k.$$

Trajektorie doplňují polopřímky $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, viz obr. 4. \square

Příklad 5.5. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ má dva různé kladné kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Singulární bod $(0, 0)$ je proto *neatraktivní uzel* – případ (1a).

Načrtneme trajektorie v okolí singulárního řešení, tzv. „fázový portrét“. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ dává vektory $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Obecné řešení je $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$.

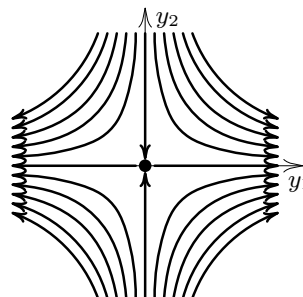
Případ $c_2 = 0$ dává dvě polopřímky $y_2 = -y_1$, $c_1 = 0$ další polopřímky $y_2 = y_1$, všechny orientované od počátku. Ostatní trajektorie pro $c_1 c_2 \neq 0$ jsou „zakřivené“ křivky vycházejících z počátku. Určíme směrnice jejich tečen při $x \rightarrow -\infty$:

$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{-c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}}{c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}} = \frac{-c_1 + 3c_2 e^{2x}}{c_1 + 3c_2 e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{-c_1}{c_1} = -1.$$

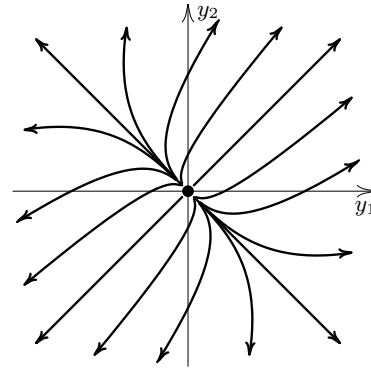
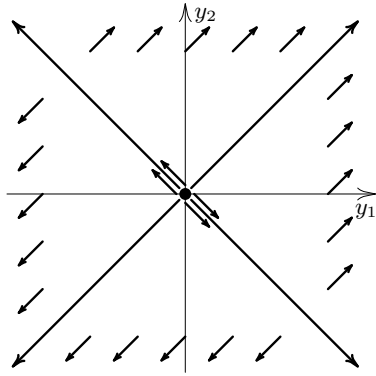
Podobně určíme tečny při $x \rightarrow \infty$, tj. trajektoriích jdoucích do nekonečna, tj. vzdalujících se od počátku:

$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{-c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}}{c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}} = \frac{-c_1 3e^{-2x} + c_2}{c_1 3e^{-2x} + c_2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{c_2}{c_2} = 1.$$

Načrtneme tečny v okolí počátku a na okraji obrázku a spojíme je hladkými „neprotínajícími se“ křivkami bez inflexních bodů, tj. jsou „prohnuté“ stále na jednu stranu. Trajektorie nevycházejí z nuly, jen se při $x \rightarrow -\infty$ k ní „blíží“.



Obrázek 4. Trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$.



Obrázek 5. Tečné vektory trajektorií v 0 a ∞ . **Obrázek 6.** Skutečné trajektorie řešení.

Porovnáním náčrtu směru tečen v nekonečnu s tečnami skutečných trajektorií je vidět, že tečny skutečných trajektorií se liší od „tečen v nekonečnu“, načrtnutou tečnu dosáhnou až „v nekonečnu“, viz obr. 7 a obr. 8.

Jak vypadá implicitní rovnice pro trajektorie? Vztahu $F(e^x, e^{3x}) = 0$ vyhovuje funkce $F(\xi, \eta) = \xi^3 - \eta$, která po úpravě dává $c_2(y_1 - y_2)^3 - 4c_1^3(y_2 + y_1) = 0$. V kartézských souřadnicích lze trajektorie popsat implicitně

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv \frac{(y_1 - y_2)^3}{y_1 + y_2} = k.$$

Pro určení implicitní rovnice trajektorie v polárních souřadnicích z rovnosti $\operatorname{tg} \theta = \frac{-c_1 e^x + c_2 e^{3x}}{c_1 e^x + c_2 e^{3x}}$ vyjádříme e^{2x} a e^{6x}

$$e^{2x} = \frac{c_1 \cos \theta + \sin \theta}{c_2 \cos \theta - \sin \theta}, \quad e^{6x} = \frac{c_1^3 (\cos \theta + \sin \theta)^3}{c_2^3 (\cos \theta - \sin \theta)^3}$$

a dosadíme do rovnosti $r^2 = y_1^2 + y_2^2 = 2(c_1^2 e^{2x} + c_2^2 e^{6x})$. Další úprava vede na

$$r^2 = 4 \frac{c_1^3 (\cos \theta + \sin \theta)}{c_2 (\cos \theta - \sin \theta)^3},$$

odkud plyne implicitní vyjádření $\Psi(r, \theta) = k$ a vztah $r = f(\theta)$ pro příkaz *polarplot*

$$\Psi(r, \theta) = r^2 \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^3}{(\cos \theta + \sin \theta)} = k, \quad r = \left(k \frac{\cos \theta + \sin \theta}{(\cos \theta - \sin \theta)^3} \right)^{1/2},$$

kde $k = 4c_1^3/c_2$. □

Příklad 5.6. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = -y_1 - 3y_2$, $y_2' = y_1 - 5y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, příslušný

charakteristický polynom je $\lambda^2 + 6\lambda + 8$ má dva různé záporné kořeny $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto *atraktivní uzel* – případ (1c).

Pro fázový portrét singulárního bodu spočítejme nejprve fundamentální řešení U . Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ dává pro $\lambda_1 = -2$ vektor $\mathbf{v}_1 = (3, 1)$ a pro $\lambda_2 = -4$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Obecné řešení proto je

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Nejprve načrtneme trajektorie řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$. Jsou to dva páry polopřímek orientovaných do počátku se směrovými vektory $(3, 1)$, $(1, 1)$. Určeme tečné směry ostatních trajektorií v počátku, tj. pro $x \rightarrow \infty$, a v nekonečnu, tj. pro $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}}{-6c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}}{-6c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}} = \frac{1}{1}.$$

Určeme implicitní rovnice pro trajektorie.

Vztahu $F(\varphi, \psi) = 0$ vyhovuje funkce $F(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta$ a (4.1) po úpravě dává $c_2(y_1 - y_2)^2 - 2c_1^2(3y_2 - y_1) = 0$. Dostáváme tak rovnici v kartézských souřadnicích

$$\Phi(y_1, y_2) = \frac{(y_1 - y_2)^2}{3y_2 - y_1} = k,$$

kde $k = 2c_1^2/c_2$. Určeme dále rovnici trajektorie v polárních souřadnicích. Ze vztahu $\operatorname{tg} \theta = \frac{c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}}{3c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}}$ vyjádříme e^{-2x} :

$$e^{-2x} = \frac{c_1}{c_2} \frac{3 \sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

a dosadíme do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Po úpravách dostáváme

$$r = \frac{2c_1^2}{c_2} \frac{(3 \sin \theta - \cos \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)^2},$$

odkud plyne rovnice $\Psi(r, \theta) = k^2$ a funkce $r = f(\theta)$ k vykreslení trajektorie v systému Maple příkazem `polarplot(f(theta), theta = 0..2Pi)`

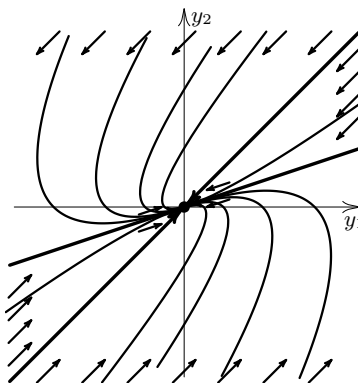
$$\Psi(r, \theta) = \frac{r(\cos \theta - \sin \theta)^2}{(\cos \theta - 3 \sin \theta)} = k^2, \quad r = f(\theta) = k \frac{(\cos \theta - 3 \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)^2},$$

kde $k = 2c_1^2/c_2$. □

Příklad 5.7. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 - 5y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ má jeden dvojnásobný záporný kořen $\lambda = -2$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto *atraktivní uzel* – případ (3b).

Pro fázový portrét určíme řešení. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda = -2$ dává jediný vektor $\mathbf{v} = (1, 1)$ a tím jedno řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{-2x}$. Druhé nezávislé řešení je $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{-2x} + \mathbf{w} e^{-2x}$, kde \mathbf{w} splňuje soustavu rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$,



Obrázek 7. Příklad 5.6 – trajektorie.

což jsou dvě stejné rovnice $3w_1 - 3w_2 = 1$. Zvolíme-li $w_2 = 0$, dostáváme $w_1 = \frac{1}{3}$. Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-2x} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2(x + \frac{1}{3}) \\ c_1 + c_2x \end{pmatrix} e^{-2x}. \quad (5.3)$$

Trajektorie řešení $\mathbf{u}_1(x)$ je opět dvojice polopřímek $y_2 = y_1$ směřujících do počátku, který je singulárním bodem. Tečné směry obecného řešení $\mathbf{y}(x)$ v počátku, tj. pro $x \rightarrow \infty$, i v nekonečnu, tj. $x \rightarrow -\infty$, mají také směrnici rovnu 1 nezávisle na c_i , neboť

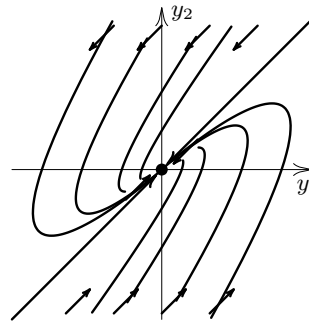
$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{[c_2 - 2(c_1 + c_2x)]e^{-2x}}{[c_2 - 2(c_1 + c_2(x + \frac{1}{3}))]e^{-2x}} \rightarrow \frac{-2c_2x}{-2c_2x} = 1, \quad \text{pro } x \rightarrow \pm\infty.$$

Jak vypadají trajektorie řešení pro $c_2 \neq 0$? Víme, že trajektorie jsou pod i nad přímkou $y_2 = y_1$, tj. trajektoriemi $\mathbf{u}_1(x)$, s kterými se nesmí protnout. Jdou zleva doprava a pak se otáčejí do protisměru nebo obráceně? Pro $c_2 > 0$ ze vzorce plyne $y_2(x) < y_1(x)$, tj. trajektorie řešení leží pod přímkou $y_2 = y_1$.

Spočítejme derivaci konkrétního řešení. Zvolme $c_2 = 3c_1 > 0$. Potom

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = -4c_1 \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Pro $x \rightarrow -\infty$ obě složky mají kladnou derivaci, od $x = -\frac{1}{3}$ se derivace $y_1(x)$ mění na zápornou a od $x = 0$ obě složky mají derivaci zápornou. Trajektorie leží pod přímkou $y_1 = y_2$ proto z JZ „nekonečna“ směřují k SV, pak se otáčejí k SZ a nakonec se otáčejí k počátku JZ směrem. Záporné c_2 dávají trajektorie středově symetrické podle počátku s trajektoriemi s $c_2 > 0$.



Obrázek 8. Příklad 5.7 – trajektorie.

Tedy pro řešení s $c_2 \neq 0$ trajektorie se směrnici 1 v $-\infty$ se musejí otočit do „protisměru“, aby získaly směrnici 1.

S implicitní rovnicí pro trajektorie je to složitější. Vztahu $F(e^{-2x}, xe^{-2x}) = 0$ vyhovuje například funkce $F(\xi, \eta) = 2\eta/\xi + \ln(|\xi|)$. Z (5.3) určíme

$$\xi = e^{-2x} = \frac{3(y_1 - y_2)}{c_2}, \quad \eta = xe^{-2x} = \frac{y_2}{c_2} - \frac{3c_1(y_1 - y_2)}{c_2^2}$$

a dosazením do $F(\xi, \eta) = 2\eta/\xi + \ln(|\xi|)$ dostáváme implicitní rovnici pro trajektorie s $c_2 \neq 0$. V případě $c_2 = 0$ je rovnice pro trajektorie jednoduchá $y_2 = y_1$.

Pro rovnici v polárních souřadnicích z $\text{tg}(\theta) = y_2/y_1$ vyjádříme x

$$x = \frac{\sin \theta}{3(\cos \theta - \sin \theta)} - \frac{c_1}{c_2} \quad (5.4)$$

a dosadíme do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Po úpravě dostáváme rovnici

$$r^2 = \left[2c_1^2 + 2c_1c_2(x + \frac{1}{3}) + c_2^2(x^2 + (x + \frac{1}{3})^2) \right] e^{-4x}$$

do které dosadíme x z (5.4). V obou případech jsme dostali implicitní rovnici, která ale nemá tvar $\Phi(y_1, y_2) = k$ ani $\Psi(r, \theta) = k$. \square

Příklad 5.8. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 + 5y_2$, $y_2' = y_1 - 3y_2$.

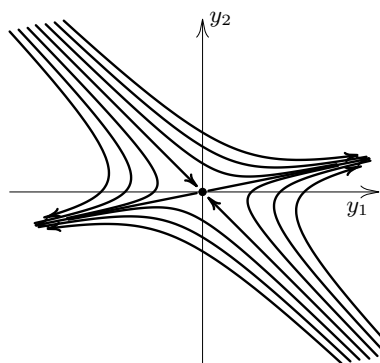
Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 + 2\lambda - 8$ má jeden kladný $\lambda_1 = 2$ a jeden záporný kořen $\lambda_2 = -4$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto *sedlo* – případ (1b).

Pro fázový portrét spočítejme obecné řešení:

Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda_1 = 2$ dává vektor $\mathbf{v}_1 = (5, 1)$ a pro $\lambda_2 = -4$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Získáme tím dvě nezávislá řešení: neatraktivní $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{2x}$ a atraktivní $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{-4x}$. Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Trajektorie $\mathbf{u}_1(x)$ je dvojice polopřímek $y_2 = \frac{1}{5}y_1$ orientovaných od počátku, trajektorie $\mathbf{u}_2(x)$ je dvojice polopřímek $y_2 = -y_1$ orientovaných do počátku. Ostatní trajektorie přicházejí z nekonečna se směrnici -1 a otáčejí se do nekonečna se směrnici $\frac{1}{5}$.



Obrázek 9. Příklad 5.8 – trajektorie.

Implicitní rovnici pro trajektorie získáme snadno. Vztahu $F(e^{2x}, e^{-4x}) = 0$ vyhovuje funkce $F(\xi, \eta) = \xi^2 \eta - 1$. Dostáváme tak rovnici s $k = 6^3 c_1 c_2$ ve tvaru

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv (y_1 + y_2)^2 (y_1 - 5y_2) = k.$$

Pro polární souřadnice z rovnosti $\operatorname{tg} \theta = y_2/y_1$ vyjádříme $e^{6x} = \frac{c_2(\sin \theta + \cos \theta)}{c_1(\sin \theta - 5 \cos \theta)}$ a dosazením obecného řešení do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ po úpravě dostáváme výraz

$$r^2 = 2c_1^{\frac{4}{3}} c_2^{\frac{2}{3}} \left[13 \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - 5 \cos \theta} \right)^{\frac{2}{3}} + 4 \left(\frac{\sin \theta - 5 \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\sin \theta - 5 \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right)^{\frac{4}{3}} \right],$$

z které lze napsat implicitní rovnici v polárních souřadnicích $\Psi(r, \theta) = k$. \square

Příklad 5.9. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - 5y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 + 4$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Singulární bod $(0, 0)$ je *střed* – případ (2c), trajektorie budou soustředné elipsy se středem v počátku. Najděme obecné řešení. Matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ pro $\lambda = 2i$ je

$$\mathbf{A} - 2i \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 - 2i & -5 \\ 1 & -1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Vynásobením druhého řádku číslem $(1 - 2i)$ dostáváme první řádek, rovnice v soustavě $(\mathbf{A} - 2i \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ jsou proto závislé. Druhá rovnice dává $v_1 = (1 + 2i)v_2$, odkud plyne například $\mathbf{v} = (1 + 2i, 1)$. Dostáváme tím komplexní řešení:

$$\mathbf{u}^*(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2x) + i \sin(2x)).$$

Reálná a imaginární část $\mathbf{u}^*(x)$ dává dvojici reálných řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, obecné řešení proto je $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x)$, a tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2x) - 2 \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2x) + 2 \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Protože funkce $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ jsou periodické s periodou π , dostáváme uzavřené křivky, které obíhají počátek s periodou π . Jaká je orientace křivky? Pro $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ máme řešení $\mathbf{u}_1(x)$, tj. $y_1(x) = \cos(2x) - 2 \sin(2x)$, $y_2(x) = \cos(2x)$. Vyčíslíme řešení $\mathbf{u}_1(x)$ a jeho derivaci pro $x = 0$: $\mathbf{y}(0) = (1, 1)$ a $\mathbf{y}'(0) = (-4, 0)$ a vyznačíme v grafu. Trajektorie bude orientovaná v kladném smyslu, tj. pro směru hodinových ručiček. Jinou možností je vykreslit body $\mathbf{y}(x)$ pro vhodná x : $0, \frac{\pi}{2}$, dostaneme tak postupně body $(1, 1)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$.

Z (5.5) vyjádříme funkce $\cos(2x)$, $\sin(2x)$

$$\cos(2x) = \frac{c_2 y_1 + 2c_1 y_2 - c_2 y_2}{2(c_1^2 + c_2^2)}, \quad \sin(2x) = \frac{c_1 y_2 + 2c_2 y_2 - c_1 y_1}{2(c_1^2 + c_2^2)}$$

a dosazením do rovnosti $\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$ po úpravě dostáváme rovnici

$$\Phi(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_1 y_2 + 5y_2^2 = k, \quad \text{kde } k = 4(c_1^2 + c_2^2),$$

což jsou soustředné elipsy, obr. 10.

Protože velikost elipsy závisí jen na $c_1^2 + c_2^2$, pro odvození trajektorií v polárních souřadnicích stačí uvažovat případ $c_2 = 0$. Z rovnosti $y_2/y_1 = \tan \theta$ vyjádříme $\tan x = \frac{1}{2}(\sin \theta - \cos \theta)/\sin \theta$ a dosadíme do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Využijeme přitom rovnost $\cos^2 x = 1/(1 + \tan^2 x)$. Po úpravách dostaneme

$$r^2 = c_1^2 \cos^2 \theta [(1 - 2 \tan \theta)^2 + 1] = \frac{4c_1^2}{4 \sin^2 \theta + (\cos \theta - \sin \theta)^2}$$

odkud plyne implicitní rovnice i funkce $r = f(\theta)$ pro MAPLE příkaz `polarplot`

$$\Psi(r, \theta) \equiv r^2(4 \sin^2 \theta + (\cos \theta - \sin \theta)^2) = k, \quad r = \frac{\sqrt{k}}{4 \sin^2 \theta + (\cos \theta - \sin \theta)^2},$$

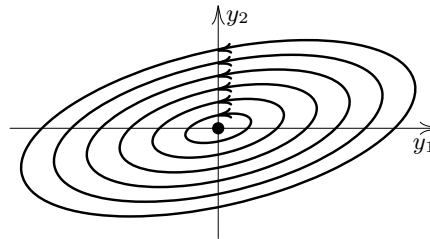
kde $k = 4(c_1^2 + c_2^2)$. □

Příklad 5.10. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 3y_1 - 4y_2$, $y_2' = 2y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ – případ (2a). Singulární bod $(0, 0)$ je proto *neatraktivní ohnisko*, trajektorie budou soustředné spirály vzdalující se od počátku.

Spočítejme obecné řešení. Matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ pro $\lambda = 1 - 2i$ má řádky

$$\mathbf{A} - (1 - 2i)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 + 2i & -4 \\ 2 & -2 + 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + i & 1 \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix}.$$



Obrázek 10. Příklad 5.9 – trajektorie.

Vynásobením druhého řádku číslem $1 + \mathbf{i}$ dostáváme první řádek, rovnice v soustavě $(\mathbf{A} - (1 - 2\mathbf{i})\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ jsou proto závislé. Druhá rovnice dává $v_1 = (1 - \mathbf{i})v_2$, odkud plyne $\mathbf{v} = (1 - \mathbf{i}, 1)$. Dostáváme tím komplexní řešení:

$$\mathbf{u}^*(x) = \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix} e^x (\cos(2x) - \mathbf{i} \sin(2x)).$$

Reálná a imaginární část $\mathbf{u}^*(x)$ dává dvojici reálných řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, obecné řešení je proto po změně znaménka \mathbf{u}_2 :

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2x) - \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2x) + \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} e^x.$$

Funkce $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ jsou periodické s periodou π , obstarávají pohyb okolo počátku, funkce e^x způsobuje vzdalování se od počátku, spirála se bude vzdalovat od počátku. Jaká je orientace spirály? Opět zvolme $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Dostáváme řešení $\mathbf{u}_1(x)$ se složkami $y_1(x) = (\cos(2x) - \sin(2x))e^x$, $y_2(x) = \cos(2x)e^x$.

Vyčíslíme hodnoty řešení a jeho derivace pro $x = 0$:

$$\mathbf{y}(0) = (1, 1), \quad \mathbf{y}'(0) = (-1, 1)$$

a vyznačíme v grafu. Vidíme, že tečna vpravo od počátku má SZ směr, trajektorie bude orientovaná v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček a bude se vzdalovat od počátku. Jinou možností je vyčíslit body $\mathbf{y}(x)$ pro zvětšující se x .

Pomocí funkce $F(\xi, \eta) = \arctg(\eta/\xi) - \ln(\xi^2 + \eta^2)$ odvodíme rovnici pro implicitní funkci trajektorie.

Z obecného řešení vyjádříme funkce $e^x \cos(2x)$, $e^x \sin(2x)$

$$\xi = e^x \cos x = \frac{c_2(y_1 - y_2) + c_1 y_2}{c_1^2 + c_2^2}, \quad \eta = e^x \sin x = \frac{c_1(y_2 - y_1) + c_2 y_2}{c_1^2 + c_2^2}$$

a použitím funkce $\arctg(\eta/\xi) = \ln(\xi^2 + \eta^2)$ dostáváme implicitní rovnici

$$\arctg \left(\frac{c_1(y_2 - y_1) + c_2 y_2}{c_2(y_1 - y_2) + c_1 y_2} \right) = \ln \left[\frac{(c_2(y_1 - y_2) + c_1 y_2)^2 + (c_1(y_2 - y_1) + c_2 y_2)^2}{(c_1^2 + c_2^2)^2} \right].$$

Rovnice však dává trajektorie jen v úhlu šířky π a MAPLE přidává navíc „radiální spojnice“ konců trajektorií.

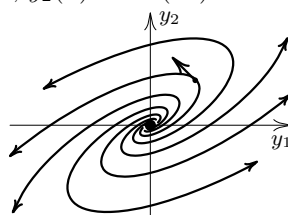
Pro polární souřadnice z rovnosti $y_2/y_1 = \tg \theta$ stačí vyjádřit funkce $\tg x$, x :

$$\tg x = \frac{(c_1 + c_2) \sin \theta - c_1 \cos \theta}{c_2 \cos \theta + (c_1 - c_2) \sin \theta}, \quad x = \arctg \left(\frac{(c_1 + c_2) \sin \theta - c_1 \cos \theta}{c_2 \cos \theta + (c_1 - c_2) \sin \theta} \right)$$

a dosadit do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Opět položíme $c_2 = 0$. Potom $\tg x = (\sin \theta - \cos \theta)/\sin \theta$. Pomocí $\cos^2 \theta = 1/(1 + \tg^2 \theta)$ a $x = \arctg((\sin \theta - \cos \theta)/\sin \theta)$ dostáváme

$$r^2 = c_1^2 \frac{(1 - \tg x)^2 + 1}{1 + \tg^2 x} e^{2x} = \frac{c_1^2}{1 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta} \exp \left(2 \arctg \left(\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right).$$

Opět vzorec dává trajektorii jen v úhlu šířky π . \square



Obrázek 11. Příklad 5.10 – trajektorie.

Ostatní případy singulárních bodů

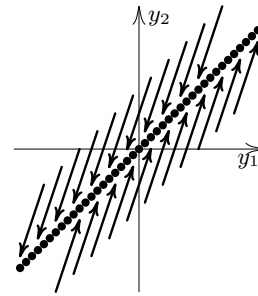
Příklad 5.11. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = 3y_1 - 3y_2$.

Řešení: Matice soustavy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ je singulární, rovnice $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení, jsou to násobky $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Singulární body proto tvoří přímku $y_2 = y_1$.

Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$ má vedle nulového kořene λ_1 záporný kořen $\lambda_2 = -2$. Spočítejme obecné řešení. Soustava $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pro $\lambda_1 = 0$ dává vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, pro $\lambda_2 = -2$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$. Obecné řešení proto je:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Singulární trajektorie pro $c_1 \in \mathbb{R}$ a $c_2 = 0$, tvoří přímku $y_2 = y_1$. Pro $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ dostáváme dvě polopřímky $y_2 = 3y_1$ orientované do počátku. Ostatní trajektorie jsou rovnoběžné polopřímky jdoucí se směrnici 3 do singulárních bodů na přímce $y_2 = y_1$. Je to případ (4b). \square



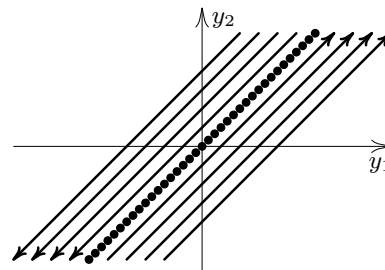
Obrázek 12. Příklad 5.11 – trajektorie.

Příklad 5.12. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ je opět singulární, rovnice $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení, jsou to násobky vektoru $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Singulární body proto tvoří přímku $y_2 = y_1$. Příslušný charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 0$. Pro fázový portrét spočítejme obecné řešení. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pro $\lambda_{1,2} = 0$ dává jen jeden vektor $\mathbf{v} = (1, 1)$ a tím i konstantní řešení $u_1(x) = (1, 1)$. Druhé řešení je ve tvaru $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}x + \mathbf{w}$, kde vektor \mathbf{w} je řešením $(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$, tj. $w_1 - w_2 = 1$. Tato rovnice má opět nekonečně mnoho řešení, zvolme $\mathbf{w} = (1, 0)$. Dostáváme tak obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Získali jsme nekonečně mnoho singulárních trajektorií pro $c_1 \in \mathbb{R}$ a $c_2 = 0$, jsou to body přímky $y_2 = y_1$. Pro $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$ dostáváme přímky $y_2 = y_1 - c_2$. Jsou to přímky rovnoběžné s přímkou $y_2 = y_1$ orientované v SV směru pod ní pro $c_2 > 0$ a v JZ směru nad ní pro $c_2 < 0$. Je to případ (5a). \square



Obrázek 13. Příklad 5.12 – trajektorie.

Uveďme ještě příklady trajektorií rovnic, které nemají singulární body – případ (6). V případě soustavy dvou lineárních autonomních rovnic jsou to rovnoběžné přímky

Příklad 5.13. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 2$, $y_2' = 1$.

Řešení: Obecné řešení soustavy je $y_1(x) = 2x + c_1$, $y_2(x) = x + c_2$. Protože $y_1 = 2y_2 - 2c_2 + c_1$, trajektorie jsou rovnoběžné přímky se směrovým vektorem $(2, 1)$ orientované SV směrem. Obrázek není zapotřebí. \square

Příklad 5.14. Určete trajektorie rovnice $y'' = 2$.

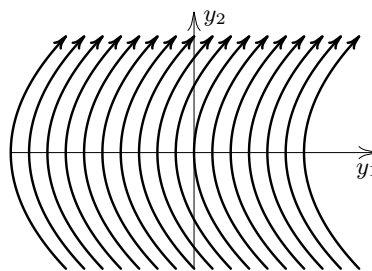
Řešení: Dvojitou integrací získáme obecné řešení a jeho derivaci:

$$y(x) = x^2 + c_1x + c_2, \quad y'(x) = 2x + c_1.$$

Výpočtem lze snadno ověřit, že platí

$$4y_1 - y_2^2 - (4c_2 - c_1^2) = 0,$$

kde $y_1 = y$ a $y_2 = y'$, což je implicitní popis trajektorií. Jsou to „rovnoběžné“ paraboly s vrcholy na ose y_1 otevřené vpravo, viz obr. 14. \square



Obrázek 14. Příklad 5.14 – trajektorie.

6. ZÁVĚR

V článku jsme analyzovali všechny možnosti trajektorií lineárních autonomních soustav dvou rovnic a rovnic druhého řádu a předvedli je na konkrétních příkladech. Ukázali jsme, jak příslušné trajektorie přibližně načrtnout a určit jejich orientaci.

Ukázali jsme, jak lze trajektorie implicitně popsat v kartézských i polárních souřadnicích. V případech, kdy charakteristický polynom má různé reálné kořeny λ_1, λ_2 v poměru malých celých čísel a v případě $\lambda_{1,2} = \pm \nu i$ je splněna inverzní úloha, která dovede určit trajektorii procházející daným bodem, v případě $\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu i$ je trajektorie určena jen lokálně.

V případě soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$ lze trajektorie řešení ve tvaru spirály popsat v polárních souřadnicích globálně $r = ke^\theta$. Otázkou je, jak tento globální popis rozšířit na obecnou soustavu s kořeny $\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu i$.

V pokračování tohoto článku uvedeme pár zajímavých autonomních nelineárních soustav a rovnic, které popisují reálné jevy. Vyšetříme trajektorie jejich řešení a interpretujeme jejich význam.

REFERENCE

- [1] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
 [2] J. Čermák, A. Ženíšek: *Matematika III*, skripta FSI VUT, Akad. nakl. CERM, Brno 2001.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
 Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
 e-mail: francu@fme.vutbr.cz