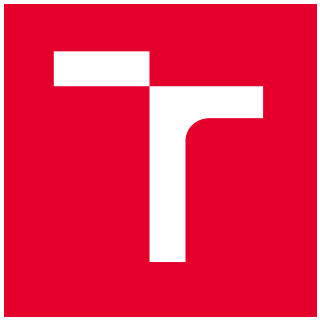


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ČEBYŠEVOVA ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJÍ VYUŽITÍ PRO ZÍSKÁNÍ SPEKTRA SIGNÁLŮ

APPLICATION OF CHEBYSHEV BASIS FOR SPECTRAL ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondřej Ettl

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Ondrej Mihálik

BRNO 2022

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Bakalářská práce

bakalářský studijní program **Automatizační a měřicí technika**

Ústav automatizace a měřicí techniky

Student: Ondřej Ettl ***ID:*** 211419

Ročník: 3 ***Akademický rok:*** 2021/22

NÁZEV TÉMATU:

Čebyševova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem bakalářské práce je nastudovat vlastnosti Čebyševovy ortogonální báze a aplikovat je při tvorbě souboru funkcí a skriptů, které by umožnovaly analýzu vybraných signálů. Předpokládá se implementace v prostředí MATLAB.

1. V prostředí MATLAB generujte ortogonální Čebyševovu bázi v časové i frekvenční doméně. Zaměřte se na stabilní algoritmy generování pro dosažení nejvyššího možného řádu generované bázové funkce.
2. Prostudujte základní časové a frekvenční vlastnosti Čebyševovy ortogonální báze a na zvolených příkladech tyto vlastnosti demonstrujte.
3. Seznamte se s pojmem „signály s omezeným spektrem“ a možností modelování jejich spektra pomocí Čebyševovy ortogonální báze.
4. Předpokládejte, že časový průběh frekvenčně omezeného signálu je vzorkován nerovnoměrně. Prověřte možnost využití Čebyševovy báze pro získání spektra původního spojitého signálu.
5. Výsledky doplňte grafickými ukázkami.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. HARDY, Godfrey Harold a Werner ROGOSINSKI. Fourierovy řady. Přeložil Alois KUFNER. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1971.
2. REKTORYS, Karel. Přehled užité matematiky. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1968.

Termín zadání: 7.2.2022 ***Termín odevzdání:*** 23.5.2022

Vedoucí práce: Ing. Ondrej Mihálik

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.
předseda rady studijního programu

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Práce je zaměřena na zjištění a ověření základních vlastností Čebyševových polynomů v Hilbertově prostoru. Mezi ně například patří jejich generování, váhová funkce, ortogonalita, rekurentní vztahy. Dalším cílem bylo zpracování signálu pomocí Čebyševovy transformace a zkoumání výsledného spektra. Nakonec se demonstrují dvě možnosti modelování frekvenčního spektra za pomoci Čebyševových polynomů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Hilbertův prostor, Čebyševovy polynomy, Fourierova transformace, Fourieroa řada, frekvenčně omezený signál ,nepravidelné vzorkování, ortogonalita, spektrum

ABSTRACT

The work is focused on finding and verifying the basic properties of Chebyshev polynomials in Hilbert space. These include their generating functions, weight functions, orthogonality and recurrent relationships. Another goal was signal processing by Chebyshev's transform and investigation of the resulting spectrum. Lastly the focus is shifted towards demostrain of two methods for modeling of frequency spectrum with help of Chebyshev polynomials.

KEYWORDS

Hilbert space, Chebyshev polynomials,Fourier transform, Fourier series, band-limited signal, nonuniform sampling, orthogonality, spectrum

Vysázeno pomocí balíčku `thesis` verze 4.07; `http://latex.feec.vutbr.cz`

ETTL, Ondřej. *Čebyševova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2022, 42 s. Bakalářská práce. Vedoucí práce: Ing. Ondrej Mihálik

Prohlášení autora o původnosti díla

Jméno a příjmení autora:	Ondřej Ettl
VUT ID autora:	211419
Typ práce:	Bakalářská práce
Akademický rok:	2021/22
Téma závěrečné práce:	Čebyševova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí/ho závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené závěrečné práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno 23. 5. 2022 .....

podpis autora*

*Autor podepisuje pouze v tištěné verzi.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu semestrální práce panu Ing.Ondreji Mihálikovi, za odborné vedení, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Obsah

Úvod **10**

1 Základní pojmy **11**
1.1 Prostor L_2 . . . 11
1.2 Ortogonalní a ortonormální báze . . . 12
1.3 Fourierova transformace . . . 13
1.4 Frekvenčně omezený signál . . . 13

2 Čebyševovy polynomy **14**
2.1 Čebyševovy polynomy 1. druhu . . . 14
2.1.1 Vlastnosti . . . 15
2.2 Čebyševovy polynomy 2. druhu . . . 16
2.2.1 Vlastnosti . . . 17
2.3 Další druhy polynomů . . . 18
2.4 Generování polynomů v prostředí MATLAB . . . 19
2.5 Ověření ortnormality v prostředí MATLAB . . . 20

3 Transformace signálu do Čebyševovy báze **22**
3.1 Čebyševova transformace . . . 22
3.2 Rozklad signálu na složky c_n . . . 22
3.3 Zpětná rekonstrukce signálu . . . 26
3.4 Chyba aproximace . . . 27

4 Frekvenční vlastnosti Čebyševových polynomů **29**
4.1 Fourierova transformace Čebyševových polynomů . . . 29
4.2 Besselova funkce 1. druhu . . . 31
4.2.1 Vlastnosti . . . 32
4.3 Aplikace na nepravidelně vzorkovaný signál . . . 33
4.3.1 Signál v časové oblasti . . . 33
4.3.2 Frekvenční oblast signálu . . . 36

Závěr **38**

Literatura **39**

Seznam symbolů a zkratek **41**

A Obsah elektronické přílohy **42**

Seznam obrázků

2.1 Průběh Čebyševových polynomů 1. druhu 14
2.2 Rozložení kořenů $T_n(x)$ 16
2.3 Průběh Čebyševových polynomů 2. druhu 17
2.4 Dvacátý řád Čebyševův polynom 1. a 2. druhu 20
2.5 Chyba lichoběžníkové metody integrování 21
3.1 Časový průběh funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ 23
3.2 Amplitudové spektrum Fourierovy transformace pro funkci $\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. 24
3.3 Amplitudové spektrum 1. Čebyševovy transformace pro funkci $\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ 24
3.4 Amplitudové spektrum 2. Čebyševovy transformace pro funkci $\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ 24
3.5 Amplitudové spektrum Fourierovy transformace pro funkci $\sin(\pi x)$. 25
3.6 Amplitudové spektrum 1. Čebyševovy transformace pro funkci $\sin(\pi x)$ 25
3.7 Amplitudové spektrum 2. Čebyševovy transformace pro funkci $\sin(\pi x)$ 25
3.8 Aproximace funkce $\sin(\pi x)$ 26
3.9 Aproximace funkce $\sin(\frac{2\pi x}{3})$ 27
3.10 Závislost chyby aproximace pro Čebyševovu transformaci 1. druhu . 28
4.1 Čebyševovy polynomy ve frekvenční a časové oblasti 30
4.2 Čebyševův polynom 10. řádu ve frekvenční oblasti 31
4.3 Průběh Besselových funkcí 33
4.4 Nerovnoměrně navzorkovaný signál 34
4.5 Aproximace nepravidelně navzorkovaného signálu 35
4.6 Rekonstrukce frekvenčního spektra 1. metodou 36
4.7 Rekonstrukce frekvenčního spektra 2. metodou 37

Seznam tabulek

2.1 Tabulka některých vlastností polynomů 3.-6. druhu 19
2.2 Časová náročnost generování polynomu 19
3.1 Tabulka vývoje chyby aproximace ve vyšších řádech 28
4.1 Kvadratické chyby aproximací nepravidelně navzorkovaného signálu . 35

Úvod

Čebyševovy polynomy se nachází v různých oblastech numerické matematiky. Patří mezi ně například numerická integrace, aproximace a hlavně ortogonální polynomy. Také je lze za speciálních podmínek využít jako alternativní způsob pro analýzu signálů jak v časové tak i ve frekvenční doméně.

První kapitola se zabývá pojmy v Hilbertově prostoru L_2, které jsou spjaté nejen s Čebyševovými polynomy, ale i dalšími ortogonálními polynomy.

Následně se v druhé kapitole rozeberou vlastnosti Čebyševových polynomů. Ověří se ortogonalita i ortonormalita a různé způsoby generování polynomů pomocí uvedených vzorců, mezi které patří Rodriguesova formule, rekurzivní vztah nebo trigonometrický vzorec.

Ve třetí kapitole se rozloží pomocí Čebyševovy transformace signál a následně se opět zrekonstruuje. Závěrem kapitoly se ukáže na chybě aproximace, jaký vliv má volba řádu polynomů.

Poslední kapitola bude věnována vztahu funkcí v časové doméně s frekvenčním spektrem, které je tvořené z Čebyševových polynomů. Tyto vztahy se následně aplikují na nepravidelně vzorkovaný signál s frekvenčně omezeným spektrem.

1 Základní pojmy

Tato část se zaobírá definicí některých základních pojmů a vztahů, na které se navazuje v dalších částech práce.

1.1 Prostor L_2

Uvažuje se signál v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$, zastoupený spojitou nebo po částech spojitou reálnou funkcí $f(x)$.

Definice 1.1 *O funkci f(x) lze tvrdit, že je integrovatelná s kvadrátem (druhou mocninou), pokud existuje integrál*

$$\int_a^b f(x)^2 dx \tag{1.1}$$

s konečnou hodnotou. Tato funkce f náleží do prostoru L_2 aneb $f \in L_2(a, b)$ [1].

Definice 1.2 *Pro skalární součin v prostoru $L_2(a, b)$ platí rovnice*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{1.2}$$

kde funkce $f, g \in L_2(a, b)$ [2].

Definice 1.3 *Norma (velikost) funkce $f \in L_2(a, b)$ je definována vztahem*

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}\ [1]. \tag{1.3}$$

Definice 1.4 *Vzdálenost funkcí v prostoru L_2 se značí $\varrho\langle f, g\rangle$ a je rovna vztahu*

$$\varrho\langle f, g\rangle = ||f - g||, \tag{1.4}$$

pro který platí tyto základní vlastnosti

$$\begin{aligned} &\varrho\langle f, g\rangle \geq 0; \\ &\varrho\langle f, g\rangle = 0 \Leftrightarrow x = y; \\ &\varrho\langle f, g\rangle \leq \varrho\langle f, h\rangle + \varrho\langle g, h\rangle; \\ &\varrho\langle f, g\rangle = \varrho\langle g, f\rangle\ [2]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2 Ortogonalní a ortonormální báze

Definice 1.5 *Pokud pro skalární součin* $\langle f, g\rangle$ *platí*

$$\langle f, g\rangle = 0, \tag{1.6}$$

je možné o funkcích $f, g \in L_2(a, b)$ *hovořit jako o ortogonálních (kolmých).*

Definice 1.6 *Funkce se nazývá normovaná funkce, jestliže*

$$||f|| = 1. \tag{1.7}$$

Definice 1.7 *O posloupnosti funkcí* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ...,$ *neboli o systému* $\varphi_n \in L_2(a, b)$ *se dá prohlásit, že je ortogonální, když*

$$\langle \varphi_i, \varphi_k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k, \\ C & \text{pro } i = k, \end{cases} \tag{1.8}$$

přičemž i,k $\in \mathbb{N}$ *a* $C \in \mathbb{R}$*. Jsou-li všechny funkce* $\varphi_n(x)$ *normované, lze konstatovat, že systém je ortonormální. Pak*

$$\langle \varphi_i, \varphi_k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k, \\ 1 & \text{pro } i = k. \end{cases} \tag{1.9}$$

Definice 1.8 *Ortonormální systému* $\varphi_n(x)$ *se vytvoří z ortogonálního systému* $f_n(x)$ *tak, že*

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)}{||f_n||}. \tag{1.10}$$

Definice 1.9 *Jestli je funkce f(x)*$\in L_2$ *rozložitelná v řadu vzhledem k ortogonálnímu systému,*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{1.11}$$

pak číslicím c_n *se říká Fourierovy koeficienty a vyjadřují se jako*

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle}. \tag{1.12}$$

Výše uvedené vztahy a tvrzení jsou čerpány ze zdroje [1].

1.3 Fourierova transformace

Definice 1.10 *Přímá Fourierova transformace má tvar*

$$F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

Definice 1.11 *Zpětná Fourierova transformace má tvar*

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{1.14}$$

1.4 Frekvenčně omezený signál

Definice 1.12 *Frekvenčně omezeným signálem se rozumí takový signál, pro který nabývá Fourierova transformace nulové hodnoty mimo interval* Ω *neboli*

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pro } |\omega| > \Omega \tag{1.15}$$

Věta 1.1 *Zpětná Fourierova transformace frekvenčně omezeného signálu má tvar*

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \text{ [3]}. \tag{1.16}$$

2 Čebyševovy polynomy

Tato kapitola se bude zabývat hlavně vlastnostmi Čebyševových polynomů 1. a 2. druhu a jejich ověřením.

2.1 Čebyševovy polynomy 1. druhu

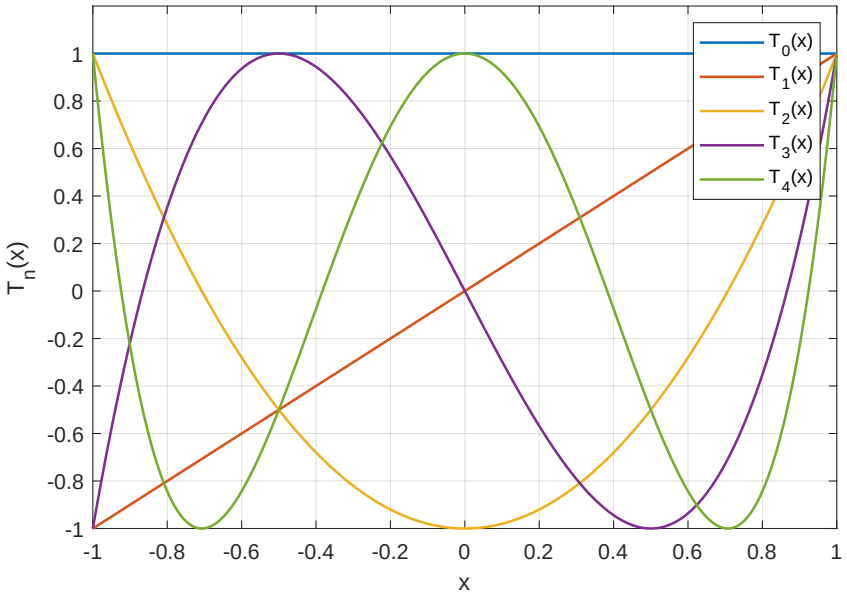
První druh Čebyševových polynomů, označovaný jako $T_n(x)$, je speciálním případem Jacobiho polynomů.

Definice 2.1 *Polynom $T_n(x)$ je definován vztahem*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n \in \mathbb{N}^0 \ [4]. \tag{2.1}$$

Prvních pět polynomů, pro které $x \in \langle -1, 1 \rangle$, znázorňuje obrázek 2.1. Jejich předpisy funkcí vypadají takto

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$



Obr. 2.1: Grafické průběhy prvních pěti Čebyševových polynomů 1. druhu

2.1.1 Vlastnosti

Definice 2.2 *Čebyševovy polynomy 1. druhu vyhovují diferenciální rovnici vztahem*

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{2.3}$$

Definice 2.3 *Generující funkce, ze které se dají získat polynomy $T_n(x)$, má tvar*

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n, \quad |t| < 1. \tag{2.4}$$

Věta 2.1 *Rodriguesova formule pro polynomy 1. druhu je rovna*

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\, 2^n n!}{(2n)!}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^0. \tag{2.5}$$

Věta 2.2 *Pro Čebyševovy polynomy 1. druhu platí rekurzivní vztah*

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \tag{2.6}$$

Věta 2.3 *Polynomy $T_n(x)$ pro $n > 0$ má právě n+1 lokálních extrémů na intervalu $x \in \langle -1, 1\rangle$*

Věta 2.4 *Pro sudé n je funkce $T_n(x)$ sudá a pro liché n je funkce $T_n(x)$ lichá.*

Důkaz těchto vět lze odpozorovat na obrázku 2.1, kde například pro polynom $T_2(x)$ se nachází 3 extrémy v bodech $[-1, 1]$, $[0, -1]$ a $[1, 1]$ a funkce je zrcadlově převrácená podle osy y.

Věta 2.5 *Polynom $T_n(x)$ pro $n > 0$ má právě n kořenů ležících v intervalu $x \in \langle -1, 1\rangle$.*

Věta 2.6 *Pro dva polynomy $T_m(x)$ a $T_n(x)$ na intervalu $x \in \langle -1, 1\rangle$ s váhovou funkcí*

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.7}$$

platí

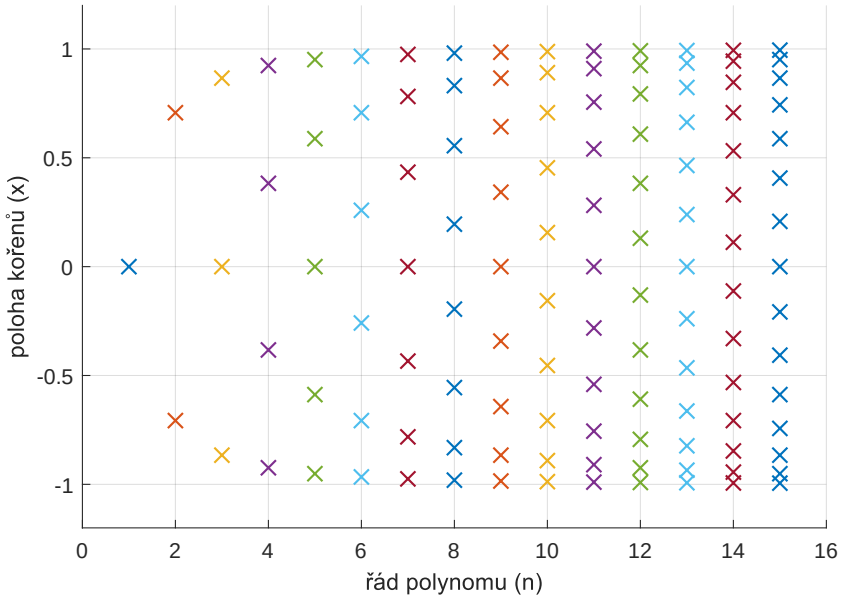
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)T_n(x)\mathrm{d}x \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ \pi & \text{pro } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } m = n \neq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Z toho vyplývá, že polynomy jsou ortogonální pokud $m \neq n$.

Věta 2.7 *Systém, o kterém se dá říci, že je ortonormální s váhovou funkcí w(x)2.7 na intervalu* $x \in \langle -1, 1 \rangle$*, se vytvoří pomocí funkce*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_n(x) & \text{pro } n = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) & \text{pro } n \neq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Vlastnosti byly sestrojeny z literatury [4, 5].



Obr. 2.2: Rozložení polohy kořenů pro Čebyševovy polynomy 1. druhu

2.2 Čebyševovy polynomy 2. druhu

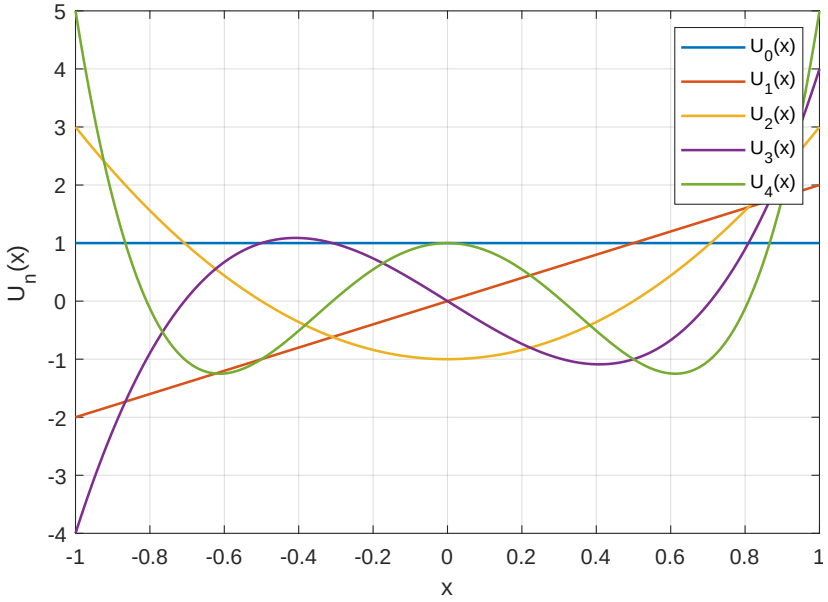
Stejně jako v prvním případě, tak i tyto polynomy patří do speciálních Jacobiho polynomů. V literatuře se většinou označují jako $U_n(x)$.

Definice 2.3 *Polynom* $U_n(x)$ *je definován vztahem*

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n \in \mathbb{N}^0 \text{ [4]}. \tag{2.10}$$

Prvních pět polynomů, znázorňuje obrázek 2.3 a jejich předpisy funkcí vypadají takto

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$



Obr. 2.3: Grafické průběhy prvních pěti Čebyševových polynomů 2. druhu

2.2.1 Vlastnosti

Jelikož většina vlastností pro všechny druhy Čebyševových polynomů je stejná, budou zde uvedeny pouze odlišnosti od 1. druhu.

Definice 2.4 *Čebyševovy polynomy 2. druhu vyhovují diferenciální rovnici vztahem*

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0. \tag{2.12}$$

Definice 2.5 *Generující funkce polynomů $U_n(x)$ má tvar*

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad |t| < 1. \tag{2.13}$$

Definice 2.6 *Čebyševovy polynomy 2. druhu lze vyjádřit pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu jako*

$$\begin{aligned} U_{2n}(x) &= 2\sum_{k=0}^{n} T_{2k}, \\ U_{2n+1}(x) &= 2\sum_{k=0}^{n} T_{2k+1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Věta 2.8 *Rodriguesova formule polynomů 2. druhu* je rovna*

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n\, 2^n (n+1)!}{(2n+1)!}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Věta 2.9 *Pro Čebyševovy polynomy 2. druhu platí rekurzivní vztah*

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x). \tag{2.16}$$

Věta 2.10 *Pro dva polynomy $U_m(x)$ a $U_n(x)$ na intervalu $x \in \langle -1, 1\rangle$ s váhovou funkcí*

$$w(x) = \sqrt{1-x^2} \tag{2.17}$$

platí

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}U_m(x)U_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } m = n. \end{cases} \tag{2.18}$$

Polynomy jsou ortogonální pokud $m \neq n$.

Věta 2.11 *Systém, o kterém se dá říci, že je ortonormální s váhovou funkcí w(x)2.17 na intervalu $x \in \langle -1, 1\rangle$, se vytvoří pomocí funkce*

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_n(x). \tag{2.19}$$

Věty a definice pro vlastnosti byly přeformulovány z literatury [4, 6].

2.3 Další druhy polynomů

Existuje šest druhů Čebyševových polynomů. První čtyři patří do trigonometrických ortogonálních polynomů a zbylé dva do takzvaných polovičních trigonometrických ortogonálních polynomů. Stejně jako první a druhý druh, tak i ostatní polynomy mají svoji specifickou váhu a vzorce k vytváření polynomů. V tabulce 2.1 je například zobrazen rekurzivní vztahy s počátečními polynomy a váhová funkce, se kterou jsou polynomy na intervalu $x \in \langle -1, 1\rangle$ ortogonální [4, 7, 8, 9].

Tab. 2.1: Přehledná tabulka některých vlastností pro polynomy 3.-6. druhu

Druh	P_0	P_1	P_n	$w(x)$
3.	1	$2x-1$	$2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x)$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
4.	1	$2x+1$	$2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x)$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
5.	1	x	$xC_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2 + n + (-1)^n(2n-1)}{4n(n-1)}$	$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
6.	1	x	$xY_{n-1}(x) - \frac{n(n+1) + (-1)^n(2n+1)+1}{4n(n+1)} Y_{n-2}(x)$	$x^2\sqrt{1-x^2}$

2.4 Generování polynomů v prostředí MATLAB

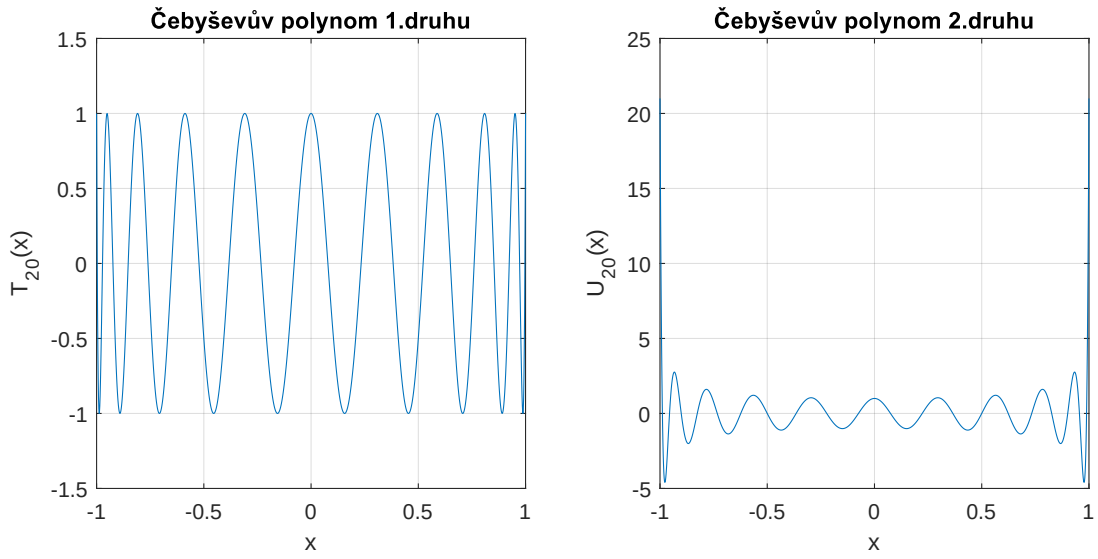
Klíčovým úkolem pro vytvoření bázového systému bylo vybrání vhodné metody generování polynomu, která bude zajišťovat přesnost a hlavně dostatečnou rychlost. K produkování polynomů se využily rekurentní vztahy (2.6 a 2.16), trigonometrické funkce (2.1 a 2.10), Rodriguesovy formule (2.5 a 2.15) a funkce `chebyshevT` a `chebyshevU`, které jsou předem implementované v prostředí MATLAB.

Časová náročnost se porovnávala pomocí polynomu 20. řádu 2.4, aby nedošlo u funkcí s Rodriguesovým vzorcem k přetečení hodnoty datového typu double. Toto překročení nastává u Čebyševova polynomu 1. druhu při 86. řádu a u Čebyševova polynomu 2. druhu už při 85. řádu, kdy funkce `factorial()` nabývá hodnoty `Inf`.

Přehled výsledných časů, zjištěných pomocí funkce `tic` a `toc`, se nachází v tabulce 2.2. Lze v této tabulce vidět, že není vhodné volit základní funkce MATLABu a funkce s Rodriguesovým vzorcem. Pokud by se zvětšil řád polynomu a s ním zmenšila vzorkovací frekvence pro správné vygenerování, čas vyčíslení by skokově narostl a pohyboval se v řádu desítek sekund či minut. Hodí se tedy použít trigonometrické nebo rekurzivní funkce.

Tab. 2.2: Časová náročnost generování polynomu 20. řádu s vzorkovací frekvencí 0.1 ms

Funkce	Čas generování 1. druhu [s]	Čas generování 2. druhu [s]
chebyshevT / chebyshevU	≈ 6.2	≈ 6.7
Trigonometrická funkce	< 0.001	≈ 0.001
Rekurzivní vztah	< 0.001	< 0.001
Rodrigues formula	≈ 7.2	≈ 7.2



Obr. 2.4: Grafický průběh 20. řádu Čebyševova polynomu 1. a 2. druhu

2.5 Ověření ortnormality v prostředí MATLAB

Ke kontrole ortonormality Čebyševových polynomů 1. i 2. druhu se musí vygenerovaná funkce $T_n(x)$ nebo $U_n(x)$ převést do normovaného tvaru pomocí 2.9 a 2.19. Z této funkce $\varphi_n(x)$ či $\Psi_n(x)$ se následně sestrojí skalární součin, který by měl být roven číslu jedna 1.9. V ideálním případě se matice M rovná jednotkové matici.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \dots & \langle\varphi_0,\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \dots & \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\varphi_n,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & \dots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Numerická integrace se tvoří pomocí lichoběžníkové metody zastoupené funkcí `trapz`.

U Čebyševových polynomů prvního druhu nastává chyba, kdy výsledek se rovná `Inf`. Váhová funkce $w(x)$, která tuto chybu způsobuje musí být transformována, tudíž proměnná

$$x = \cos(\theta). \tag{2.21}$$

Poté skalární součin bude rovný

$$\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle = \int_0^{\pi} \varphi_m(\theta)\varphi_n(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{2.22}$$

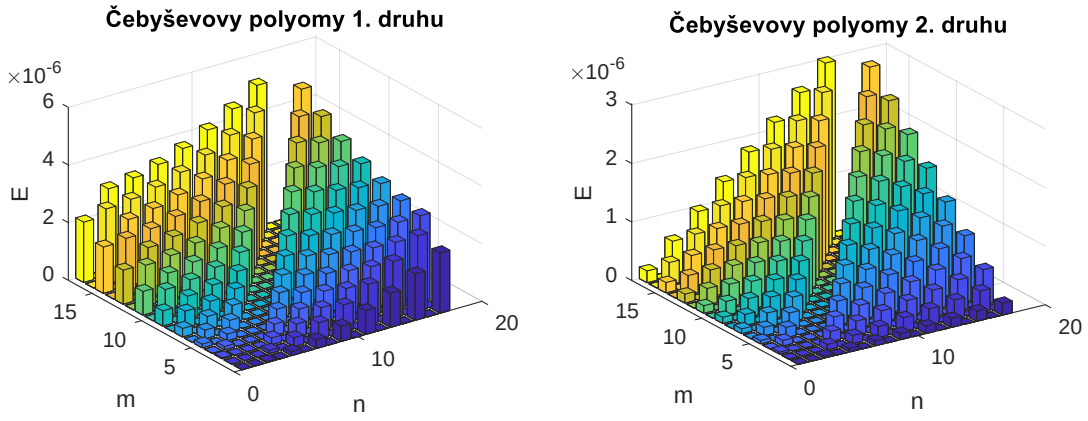
Po dosazení za $\varphi(\theta)$

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{||T_m(\theta)|| \cdot ||T_n(\theta)||} \int_0^{\pi} T_m(\theta) T_n(\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{2.23}$$

U Čebyševových polynom 2. druhu zůstává proměnná x a výsledný skalární součin je

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \Psi_m(x) \Psi_n(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} T_m(x) T_n(x) \mathrm{d}x. \tag{2.24}$$

Vypočítané matice M_{Ψ} a M_{φ} se odečtou od jednotkových matice, a vzniknou tak matice E_{Ψ} a E_{φ} zobrazující chybu diskretizace. Pokud se bude vzorkovací kmitočet T_s snižovat, bude chyba menší.



Obr. 2.5: Chyba lichoběžníkové metody integrování (matice E_{Ψ} a E_{φ}) pro $T_s = 10\mathrm{ms}$

3 Transformace signálu do Čebyševovy báze

V následující kapitole bude ukázka rozložení signálu na Fourierovy koeficienty a později zpětná transformace za pomoci Čebyševovy ortogonální báze.

3.1 Čebyševova transformace

Definice 3.1 *Existuje-li ortogonální systém T_n a po částech spojitá integrovatelná funkce $f(x)$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, pak koeficienty řady se získají dosazením do vzorce 1.12, a platí tedy*

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) f(x) \mathrm{d}x, \\ c_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) f(x) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Opět se narazí na problém, že rovnici nelze vyčíslit numerickou integrací a x se musí znovu nahradit pomocí θ 2.21,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta) \mathrm{d}\theta, \\ c_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\theta) f(\theta) \mathrm{d}\theta \quad \textit{pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Podobně se dosadí do 1.12 polynomy U_n a získá se předpis

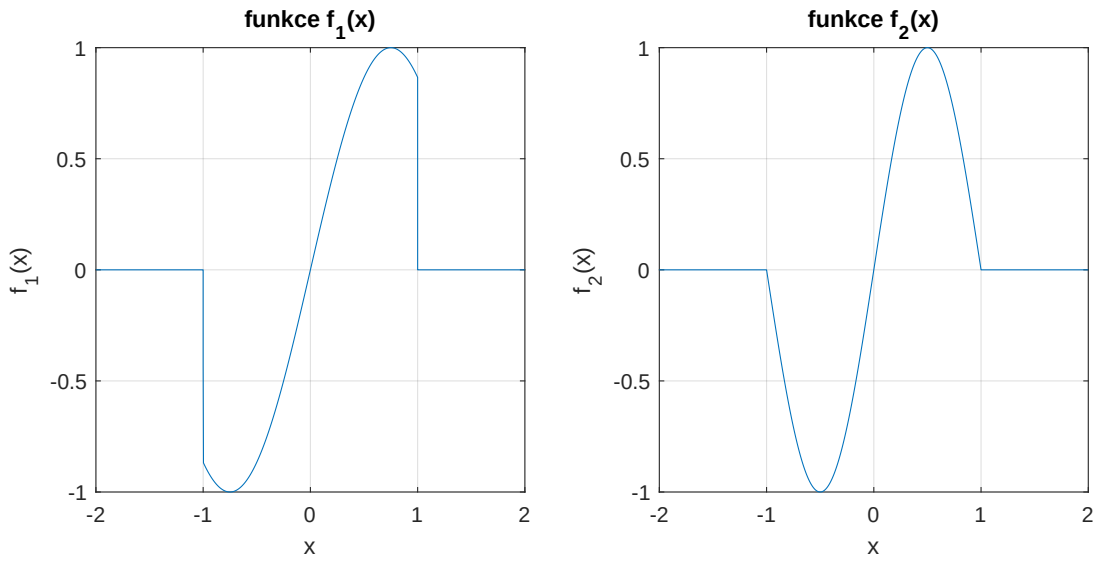
$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} U_n(x) f(x) \mathrm{d}x \quad \textit{pro } n \in \mathbb{N}^0. \tag{3.3}$$

3.2 Rozklad signálu na složky c_n

Pro ukázku rozkladu byly zvoleny jednoduché signály

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \qquad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ f_2(x) &= \sin(\pi x) \qquad\qquad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Funkce jsou nejdříve navzorkované s periodou $T_s = 0.1$ ms a dále zpracovávány pomocí bází, které získávají výsledné koeficienty c_n. Ty se počítají z rovnic 3.2 a 3.3 s využitím lichoběžníkové metody podobně jako při dokazování ortonormality.
Pro další porovnání byly signály rozloženy funkcí `fft`.



Obr. 3.1: Časový průběh funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$

Provede-li se Fourierova transformace $f_1(x)$, složky z ni získané mají nezanedbatelnou hodnotu od 1. do konečného řádu. Oproti tomu spektra, tvořená pomocí Čebyševovy transformace obou druhů, obsahují pouze liché polynomy. Navíc maximální řád vyskytující se ve funkci je 5. řád. Ostatní polynomy mají zanedbatelné hodnoty c_n.

Čebyševovy transformace druhé funkce vytváří stejné koeficienty. Jejich velikost se mírně liší oproti složkám z $f_1(x)$. V případě Fourierovy transformace je funkce $f_2(x)$ zastoupena pouze v jednom koeficientu c_1. Je to způsobeno tím, že pokud funkce v konečných bodech má stejnou hodnotu, lze pro zjednodušení říci, že interval $\langle -1, 1\rangle$ je jedna perioda a spočítat tak Fourierovu řadu

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)), \tag{3.5}$$

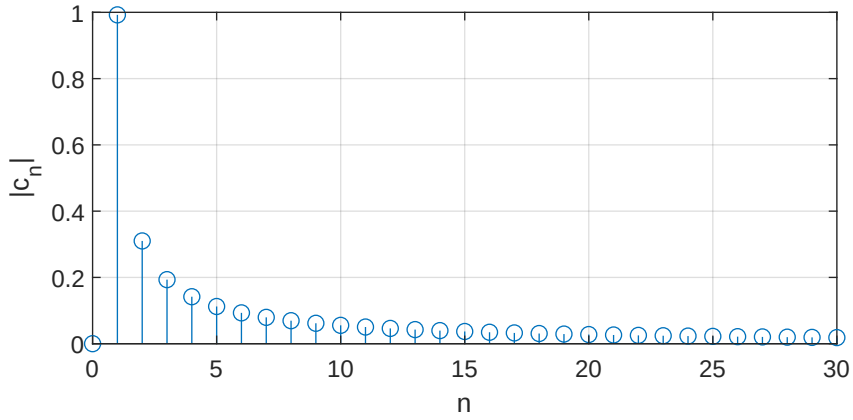
kde koeficienty jsou vyjádřeny jako

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.6}$$

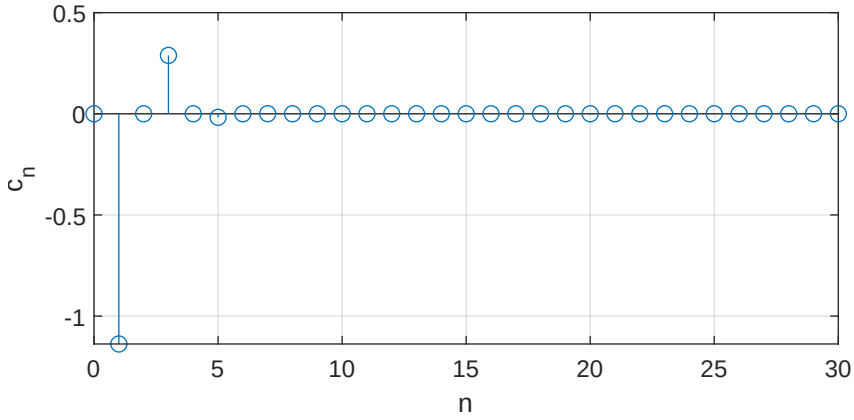
Dosazením úhlové rychlosti

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.7}$$

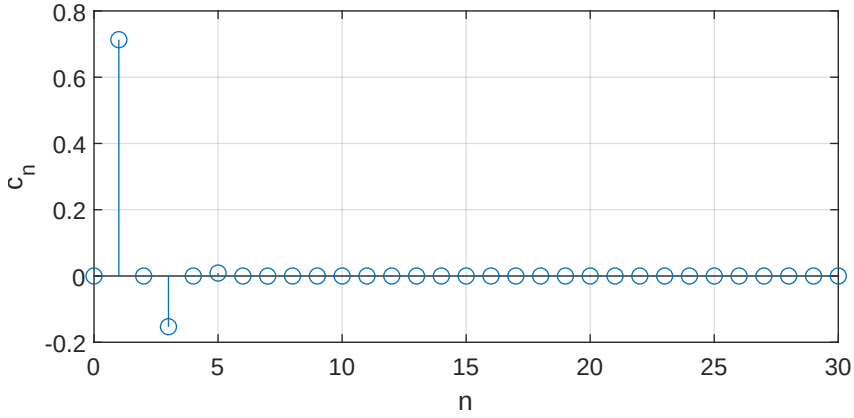
se zjistí, že n musí být celé číslo, jestliže je snaha získat konečný počet složek.



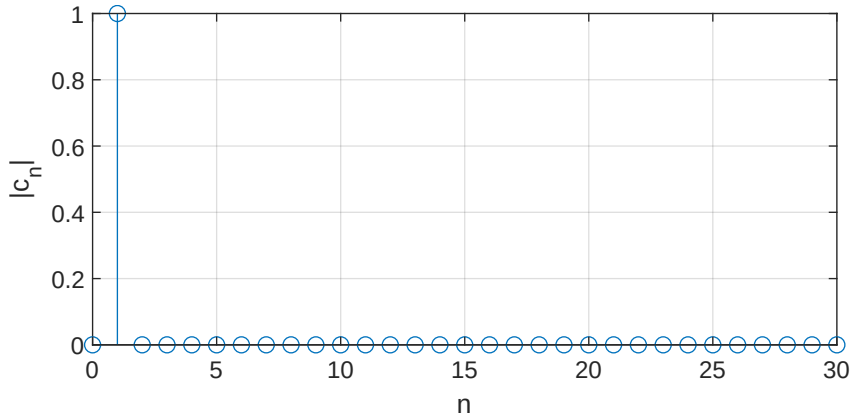
Obr. 3.2: Spektrum signálu $\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ vytvořené pomocí rychlé Fourierovy transformace



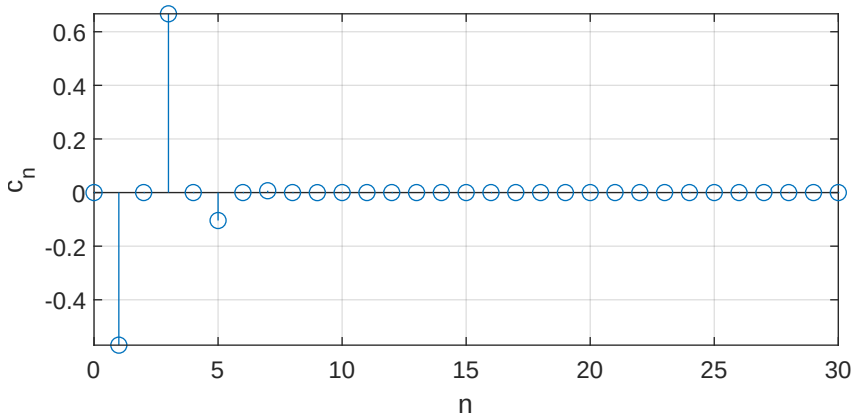
Obr. 3.3: Spektrum signálu $\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ vytvořené pomocí Čebyševových polynomů 1.druhu



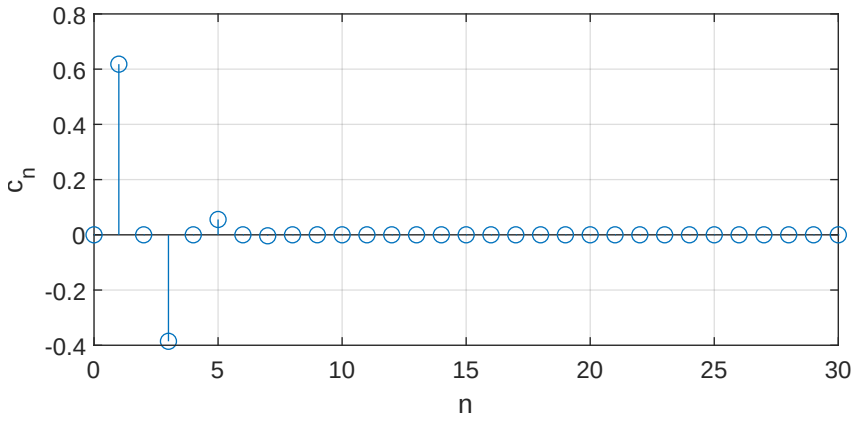
Obr. 3.4: Spektrum signálu $\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ vytvořené pomocí Čebyševových polynomů 2. druhu



Obr. 3.5: Spektrum signálu $\sin(\pi x)$ vytvořené pomocí rychlé Fourierovy transformace



Obr. 3.6: Spektrum signálu $\sin(\pi x)$ vytvořené pomocí Čebyševových polynomů 1.druhu

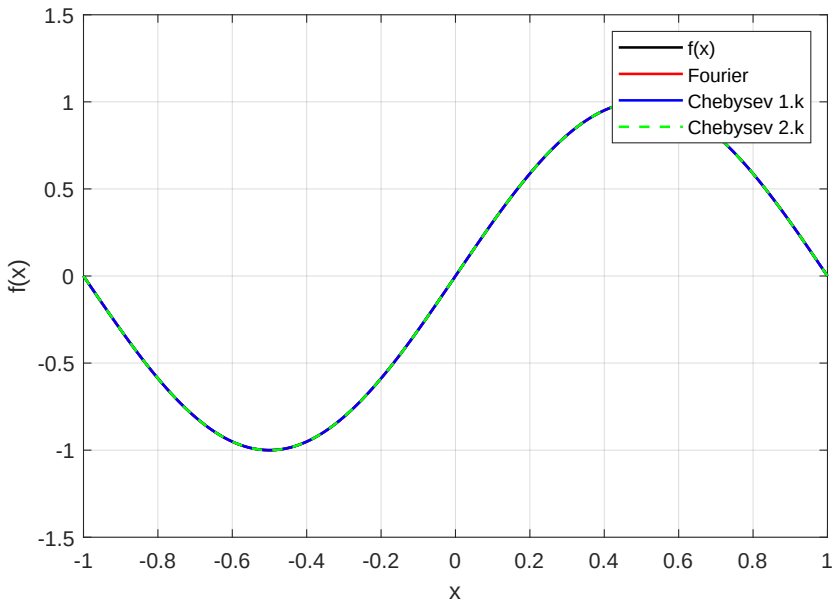


Obr. 3.7: Spektrum signálu $\sin(\pi x)$ vytvořené pomocí Čebyševových polynomů 2. druhu

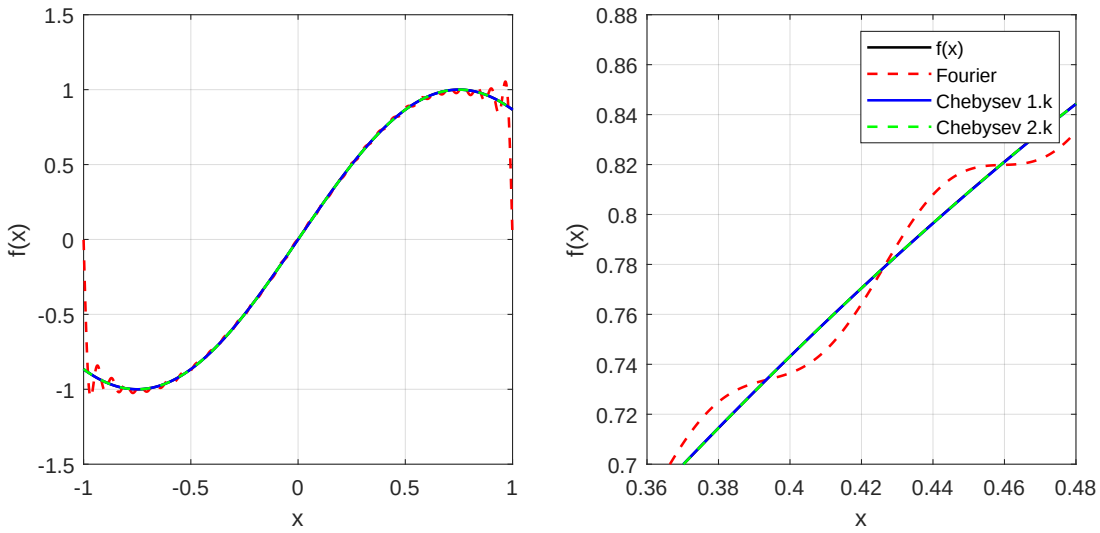
3.3 Zpětná rekonstrukce signálu

Definovaný vztah 1.11 říká, že pokud existují složky c_n a k nim ortogonální polynomy, tak jednoduchým součinem všech složek a polynomů se získá funkce $f'(x)$ neboli takzvaná zpětná transformace.

Aplikací na získaná spektra se vytvoří signály $f_1'(x)$ a$f_2'(x)$. Výsledná kompozice byla tedy tvořena pomocí 31 polynomů od 0. do 30. řádu. U signálů $f_1'(x)$ a $f_2'(x)$ při použití Čebyševovy transformace stačí použít prvních 6 složek pro dostatečně přesnou rekonstrukci. Dokonalá aproximace se dá vidět také při aplikaci složek získaných z Fourierovy transformace u druhé funkce. Problém nastává u proložení signálu $f_1'(x)$, kde dochází v krajních bodech intervalu ke Gibbsovu jevu. Může být viděn na obrázku 3.9. Tento fenomén se tvoří v bodech s nespojitostí a způsobuje překmit, který se zvětšujícím množstvím složek c_n narůstá a nelze ho odstranit [10].



Obr. 3.8: Aproximace funkce $\sin(\pi x)$



Obr. 3.9: Aproximace funkce $\sin(\frac{2\pi x}{3})$

3.4 Chyba aproximace

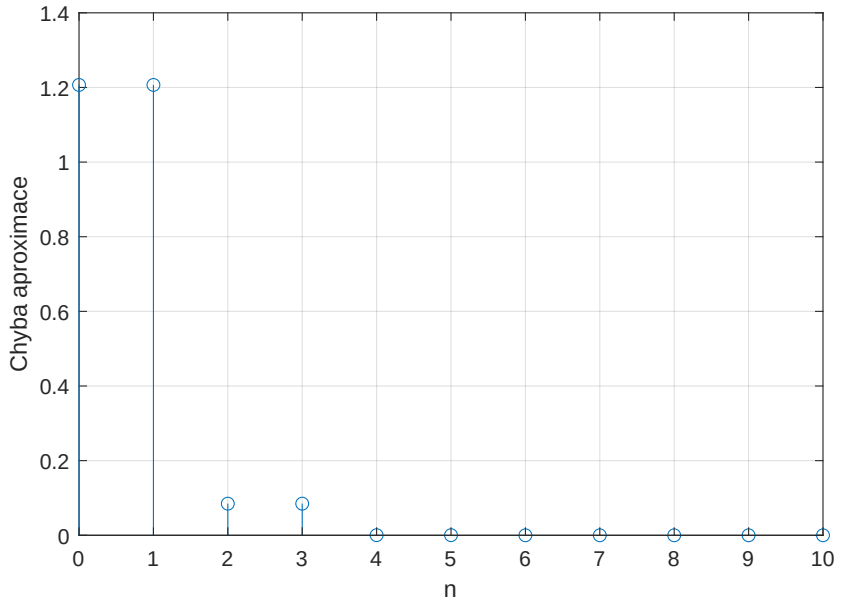
Složený signál $f'(x)$ se nikdy nebude rovnat originálu, ale může se k němu dostatečně přiblížit, pokud se sestaví z dostatečného množství koeficientů c_n. Rozdíl mezi těmito výslednými funkcemi se nazývá chyba aproximace. Ta se počítá například pomocí kvadratické odchylky, která se bude dále značit jako ξ. Je vyjádřena vztahem

$$\xi = \int_a^b |f(x) - f'(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Její velikost je ovlivněna zaokrouhlovací chybou softwaru, chybami způsobenými funkcemi `trapz` a `fft`, ale především volbou řádu aproximace. Na obrázku 3.10 je vidět klesající průběh chyby. Ten se vy vyšších řádech může obrátit a znovu narůstat podobně jako k tomu dochází u ξ_{ff_2}, ξ_{ch2f_1} a ξ_{ch2f_2} v tabulce 3.1.

Tab. 3.1: Vývoj chyby aproximace ve vyšších řádech

Fourierova transformace				
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
ξ_{ff_1}	0.055	0.029	0.015	0.010
ξ_{ff_2}	$1.851 \cdot 10^{-9}$	$9.550 \cdot 10^{-10}$	$4.860 \cdot 10^{-10}$	$3.256 \cdot 10^{-10}$
1. Čebyševova transformace				
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
ξ_{ch1f_1}	$3.069 \cdot 10^{-4}$	$5.253 \cdot 10^{-10}$	$1.034 \cdot 10^{-8}$	$5.432 \cdot 10^{-8}$
ξ_{ch1f_2}	0.011	$2.993 \cdot 10^{-11}$	$1.128 \cdot 10^{-12}$	$9.452 \cdot 10^{-13}$
2. Čebyševova transformace				
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
ξ_{ch2f_1}	$2.935 \cdot 10^{-4}$	$1.940 \cdot 10^{-10}$	$2.564 \cdot 10^{-9}$	$1.211 \cdot 10^{-8}$
ξ_{ch2f_2}	0.011	$3.860 \cdot 10^{-11}$	$5.109 \cdot 10^{-18}$	$2.435 \cdot 10^{-17}$



Obr. 3.10: Závislost chyby aproximace funkce $\sin(\frac{2\pi x}{3})$ na n pro Čebyševovu transformaci 1. druhu

4 Frekvenční vlastnosti Čebyševových polynomů

Kapitola se zaobírá tvorbou frekvenčního spektra pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu. Nejdříve se však rozebere Fourierova transformace samostatných Čebyševových polynomů 1. druhu a následně pak propojení mezi Besselovými funkcemi 1. druhu.

4.1 Fourierova transformace Čebyševových polynomů

Definice 4.1 *Fourierova transformace Čebyševových polynomů má tvar*

$$\hat{T}_n(\omega) = \mathscr{F}\{T_n(t)\} = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} T_n(t) \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Věta 4.1 *Integrální tvar Fourierovy transformace lze vyjádřit sumou, která je rovna*

$$\hat{T}_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \left(\frac{e^{i\omega}}{(i\omega)^k} + (-1)^{k+n} \frac{e^{-i\omega}}{(i\omega)^k} \right) \quad \text{pro } \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}^0, \tag{4.2}$$

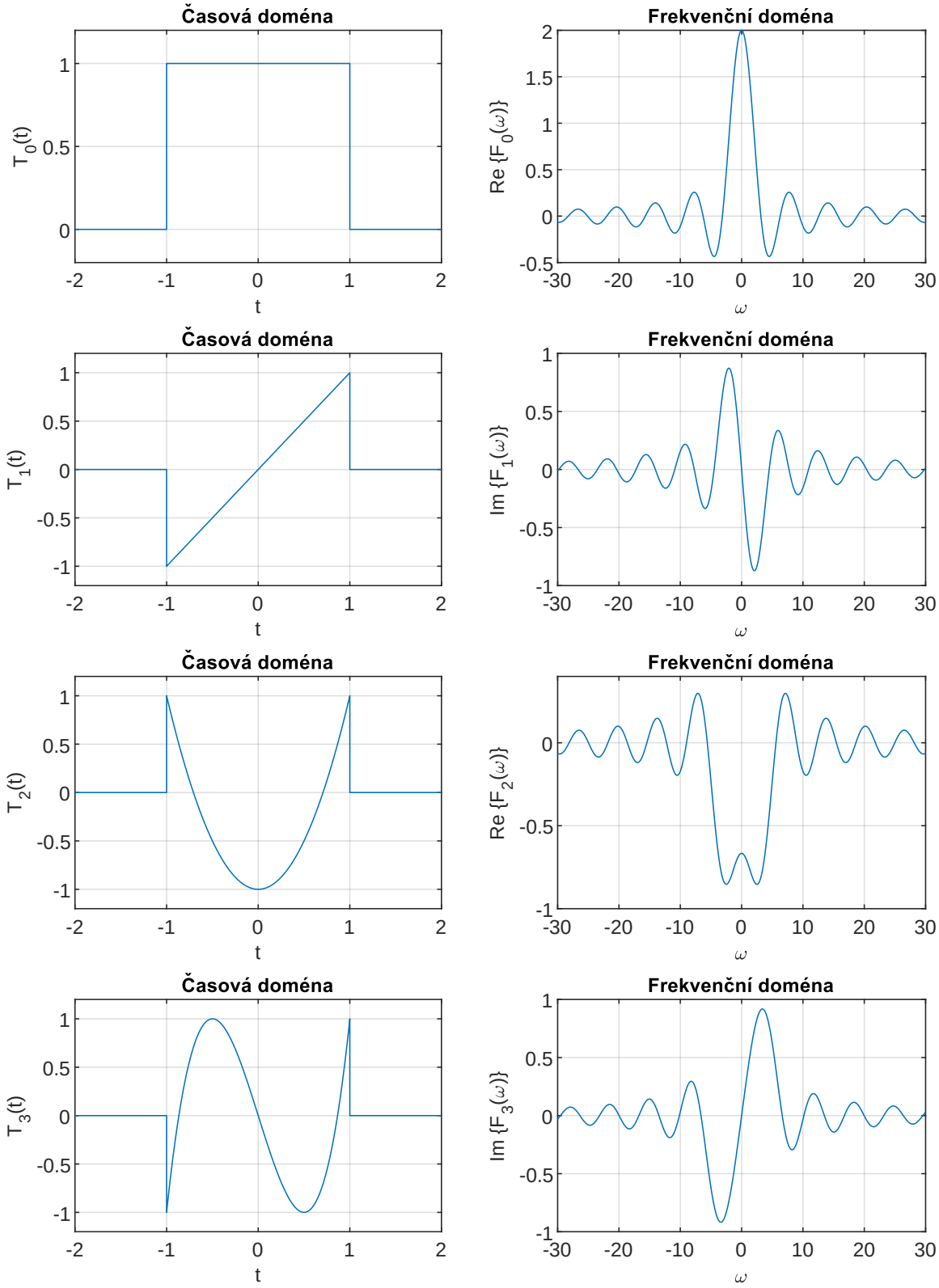
kde jednotlivé koeficienty α jsou definovány jako

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-1)^n, \\ \alpha_2 &= (-1)^{n+1} n^2, \\ \alpha_k = (-1)^{n+k-1} 2^{k-2} n \sum_{p=1}^{n-k+2} \binom{k+p-3}{p-1} \prod_{q=p}^{k+p-3} (n-q) &= \frac{2^{3-2k}(n+k-2)!}{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-1} (n-k+1)!}.* \end{aligned} \tag{4.3}$$

Znak $\left(\frac{1}{2}\right)_{k-1}$ označuje takzvaný Pochhammerův symbol.[11]

Na obrázku 4.1 je příklad prvních čtyř transformací. Se zvyšováním řádu a nebo vzorkovací frekvence pro transformovanou funkci se narazí na problém v okolí $\omega = 0$. Suma se v této oblasti nabývá o několik řádů vyšších čísel než integrál, a proto se pásmo nahradí hodnotou $\hat{T}_n$ při $\omega = 0$, pro kterou platí

$$\hat{T}_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 1, \\ \frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1} & \text{pro } n = 0, 2, 3, \ldots \text{ [11]}. \end{cases} \tag{4.4}$$



Obr. 4.1: Čebyševovy polynomy ve frekvenční a časové oblasti

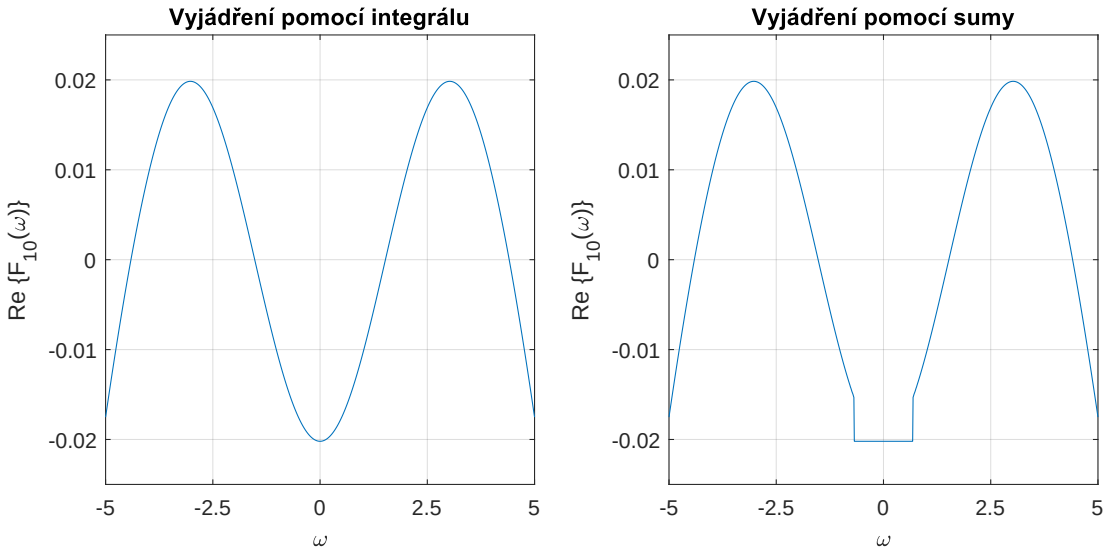
Velikost úseku ζ, který se vymění, je určena polynomem $p(n)$ neboli

$$\zeta = |p(n)|, \tag{4.5}$$

kde $p(n)$ je roven

$$p(n) = 1.4104 \cdot 10^{-6} n^5 - 1.0667 \cdot 10^{-4} n^4 + 0.0029 n^3 - 0.0154 n^2 + 0.026 n - 0.009 \tag{4.6}$$

Polynom $p(n)$ se získal proložením hodnot ω, při kterých rozdíl mezi Fourierovou transformací n-řádu vyjádřenou sumou a integrálem byl menší než 10^{-6}. Příklad výsledné substituce s porovnáním oproti skutečné hodnotě se nachází na obrázku 4.2.



Obr. 4.2: Čebyševův polynom 10. řádu ve frekvenční oblasti

4.2 Besselova funkce 1. druhu

Besselovy funkce, podobně jako Čebyševovy polynomy, mají vícero druhů vycházejících z diferenciální rovnic 4.8. Pro definování vztahu s Čebyševovými polynomy se využívají pouze Besselovy funkce 1. druhu, a proto zde bude rozebrán jen tento typ. Nejjednodušší možností jak tyto funkce generovat je za pomoci integrálu.

Definice 4.2 *Funkce $J_n(x)$ je definován vztahem*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\tau) - n\tau) \mathrm{d}\tau \text{ [12]}. \tag{4.7}$$

4.2.1 Vlastnosti

Definice 4.3 *Besselovy funkce 1. druhu vyhovují diferenciální rovnici vztahem*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{4.8}$$

Definice 4.4 *Generující funkce Besselových funkcí $J_n(x)$ má tvar*

$$e^{\frac{x(t-1)}{2t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \tag{4.9}$$

Věta 4.2 *Pro Besselovy funkce 1. druhu platí rekurzivní vztah*

$$J_n(x) = \frac{2n}{x}J_{n-1}(x) - J_{n-2}(x). \text{ [13]}. \tag{4.10}$$

Definice 4.5 *Fourierova transformace Besselových funkcí má tvar*

$$\hat{J}_n(\omega) = \mathscr{F}\{J_n(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}J_n(t)\mathrm{d}t = \frac{2(-i)^nT_n(\omega)}{\sqrt{1-\omega^2}}, \tag{4.11}$$

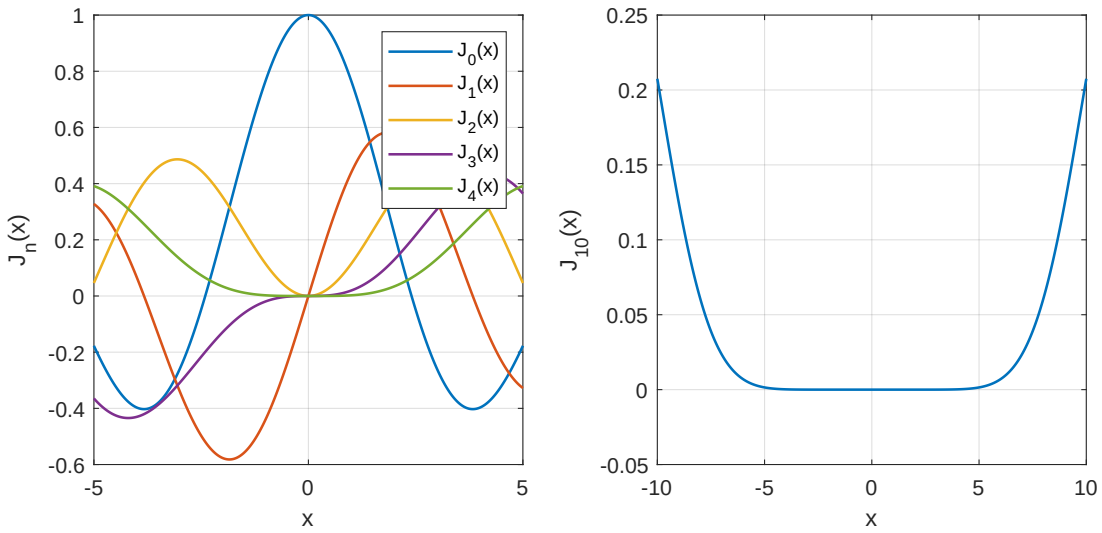
kde $|\omega| < 1$ [14].

Zpomalením času (dilatací času) se může vyjádřit i větší interval frekvenčního spektra. Například pro pásmo $(-\pi, \pi)$ je Fourierova transformace rovna

$$\mathscr{F}\{J_n(\pi t)\} = \frac{2(-i)^nT_n\left(\frac{\omega}{\pi}\right)}{\pi\sqrt{1-(\frac{\omega}{\pi})^2}}. \text{ [15]}. \tag{4.12}$$

Další pozoruhodnou vlastností, kterou lze odpozorovat při generování jednotlivých funkcí, je nulová oblast v okolí $t = 0$. Toto pásmo s zvyšujícím se řádem n narůstá, což lze vidět na obrázku 4.3. Tento interval zůstává stejný, i když se změní způsob generování funkce, takže se může použít rekurzivní vztah, integrální forma i předem implementovaná funkce v Matlabu `besselj`. Pro další práci se bude používat poslední funkce `besselj` z důvodu zachování co nejmenší chyby a časové náročnosti.

Nulová oblast se využije například u aproximace signálu, kde se zahrnou pouze Bessselovy funkce s nenulovou hodnotu v časové oblasti signálu $f(x)$. Může se tedy rychle zjistit maximální řád pro dokonalé proložení.



Obr. 4.3: Průběh Besselových funkcí $J_0(x)$ až $J_4(x)$ a $J_{10}(x)$

4.3 Aplikace na nepravidelně vzorkovaný signál

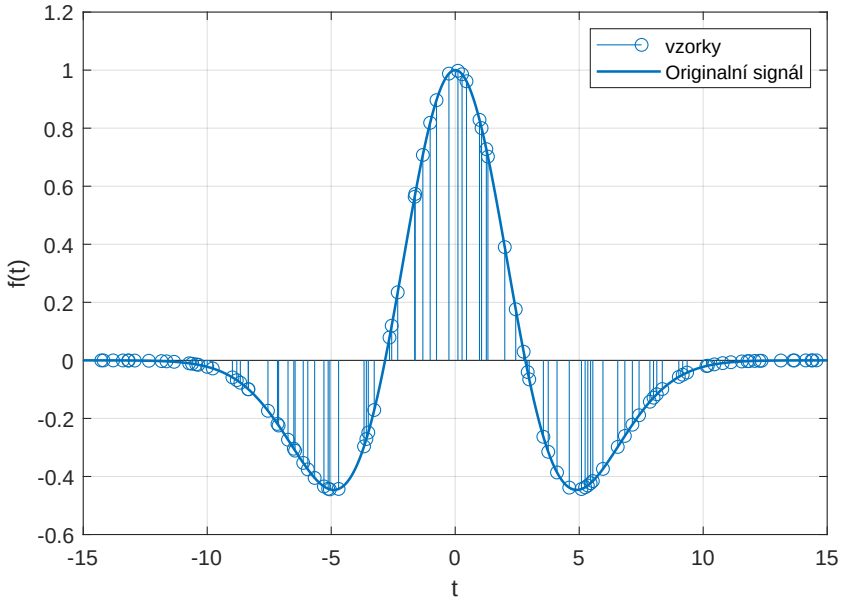
Signály s pravidelnými vzorky jsou jednoduše rekonstruované a jejich proložení závisí pouze na vzorkovací periodě T_s. Za nepravidelně navzorkovaný se označuje signál, který nemá jednu konstantní hodnotu T_s. Jelikož není vždy možné zajistit přesné vzorky, průběh se musí interpolovat například Lagrangeovým interpolačním polynomem. Tento polynom sice zajistí proložení funkce, ale nemá bližší spojení s Čebyševovými polynomy, a proto se využijí na aproximaci Besselovy funkce a upravený obraz Čebyševových polynomů.

4.3.1 Signál v časové oblasti

Originální signál, se kterým bude operováno má předpis

$$f(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\omega_p^2 t^2\right) e^{-\frac{1}{4}\omega_p^2 t^2}, \tag{4.13}$$

kde ω_p^2 je ω s největší energii [16]. Pro omezené frekvenční spektrum od $(-\pi, \pi)$ se tato konstanta zvolila $\omega_p^2 = 0.5$. Výsledný časový průběh se nachází na obrázku 4.5. Jsou zde už zobrazeny nepravidelné vzorky, které jsou vytvořeny za pomocí periodicky navzorkovaného signálu s $T_s = 0.6$s a funkce `rand`. Ta připisuje ke každému vzorku pomocného signálu hodnoty mezi $(0, 1)$. Pokud by funkce $f(t)$ výrazně změnila velikost, muselo by se upravit vzorkování a modifikovat takto napsaný generátor náhodných čísel.



Obr. 4.4: Nerovnoměrně navzorkovaný signál s vyznačenými vzorky

Dalším krokem bylo určení koeficientů c_n. Funkci $f(t)$ lze zapsat dvěma způsoby, buď Besselovými funkcemi jako

$$f(t) = \sum_{n=0}^{n} c_{nbe} J_n(\pi t) \tag{4.14}$$

nebo

$$f(t) = \sum_{n=0}^{n} c_{ncht} Q_n(\pi t), \tag{4.15}$$

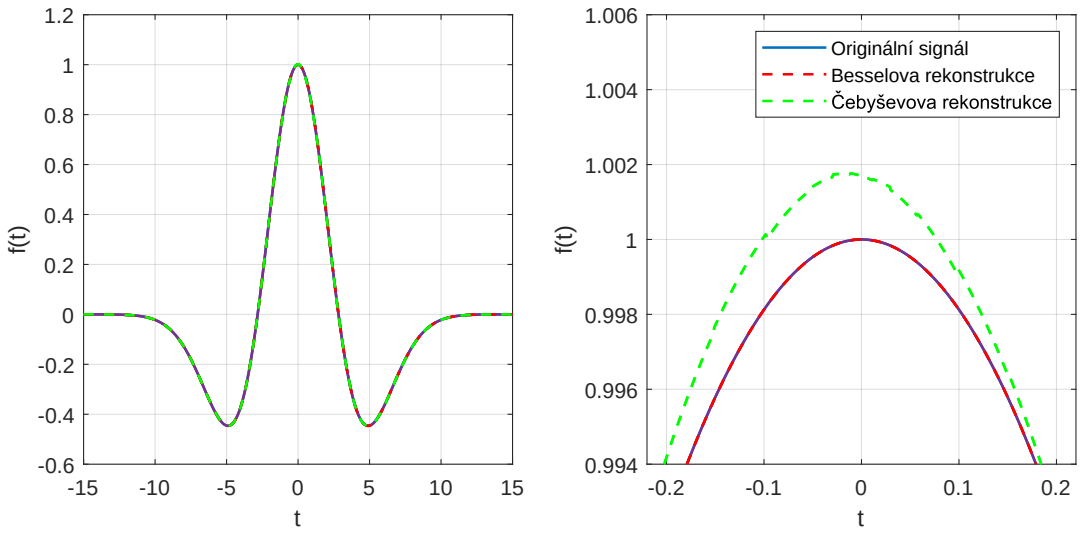
kde

$$\begin{aligned} Q_{2n}(t) &= \hat{T}_{2n}(t), \\ Q_{2n+1}(t) &= (-i)\hat{T}_{2n+1}(t). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Navzorkují-li se báze Q_n a J_n, které jsou zastoupeny v rovnici 4.17 maticí G, stejně jako funkce $f(t)$, pak zapisujeme jako

$$f(x) = \begin{pmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \dots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_k) & g_1(x_k) & \dots & g_n(x_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_k) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Pro získání složek c_n musí být matice G čtvercová. Jestli tomu tak není, musí se celá rovnice vynásobit zleva transponovanou maticí G^T a následně vypočítat inverzní matici z $\mathrm{G}^T \cdot$ G, která se vloží před vektor f. Takto opatřené koeficienty c_n se vynásobí s periodicky navzorkovanou bází a vytvoří aproximaci signálu $f(t)$.



Obr. 4.5: Aproximace nepravidelně navzorkovaného signálu

Při volbě řádu aproximace se přihlíželo na nulové oblasti obou funkcí. U Besselovy báze se jednotlivé funkce pohybovali na konci intervalu v nezanedbatelných hodnotách až do řádu 60. U funkcí $Q(\pi t)$ byl tento řád o něco menší. Od 42. řádu nabývá $Q(\pi t)$ střídavě nulové a hodnoty programově dosazené 4.4, proto se zvolí tento řád jako maximální.

Výsledné proložení 42. řádem se na první pohled zdá velice přesné u obou rekonstruovaných funkcí. Při bližším pohledu se zjistí, že bázová funkce vytvářená z funkcí $Q(\pi t)$ má v okolí nuly o tisíciny větší hodnoty. Je to způsobeno nedokonalým vytvarováním funkcí v okolí nuly, které bylo už zmíněno u Fourierovy transformace. Besselovy funkce proloží křivku ideálně, jak lze vyčíst z tabulky 4.1 zobrazující kvadratické chyby metod.

Tab. 4.1: Kvadratické chyby aproximací nepravidelně navzorkovaného signálu

Aproximace	Chyba ξ
Besselova	$5.457 \cdot 10^{-15}$
Čebyševova Q	$1.301 \cdot 10^{-5}$

4.3.2 Frekvenční oblast signálu

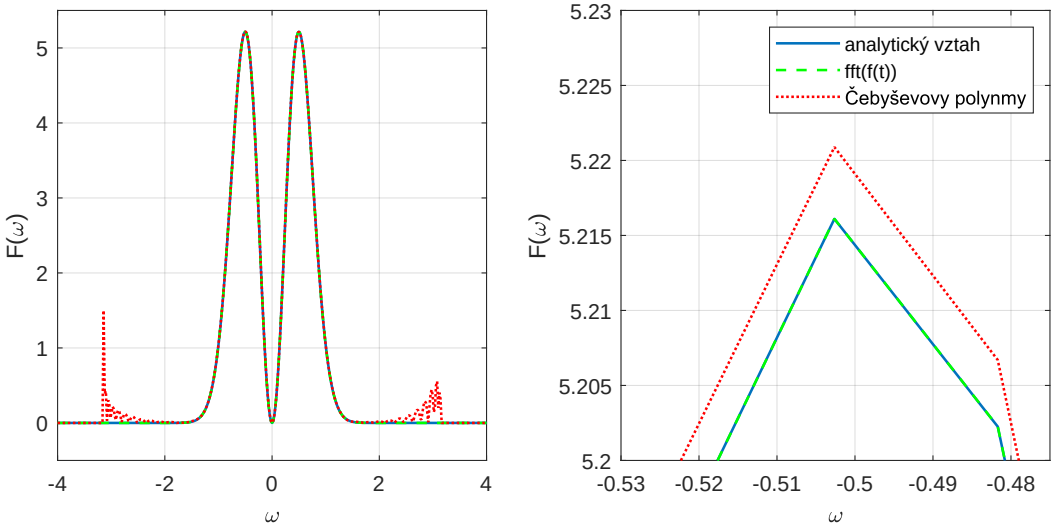
Obraz $F(w)$ originálního signálů $f(t)$ je určen předpisem

$$F(\omega) = \left(\frac{4\pi\omega^2}{\sqrt{\pi}\omega_p^2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{\omega_p^2}}. \tag{4.18}$$

Tento exaktní vzorec bude sloužit pro porovnání s dalšími způsoby modelování frekvenčního spektra. Patří mezi ně `fft` a dvě metody směřující na Čebyševovy polynomy. Nejdříve se ale musí upravit do finální podoby následovně

$$\begin{aligned} F_{Ch}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{n} c_{ncht} Q_n(\pi t)\right] e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{n=0}^{n} c_{ncht} \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\pi t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2 \cdot \sum_{n=0}^{n} c_{ncht} T_n\left(\frac{\omega}{\pi}\right), \end{aligned} \tag{4.19}$$

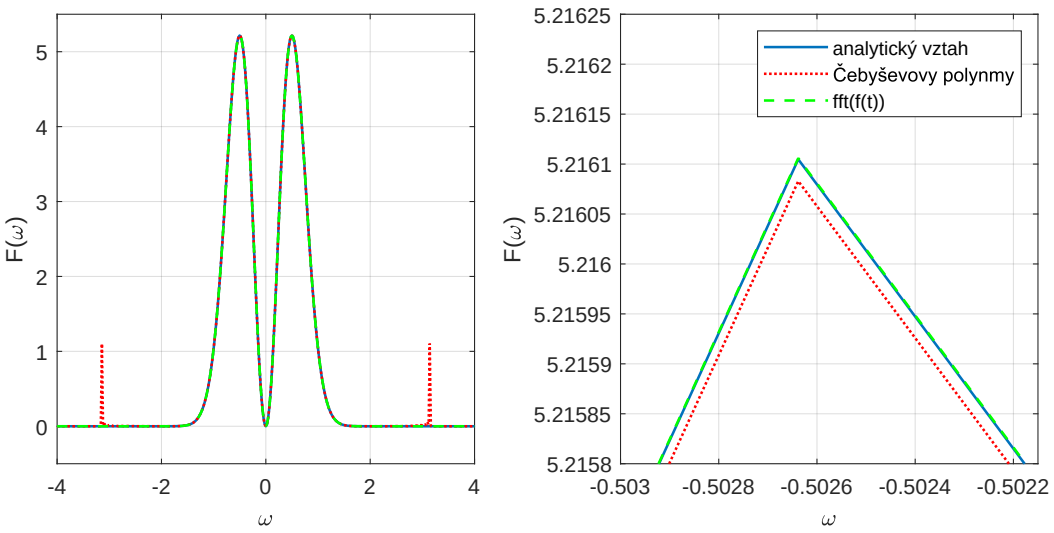
$$\begin{aligned} F_B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{n} c_{nbe} J_n(\pi t)\right] e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{n=0}^{n} c_{nbe} \int_{-\infty}^{\infty} J_n(\pi t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{n} c_{nbe} \frac{2(-i)^n T_n\left(\frac{\omega}{\pi}\right)}{\pi\sqrt{1-(\frac{\omega}{\pi})^2}}. \end{aligned} \tag{4.20}$$



Obr. 4.6: Rekonstrukce frekvenčního spektra pomocí Fourierovy transformace Čebyševových polynomů

Získané předpisy 4.18 a 4.20 využijí vypočítané koeficienty a vytvoří tak spektra, které lze vidět na obrázcích 4.6 a 4.7. Při pohledu na rekonstrukci vycházející z funkce $Q(\pi t)$, se modelovaná funkce chová poblíž limitních bodů nestabilně a kmitavě. Tato chyba se nevyřeší zvětšujícím řádem složek c_n, ale pravděpodobnou úpravou generování funkce Q. Oproti tomu předpis z Besselových funkcí může navýšit počet složek c_n a vylepšit tak modelovaný frekvenční průběh na rozdíl od stávajícího, který má ještě mírné nedostatky.

Vytvořené spektra pomocí rychlé Fourierovy transformace `fft` se oproti analytickému tvaru skoro neliší, a proto je asi výhodné jeho užití ve srovnání s Čebyševovými polynomy.



Obr. 4.7: Rekonstrukce frekvenčního spektra pomocí Fourierovy transformace Besselových funkcí

Závěr

V práci jsem prostudoval jednotlivé vlastnosti Čebyševových polynomů prvního a druhého druhu. Tyto poznatky pak aplikoval při vytváření funkcí a skriptů v prostředí MATLAB nejen na vytváření báze, ale i transformace či specifických vlastnostech jako je ortonormalita. Dále pak aplikoval Čebyševovu transformaci na podobné signály v časovém intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a porovnal s Fourierovou transformací počet potřebných koeficientů i následnou chybu při zpětné transformaci. Dokázal, tak že ortogonální polynomy jsou dostatečnou náhradou za Fourierovu transformaci v případě nevhodně zvolené funkce.

Poté jsem prostudoval chování Čebyšeových polynomů při vložení do frekvenčního spektra, přičemž tyto polynomy úzce souvisely s Fourierovou transformací Besselových funkcí 1. druhu a další specifickou funkcí. S těmito bázemi jsem pak skládal nepravidelně navzorkovaný signál a odvodil vztah pro modelování frekvenčního spektra pouze za pomoci Čebyševových polynomů a velikosti koeficientů c_n. Tyto vytvořené spektra se sice přibližují dokonalé analytické funkci, ale Fourierova transformace je stále převyšuje, a proto je vhodné pokračovat v jejich výzkumu a zdokonalování.

Literatura

[1] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 2. opravné vydání. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1968. Česká matice technická. ISBN 03-003-81.

[2] KUFNER, Alois a Jan KADLEC. *Fourierovy řady*. Praha: Československé akademie věd, 1969. Cesta k vědění. ISBN 21-062-69.

[3] SHMALIY, Yuriy. *Continuous-Time Signals*. 3300 AA Dordrecht, The Netherland: Springer, 2006. ISBN 978-1-4020-4818-0.

[4] MASON, John C. a David HANDSCOMB. *Chebyshev polynomials*. Boca Raton, Fla: Chapman and Hall/CRC, 2003. ISBN 0-8493-0355-9.

[5] WEISSTEIN, Eric. Chebyshev Polynomial of the First Kind. Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource [online]. [cit. 2021-12-28]. Dostupné z: <`https://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html`>

[6] WEISSTEIN, Eric. Chebyshev Polynomial of the Second Kind. Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource [online]. [cit. 2021-12-28]. Dostupné z: <`https://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheSecondKind.html`>

[7] MASJED-JAMEI, Mohammad. *Some New Classes of Orthogonal Polynomials and Special Functions: A Symmetric Generalization of Sturm-Liouville Problems and its Consequences*. [online]. Kassel, Německo, 2006 [cit. 2021-12]. Dostupné také z: <`http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Diplome/MasjedJamei.pdf`>. Disertační práce. Department of Mathematics, University of Kassel.

[8] ABD, Elhameed a Mohamed WALEED. New Results of the Fifth-Kind Orthogonal Chebyshev Polynomials. *Symmetry* [online]. 2021, 13(12), 2407 [cit. 2021-12-28]. ISSN 2073-8994. Dostupné z: <`https://www.mdpi.com/2073-8994/13/12/2407`>

[9] WALEED, Mohamed a Elhameed, ABD. Novel Expressions for the Derivatives of Sixth Kind Chebyshev Polynomials: Spectral Solution of the Non-Linear One-Dimensional Burgers' Equation. *Fractal and Fractional* [online]. 2021, 5(2), 53 [cit. 2021-12-28]. ISSN 2504-3110. Dostupné z:<`https://www.mdpi.com/2504-3110/5/2/53`>

[10] WEISSTEIN, Eric. Gibbs Phenomenon. Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource [online]. [cit. 2022-04-13]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html>

[11] SMITHEMAN,S. A. a A. S. FOKAS. *The Fourier Transforms of the Chebyshev and Legendre Polynomials* [online]. arXiv, 2012 [cit. 2022-05-16]. Dostupné z: <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1211.4943>.

[12] WEISSTEIN, Eric. Bessel Function of the First Kind. Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource [online]. [cit. 2022-05-10]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>

[13] LAMBERS, Jim. Bessel Functions of the First Kind [online]. 2013 [cit. 2022-05-10]. Dostupné z:<https://www.math.usm.edu/lambers/mat415/lecture12.pdf>. Skripta. University of Southern Mississippi.

[14] IGNAJATOVIC, Aleksandar. *Numerical Differentiation and Signal Processing*, International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS), Singapore, 2001 [online]. [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <http://www.cse.unsw.edu.au/~ignjat/diff/AI-ICICS.pdf>.

[15] VAIDYANATHAN, Palghat P., Madihally NARASIMHA a Aleksandar IGNAJATOVIC, *New sampling expansions for bandlimited signals based on chromatic derivatives*, Conference Record of Thirty-Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat.No.01CH37256), 2001, pp. 558-562 vol.1. Dostupné z: <https://doi.org/10.1109/ACSSC.2001.986985>.

[16] WANG, Yanghua, *The Ricker wavelet and the Lambert W function*, Geophysical Journal International, Volume 200, Issue 1, January 2015, Pages 111–115. Dostupné z: <https://doi.org/10.1093/gji/ggu384>.

Seznam symbolů a zkratek

c_n	n-tý složka spektra
Inf	infimum - nekonečno
$L_2(a, b)$	Hilbertův prostor
$\mathbb{N}^0$	množina přirozených čísel včetně nuly
φ_n	n-tý normovaný Čebyševův polynom 1. druhu
Ψ_n	n-tý normovaný Čebyševův polynom 2. druhu
T_s	vzorkovací perioda
T_n	n-tý Čebyševův polynom 1. druhu
U_n	n-tý Čebyševův polynom 2. druhu
$(x)_n$	Pochhammer symbol
J_n	n-tá Besselova funkce 1. druhu
$\hat{J}_n$	Fourierův obraz n-té Besselovy funkce 1. druhu
$\hat{T}_n$	Fourierův obraz n-tého Čebyševova polynomu 1. druhu
ξ	kvadratická odchylka
$\mathbf{A}^T$	transponovaná matice
$\mathscr{F}$	Fourierova transformace
$\mathscr{F}^{-1}$	inverzní Fourierova transformace

A Obsah elektronické přílohy

1. Text práce
2. Funkce
   - Basis.m
   - Cheby_polynom_first_kind.m
   - Cheby_polynom_first_kind_Rodrigues.m
   - Cheby_polynom_first_kind_trig.m
   - Cheby_polynom_second_kind.m
   - Cheby_polynom_second_kind_Rodrigues.m
   - Cheby_polynom_second_kind_trig.m
   - Cheby_tf.m
   - Roots_solve.m
   - Norm_Cheby.m
3. Skripty
   - Bessel_fce _graph.m
   - Cheby_roots_graph.m
   - Cheby_poly_graph.m
   - FourierTF_of_Cheby _T.m
   - model_freq_spectrum.m
   - test_ortonormalita.m
   - test_polynom.m
   - test_spectrum.m

Všechny funkce a skripty byly napsány a odzkoušeny v prostředí Matlab 2021b.