VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELOVANIE A SIMULÁCIE V LETECTVE

MODELLING AND SIMULATION IN AVIATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JÁN PREŠINSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Mgr. JITKA ZATOČILOVÁ, Ph.D.

BRNO 2013

Abstrakt
Bakalárska práca je zameraná na určenie polohy lietadla vzhľadom na zemskú súradnicovú sústavu. Bližšie sa venuje najmä reprezentácii pomocou Eulerových uhlov a reprezentácii určenou kvaterniónom. Následne uvádza pohybové rovnice pre 6 a 3 stupne voľnosti a popisuje numerickú metódu pre riešenie týchto pohybových rovníc, ktoré tvoria sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc.

Summary
This bachelor thesis is focused on specifying the orientation of aircraft in normal Earth-fixed frame. It is devoted to Euler angles representation and quaternions representation. Moreover, it introduces the equations of motion with 3 and 6 degrees of freedom and proposes the numerical method for solving these equations, which are expressed by the set of non-linear diferential equations.

Kľúčové slová
pohybové rovnice, numerické riešenie, Eulerove uhly, kvaternióny

Keywords
equations of motion, numerical solution, Euler angles, quaternions

PREŠINSKÝ, J. *Modelovanie a simulácie v letectve*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 43 s. Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Modelovanie a simulácie v letectve* vypracoval samostatne pod vedením Mgr. Jitky Zatočilovej, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Ján Prešinský

Ďakujem svojej školiteľke Mgr. Jitke Zatočilovej, Ph.D. za odborné vedenie mojej bakalárskej práce, za cenné pripomienky a rady, ktorými ma počas vypracovávania zahrnula a za trpezlivosť a ochotu pri opravovaní mojich prvotín. Ďakujem aj za podporu od projektu Amathnet.

Ján Prešinský

Obsah

1 Úvod **2**

2 Orientácia tuhého telesa v súradnicovej sústave **3**
2.1 Práca so súradnicovými sústavami . . . 3
2.1.1 Základné súradnicové sústavy . . . 3
2.1.2 Transformácia súradnicových sústav . . . 3
2.2 Reprezentácia pomocou Eulerových uhlov . . . 6
2.2.1 Eulerove uhly . . . 6
2.2.2 Aerodynamický uhol nábehu a uhol sklzu . . . 8
2.2.3 Eulerova os a hlavný uhol . . . 10
2.3 Kvaterniónová reprezentácia . . . 11
2.3.1 Vyjadrenie kvaterniónov pomocou hlavného uhla rotácie a Eulerovej osi . . . 11
2.3.2 Rotačná matica . . . 12
2.3.3 Vzťah medzi Eulerovymi uhlami a kvaterniónmi . . . 13

3 Pohybové rovnice s 6 a 3 stupňami voľnosti **15**
3.1 Vyjadrenie uhlovej rýchlosti . . . 15
3.1.1 Vyjadrenie pomocou Eulerových uhlov . . . 15
3.1.2 Vyjadrenie pomocou kvaterniónov . . . 16
3.2 Pohybové rovnice pre 6 stupňov voľnosti . . . 17
3.3 Pohybové rovnice pre 3 stupne voľnosti . . . 20

4 Numerické riešenie sústavy nelineárnych ODR **21**
4.1 Základné pojmy a princíp numerických metód . . . 21
4.2 Explicitné Rungeove-Kuttove metódy . . . 22
4.3 Metóda Dormand-Prince . . . 25

5 Analýza programu riešiaceho kinematiku dopravného lietadla **30**
5.1 Popis funkcie jednotlivých blokov . . . 30
5.1.1 Riešenie pohybových rovníc pomocou Eulerových uhlov . . . 30
5.1.2 Riešenie pohybových rovníc pomocou kvaterniónov . . . 32
5.1.3 Blok pre výpočet uhlu nábehu, uhlu sklzu a aerodynamickej rýchlosti 33
5.1.4 Transformačná matica pre uhol nábehu a uhol sklzu . . . 34
5.1.5 Kompletný systém blokov . . . 35
5.2 Príklad . . . 37

6 Záver **39**

7 Zoznam použitých symbolov a skratiek **41**

1. Úvod

Táto bakalárska práca sa venuje popisu a riešeniu pohybových rovníc s 3 a 6 stupňami voľnosti, ktoré tvoria sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc. Nesnaží sa ich vyriešiť presným analytickým spôsobom pomocou linearizácií, ale dáva prednosť numerickým metódam, ktorými je iteračne možné riešiť pôvodnú nezjednodušenú sústavu rovníc. Práca podrobnejšie opisuje najmä Dormandovu-Princovu metódu, ktorá patrí do skupiny explicitných Rungových-Kuttových metód. Venuje sa aj popísaniu orientácie tuhého telesa v trojdimenzionálnej ortogonálnej súradnicovej sústave pomocou reprezentácie Eulerových uhlov a kvaterniónovou reprezentáciou. Zhrnuté poznatky nakoniec aplikuje pri popise blokového programu, ktorý popisuje kinematiku letu bežného dopravného lietadla. Práca čerpá z viacerých zdrojov, ale ťažiskovými sú najmä pramene [1] a [3]. Je rozdelená na štyri kapitoly.

Druhá kapitola zavádza základné súradnicové systémy, ktoré sa využívajú v letectve. Popísaná je transformácia z jednej súradnicovej sústavy do druhej všeobecne a odvodené sú aj rotačné matice, ktoré určujú konkrétne transformácie súradnicových sústav. Opisuje ďalej vzťah dvoch súradnicových sústav pomocou reprezentácie Eulerovými uhlami a kvaterniónmi. Sú tu uvedené vlastnosti oboch reprezentácií, ich použitie, vzájomný vzťah a ich porovnanie. Malý priestor je vyhradený aj pre tretiu reprezentáciu pomocou Eulerovej osi a hlavného uhlu. Definované sú tu aj aerodynamický uhol útoku a sideslip uhol, ktoré určujú vplyv prostredia na lietadlo.

V tretej kapitole sú uvedené pohybové rovnice s 6 stupňami voľnosti pre tuhé symetrické teleso. Doplňujú ich ešte tri odvodené rovnice, ktoré definitívne určujú polohu lietadla vzhľadom k Zemskej súradnicovej sústave. Tieto tri rovnice určujú vzájomný vzťah medzi uhlovou rýchlosťou a Eulerovými uhlami respektíve kvaterniónmi. Pomocou zjednodušenia z pohybových rovníc pre 6 stupňov voľnosti sú odvodené aj pohybové rovnice s 3 stupňami voľnosti.

Štvrtá kapitola sa venuje popisu numerických metód pre riešenie sústavy nelineárnych diferenciálnych rovníc. Navrhuje riešiť sústavu metódou Dormand-Prince, ktorú používa matlabovksý riešič ode45. Uvádza základné charakteristiky tejto metódy akými sú napr. riadenie dĺžky kroku alebo vlastnosť First Same As Last.

V piatej kapitole riešime kinematiku modelu menšieho dopravného lietadla. Našou úlohou je analyzovať program, ktorý rieši pohybové rovnice s 6 stupňami voľnosti. Pracujeme so softvérom Matlab Simulink, ktorý využíva blokové programovanie. Snažíme sa nájsť vzťahy, na základe ktorých program pracuje a porovnávame ich so vzťahmi, ktoré sme v predchádzajúcich kapitolách odvodili alebo uviedli.

2. Orientácia tuhého telesa v súradnicovej sústave

2.1. Práca so súradnicovými sústavami

2.1.1. Základné súradnicové sústavy

Všetky súradnicové sústavy, ktoré budeme používať sú trojdimenzionálne, ortogonálne a pravotočivé. Značiť ich budeme systematicky nasledovne: $F(O, x, y, z)$, kde x, y, z sú osi súradnicovej sústavy a O je počiatok súradnicovej sústavy. Každá os súradnicovej sústavy $F(O, x, y, z)$ je reprezentovaná jednotkovým vektorom. Teda $\mathbf{i}_n$ predstavuje jednotkový vektor príslušný osi x, ďalej $\mathbf{j}$ predstavuje jednotkový vektor príslušný osi y a nakoniec k predstavuje jednotkový vektor príslušný osi z. V aeronautike sa stretávame s veľkým počtom súradnicových sústav viď [1]. Definujeme si teraz tie, ktoré neskôr využijeme.

1. Inerciálna súradnicová sústava $F_I(A, x_I, y_I, z_I)$ - je geocentrická, teda jej počiatok A leži v strede Zeme. Os z_I splýva s osou otáčania Zeme a osi x_I a y_I si zachovávajú fixný smer vo vesmíre (ich poloha sa teda určuje vzhľadom na hviezdy).

2. Zemská súradnicová sústava $F_e(O, x_e, y_e, z_e)$ - je spojená so Zemou. Počiatok O je pevný bod vzhľadom na Zem. Os z_e má smer gravitačného zrýchlenia. Osi x_e, y_e tvoria dotyčnice k zemskému povrchu, pričom os x_e je otočená na sever.

3. Súradnicová sústava tela lietadla $F_b(G, x_b, y_b, z_b)$ - je spojená s telom lietadla. Jej počiatok leží v ťažisku lietadla G. Os x_b je rovnobežná s trupom lietadla a smeruje k prednej časti trupu. Os z_b je orientovaná smerom dole vzhľadom k telu lietadla a os y_b smeruje napravo kolmo na trup lietadla. Predpokladá sa, že lietadlo je symetrické podľa plochy, ktorú určujú osi x_b a z_b.

4. Aerodynamická súradnicová sústava $F_a(G, x_a, y_a, z_a)$ - jej počiatok leží znovu v ťažisku lietadla G. Definuje ju os x_a, ktorá má zhodnú polohu a orientáciu ako vektor aerodynamickej rýchlosti lietadla $\mathbf{V_a}$. Ďalej je určená uhlami α_a, β_a, ktoré sa nazývajú aerodynamický uhol nábehu a uhol sklzu. Pomocou týchto dvoch uhlov sa transformuje súradnicova sústava tela lietadla F_b do aerodynmaickej súradnicovej sústavy F_a a naopak.

Často sa stáva, že údaje, ktoré máme o vlastnostiach letu, sú udané v rôznych súradnicových sústavách. Preto je treba vytvoriť matematické prostriedky, ktoré nám umožnia transformáciu veličín z jednej súradnicovej sústavy do druhej.

2.1.2. Transformácia súradnicových sústav

Každú transformáciu súradnicej sústavy do inej sústavy možno vyjadriť transformačnou maticou $\mathbb{T}$, ktorú budeme nazývať aj rotačná matica. Predstavme si, že máme ľubovoľný vektor $\mathbf{X}$ a dve rôzne súradnicové sústavy $F_i(O, x_i, y_i, z_i)$ a $F_j(O, x_j, y_j, z_j)$. Potom $\mathbf{X^i}$ bude značiť vyjadrenie vektoru $\mathbf{X}$ v súradnicovej sústave F_i a $\mathbf{X^j}$ vyjadrenie vektoru $\mathbf{X}$ v súradnicovej sústave F_j. Vzájomný vzťah medzi $\mathbf{X}^i$ a $\mathbf{X}^j$ vyjadruje rovnica:

$$\mathbf{X^i} = \mathbb{T}_{\mathbf{ij}}\mathbf{X^j}, \tag{2.1.1}$$

kde $\mathbb{T}_{ij}$ predstavuje transformačnú maticu zo súradnicovej sústavy F_i do súradnicovej sustavy F_j.

Je možné ukázať, že transformačná matica spojená s otočením okolo osi, ktorá prechádza počiatkom ortogonálnej pravotočivej súradnicovej sústavy je reálna ortogonálna matica. Táto matica má dve špeciálne vlastnosti. Jej determinant je rovný 1 a jej transpozícia $\mathbb{T}_{ij}^T$ je rovná jej inverzii $\mathbb{T}_{ij}^{-1}$, takže píšeme:

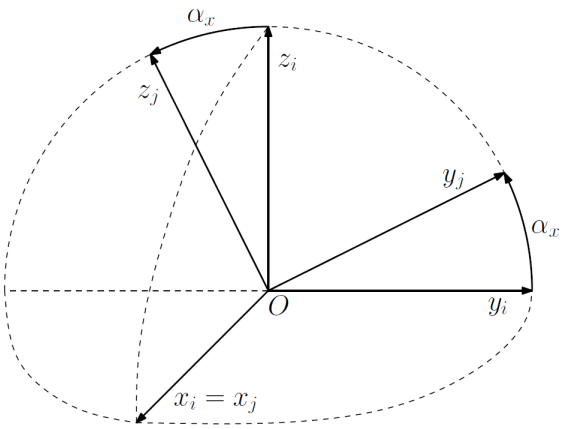
$$\mathbb{T}_{ij}^T = \mathbb{T}_{ij}^{-1}. \tag{2.1.2}$$

Teraz postupne uvedieme transformačné matice pre elementárne rotácie okolo osí x_i, y_i a z_i. Takže transformačná matica odvodená z obrázku (2.1) pre rotáciu okolo osi x_i o uhol α_x vyzerá nasledovne:

$$\mathbb{T}_{ij}(\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & -\sin\alpha_x \\ 0 & \sin\alpha_x & \cos\alpha_x \end{pmatrix}, \tag{2.1.3}$$

kde

$$\mathbf{X^i} = \mathbb{T}_{\mathrm{ij}}\mathbf{X^j}. \tag{2.1.4}$$



Obr. 2.1: Elementárne otočenie okolo osi x_i

Transformačná matica odvodená z obrázku (2.2) pre rotáciu okolo osi y_i o uhol α_y má tvar:

$$\mathbb{T}_{ij}(\alpha_y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_y & 0 & \sin\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y \end{pmatrix}, \tag{2.1.5}$$

kde

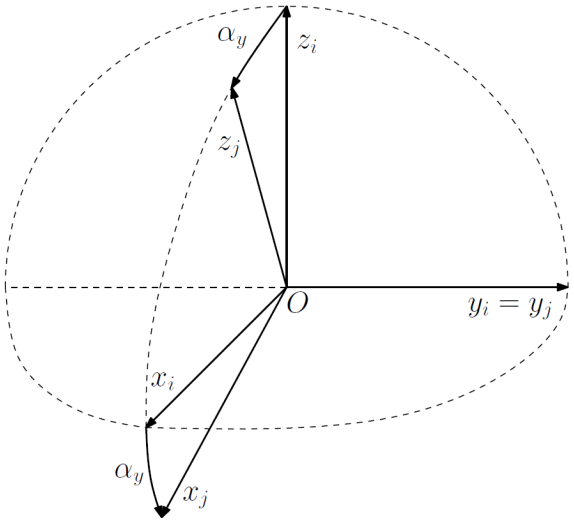
$$\mathbf{X^i} = \mathbb{T}_{\mathrm{ij}}\mathbf{X^j}. \tag{2.1.6}$$

Transformačná matica odvodená z obrázku (2.3) pre rotáciu okolo osi z_i o uhol α_z vyzerá nasledovne:

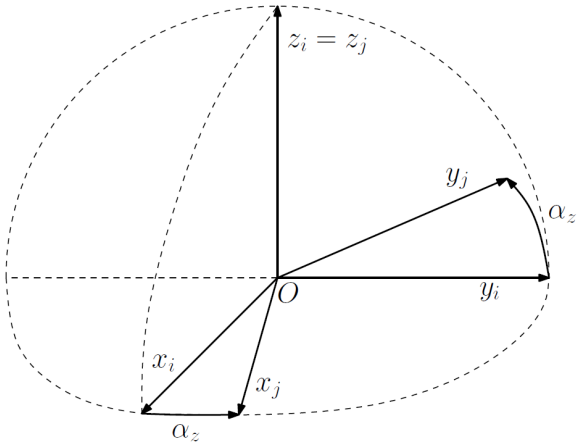
$$\mathbb{T}_{ij}(\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_z & sin\alpha_z & 0 \\ \sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.7}$$

kde

$$\mathbf{X^i} = \mathbb{T}_{\mathrm{ij}}\mathbf{X^j}. \tag{2.1.8}$$



Obr. 2.2: Elementárne otočenie okolo osi y_i



Obr. 2.3: Elementárne otočenie okolo osi z_i

Vo všeobecnosti môžeme každú transformáciu medzi ortogonálnymi pravotočivými súradnicovými sústavami F_i a F_j vykonať jednoznačne pomocou troch postupných rotácií okolo jednotlivých príslušných osí x, y, z o uhly $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ okolo príslušných troch osí. Výsledná transformačná matica $\mathbb{T}_{ij}$ pre transformáciu súradnicovej sústavy F_i do súradnicovej sústavy F_j teda bude vyzerať nasledovne:

$$\mathbb{T}_{ij} = \mathbb{T}(\alpha_x)\mathbb{T}(\alpha_y)\mathbb{T}(\alpha_z). \tag{2.1.9}$$

Ak chcem vykonať inverznú transformáciu pomocou transformačnej matice $\mathbb{T}_{ij}^{-1}$ zo sústavy F_j do sústavy F_i, tak pre ňu platí:

$$\mathbb{T}_{ij}^{-1} = \mathbb{T}(\alpha_z)^T\mathbb{T}(\alpha_y)^T\mathbb{T}(\alpha_x)^T = [\mathbb{T}(\alpha_x)\mathbb{T}(\alpha_y)\mathbb{T}(\alpha_z)]^T, \tag{2.1.10}$$

z čoho vyplýva:

$$\mathbb{T}_{ij}^{-1} = \mathbb{T}_{ij}^T. \tag{2.1.11}$$

Postupnosť viacerých rotácií tvorí teda znovu nejakú všeobecnú rotáciu.

2.2. Reprezentácia pomocou Eulerových uhlov

2.2.1. Eulerove uhly

Predstavme si, že máme zemskú súradnicovú sústavu F_e a súradnicovú sústavu tela lietadla F_b a chceme vykonat transformáciu z F_e do F_b. Aby sme toto dosiahli musíme vykonať postupne 3 transformácie okolo jednotlivých osí o nasledujúce uhly:

1. uhol ψ nazývaný aj uhol vybočenia *(yaw),* ktorý otáča okolo osi z_e do pomocnej súradnicovej sústavy F_c,

2. uhol θ nazývaný aj uhol pozdĺžneho sklonu *(pitch),* ktorý otáča okolo osi y_c do pomocnej súradnicovej sústavy F_f,

3. uhol ϕ nazývaný aj priečny náklon *(roll),* ktorý otáča okolo osi x_f do novej súradnicovej sústavy tela lietadla F_b.

Tieto uhly súhrnne nazývame Eulerovými uhlami. Je dôležité si uvedomiť, že zámenou poradia elementárnych rotácií okolo jednotlivých osí, získavame úplne nové otočenie. Elementárne rotácie teda nie sú komutatívne. Znamená to, že pre rôzne postupnosti elementárncyh rotácií získavame rôzne transformačné matice. Pretože štandardne je v praxi používané otočenie najprv okolo osi z, potom okolo osy y a nakoniec okolo osi z (označíme ho zyx), tak si ho teraz bližšie popíšeme a odvodíme preň transformačnú maticu.

Našim cieľom je transformovať ľubovoľný vektor $\mathbf{X}$ zo zemskej súradnicovej sústavy F_e do súradnicovej sústavy tela lietadla F_b. Ako prvú vykonávame rotáciu o uhol vybočenia ψ, ktorý nám F_e transformuje po otočení okolo osi z_e na pomocnú súradnicovú sústavu F_c. Tejto elementárnej rotácii prislúcha matica $\mathbb{T}_{ec}$ pomocou ktorej transformujeme vektor X^e na X^c. Ďalšia rotácia sa vykoná okolo osi y_c o uhol θ. Takto transformujeme F_c na ďalšiu pomocnú súradnicovú sústavu F_f. Vektor $\mathbf{X^c}$ vyjadríme pomocou transformačnej matice $\mathbb{T}_{cf}$ ako vektor $\mathbf{X^f}$. Poslednú rotáciu chrakterizuje uhol ϕ, ktorý otočí súradniovú sústavu F_f do finálnej súradnicovej sústavy F_b okolo osi x_f, čiže transformačná matica $\mathbb{T}_{fb}$ prevedie vektor $\mathbf{X^f}$ na výsledený vektor $\mathbf{X^b}$. To čo sme slovne popísali, vyjadríme rovnicami:

$$\mathbf{X^e} = \mathbb{T}_{\mathrm{ec}}\mathbf{X^c} \tag{2.2.1}$$

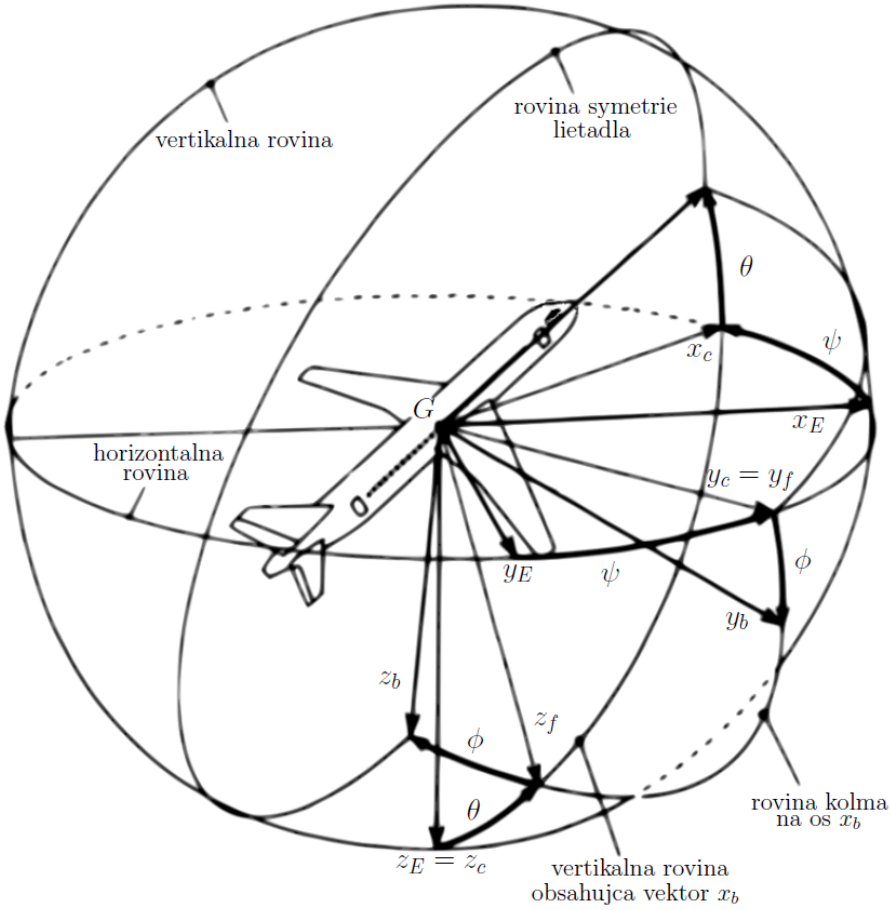
$$\mathbb{T}_{ec} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{X^c} = \mathbb{T}_{\mathrm{cf}}\mathbf{X^f} \tag{2.2.3}$$

$$\mathbb{T}_{cf} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

$$\mathbf{X^f} = \mathbb{T}_{\mathrm{fb}}\mathbf{X^b} \tag{2.2.5}$$

$$\mathbb{T}_{fb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{2.2.6}$$



Obr. 2.4: Znázornenie Eulerových uhlov

Postupným vynásobením týchto transformačných matíc získame transformačnú maticu $\mathbb{T}_{eb}$, ktorá transformuje vektor $\mathbf{X}^e$ zo sústavy F_e na vektor $\mathbf{X}^b$ zo súradnicovej sústavy F_b

$$\mathbf{X^e} = \mathbb{T}_{\mathrm{eb}}\mathbf{X^b}, \tag{2.2.7}$$

pričom

$$\mathbb{T}_{eb} = \mathbb{T}_{ec}\mathbb{T}_{cf}\mathbb{T}_{fb} \tag{2.2.8}$$

$$\mathbb{T}_{eb} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.2.9}$$

Keď z matice $\mathbb{T}_{eb}$ vytvoríme inverznú maticu $\mathbb{T}^T_{eb}$, ktorá sa rovná transponovanej matici $\mathbb{T}^T_{eb}$ získame maticu $\mathbb{T}_{be}$, ktorá nám určí opačnú transformáciu vektoru $\mathbf{X^b}$ zo sústavy F_b na vektor $\mathbf{X^e}$ zo sústavy F_e. Platí teda:

$$\mathbb{T}^{-1}_{Eb} = \mathbb{T}^T_{Eb} = \mathbb{T}_{bE}. \tag{2.2.10}$$

Ako sme už uviedli, vyššie uvedená transformácia zyx je najčastejšie používaná, ale samozrejme existuje viac možností riešenia. Presnejšie povedané, je možné vytvoriť celkovo 12 rôznych postupností rotácií. Sú možné nasledujúce permutácie poradia rotácií: $xyz, xzy, xyx, xzx, yxz, yzx, yxy, yzy, zxy, zyx, zxz, zyz$. Postupnosť rotácií typu xxy nereprezentuje rotáciu okolo troch osí, pretože sa dá zredukovať na rotáciu okolo dvoch osí xy.

Veľká výhoda použitia Eulerových uhlov spočíva v ich názornosti. Často je teda žiaduce previesť iné reprezentácie na Eulerove uhly. Preto je dôležité vedieť tieto uhly odvodiť z transformačnej matice. Predstavme si, že by sme mali určenú rotáciu súradnicovej sústavy tranformačnou maticou $\mathbb{T}_{eb}$. Označme c_{ij}, $i,j = 1,2,3$ prvky z transformačnej matice. Jednotlivé Eulerove uhly získame potom nasledovne:

$$\psi = \arctan\frac{c_{21}}{c_{11}} \tag{2.2.11}$$

$$\theta = -\arcsin c_{13} \tag{2.2.12}$$

$$\phi = \arctan\frac{c_{32}}{c_{33}}. \tag{2.2.13}$$

Problém môže nastať, keď $c_{11} = 0$ alebo $c_{33} = 0$. Vtedy reprezentáciu Eulerovými uhlami nemôžeme použiť a nazveme ju singulárnou. Tento prípad nastáva napr. pri $\theta = \pm 90\,^\circ$. Potom $c_{11} = c_{21} = c_{32} = c_{33} = 0$ a uhly ψ a ϕ nie je možné určiť. S týmto problémom sa pre bežné lietadlá nestretávame, do úvahy ale prichádza napr. pre stíhačky, rakety a riadené strely. Čiastočným riešením je použitie iného poradia Eulerových uhlov (napr. xyx), singularity by ale nastali v inom smere. Ďalším problémom je aj nejednoznačnosť Eulerových uhlov. Napr. $\arctan 1 = 45\,^\circ$ ale aj $-135\,^\circ$. V niektorých prípadoch je teda výhodné nahradiť trojparametrovú Eulerovu reprezentáciu všeobecnejšou reprezentáciou.

2.2.2. Aerodynamický uhol nábehu a uhol sklzu

V tejto kapitole teraz podrobnejšie popíšeme transformáciu súradnicovej sústavy tela lietadla F_b do aerodynamickej súradnicovej sústavy F_a. V skutočnosti nás zaujíma transformácia všeobecného vektoru $\mathbf{X^b}$ z F_b na vektor osi $\mathbf{X^a} = \mathbf{x}_a$ z F_a, na ktorom leží vektor aerodynamickej rýchlosti $\mathbf{V}_a$. To je rýchlosť, ktorá určuje vonkajšie aerodynamické pôsobenie. Tentoraz vykonáme rotáciu iba 2 razy a využijeme tieto dva uhly:

1. uhol $-\alpha_a$ nazývaný aerodynamický uhol nábehu, ktorý otáča sústavu F_b okolo osi y_b na pomocnú sústavu F_i
2. uhol β_a nazývaný uhol sklzu, ktorý otáča pomocnú sústavu F_i okolo z_i do aerodynamickej sústavy F_a.

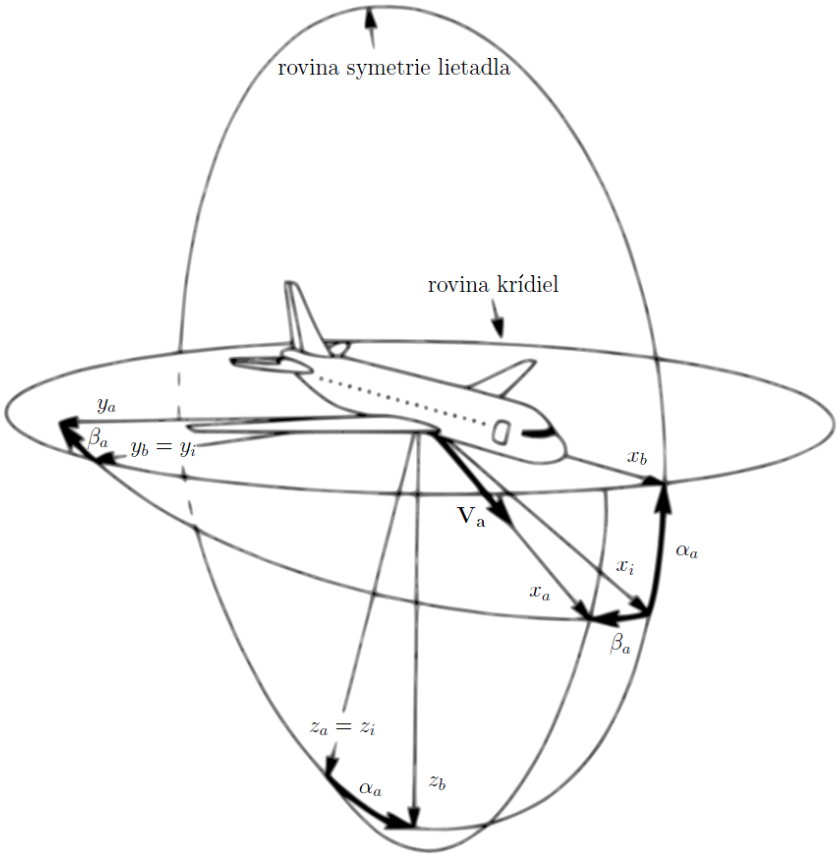
Kvôli jednoznačnosti je potrebné ešte urobiť znamienkovú dohodu. Uhol α_a bude kladný, keď sa pilot nachádza nad vektorom aerodynamickej rýchlosti a uhol β_a je kladný, keď vietor fúka na pravé líce pilota. Podľa obrázka (2.5) odvodíme teraz transformačnú maticu $\mathbb{T}_{ba}$:

$$\mathbf{X}^b = \mathbb{T}_{ba}\mathbf{X}^a = \mathbb{T}_{-\alpha_a}\mathbb{T}_{\beta_a}\mathbf{X}^a, \tag{2.2.14}$$

kde

$$\mathbb{T}_{\beta_a} = \begin{pmatrix} \cos\beta_a & -\sin\beta_a & 0 \\ \sin\beta_a & \cos\beta_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.15}$$

$$\mathbb{T}_{-\alpha_a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_a & 0 & -\sin\alpha_a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_a & 0 & \cos\alpha_a \end{pmatrix} \tag{2.2.16}$$



Obr. 2.5: Znázornenie uhlov α_a, β_a

a teda

$$\mathbb{T}_{ba} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_a \cos\beta_a & -\sin\beta_a \cos\alpha_a & -\sin\alpha_a \\ \sin\beta_a & \cos\beta_a & 0 \\ \cos\beta_a \sin\alpha_a & -\sin\alpha_a \sin\beta_a & \cos\alpha_a \end{pmatrix}. \tag{2.2.17}$$

V praxi sa najčastejšie stretávame s úlohou, že je treba určiť uhly α_a a β_a pomocou známej aerodynamickej rýchlosti u_a^a. Ukážeme si teraz ako ich zistiť. Budeme vychádzať zo vzťahu $\mathbf{V}_a^b = \mathbb{T}_{ba}\mathbf{V}_a^a$. Aerodynamická rýchlosť v súradnicovej sústave lietadla má tri zložky a značíme ju $\mathbf{V}_a^b = (u_a^b, v_a^b, w_a^b)^T$. Aerodynamická rýchlosť v aerodynamickej súradnicovej sústave $\mathbf{V}_a^a$ má len jednu nenulovú zložku a označíme ju $\mathbf{V}_a^a = (u_a^a, 0, 0)^T$. Je teda zrejmé, že pre $u_a^a > 0$ platí:

$$u_a^a = \sqrt{(u_a^b)^2 + (v_a^b)^2 + (w_a^b)^2}. \tag{2.2.18}$$

Použitím $\mathbb{T}_{ba}$ získame

$$u_a^b = u_a^a \cos\alpha_a \cos\beta_a \tag{2.2.19}$$
$$v_a^b = u_a^a \sin\beta_a \tag{2.2.20}$$
$$w_a^b = u_a^a \sin\alpha_a \cos\beta_a. \tag{2.2.21}$$

Keď aplikujeme konvenciu $-\frac{\pi}{2} < \beta_a < \frac{\pi}{2}$, tak β_a môžeme z rovnice (2.2.20) vyjadriť nasledovne:

$$\beta_a = \arcsin\left(\frac{v_a^b}{u_a^a}\right) \tag{2.2.22}$$

a pomocou teraz už známeho uhlu β_a vieme vyjadriť uhol α_a:

$$\cos\alpha_a = \frac{u_a^b}{u_a^a \cos\beta_a} \tag{2.2.23}$$

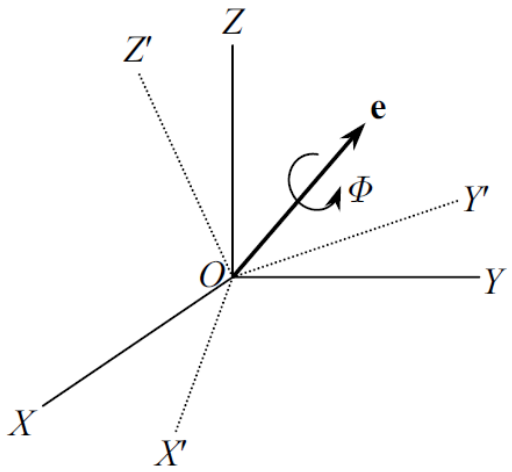
$$\sin\alpha_a = \frac{w_a^b}{u_a^a \cos\beta_a}. \tag{2.2.24}$$

Teda podľa konvencie $-\pi < \alpha_a < \pi$ a pre $u_a^b > 0$ dostávame z rovníc (2.2.23) a (2.2.24):

$$\alpha_a = \arctan\frac{w_a^b}{u_a^b}. \tag{2.2.25}$$

2.2.3. Eulerova os a hlavný uhol

Jednou z možností ako nahradiť repreznetáciu pomocou Eulerových uhlov je použiť práve reprezentáciu pomocou Eulerovej osi a hlavného uhla. Je štvorparametrická, čo nám zabezpečuje, že neobsahuje žiadne singularity ani nejednoznačnosť. Na základe Eulerovho teorému môžeme tvrdiť, že vzájomná poloha každých dvoch súradnicových sústav so spoločným počiatkom môže byť jednoznačne popísaná určením osi rotácie, ktorá prechádza spoločným počiatkom a uhlom Φ, o ktorý budeme súradnicovú sústavu otáčať. Os rotácie potom nazveme Eulerova os a uhol Φ budeme volať hlavný uhol. Eulerovu os vyjadríme pomocou lineárnej kombinácie troch ortonormálnych lineárnych vektorov nasledovne $\mathbf{e} = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$. Grafické znázornenie rotácie v kladnom smere pomocou tejto reprezentácii je na obrázku (2.6).



Obr. 2.6: Rotácia sústavy pomocou hlavného uhla ϕ a Eulerovej osi $\mathbf{e}$

Popíšeme teraz vzťah medzi transformačnou maticou a Eulerovou osou a hlavným uhlom. Nech $\mathbb{T}$ je transformačná matica, s prvkami c_{ij}, kde $i, j = 1, 2, 3$ prvky $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sú jej vlastné čísla a $\mathrm{tr}\,\mathbb{T}$ je stopa tejto matice, ktorá je určená ako $\mathrm{tr}\,\mathbb{T} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Potom môžeme vyjadriť parametre reprezentácie pomocou Eulerovej osi a hlavného uhlu takto:

$$\Phi = \arccos\left(\frac{1}{2}(\operatorname{tr} C - 1)\right) \tag{2.2.26}$$

$$e_1 = \frac{c_{32} - c_{23}}{2\sin\Phi} \tag{2.2.27}$$

$$e_2 = \frac{c_{13} - c_{31}}{2\sin\Phi} \tag{2.2.28}$$

$$e_3 = \frac{c_{21} - c_{12}}{2\sin\Phi}. \tag{2.2.29}$$

Podrobné odvodenie predchádzajúcich vzťahov je možné nájsť v knihe [12].

2.3. Kvaterniónová reprezentácia

Pojem kvaternión zaviedol prvý krát v roku 1843 Willam Rowan Hamilton. Spočiatku tento objekt bol považovaný za nevhodný a umelo vykonštruovaný, hlavne kvôli tomu, že nespĺňal komutatívny zákon. Časom si však našiel uplatnenie v teoretickej fyzike a v aplikovanej matematike. Jedno jeho využite teraz bližšie rozvedieme. Najprv si však priblížime čo to kvaternión je.

Kvaternión vzniká ako nekomutatívne rozšírenie komplexných čísel. Kým komplexné čísla vzniknú z reálnych pridaním prvku i, ktorý splňuje $i^2 = -1$, kvaternión vznikne pridaním prvkov i, j, k, za splnenia nasledujúcich vzťahov:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{2.3.1}$$

Každý kvaternión je lineárnou kombináciou prvkov $1, i, j, k$, to znamená, že ho môžeme písať v tvare $Q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$, kde q_1, q_2, q_3, q_4 sú reálne čísla. Kvaternión môžeme chápať aj ako usporiadanú dvojicu $(q_1, \mathbf{q})$, kde $\mathbf{q} = (q_2, q_3, q_4)$ je vektor v trojrozmernom priestore $\mathbb{R}^3$ a q_1 je skalár. Množinu všetkých kvaterniónov označujeme písmenom $\mathbb{H}$.

2.3.1. Vyjadrenie kvaterniónov pomocou hlavného uhla rotácie a Eulerovej osi

Kvaternióny majú tiež tú vlastnosť, že môžu vyjadrovať rotácie súradnicových sústav. Môžme ich určiť priamo z reprezentácie pomocou Eulerovej osi a hlavného uhla. Znamená to tiež, že kvaternióny budú mať znovu 4 nezávislé parametre, teda je to reprezentácia jednoznačná a nesingulárna.

Predstavme si teraz, že vektor $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ určuje Eulerovu os a uhol Φ je hlavným uhlom. Pomocou týchto parametrov kvaternióny určíme nasledovne:

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos\frac{\Phi}{2} \\ q_2 &= e_1 \sin\frac{\Phi}{2} \\ q_3 &= e_2 \sin\frac{\Phi}{2} \\ q_4 &= e_3 \sin\frac{\Phi}{2}. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Všimnime si, že podľa rovníc (2.3.2) môžeme dokázať, že platí

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1. \tag{2.3.3}$$

Vo všeobecnosti kvaternióny predstavujú veľmi dobrú a v praxi veľmi často využívanú reprezentáciu pre transformáciu súradnicových sústav. Výhoda voči Eulerovým uhlom leží hlavne v štyroch nezávislých parametroch, ktoré znamenajú jednoznačnosť a nesingularitu. Ukážeme si aj, že ich výpočet z transformačnej matice je jednoduchší ako v prípade reprezentácie pomocou Eulerovej osi a hlavného uhlu. Urýchlenie spočíva najmä v tom, že nie je potrebné rátať s goniometrickými fukciami.

2.3.2. Rotačná matica

Rotačnú maticu $\mathbb{T}$, vyjadrenú pomocou kvaterniónov, získame použitím vzťahov uvedených v rovniciach (2.3.2) a použitím tzv. Eulerovej formuli $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Táto rotačná matica $\mathbb{T}$ má potom tvar:

$$\mathbb{T} = (q_1^2 - \mathbf{q}^T\mathbf{q})I_k + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_1 S(\mathbf{q}), \tag{2.3.4}$$

kde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $(\mathbf{q}, q_4)$ tvorí kvaternión, I_k je jednotková matica rádu 3 a $S(\mathbf{q})$ je antisymetrická matica pre ktorú platí:

$$S(\mathbf{q})S(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{q}^T - \mathbf{q}^T\mathbf{q})I_k \tag{2.3.5}$$

Rotačnú maticu $\mathbb{T}$ môžeme potom napísať v tvare využívajúcom len zložky kvaterniónu:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 - q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}. \tag{2.3.6}$$

Často je situácia taká, že poznáme rotačnú maticu $\mathbb{T}$ vyjadrenú napr. pomocou Eulerových uhlov a potrebujeme z nej vypočítať kvaternión. Jednotlivé zložky kvaterniónu z tejto rotačnej matice s prvlami c_{ij}, kde $i, j = 1, 2, 3$ spočítame takto:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_1} \\ q_3 &= \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_1} \\ q_4 &= \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_1}, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

kde

$$q_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}}$$

Na voľbe znamienka pre q_1 nezáleží. Či zvolíme + alebo -, získavame rovankú transformáciu. Rovnako tomu bolo aj pri vyjadrení pomocou Eulerovej osi $\mathbf{e}$ a hlavného uhla Φ, pretože rotácia o uhol Φ okolo vektoru $\mathbf{e}$ je rovnaká ako rotácia o uhol $-\Phi$ okolo vektoru $-\mathbf{e}$.

Samozrejme, že vyššie uvedené vzťahy majú zmysel len pre hodnotu $q_4 \neq 0$. Preto ak hodnota q_4 vyjde blízka k 0, je lepšie využiť niektoré z alternatívnych vyjdarení. Napríklad:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_2} \\ q_3 &= \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_2} \\ q_4 &= \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_2}, \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

kde

$$q_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}}$$

alebo

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_3} \\ q_2 &= \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_3} \\ q_4 &= \frac{c_{23} + c_{32}}{4q_3}, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

kde

$$q_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - c_{11} + c_{22} - c_{33}}.$$

alebo

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_4} \\ q_2 &= \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_4} \\ q_3 &= \frac{c_{23} + c_{32}}{4q_4}, \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

kde

$$q_4 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - c_{11} - c_{22} + c_{33}}.$$

Všeobecne platí, že najlepšiu numerickú presnosť získame pomocou toho vyjadrenia, ktoré má pod odmocninou najväčšiu hodnotu, takže si spočítame v jednotlivých vyjadreniach q_4, q_3, q_2 a q_1 a použijeme to, pre ktoré vyšla hodnota pod odmocninou najväčšia. Podrobnejšie odvodenie vyššie uvedených vzťahov je možné nájsť v knihe [7].

2.3.3. Vzťah medzi Eulerovymi uhlami a kvaterniónmi

Rotačnú maticu $\mathbb{T}$ teda už vieme vyjadriť medziiným pomocou kvaterniónov, ale aj pomocou Eulerových uhlov. Pre každú nesingulárnu rotáciu teda platí, že ku každej trojici Eulerových uhlov (ψ, θ, ϕ) vieme nájsť kvaternión (q_1, q_2, q_3, q_4). Môžeme teda písať:

$$\mathbb{T}(\phi, \theta, \psi) = \mathbb{T}(q_1, q_2, q_3, q_4). \tag{2.3.11}$$

Na základe rovnosti každého elementu týchto dvoch matíc, by sme získali 9 rovníc. Po použití goniometrických vzťahov pre polovičný argument môžeme vyjadriť všetky 4 zložky kvaterniónu pomocou Eulerových uhlov:

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ q_2 &= -\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ q_3 &= \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ q_4 &= \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

a naopak Eulerove uhly pomocou kvaterniónov

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan\frac{2(q_1q_2 + q_3q_4)}{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \\ \theta &= -\arcsin 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ \psi &= \arctan\frac{2(q_1q_4 + q_2q_3)}{q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Vyššie uvedené vzťahy je možné bližšie preskúmať v [5].

3. Pohybové rovnice s 6 a 3 stupňami voľnosti

3.1. Vyjadrenie uhlovej rýchlosti

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali ako je možné transformovať vektor zo súradnicovej sústavy tela lietadla F_b do zemskej súradnicovej sústavy F_e a naopak. V praxi sa väčšinou stretávame s tým, že let je charakterizovaný fyzikálnymi veličinami udanými práve v súradnicovej sústave tela lietadla F_b. Je preto potrebné ešte určiť v akom vzťahu sú fyzikálne veličiny voči zemskej súradnicovej sústave F_e. Úplne postačí, keď túto závislosť popíšeme len pre jednu fyzikálnu veličinu. Najčastejšie sa vyberá uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$. Túto závislosť uvedieme pre dve reprezentácie - pre Eulerove uhly a kvaternióny.

3.1.1. Vyjadrenie pomocou Eulerových uhlov

Našou úlohou je vyjadriť zložky uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ pomocou Eulerových uhlov ψ, θ, ϕ. V každej súrdnicovej sústave si definujeme bázové ortonormálne vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, kde spodným indexom vyjadríme príslušnosť k danej súradnicovej sústave. Vieme, že uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ môžme v súradnicovej sústave tela lietadla F_b vyjadriť pomocou zložiek $p, q, r \in \mathbb{R}$ nasledovne:

$$\boldsymbol{\omega} = p\,\mathbf{i_b} + q\,\mathbf{j_b} + r\,\mathbf{k_b}. \tag{3.1.1}$$

Označme teraz derivácie Eulerových uhlov podľa času $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$. Tieto derivácie predstavujú uhlové rýchlosti otočení medzi súradnicovými sústavami F_e, F_c, F_f, F_b. Celkovú uhlovú rýchlosť je teda možné zapísať aj nasledovným spôsobom:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{i_f} + \dot{\theta}\mathbf{j_c} + \dot{\psi}\mathbf{k_o} = \dot{\phi}\mathbf{i_b} + \dot{\theta}\mathbf{j_f} + \dot{\psi}\mathbf{k_c}. \tag{3.1.2}$$

Vyjadríme teraz ortnormálne vektory $\mathbf{i_b}, \mathbf{j_f}, \mathbf{k_c}$ z rôznych súradnicových sústav pomocou ortonormálnych vektorov $\mathbf{i_b}, \mathbf{j_b}, \mathbf{k_b}$ súradnicovej sustavy tela lietadla F_b. Využijeme na to transformačné matice (2.2.6), (2.2.4) a (2.2.2). Dostávame teda:

$$\begin{aligned} \mathbf{j_f} &= \cos\phi\,\mathbf{j_b} - \sin\phi\,\mathbf{k_b} \\ \mathbf{k_c} &= -\sin\theta\,\mathbf{i_f} + \cos\theta\,\mathbf{k_f} = -\sin\theta\,\mathbf{i_b} + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j_b} + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{k_b}. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Po dosadení vzťahov (3.1.3) do rovnice (3.1.2) pre uhlovú rýchosť vyplýva:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{i_b} + \dot{\theta}(\cos\phi\,\mathbf{j_b} - \sin\phi\,\mathbf{k_b}) + \dot{\psi}(-\sin\theta\,\mathbf{i_b} + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j_b} + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{k_b}). \tag{3.1.4}$$

Zameníme poradie členov a vytkneme $\mathbf{i_b}, \mathbf{j_b}, \mathbf{k_b}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i_b}(\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta) + \mathbf{j_b}(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta) + \mathbf{k_b}(\dot{\psi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi). \tag{3.1.5}$$

Z rovníc (3.1.1) a (3.1.5) potom vyplýva, že zložky uhlovej rýchlosti p, q, r a Eulerove uhly ψ, θ, ϕ sú v nasledujúcom vzťahu:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ q &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta \\ r &= \dot{\psi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Potom pre zápis v maticovom tvare platí:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \tag{3.1.7}$$

Ak chceme vyjadriť $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$, predchádzajúci vzťah vynásobíme inverznou maticou zľava a platí:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \tag{3.1.8}$$

Po vyjadrení inverznej matice a roznásobení dostávame pre derivácie Eulerových uhlov:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q\sin\phi\tan\theta + r\cos\phi\tan\theta \\ \dot{\theta} &= q\cos\phi - r\sin\phi \\ \dot{\psi} &= \frac{q\sin\phi + q\cos\phi}{\cos\theta}. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

3.1.2. Vyjadrenie pomocou kvaterniónov

Teraz ukážeme ako vyjadriť uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ pomocou kvaterniónu (q_1, q_2, q_3, q_4). Definujeme tým jednoznačný vzťah medzi sústavou tela lietadla F_b, v ktorej je zadaná uhlová rýchlosť a referenčnou zemskou súradnicovou sústavou F_e.

Ešte predtým, ale odvodíme vzťah pre súčin kvaterniónov. Ako už bolo skôr uvedené, každý kvaternión je lineárnou kombináciou prvkov $1, i, j, k$, čo znamená, že ho možno vyjadriť v tvare $a + bi + cj + dk$ kde a, b, c a d jsou reálná čísla a imaginárne jednotky sú navzájom v týchto vzťahoch:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Nech sú dané dva kvaternióny $P = a + ib + jc + kd$ a $R = e + if + jg + kh$, kde a, b, c, d, e, f, g, h sú reálne konštanty a i, j, k sú imaginárne zložky. Potom pre súčin kvaterniónov P a R dostávame $P \cdot R = (a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d)(e + \mathbf{i}f + \mathbf{j}g + \mathbf{k}h) = ea - bf - cg - dh + (af + be + ch - dg)\mathbf{i} + (ag + ce - bh + df)\mathbf{j} + (ah + de + bg - cf)\mathbf{k}$. Alebo zapísané maticovo:

$$P \cdot R = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}. \tag{3.1.11}$$

Prejdime teraz k samotnému vyjadreniu uhlovej rýchlosti pomocou kvaterniónov. Predstavme si, že Q je kvaternión, ktorý zapíšeme v štvrozložkovom tvare $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$. Potom vo všebecnosti je možné zapísať časovú deriváciu kvaterniónu $\dot{Q}$ nasledujúcim vzťahom:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q\boldsymbol{\omega}, \tag{3.1.12}$$

ktorého odvodeniu sa venuje napríklad kniha [13]. Ak uhlovú rýchlosť zapíšeme vo forme kvateniónu $\boldsymbol{\omega} = (0, p, q, r)$ a dosadíme ju do vzťahu (3.1.11) a následne použijeme maticový zápis, tak dostaneme rovnicu:

$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{q_4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \tag{3.1.13}$$

Po zapísaní do zložiek píšeme:

$$\begin{aligned} \dot{q_1} &= -\frac{1}{2}(q_2 p + q_3 q + q_4 r) \\ \dot{q_2} &= \frac{1}{2}(q_1 p - q_4 q + q_3 r) \\ \dot{q_3} &= \frac{1}{2}(q_4 p + q_1 q - q_2 r) \\ \dot{q_4} &= -\frac{1}{2}(q_3 p - q_2 q - q_1 r). \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Pre vyjadrenie uhlovej rýchlosti pomocou kvaterniónov, vynásobíme vzťah (3.1.13) zľava inverznou maticou a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{q_4} \end{pmatrix}. \tag{3.1.15}$$

Po výpočte tejto inverznej matice môžeme uhlovú rýchlosť zapísať po zložkách:

$$\begin{aligned} p &= 2(\dot{q_1} q_4 + \dot{q_2} q_3 - \dot{q_3} q_2 - \dot{q_4} q_1) \\ q &= 2(\dot{q_3} q_4 + \dot{q_3} q_1 - \dot{q_4} q_3 - \dot{q_4} q_2) \\ r &= 2(\dot{q_4} q_4 + \dot{q_1} q_2 - \dot{q_2} q_1 - \dot{q_4} q_3) \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

$$0 = 2(\dot{q_1} q_1 + \dot{q_2} q_2 - \dot{q_3} q_3 - \dot{q_4} q_4). \tag{3.1.17}$$

3.2. Pohybové rovnice pre 6 stupňov voľnosti

Ako prvý sa o vyjadrenie pohybových rovníc pre tuhé symetrické lietadlo pokúsil už v roku 1911 George Hartley Bryan. Jeho prístup, len s malými zmenami, sa používa dodnes. Vychádza z využitia 2. Newtonovho zákona sily. Ten vraví, že výsledná sila $\mathbf{F_{xyz}}$ pôsobiaca na teleso je rovná súčinu zrýchlenia telesa $\mathbf{a}$ a hmotnosti telesa m, teda

$$\mathbf{F_{xyz}} = m.\mathbf{a}. \tag{3.2.1}$$

Pre 3 otáčavé stupne voľnosti hmotnosť m a zrýchlenie $\mathbf{a}$ prechádzajú na moment zotrvačnosti I a uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\omega}$. Výslednú silu $\mathbf{F_{xyz}}$ nahradí výsledný moment sily $\mathbf{M_{xyz}}$. Keďže pohybové rovnice boli už veľakrát odvodené, nebudeme sa tým zaoberať a

priamo ich uvedieme. Kompletné odvodenie možno nájsť napríklad v prameňoch [3], [6], [9] alebo v bakalárskej práci [11].

Aby sme rovniciam mohli porozumieť, uveďme si najprv význam jednotlivých fyzikálnych veličín. Uvažujme pohybujúce sa telo lietadla a súradnicovú sústavu tela lietadla F_b s počiatkom v bode G, ktorý je zároveň totožný s ťažiskom lietadla. Lietadlo pokladáme za tuhé teleso, ktoré je symetrické podľa roviny, ktorú vytvárajú osi x_b a z_b. Navyše predpokladáme, že hmotnosť je rovnomerne rozdelená v celom tele lietadla. V ťažisku v bode G teda budú na lietadlo pôsobiť:

- celková sila $\mathbf{F_{xyz}}$, ktorú rozložíme do zložiek F_x, F_y, F_z v smere jednotlivých osí x_b, y_b a z_b
- celkový moment sily $\mathbf{M_{xyz}}$, ktorý rozložíme do zložiek L, M, N ktoré otáčajú okolo osí x_b, y_b a z_b
- rýchlosť $\mathbf{V_b}$, ktorej pôsobenie v smere jednotlivých osí x_b, y_b, z_b popisujú zložky u_b, v_b, w_b
- uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$, ktorej pôsobenie okolo osí x_b, y_b, z_b popisujú zložky p, q, r.

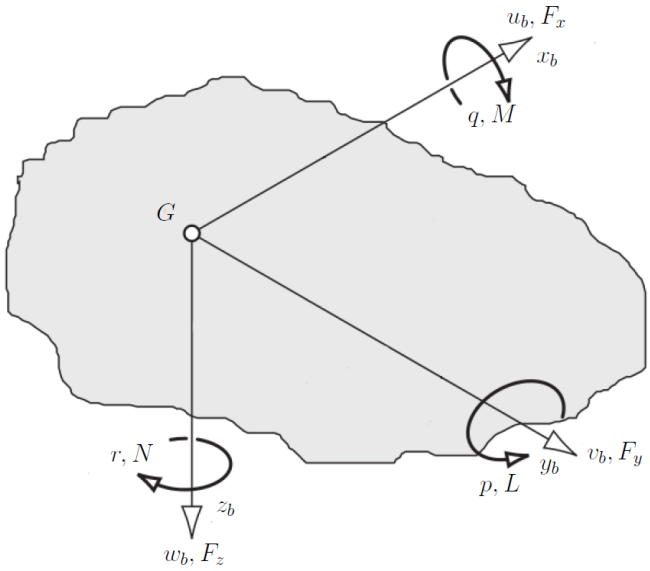
V momentových rovniciach sa vyskytnú aj momenty zotrvačnsoti a deviačné momenty. Za našich podmienok, ich môžeme určiť nasledovným spôsobom:

- moment zotrvačnosti k osi x_b: $I_x = m(y_b^2 + z_b^2)$
- moment zotrvačnosti k osi y_b: $I_y = m(x_b^2 + z_b^2)$
- moment zotrvačnosti k osi z_b: $I_z = m(x_b^2 + y_b^2)$
- deviačný moment k rovine $x_b y_b$: $I_{xy} = I_{yx} = m x_b y_b$
- deviačný moment k rovine $x_b z_b$: $I_{xz} = I_{zx} = m x_b z_b$
- deviačný moment k rovine $y_b z_b$: $I_{yz} = I_{zy} = m y_b z_b$.

Uvedieme teraz zovšeobecnené pohybové rovnice pre 6 stupňov voľnosti. Nech $\dot{u_b}, \dot{v_b}, \dot{w_b}$ predstavujú zrýchlenie posdĺž osí x_b, y_b, z_b tj. časové derivácie rýchlostí u_b, v_b, w_b. Potom nech $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ predstavujú uhlové zrýchlenie okolo osí x_b, y_b, z_b tj. časové derivácie uhlových rýchlostí p, q, r. Potom pohybové rovnice pre 6 stupňov voľnosti majú tvar:

$$\begin{aligned}
m(\dot{u_b} - rv_b + qw_b) &= F_{xa} + F_{xg} + F_{xc} + F_{xp} + F_{xd} \\
m(\dot{v_b} - pw_b + ru_b) &= F_{ya} + F_{yg} + F_{yc} + F_{yp} + F_{yd} \\
m(\dot{w_b} - qu_b + pv_b) &= F_{za} + F_{zg} + F_{zc} + F_{zp} + F_{zd} \\
I_x\dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) &= L_a + L_g + L_c + L_p + L_d \\
I_y\dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(p^2 - r^2) &= M_a + M_g + M_c + M_p + M_d \\
I_z\dot{r} - (I_x - I_y)pq + I_{xz}(qr - \dot{p}) &= N_a + N_g + N_c + N_p + N_d.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Na pravej strane sú podrobnejšie rozpísané jednotlivé sily a momenty, ktoré pôsobia na lietadlo. Sily s indexom a predstavujú aerodynamickú silu, sily s indexom g gravitačnú silu, sily s indexom c sú sily, spôsobené riadiacimi prvkami, sily s indexom p popisujú



Obr. 3.1: Znázornenie fyzikálnych veličín pôsobiacich na ťažisko lietadla

ťažné sily a nakoniec sily s indexom d sú sily spôsobené zmenami v atmosfére. Analogicky to tiež platí pre rozpis zložiek momentu $\mathbf{M_{xyz}} = (L, M, N)$.

Ak by sme zrušili podmienku symetrie lietadla podľa roviny určenou osami x_b a z_b a hmotnosť by mohla byť rozdelená v lietadle nerovnomerne, tak poseldné tri rovnice zo vzťahu (3.2.2) sa nám skomplikujú na nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} I_x\dot{p} - (I_y - I_z)qr + I_{xy}(pr - \dot{q}) - I_{xz}(pq + \dot{r}) + I_{yz}(r^2 - q^2) &= L \\ I_y\dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{yz}(pq - \dot{r}) + I_{xz}(p^2 - r^2) - I_{xy}(qr + \dot{p}) &= M \\ I_z\dot{r} - (I_x - I_y)pq + I_{yz}(pr + \dot{q}) + I_{xz}(qr - \dot{p}) + I_{xy}(q^2 + p^2) &= N. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Rovnice (3.2.2) predstavujú sústavu šiestich rovníc so šiestimi neznámymi u_b, v_b, w_b, p, q, r. Navyše však je potrebné určiť, ešte vzťah medzi súradnicovou sústavou tela lietadla F_b a zemskou súradnicovou sústavou F_e. Toto je možné vykonať pomocou viacerých reprezentácií. My sme sa v predchádzajúcich kapitolách venovali najmä dvom a to Eulerovym uhlom a kvaterniónom.

Ak sa rozhodneme použiť reprezentáciu pomocou Eulerových uhlov, tak ku vyššie uvedeným šiestim rovniciam pridáme ešte tri, ktoré dávajú do vzťahu uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ a Eulerove uhly (ψ, θ, ϕ):

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ q &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Ak použijeme kvaternióny, tak vzťah medzi uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ a kvaterniónom $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ vyjadrujú nasledujúce rovnice:

$$\begin{aligned} p &= 2(\dot{q}_1 q_4 + \dot{q}_2 q_3 - \dot{q}_3 q_2 - \dot{q}_4 q_1) \\ q &= 2(\dot{q}_3 q_4 + \dot{q}_3 q_1 - \dot{q}_1 q_3 - \dot{q}_4 q_2) \\ r &= 2(\dot{q}_4 q_4 + \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_4 q_3). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

V praxi sa často stretávame s tým, že aj keď využijeme reprezentáciu pomocou kvaterniónov kvôli zrýchleniu výpočtu, tak následne ich prepočítame na Eulerove uhly, kvôli lepšej predstave o polohe lietadla.

Uvedené rovnice sú teraz v nelineárnom tvare. Riešiť ich analytickým spôsobom je všeobecne veľmi nepraktické. Preto sa často linearizujú, tým sa umožní bezproblémové analytické riešenie, ktoré sa používa pre rovnomerný let, bez väčších vychýlení. My však zostaneme u nelineárneho tvaru a rovnice sa pokúsime riešiť pomocou numerických metód.

3.3. Pohybové rovnice pre 3 stupne voľnosti

Je možné ich zjednodušením odvodiť z pohybových rovníc pre 6 stupňov voľnosti. Uvedomme si hlavne, že prechádzame z trojdimenzionálneho priestoru do dvojdimenzionálneho. To znamená, že bude potrebné si zadefinovať niektoré súradnicové sústavy v rovine. Použijeme zemskú súradnicovu sústavu nesenú lietadlom $F_e^*(O, x_E, z_E)$, ktorá je definovaná rovnako ako F_e, ale vynechali sme súradnicu v smere osi y_e. Rovnakým spôsobom určíme súradnicovú sústavu tela lietadla $F_b^*(G, x_b, z_b)$.

Takisto všetky použité fyzikálne veličiny použité pri šiestich stupňoch voľnosti prevedieme do dvojdimenzionálneho priestoru. Pri celkovej sile a rýchlosti pôsobiacej na lietadlo vynecháme strednú zložku. Teda $\mathbf{F}^*_{\mathbf{xz}} = (F_x, F_z)$ a $\mathbf{V}^*_{\mathbf{b}} = (u_b, w_b)$. Pre moment ostáva už len jeden stupeň voľnosti, ktorý otáča okolo pomyselnej osi y. Celkový moment sily bude teda označený M a uhlová rýchlosť q.

Ak teraz v rovniciach pre 6 stupňov voľnosti (3.2.2) vynulujeme tie zložky, ktoré sme vynechali pri prevode do 2D priestoru získame pohybové rovnice pre 3 stupne voľnosti. Dve rovnice budú rovnice sily a jedna momentová:

$$\begin{aligned} m(\dot{u}_b + q w_b) &= F_x \\ m(\dot{w}_b - q u_b) &= F_z \\ I_y \dot{q} &= M. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Transformovať súradnicovú sústavu F_e^* do F_b^* teraz zvládneme jediným otočením o uhol θ. Vyššie uvedené pohybové rovnice môžme teda doplniť ešte o jednu rovnicu. Tá určí vzťah uhlovej rýchlosti q ku referenčnej sústave F_E^* nasledovne:

$$\dot{\theta} = q. \tag{3.3.2}$$

Riešenie týchto diferenciálnych rovníc je v porovnaní s riešením rovníc (3.2.2) jednoduché a nie je problém ho vyjadriť analytickým spôsobom.

4. Numerické riešenie sústavy nelineárnych ODR

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc a teraz sa budeme zaoberať otázkou ako tieto rovnice vyriešiť. Tieto diferenciálne rovnice sú pomerne komplikovaného nelineárneho tvaru, takže táto úloha nie je analyticky riešiteľná. V tejto kapitole si ukážeme ako takéto rovnice riešiť pomocou numerických metód, venovať sa budeme najmä metódam Runge-Kutta, z ktorých podrobne popíšeme metódu Dormand-Prince.

4.1. Základné pojmy a princíp numerických metód

Numerické metódy nám pomáhajú nájsť riešenie úlohy vtedy, keď nie sme schopní nájsť analytické riešenie alebo ak by jeho nájdenie zabralo príliš mnoho času alebo ak je pre nás príliš komplikované.

My sa budeme zaoberať riešením počiatočného problému pre obyčajné diferenciálne rovnice rádu 1 (ODR1). Pripomeňme si najprv niekoľko základných pojmov.

Počiatočný problém pre ODR1 spočíva v určení funkcie $y(t)$, ktorá vyhovuje diferenciálnej rovnici:

$$y\prime(t) = f(t, y(t)) \tag{4.1.1}$$

a splňuje zároveň počiatočnú podmienku:

$$y(a) = \eta. \tag{4.1.2}$$

Ak je v nejakom okolí D bodu $[a, \eta]$ funkcia $f(t, y)$ spojitá a splňuje v tomto okolí Lipschitzovu podmienku s konštatntou L vzhľadom k premennej y, čo znamená, že ak platí:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v| \quad \forall [t, u], [t, v] \in D, \tag{4.1.3}$$

potom bodom $[a, \eta]$ prechádza jediné riešenie $y(t)$ rovnice (4.1.1). Ak má funkcia $f(t, y)$ v okolí D ohraničenú parciálnu deriváciu $|\partial_y f(t, y)| \leq L$, Lipschitzova podmienka (4.1.3) platí. Iný štandardný výsledok hovorí, že keď je funkcia $f(t, y)$ spojitá na $\langle a, b\rangle \times \mathbb{R}$ a splňuje tam Lipschitzovú podmienku, tak počiatočný problém (4.1.1), (4.1.2) má jediné riešenie definované v celom intervale $\langle a, b\rangle$.

Počiatočný problém pre sústave ODR1 znamená určiť funkcie $y_1(t), y_2(t), ..., y_d(t)$ splňujúce diferenciálne rovnice:

$$y_j\prime(t) = f_j(t, y_1(t), ..., y_d(t)), \quad j = 1, 2, ..., d \tag{4.1.4}$$

a počiatočné podmienky:

$$y_j(a) = q\eta_j, \quad j = 1, 2, ..., d. \tag{4.1.5}$$

Stručnejší vektorový zápis vyzerá takto:

$$\mathbf{y}\prime(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(a) = \boldsymbol{\eta}, \tag{4.1.6}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= (y_1(t), y_2(t), ..., y_d(t))^T \\ \mathbf{y}\prime(t) &= (y_1\prime(t), y_2\prime(t), ..., y_d\prime(t))^T \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) &= (f_1(t, \mathbf{y}(t)), f_2(t, \mathbf{y}(t)), ..., f_d(t, \mathbf{y}(t)))^T \\ \boldsymbol{\eta} &= (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_d)^T. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Ak je v okolí D bodu $[a, \boldsymbol{\eta}]$ funkcia $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ spojitá a splňuje tam vzhľadom k premennej $\mathbf{y}$ Lipschitzovskú podmienku s konštatntou L, čo znamená, že ak platí:

$$||\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})|| \leq L||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| \ \ \forall [t, \mathbf{u}], [t, \mathbf{v}] \in D, \tag{4.1.8}$$

potom bodom $[a, \eta]$ prechádza jediné riešenie počiatočnej úlohy (4.1.6). Ak má $\mathbf{f}$ v D spojité parciálne derivácie $\left\{ \frac{\partial f_i(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right\}_{i,j=1}^{d}$, potom Lipschitzovská podmienka 4.1.8 platí. Ak je $D = \langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^d$, tak existuje jediné riešenie v celom intervale $\langle a, b \rangle$.

Jedna rovnica prvého rádu s jednou neznámou funkciou je v aplikáciách menej významná než sústavy rovníc. Metódy približného riešenia sa však jednoduchšie odovodia pre jednu rovnicu a dá sa bezprostedne aplikovať aj na sústavy. Tiež analýza numerických metód je pre jednu rovnicu podstatne jednoduchšia. Preto sa ďalej obmedzíme len na jednu rovnicu.

Numerické metódy spočívajú v nájdení približných hodnôt y_n hľadaného presného riešenia $y(t)$ v bodoch t_n pre $n = 0, 1, ..., N$ (tj. hodnoty y_n aproximujú presnú hodnotu riešenia $y(t_n)$). Body t_n ktoré rozdeľujú interval $\langle a, b \rangle$ dostatočne jemne nazývame uzly. Delenie intervalu je určené takto:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b. \tag{4.1.9}$$

Približné riešenie, teda nepredstavuje spojitú funkciu, ale bodovú funkciu. Po zistení približných riešení y_n vo všetkých uzloch delenia intervalu $\langle a, b \rangle$, môžme ďalej vždy dopočítať približnú hodnotu riešenia $y(t)$ v akomkoľvek bode $t \in \langle a, b \rangle$ pomocou interpolácií. Znamená to, že čím jemnejšie delenie zvolíme, tým väčšiu presnosť dosiahneme. Hodnotu $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ nazveme dĺžka n-tého kroku.

Samotná numerická metóda je predpis, ktorý určuje ako vypočítať približné riešenie y_{n+1} pomocou predchádzajúcich aproximácií $y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-k+1}$, kde k určuje koľko krokova je daná metóda. Napríklad pre jednokrokovú metódu platí, že hodnotu y_{n+1} určujeme len pomocou predchádzajúcej aproximácie y_n. Aby sme mohli metódu rozbehnúť stačí nám mať predpísanú počiatočnú podmienku $y_0 = \eta$.

4.2. Explicitné Rungeove-Kuttove metódy

Runge-Kuttove metódy tvoria veľmi často používanú skupinu jednokrokových numerických metód pre približné riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc. Boli vytvorené okolo roku 1900 nemeckými matematikmi Carlom D.T. Rungeom a Martinom W. Kuttom. Runge-Kuttove metódy sú ako explicitného, tak aj implicitného typu. My sa budeme venovať len explicitným metódam, pretože budú plne postačovať pre riešenie nášho problému.

Všeobecný tvar explicitnej s-stupňovej Runge-Kuttovej metódy je:

$$y_{n+1} = y_n + \tau_n \sum_{i=1}^{s} (b_s k_s), \tag{4.2.1}$$

pričom koeficienty $k_i,\ i = 1, ..., s$ určuje predpis:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \tau_n c_2, y_n + \tau_n a_{21} k_1), \\ k_3 &= f(t_n + \tau_n c_3, y_n + \tau_n (a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_n + \tau_n c_s, y_n + \tau_n (a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1})). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Tieto koeficienty $k_i,\ i = 1, .., s$ predstavujú smernicu lokálneho riešenia v rôznych bodoch a konštatnty b_i zas tieto derivácie vyvažujú. Aby sme dostali konkrétnu metódu musíme ešte zadať počet stupňov s a koeficienty a_{ij}, kde $1 \leq j < i \leq s$, b_i, kde $i = 1, 2, ..., s$ a c_i, kde $i = 2, 3, ..., s$. Tieto koeficienty väčšinou bývajú zapísané v tzv. Butcherovej tabuľke, ktorá je znázornená na obrázku (4.1).

$$\begin{array}{c|ccccc} c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

Obr. 4.1: Butcherova tabuľka pre explicitné RK metódy

Pri výbere konkrétnej metódy nás zaujíma či metóda má pre nás dostatočnú presnosť. To zistíme pomocou určenia lokálnej diskretizačnej chyby lte_n. Pre explicitné Runge-Kuttove metódy je táto chyba určená vzťahom:

$$lte_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \sum_{i=1}^{s} b_i k_i(t_n), \tag{4.2.3}$$

kde

$$k_1(t_n) = f(t_n, y(t_n)), \tag{4.2.4}$$

$$k_i(t_n) = f(t_n + \tau_n c_i, y_n + \tau_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j(t_n)), \quad i = 2, 3, ..., s. \tag{4.2.5}$$

Lokálne diskretizačná chyba lte_n predstavuje chybu, ktore sa dopúšťame v jednom kroku, pri aproximácii $y(t_n)$ pomocou y_n. Ak je táto chyba rádu $O(\tau^{p_r+1})$, tak povieme, že daná Runge-Kuttova metóda je rádu p_r.

Predpokladom pre platnosť tohto tvrdenia je dostatočná hladkosť pravej strany f, to zanamená, že je potrebné, aby funkcia $f(t, y)$ mala spojité derivácie až do rádu p_r vrátane. Ak má táto funkcia spojité derivácie len do rádu $s \leq p_r$, potom sa dá pre globálnu chybu dokázať len rád $O(\tau^s)$, viď [10].

Keď označíme $p_r(s)$ ako maximálny dosiahnuteľný rád s-stupňovej RK metódy, tak platí:

$$\begin{array}{ll} p_r(s) = s \text{ pre } s = 1,2,3,4 & p_r(8) = 6 \\ p_r(5) = 4 & p_r(9) = 7 \\ p_r(6) = 5 & p_r(s) \leq s-2 \text{ pre } s = 10,11,... \\ p_r(7) = 6 & \end{array} \tag{4.2.6}$$

Všimnime si, že teda pre $s > 4$ už nie je možné dosiahnuť rád s pomocou s krokov. Vidíme, že čím je vyšší dosiahnuteľný rád tým sa aj podmienka pre počet krokov stále zostruje. Táto vlastnosť je tiež bližšie vysvetlená v prameňoch [2] a [8].

Je odvodených veľké množstvo používaných explicitných Runge-Kuttových metód a pre každý rád je možné odvodiť tzv. podmienky rádu. Tie davajú do súvisu jednotlivé koeficienty a_{ij}, b_i a c_i. Platí, že so zvyšovaním rádu sa počet podmienok a ich komplikovanosť zvyšuje. Existuje postup, ktorými sa tieto podmienky dajú určiť, ale je pomerne komplikovaný. Využíva teóriu grafov, najmä grafy typu strom.

My si teraz tu uvedieme bez odvodenia podmienky pro RK metódy štvrtého rádu tj. keď $p_r = s = 4$ a Butcherovu tabuľku pre najznámejšiu z RK metód - klasickú RK metódu, ktorá je tiež štvrtého rádu. Tieto podmienky sú:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} b_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i &= \frac{1}{2} \\ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 &= \frac{1}{3} \\ \sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6} \\ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^3 &= \frac{1}{4} \\ \sum_{i,j=1}^{s} b_i c_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{8} \\ \sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{i,j} c_j^2 &= \frac{1}{12} \\ \sum_{i,j,k=1}^{s} b_i a_{i,j} a_{j,k} c_k &= \frac{1}{24} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

a Butcherova tabuľka pre klasickú RK metódu je znázornené na obrázku (4.2).

Táto metóda bola veľmi obľúbená hlavne za čias, keď sa numerické metódy počítali ručne. Je totiž veľmi jednoduchá, pretože mnoho jej koeficientov je nulových. Kompletné odvodenia vyššie uvedených vzťahov možno nájsť v knihách [2] a [8].

V ďalšej časti sa budeme venovať metóde nazývanej Dormand-Prince. Tú si popíšeme trochu bližšie, pretože práve na nej je založený matlabovský riešič ode45, pomocou

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Obr. 4.2: Butcherova tabuľka pre klasickú RK metódu

ktorého sme riešili sústavu pohybových rovníc pre 6 stupňov voľnosti, ktorá je uvedená v predchádzajúcej kapitole.

4.3. Metóda Dormand-Prince

Je to explicitná Runge-Kuttova metóda uvedená prvý krát v roku 1980 Dormandom a Princom. Približné riešenie počíta pomocou Runge-Kuttových metód 4. aj 5. rádu. Rozdielom týchto riešení sa určuje potom odhad lokálnej chyby, ktorý sa využíva pri riadení dĺžky kroku (podrobnejšie popísaný nižšie). Táto metóda je nastavená ako východisková v Matlabe/Simulinku alebo v Octave, pretože dokáže dostatočne presne riešiť širokú škálu obyčajných diferenciálnych rovníc. Nedoporučuje sa však použiť ju pri riešení tuhých problémov (viď [4]), pre ktoré sa ľahko stáva nestabilná.

Keďže DP metóda, tak ako aj iné metódy tokto typu, dáva dohromaddy dve RK metódy, teda na jej zápis sa využíva rozšírená Butcherova tabuľka, ktorá je znázornená na obrázku (4.3). Vyskutujú sa v nej koeficienty $b_j^*,\ j = 1, .., s$ pomocou ktorých sa spočíta

c_2	a_{21}			
$\vdots$	$\vdots$			
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\dots$	
	b_1^*	b_2^*	$\dots$	b_s^*
	b_1^{**}	b_2^{**}	$\dots$	b_s^{**}
	E_1	E_2	$\dots$	E_s

Obr. 4.3: Rozšírená Butcherova tabuľka pre dvojicu RK metód

metódou rádu p_r nová iterácia:

$$y_{n+1}^* = y_n + \tau_n \sum_{j=1}^{s} b_j^* k_j \tag{4.3.1}$$

a pomocou koeficientov $b_j^{**},\ j = 1, ..., s$ sa spočíta metódou rádu $p_r + 1$ nová iterácia:

$$y_{n+1}^{**} = y_n + \tau_n \sum_{j=1}^{s} b_j^{**} k_j. \tag{4.3.2}$$

Obe tieto metódy pritom používajú rovnakú množinu koeficientov $\{k_j\}_j = 1^s$. Odhad lokálnej chyby est_n potom jednoducho určíme ako rozdiel týchto dvoch riešení:

$$est_n = y^{**}_{n+1} - y^{*}_{n+1} = \tau_n \sum_{j=1}^{s} (b^{**}_j - b^{*}_j) k_j = \tau_n \sum_{j=1}^{s} E_j k_j, \tag{4.3.3}$$

kde koeficinety E_j, $j = 1, ..., s$ sú uvedené v poslednom riadku rozšírenej Butcherovej tabuľky (4.3).

Samotná metóda Dormand-Prince je síce metódou 7 krokovou, tj. $s = 7$, ale keďže sa jedná o metódu typu FSAL (First Same As Last), tak v skutočnosti sa práva strana $f(y, t)$ vyhodnotí len šesťkrát. Platí totiž, že:

$$k^n_7 = k^{n+1}_1, \tag{4.3.4}$$

kde horný index n určuje poradie iterácie. Znamená to, že v každom kroku počítame len koeficienty $k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ a koeficient k_1 poznáme z predchádzajúcej iterácie.

Metóda je konkrétne určená rozšírenou Butcherovou tabuľkou na obrázku (4.4).
Konštanty $k_1, ..., k_7$ pre n-tý krok sú z nej potom určené nasledovne:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19\,372}{6\,561}$	$-\frac{25\,360}{2\,187}$	$\frac{64\,448}{6\,561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9\,017}{3\,168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46\,732}{5\,247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5\,103}{18\,656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1\,113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2\,187}{6\,784}$	$\frac{11}{84}$	
	$\frac{5\,179}{57\,600}$	0	$\frac{7\,571}{16\,695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92\,097}{339\,200}$	$\frac{187}{2\,100}$	$\frac{1}{40}$
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1\,113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2\,187}{6\,784}$	$\frac{11}{84}$	0
	$\frac{71}{57\,600}$	0	$-\frac{71}{16\,695}$	$\frac{71}{1\,920}$	$-\frac{17\,253}{339\,200}$	$\frac{22}{525}$	$-\frac{1}{40}$

Obr. 4.4: Rozšírená Butcherova tabuľka pre Dormand-Prince metódu

$$\begin{aligned}
k_1 &= \tau_n f(t_n, y_n) \\
k_2 &= \tau_n f(t_n + \frac{1}{5}\tau_n, y_n + \frac{1}{5}k_1) \\
k_3 &= \tau_n f(t_n + \frac{3}{10}\tau_n, y_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2) \\
k_4 &= \tau_n f(t_n + \frac{4}{5}\tau_n, y_n + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3) \\
k_5 &= \tau_n f(t_n + \frac{8}{9}\tau_n, y_n + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4) \\
k_6 &= \tau_n f(t_n + \tau_n, y_n + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 - \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5) \\
k_7 &= \tau_n f(t_n + \tau_n, y_n + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6).
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Potom môžeme približnú hodnotu y^*_{n+1} pomocou RK metódy rádu 4 určiť takto:

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6. \tag{4.3.6}$$

Pomocou RK metódy rádu 5 môžeme určiť približnú hodnotu y^{**}_{n+1}:

$$y^{**}_{n+1} = y_n + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7. \tag{4.3.7}$$

A nakoniec pre veľkosť odhadu lokálnej chyby $|est_n|$ teda platí:

$$|est_n| = |y^{**}_{n+1} - y^*_{n+1}| = |\frac{71}{57600}k_1 - \frac{71}{16695}k_3 + \frac{71}{1920}k_4 - \frac{17253}{339200}k_5 + \frac{22}{525}k_6 - \frac{1}{40}k_7|. \tag{4.3.8}$$

Ako sme už uviedli, tak tento odhad sa využíva pri riadení dĺžky kroku τ_n.

Po výpočte odhadu lokálnej chyby je potrebné sa rozhodnúť, pomocou ktorej metódy budeme pokračovať vo výpočte. Ak zvolíme $y_{n+1} = y^{**}_{n+1}$, tak povieme, že sme zvolili dvojicu metód s lokálnou extrapoláciou. Je presnejšia a častejšie sa používa. Lokálnu extrapoláciu využíva aj metóda Dormand Prince. Ak by sme však zvolili $y_{n+1} = y^*_{n+1}$, tak dvojicu metód sme použili bez lokálnej extrapolácie. Teda presnejšia metóda sa tu využíva iba na odhad lokálnej chyby. Metóda, ktorá je bez lokálnej extrapolácie a je veľmi podobná metóde Dormand Prince sa nazýva metóda Fehlberg.

Riadenie dĺžky kroku

Vo funkcii ode45 ale aj v iných matlabovských funkciách určených pre výpočet obyčajných diferenciálnych rovníc je možné nastaviť toleranciu ε, s ktorou má byť výpočet vykonaný. Matlab potom dokáže regulovať dĺžku kroku τ_n takým spôsobom, aby veľkosť odhadu est_n lokálnej chyby le_n nadobúdala vždy hodnoty blízke tolerancii ε. V matlabe je možné nastaviť hodnoty relatívnej tolerancie ε_r a absolútne tolerancie ε_a. Tolerancia ε sa potom určí:

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_r \max\{|y_n|, |y_{n+1}|\}, \varepsilon_a\}. \tag{4.3.9}$$

Ak hodnoty ε_r a ε_a nezadáme v matlabe sú prednastavené na hodnoty $\varepsilon_r = 10^{-3}$ a $\varepsilon_a = 10^{-6}$.

Určíme ďalej odhad est_n lokálnej chyby podľa algorytmu popísaného vyššie. Ak

$$|est_n| \leq \varepsilon, \tag{4.3.10}$$

tak krok od y_n do y_{n+1} je úspešný a pokračujeme výpočtom y_{n+2}. Ak však podmienka (4.3.10) nie je splnená tak krok od y_n do y_{n+1} je neúspešný a hodnotu y_{n+1} vypočítame znovu. V oboch prípadoch však určíme novú dĺžku kroku τ^*_n rovnakým spôsobom. Aproximáciu y_{n+1} rátame metódou p_r, teda platí:

$$le_n \doteq C\tau_n^{p_r+1} \doteq est_n \Rightarrow C \doteq \frac{est_n}{\tau_n^{p_r+1}}, \tag{4.3.11}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ nazveme chybovou konštantou. Novú dĺžku kroku τ^*_n zvolíme tak, aby veľkosť $|le^*_n|$ lokálnej chyby $le^*_n \doteq C(\tau^*)^{p_r+1}$ bola približne rovná tolerancii ε. Píšeme teda:

$$|le_n| \doteq |C|(\tau^*_n)^{p_r+1} \doteq |\frac{est_n}{(\tau^*_n)^{p_r+1}}|(\tau^*_n)^{p_r+1} \doteq \varepsilon. \tag{4.3.12}$$

Ak z (4.3.12) vyjadríme τ_n^* dostávame:

$$\tau_n^* \doteq \tau_n \left(\frac{\varepsilon}{|est_n|} \right)^{\frac{1}{p_r+1}}. \tag{4.3.13}$$

V matlabe sa ešte nová dĺžka kroku redukuje pomocou konštatny $\sigma < 1$. Pre ode45 je $\sigma = 0,8$. Konečný vzorec, ktorý určuje novú dĺžku kroku $\tau*$ vyzerá teda nasledovne:

$$\tau_n^* = \sigma\tau_n \left(\frac{\varepsilon}{|est_n|} \right)^{\frac{1}{p_r+1}}. \tag{4.3.14}$$

Vo funkcii ode45 sa nachádzajú ešte ďalšie redukcie dĺžky kroku τ_n*, ktoré si teraz postupne uvedieme.

1. Označme si τ_{min} resp. τ_{max} minimálnu resp. maximálnu povolenú dĺžku kroku. Ak náhodou nastane podmienka $\tau_n^* < \tau_{min}$, výpočet sa ukončí a Matlab dáva výstup, že diferenciálnu rovnicu nedokáže s požadovanou presnosťou vypočítať. V Matlabe je určené $\tau_{min} = 16\varepsilon_m(t_n)$, kde $\varepsilon_m(t_n)$ je tzv. relatívna presnosť aritmetiky pohyblivej čiarky a platí $\varepsilon_m(t_n) \doteq 2,2 \cdot 10^{-16}|t_n|$. Ak $\tau_n^* > \tau_{max}$, tak sa položí $\tau_n = \tau_{max}$, pričom $\tau_{max} = 0,1(b-a)$.

2. Ak bola navrhnutá dĺžka kroku τ_n^* neúspešná tak ju redukujeme:

$$\tau_n^* = \max(\tau_n^*, q_{min}\tau_n), \tag{4.3.15}$$

   kde $q_{min} = 0,1$ pri prvnom neúspechu v jednom kroku a ak v jednom kroku nastal neúspech viac krát počítame $\tau_n^* = 0,5\tau_n$.

3. V prípad úspešného kroku je dĺžka kroku τ_n^* redukovaná predpisom:

$$\tau_n^* = \min(\tau_n^*, q_{max}\tau_n), \tag{4.3.16}$$

   kde $q_{max} = 5$.

4. Dodržiava sa zásada, že po kroku nasledujúcom bezprostredne po neúspešnom kroku sa dĺžka kroku τ_n^* nesmie zväčšiť.

5. Počiatočná dĺžka kroku je určená:

$$\tau_0 = \sigma\varepsilon^{\frac{1}{p_r+1}} \frac{\max(|\eta|, \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_r})}{|f(a,\eta)|}, \tag{4.3.17}$$

   pričom ak $\tau_0 < \tau_{min}$, tak položíme $\tau_0 = \tau_{min}$ a pre $\tau_0 > \tau_{max}$ položíme $\tau_0 = \tau_m ax$.

6. Je treba dávať pozor na delenie 0, hlavne pri (4.3.14) a (4.3.17). Viac sa riadení dĺžky kroku môžme dozvedieť v [4] a [10].

Stabilita

Majme danú nasledujúcu testovaciu rovnicu:

$$y\prime = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0. \tag{4.3.18}$$

Ak na túto rovnicu aplikujeme explicitnú s-stupňovú RK metódu (4.2.1) dostaneme:

$$y_{n+1} = S(\lambda\tau_n)y_n, \tag{4.3.19}$$

kde $S(\lambda\tau_n)$ je polynóm stupňa s určený pomocou konštánt b_i, a_{ij}, ktoré určujú RK metódu. Tento polynóm S nazveme funkciou stability metódy. Označme $z_o = \lambda\tau_n$. Vidíme, že $y_n \to 0$ pri $n \to \infty$ iba ak platí:

$$|S(z_o)| < 1. \tag{4.3.20}$$

Metóda je absolútne stabilná pre tie hodnoty z_o, ktoré splňujú rovnicu (4.3.20). Oblasť absolútnej stability R_a je potom určená:

$$R_a = \{z \in \mathbb{C} || S(z_o) < 1|\}. \tag{4.3.21}$$

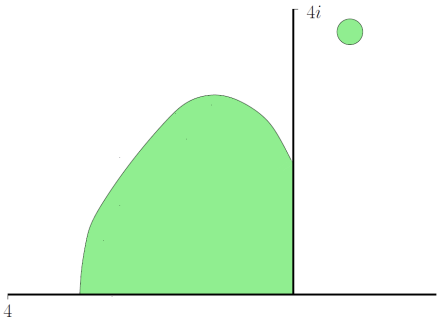
Explicitné metódy majú vždy obmedzenú oblasť stability, pretože pre $|z_o| \to \infty$ tiež $|S(z_o)| \to \infty$ a funkcie stability $S(z_o)$ sú vždy polynómy. Je možné ukázať, že pre metódy rádu $p_r = s = 1, 2, 3, 4$ je $S(z_o) = \sum_{i=0}^{s} \frac{z_o^i}{i!}$. Preto každá explicitná s-stupňová RK metóda rádu $p_r = s < 5$ má rovnakú oblasť absloútnej stability.

Čo sa týka stability metódy DP, jej funkcia stability $S(z_o)$ je určená vzťahom:

$$S(z_o) = 1 + z_o + \frac{z_o^2}{2} + \frac{z_o^3}{6} + \frac{z_o^4}{24} + \frac{z_o^5}{120} + \frac{z_o^6}{600} \tag{4.3.22}$$

a oblasť jej absolútnej stability R_a je znázornená na obrázku (4.5). Prítomnosť „mesiacu“ v pravom hornom rohu oblasti absolútnej stability, môže byť trochu prekvapením, nemá však zatiaľ žiaden praktický význam. Ukazuje nám však, že existuje RK metóda, ktorej oblasť absolútnej stability tvoria dve disjunktné množiny. Interval absolútnej stability tejto metódy je $I_A = (-3,31\,,\,0)$.

Dormand s Princom uviedli okrem metódy, ktorej sme sa doteraz venovali, aj ďalšiu tzv. modifikovanú metódu Dormand-Prince. Tá už nie je typu FSAL, ale jej oblasť absolútnej stability je väčšia ako pri klasickej DP. Nevýhdou modifikovanej DP však je, že má väčšiu chybovú konštantu C. Viac o stabilite RK metód je možné nájsť v [2] a [8].



Obr. 4.5: Oblasť absolútnej stability metódy Dormand-Prince

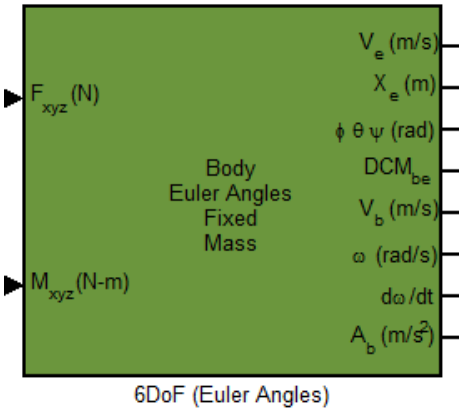
5. Analýza programu riešiaceho kinematiku dopravného lietadla

5.1. Popis funkcie jednotlivých blokov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať analýzou pohybu bežného dopravného lietadla. Firma Honeywell nám poskytla svoj program, ktorý rieši kinematiku celého lietadla. Je použité blokové programovanie v programe Matlab Simulink, to znamená, že zdrojový kód a jednotlivé príkazy boli nahradené blokmi. Našou úlohou bolo preskúmať a nahradiť niekoľko blokov naprogramovaných v blocksete Aerospace. Postupne si ich tu v podkapitolách uvedieme a vysvetlíme princíp ich činnosti. Nakoniec načítame vstupné dáta a použijeme na celý systém blokov riešič ode45, ktorý nám numericky vyrieši pohybové rovnice. Jeho vlastnosti sme opísali v predchádzaucej kapitole. Výstupmé dáta spracujeme do grafov s rôznymi závislosťami napr. nadmorská výška od času alebo rýchlosť od času.

5.1.1. Riešenie pohybových rovníc pomocou Eulerových uhlov

Blok `6DoF (Euler Angles)` uvedený na obrázku (5.1) má za úlohu vyriešiť pohybové rovnice so šiestimi stupňami voľnosti. Na vstupe doňho prichádza vektor celkovej sily $\mathbf{F_{xyz}}$ vyjadrený v súradnicovej sústave tela lietadla F_b a vektor celkových momentov $\mathbf{M_{xyz}}$, taktiež vyjadrený v sústave F_b. Po prebehnutí skupine výpočtov, ktoré priblížime nižšie nám blok dáva na výstup vektor rýchlosti lietadla $\mathbf{V_e}$ v zemskej suradnicovej ústave F_e a vektor rýchlosti lietadla $\mathbf{V_b}$ v sústave F_b. Ďalšími výstupmi sú polohový vektor $\mathbf{X_e}$, Eulerove uhly ϕ, θ, ψ, vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$, vektor uhlového zrýchlenia $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, vektor zrýchlenia $\mathbf{A_b} = (\dot{u}_b, \dot{v}_b, \dot{w}_b)$ a transformačná matica DCM_{be}(predtým značená ako $\mathbb{T}_{be}$). Ak spodným indexom nie je určená príslušnosť k súradnicovej sústave, tak veličiny bez indexu sú vyjadrené v sústave F_b. Navyše je ešte potrebné dodať počiatočné podmienky. To znamená nastaviť počiatočné hodnoty pre $\mathbf{X_e}, \mathbf{V_b}, \phi, \theta, \psi, \boldsymbol{\omega}$ a zadať hmotnosť m a maticu momentov zotrvačnosti I.

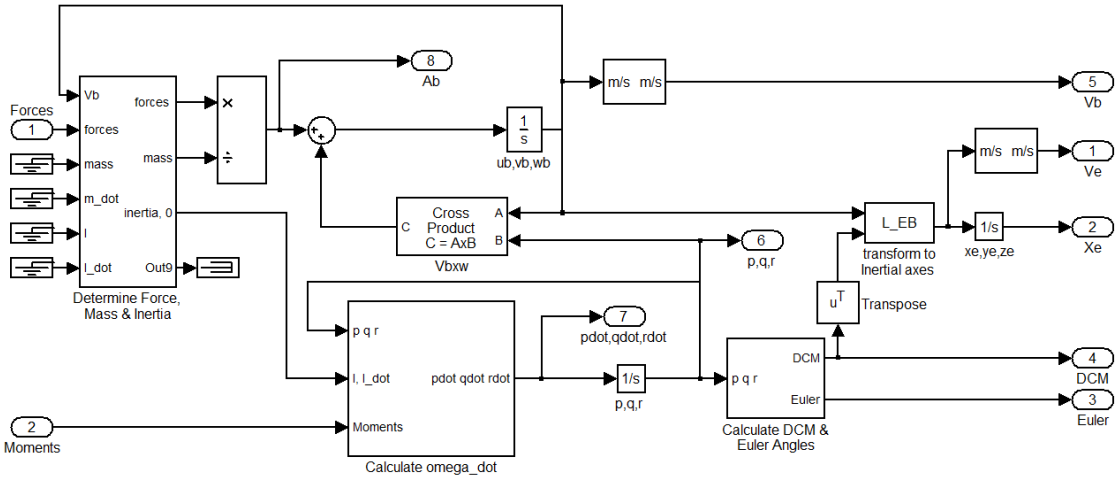


Obr. 5.1: Blok pre výpočet pohybových rovníc pomocou Eulerových uhlov

Ak sa pozrieme do vnútra bloku, objaví sa nám diagram uvedený na obrázku (5.2). Na začiatku prebehne malá reštruktualizácia niektorých vstupov. V hornej časti schémy sa riešia silové rovnice. Zostavenie blokov reprezetuje rovnicu:

$$\mathbf{F_{xyz}} = (F_x, F_y, F_z)^T = m(\dot{\mathbf{V}}_\mathbf{b} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V_b}), \text{ kde } \mathbf{V_b} = (u_b, v_b, w_b)^T, \ \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T. \quad (5.1.1)$$

Ak by sme v (5.1.1) namiesto vektorového tvaru použili zložkový, tak po malých úpravách by sme dostali nami odvodené silové pohybové rovnice (3.2.2.)

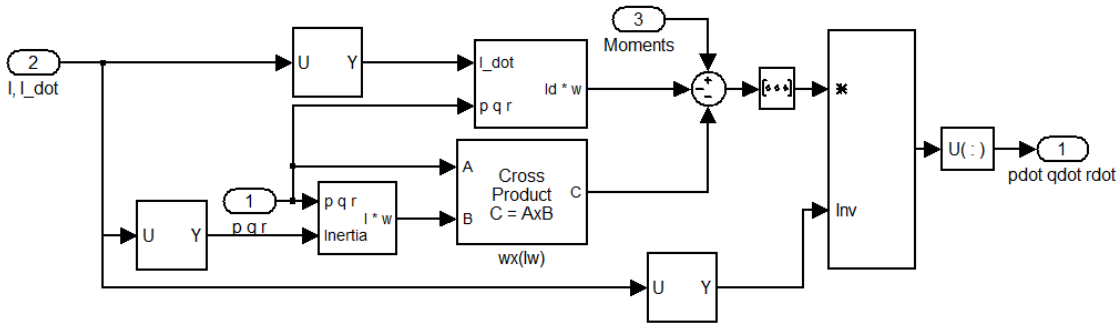


Obr. 5.2: Vnútorná štruktúra bloku pre výpočet pohybových rovníc pomocou Eulerových uhlov

V spodnej časti schémy prebieha riešenie momentových rovníc, výpočet transformačnej matice a výpočet Eulerových uhlov. Samotný výpočet momentových pohybových rovníc sa počíta v bloku `Calculate omega_dot`. Tento blok je znázornený na obrázku (5.3). Vypočíta uhlové zrýchlenie $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ktoré sa neskôr integruje a tak získame uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$. Blok je zostavený na základe rovnice:

$$\mathbf{M_{xyz}} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega}), \text{ kde } I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

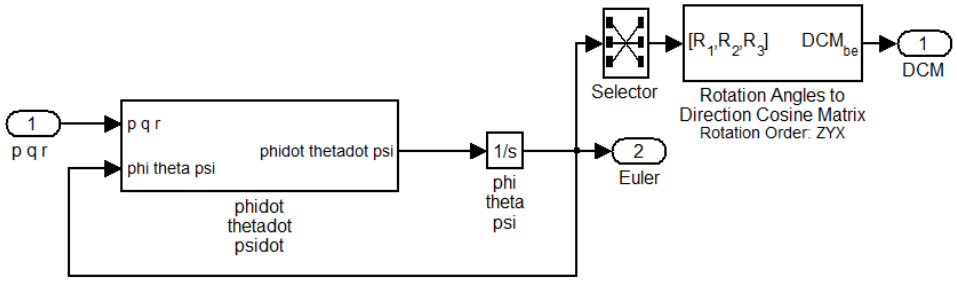
Ak by sme si rovnicu (5.1.2) vyjadrili v zložkovom tvare a mierne upravili dostali by sme už predtým uvedené 3 momentové pohybové rovnice (3.2.2).



Obr. 5.3: Blok pre výpočet uhlového zrýchlenia

Teraz, keď poznáme uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$, môžeme pomocou nej vypočítať Eulerove uhly a zostaviť transformačnú maticu DCM_{be}. Tieto výpočty prebiehajú v bloku `Calculate`

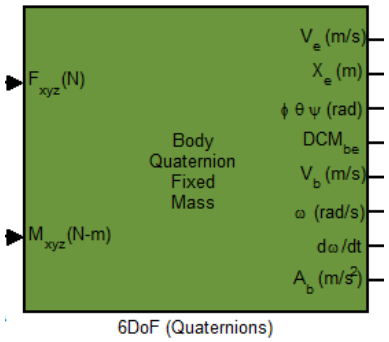
`DCM & Euler Angles`, ktorého vnútorná štruktúra je znázornená na obrázku (5.4). Najprv sa tam vypočítajú derivácie Eulerových uhlov $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. Tento výpočet sa riadi už uvedenými rovnicami (3.1.9) Následne derivácie Eulerových uhlov integrujeme a získavame už Eulerove uhly ϕ, θ, ψ. Pomocou nich zostavíme transformačnú matice DCM_{be}, ktorá je transponovaná voči odvodenej transformačnej matici $\mathbb{T}_{eb}$ (2.2.9). Takže transformačnú maticu DCM_{be} transponujeme a získame maticu DCM_{eb}, pomocou ktorej už dokážeme vyjadriť rýchlosť $\mathbf{V_e}$ a polohový vektor $\mathbf{X_e}$.



Obr. 5.4: Blok pre výpočet transformačnej kosínovej matice

5.1.2. Riešenie pohybových rovníc pomocou kvaterniónov

Pohybové rovnice so 6 stupňami voľnosti môžeme riešiť aj pomocou bloku využívajúceho kvaternióny `6DoF (Quaternion)`, ktorý je na obrázku (5.5). 6 pohybových rovníc sa tu rieši rovnakým spôsobom ako v prípade Eulerových uhlov, ibaže transformačná matica DCM_{be} je vyjadrená pomocou kvaterniónov. To znamená, že vstupy aj výstupy z tohto bloku sú rovnaké ako v predchádzajúcom prípade. Vnútorná štruktúra bloku je tak isto rovnaká, jediný rozdiel spočíva v bloku `Calculate DCM & Euler Angles` , kde sú použité kvaternióny namiesto Eulerových uhlov. Vnútorná štruktúra tohoto bloku je na obrázku (5.6) a trocha bližšie si ju teraz popíšeme.



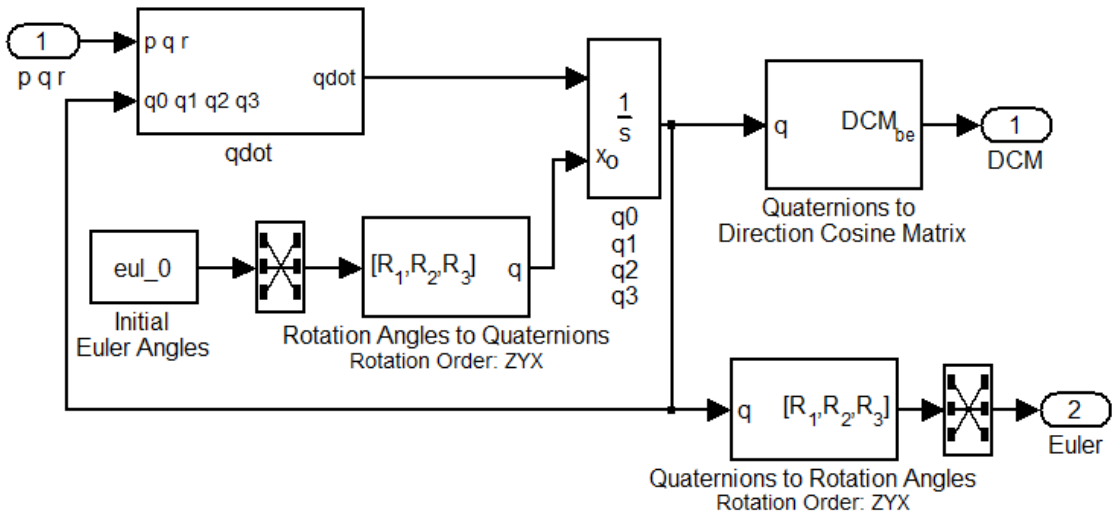
Obr. 5.5: Blok pre výpočet pohybových rovníc pomocou kvaterniónov

Jednou z počiatočných podmienok je udať orientáciu lietadla pomocou Eulerových uhlov. Tie sa pomocou rovníc (2.3.12) prepočítajú na kvaternióny. Potom sa v bloku `qdot` vypočítajú derivácie kvaterniónu. Použije sa však jemne odlišný vzťah ako sme

uviedli v (3.1.14). V matlabe sa ku každej z rovníc (3.1.14) pridáva ešte jeden člen kvôli optimalizácii normalizačnej chyby. Nové rovnice vyzerajú potom nasledovne:

$$\begin{aligned} \dot{q_1} &= -\frac{1}{2}(q_2 p + q_3 q + q_4 r) + K\varepsilon_k q_1 \\ \dot{q_2} &= \frac{1}{2}(q_1 p - q_4 q + q_3 r) + K\varepsilon_k q_2 \\ \dot{q_3} &= \frac{1}{2}(q_4 p + q_1 q - q_2 r) + K\varepsilon_k q_3 \qquad (5.1.3) \\ \dot{q_4} &= -\frac{1}{2}(q_3 p - q_2 q - q_1 r) + K\varepsilon_k q_4, \\ \text{kde } \varepsilon_k &= 1 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \qquad (5.1.4) \end{aligned}$$

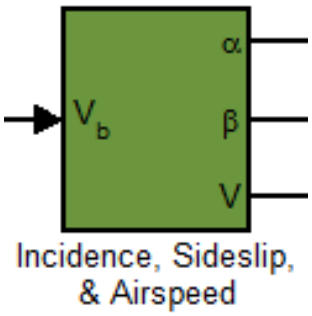
a K je konštanta, ktorú zadávame pri spolu s počiatočnými podmienkami. Štandardne je nastavená na hodnotu 1. Jej vysoké hodnoty spresňujú normalizáciu, ale taktiež ju spomaľujú. Následne nová hodnotá kvaterniónu sa zistí integráciou jeho derivácií. Pretože pri práci s rotáciami súradnicových sútav je potrebné mať kvaternión vždy normalizovaný, tak sa kvaternión normalizuje. Potom sa vytvorí transformačná matica DCM_{be}, ktorá je rovnaká ako transformačná matice $\mathbb{T}_{be}$ (2.3.6). Nakoniec sa kvaternióny znova prepočítajú na Eulerove uhly, vďaka ich lepšej názornosti. Tento proces korešponduje s rovnicami (2.3.13).



Obr. 5.6: Blok pre výpočet transf. matice a Eulerových uhlov pomocou kvaterniónov

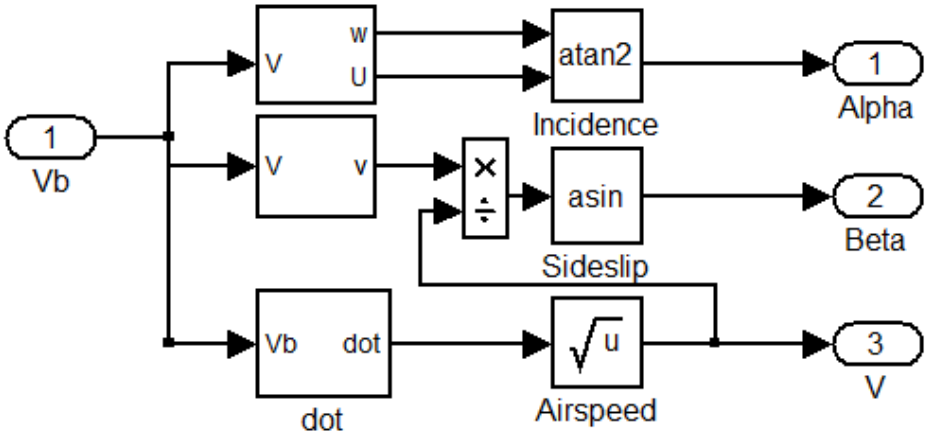
5.1.3. Blok pre výpočet uhlu nábehu, uhlu sklzu a aerodynamickej rýchlosti

Blok `Incidence, Sideslip & Airspeed`, ktorý je uvedený na obrázku (5.7) slúži na výpočet uhlu nábehu α (predtým značený α_a), uhlu sklzu β (predtým značený β_a) a aerodynamickej rýchlosti V (predtým značená ako u_a^a). Potrebuje len jeden vstupný prvok a tým je rýchlosť $\mathbf{V_b} = \mathbf{V_a^b}$ vyjadrená v súradnicovej sústave tela lietadla F_b. Ak sa pozrieme do vnútra bloku na obrázku (5.8) vidíme, že je veľmi jednoduchý. Vrchná vetva



Obr. 5.7: Blok pre výpočet uhlu nábehu, uhlu sklzu a aerodynamickej rýchlosti lietadla

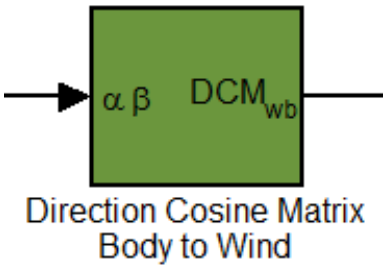
spočíta uhol nábehu α podľa uvedeného vzorca (2.2.25). Stredná vrstva určí uhol sklzu β, taktiež podľa vzťahu (2.2.22), ktorý sme už predtým odvodili. A nakoniec spodná vetva vypočíta aerodynamickú rýchlosť V z rýchlosti $\mathbf{V_b}$ pomocou vzorca (2.2.18).



Obr. 5.8: Štruktúra bloku pre výpočet uhlu nábehu, uhlu sklzu a rýchlosti lietadla

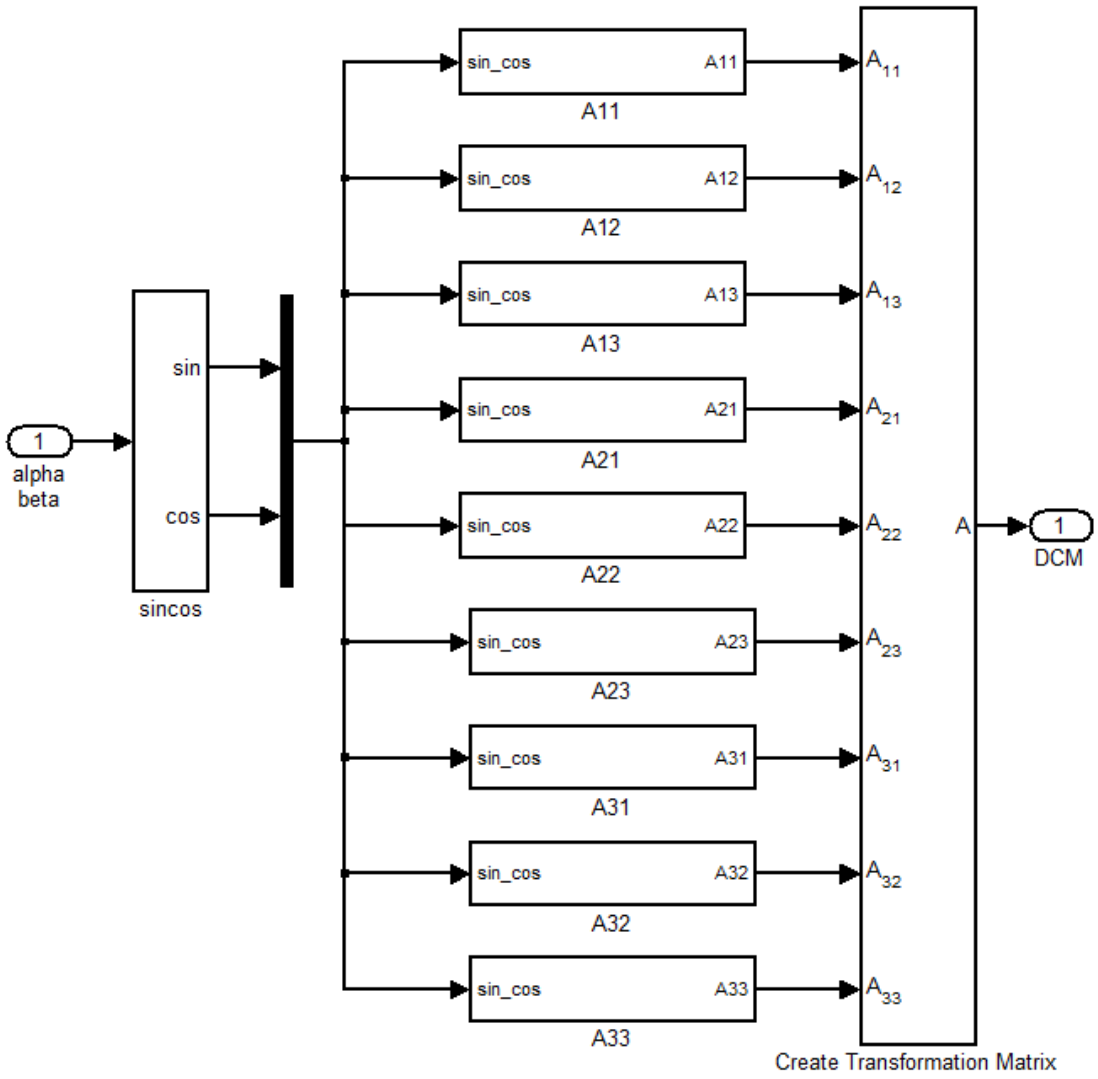
5.1.4. Transformačná matica pre uhol nábehu a uhol sklzu

Blok nazvaný `Direction Cosine Matrix Body to Wind` vytvára transformačnú maticu DCM_{wb} (predtým označená ako $\mathbb{T}_{ab}$), ktorá transformuje veličiny zo súradnicovej sústavy F_b do aerodynamickej sústavy $F_w = F_a$ (dolný index w je z anglického wind frame, niekedy sa tak označuje aerodynamická súradnicová sústava). Na vstupe sú uhol nábehu α a uhol sklzu β. Blok je znázornený na obrázku (5.9) a jeho vnútornú štruktúru popisuje obrázok



Obr. 5.9: Blok pre výpočet transformačnej matice pre uhol nábehu a uhol sklzu

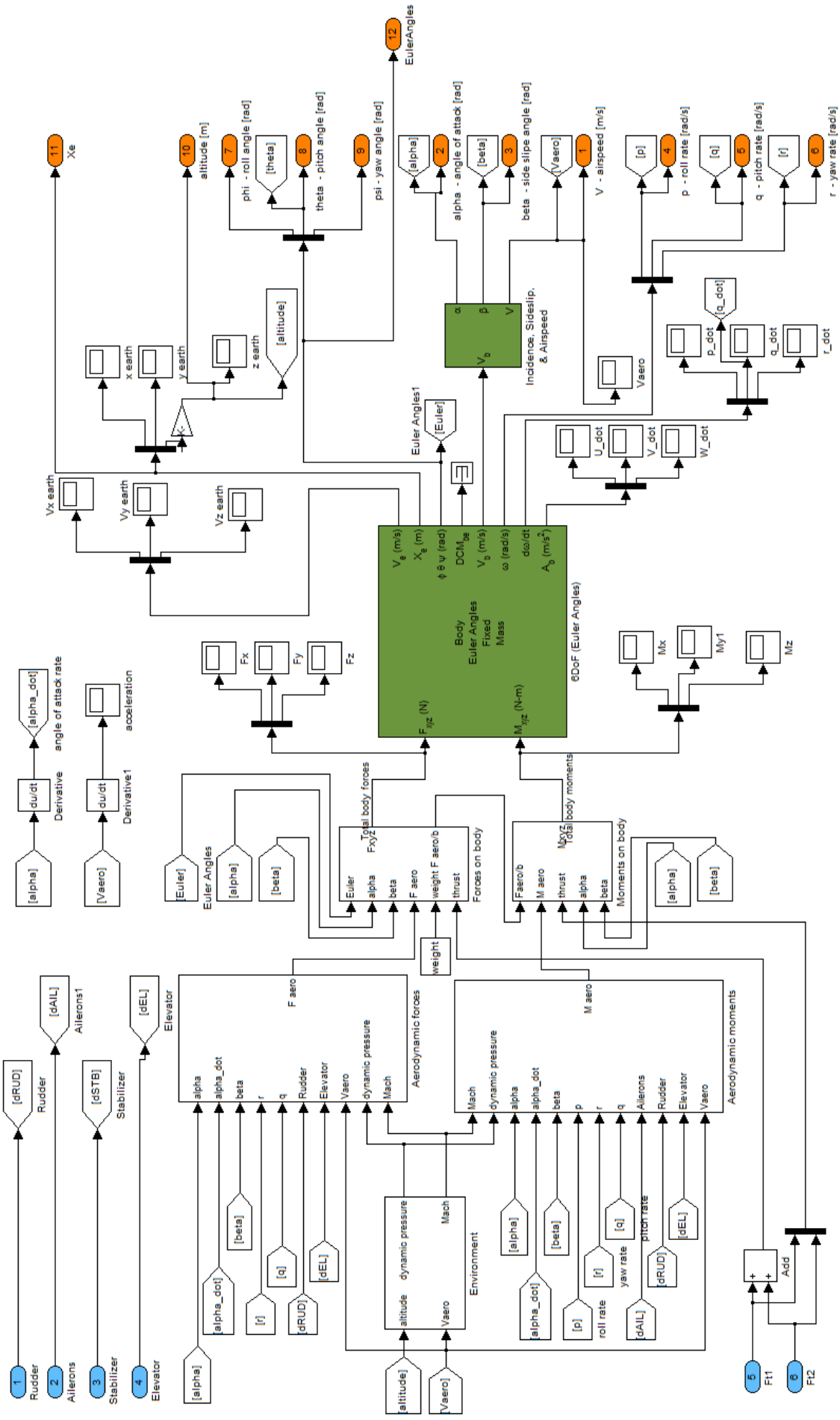
(5.10). Ak by sme preskúmali ďalšie podbloky zistili by sme, že matica transformačná matica DCM_{wb} tvorí transponovanú maticu k matici $\mathbb{T}_{ba}$ (2.2.17).



Obr. 5.10: Štruktúra bloku pre výpočet transformačnej matice pre uhol nábehu a uhol sklzu

5.1.5. Kompletný systém blokov

Kompletný systém blokov možno vidieť na obrázku (5.11). Na ľavej strane sa nachádzajú všetky potrebné vstupy. Tiež sa tu počítajú pravé strany pohybových rovníc teda celková sila a celkový moment, ktorý pôsobí na telo lietadla. Na prevej strane schémy nájdeme všetky potrebné výstupy a bloky slúžiace na zobrazenie priebehu danej fyzikálnej veličiny. Nad týmto hlavným blokom sa nachádza ešte jeden systém blokov, ktorý zahrňuje aj vplyv autopilotov a spôsobuje rýchlejšie ustálenie priebehu jednotlivých fyzikálnych veličín.



Obr. 5.11: Znázornenie kompletného systému blokov

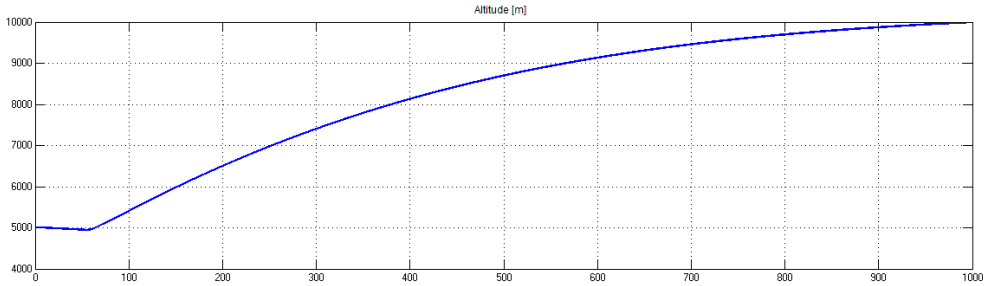
5.2. Príklad

Zadáme teraz všetky potrebné počiatočné hodnoty a zistíme priebeh jednotlivých fyzikálnych veličím v čase. Na riešenie pohybových rovníc používame riešič ode45, ktorý bude po malých krokoch vyhodnocovať vždy celý systém blokov. Parametre, ktoré slúžia k výpočtu pravých strán pohybových rovníc kvôli veľkému množstvu neudáme, je možné ich nájsť v priložených súboroch businessjet_data.m a AP_Coeff.m

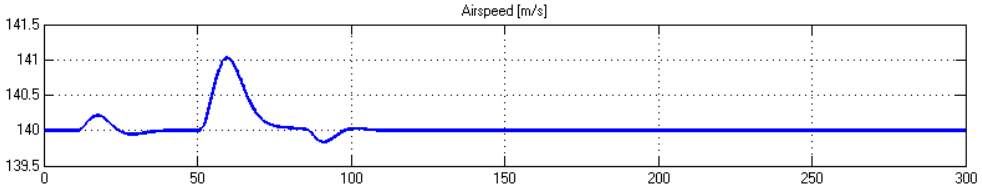
- hmotnosť lietadla ... $m = 31363\,\mathrm{kg}$
- gravitačné zrýchlenie ... $g = 9.81\,\mathrm{kg.m^{-2}}$
- moment zotrvačnosti k osi x_b ... $I_x = 380800\,\mathrm{kg.m^2}$
- moment zotrvačnosti k osi y_b ... $I_y = 255680\,\mathrm{kg.m^2}$
- moment zotrvačnosti k osi z_b ... $I_z = 639200\,\mathrm{kg.m^2}$
- deviačný moment k rovine $x_b y_b$ ... $I_{xy} = 0\,\mathrm{kg.m^2}$
- deviačný moment k rovine $x_b z_b$ ... $I_{xz} = 17680\,\mathrm{kg.m^2}$
- deviačný moment k rovine $y_b z_b$ ... $I_{yz} = 0\,\mathrm{kg.m^2}$
- počiatočná pozícia vyjadrená v F_e (z_e má rovnaký smer ako g) ... $\mathbf{X_e}$ =(0,0,-5000 m)
- počiatočná rýchlosť vyjadrená v F_b ... $V_b = (139.872\,m.s^{-1}, 0, 5.995\,m.s^{-1})$
- počiatočná uhlová rýchlosť ... $\boldsymbol{\omega} = (0, 0.0428, 0)$

V nasledujúcich grafoch je vykreslené chovanie nadmorskej výšky, aerodynamickej rýchlosti a Eulerových uhlov v závislosti na čase pri uvedených počiatočných (štartovacích) podmienkach. Ukázali sme, ako sa nadmorská výška vyvíjala počas časového intervalu 1000 s. Na obrázku (5.12) vidíme, že konvergovala k hodnote blízkej k 100000 m. Môžme ďalej sledovať na obrázku (5.13), že aerodynamická rýchlosť zaznamenala počas prvých 100 s len malé zmeny, po ktorých sa ustálila na zadanú hodnotu. Zaujímavé sú grafy pre Eulerove uhly na obrázkoch (5.14),(5.15) a (5.16). Vidíme, že uhly ϕ, θ, ψ sa počas prvých 100 s chovali pomerne nestálo. Potom sa však ustálili na nových hodnotách.

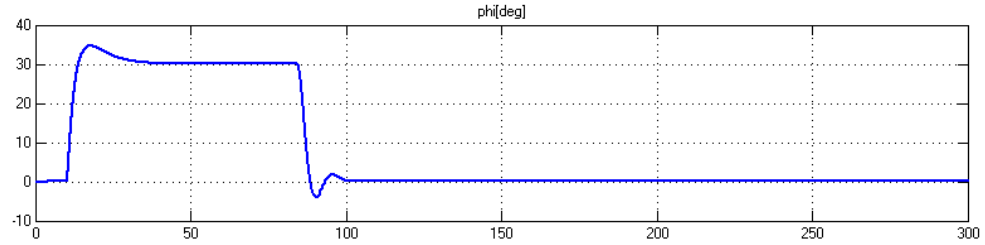
Vidíme, že všetky veličiny vo všetkých grafoch sa nakoniec ustália na jednej hodnote, čo je celkom sľubný predpoklad pre správnosť riešenia.



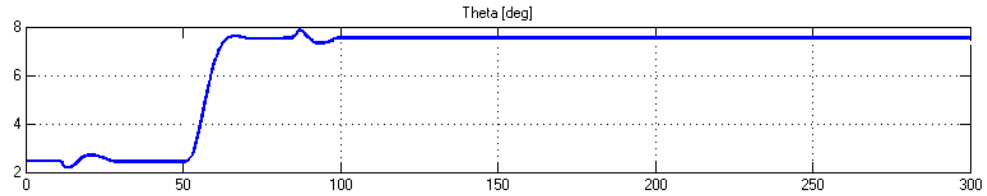
Obr. 5.12: Priebeh časovej závisloti nadmorskej výšky v ktorej lietadlo letí



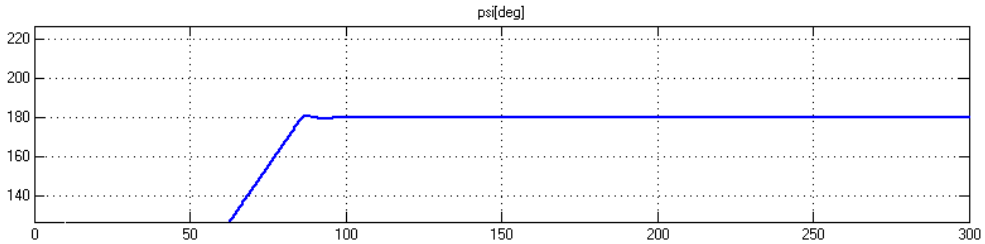
Obr. 5.13: Priebeh časovej závisloti aerodynamickej rýchlosti



Obr. 5.14: Priebeh časovej závisloti priečneho náklonu ϕ



Obr. 5.15: Priebeh časovej závisloti pozdĺžneho sklonu θ



Obr. 5.16: Priebeh časovej závisloti uhlu vybočenia ψ

6. Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo popísať numerickú metódu, ktorá by vyriešila pohybové rovnice so 6 stupňami voľnosti, ktoré tvoria sústavu 6 nelineárnych diferenciálnych rovníc. Tieto rovnice boli odvodené z Newtonovho zákona sily. Aby sme však mohli túto sústavu vyriešiť potrebovali sme ďalšie 3 rovnice, vďaka ktorým sme mohli určiť orientáciu lietadla vzhľadom na zemskú súradnicovú sústavu. Uviedli sme dva spôsoby ako tieto rovnice určiť. Prvý spôsob predstavoval reprezentáciu pomocou Eulerových uhlov. Tá je veľmi názorná, ale na druhej strane má len 3 nezávislé parametre, čo má za dôsledok nejednoznačnosť a vznik singularít. To znamená, že ju nie je možné použiť pre niekoľko málo konkrétnych transformácií. Alternatívu tvorí kvaterniónová reprezentácia, ktorá má 4 nezávislé parametre, tým pádom je jednoznačná. Na riešenie všetkých týchto rovníc bola použitá Dormandova-Princova metóda, ktorá patrí medzi najuniverzálnejšie Runge--Kuttove metódy. Neodporúča sa ju použiť na tuhé problémy, ale v iných prípadoch dáva veľmi prijateľné výsledky. Používa dve Runge-Kuttove rádu 4 a 5, pomocou ktorých sa určuje lokálna chyba. Využíva lokálnu extrapoláciu, teda výsledná aproximácia je určená tou presnejšou metódou. Táto metóda dokáže aj optimalizovať dĺžku kroku na želanú hodnotu. Používa ju aj matlabovský riešič ode45, ktorý sme použili pri riešení príkladu pre let menšieho dopravného lietadla v softvéri Matlab Simulink. Preskúmali sme, ako fungujú niektoré bloky z blocksetu aerospace a ukázali sme, že sú vytvorené len pomocou základných vnútorných blokov Simulinku a sú zostavené podľa rovníc, ktoré sme uviedli.

Hlavný dôraz v tejto práci bol kladený na reprezentáciu Eulerovými uhlami a kvaterniónovú reprezentáciu. Spojením rôznych zdrojov sme uviedli ako vytvoriť rotačné matice pomocou jednotlivých parametrov, a taktiež ako tieto parametre získať zo známej rotačnej matice. Vysvetlili sme aj ako prejsť z jednej reprezentácie do druhej a tiež sme sa zaoberali závislosťou Eulerových uhlov respektíve kvaterniónov od uhlovej rýchlosti.

Literatúra

[1] BOIFFIER, Jean-Luc: *The dynamics of flight: the equations,* New York: Wiley, 1998. 353 s. ISBN 04-719-4237-5

[2] BUTCHER, John C.: Numerical methods for ordinary differential equations, 2nd ed., Chichester, England: Wiley, 2008. 463 s. ISBN 978-0-470-72335-7

[3] COOK, Michael V.: *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control, 2nd ed.,* Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. 468 s. ISBN 978-0-7506-6927-6

[4] ČERMÁK, Libor: *Numerické metody pro řešení diferenciálnych rovnic,* [učební text FSI VUT Brno], Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2013. 81s.

[5] DIEBEL, James: *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions and Rotation Vectors,* Stanford, 2006. 35 s.

[6] ETKIN, Bernard: *Dynamics of Flight: stability and Control, 3rd ed.,* New York: John Wiley, 1996. 382 s. ISBN 04-710-3418-5

[7] FARRELL, Jay.: *Aided navigation: GPS with high rate sensors,* New York: McGraw-Hill, 2008. 530 s. ISBN 00-714-9329-8

[8] LAMBERT, John D.: *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem, 2nd ed.,* New York: Wiley, 1991. 463 s. ISBN 04-719-2990-5

[9] ROSKAM, Jan: *Airlplane flight dynamics and automatic flight controls: part I,* Lawrence: DARcorporation, 2003. 576 s. ISBN 18-848-8517-9

[10] SHAMPINE, Lawrence F.: *Solving ODEs with MATLAB, 1st pub.,* Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 263 s. ISBN 05-218-2404-4

[11] ŠABARTOVÁ, Zuzana: *Dynamika letu a řízení,* [Bakalárska práce], Brno: VUT, FSI, 2010. 50 s.

[12] TEWARI, Ashish: *Atmospheric and space flight dynamics: modeling and simulation with MATLAB and Simulink,* Boston, Mass.: Birkhauser, 2007. 556 s. ISBN 978-081-7644-376

[13] WESTON, John L. a TITTERTON David H.: *Strapdown inertial navigation technology: the initial value problem, 2nd ed.,* Stevenage: Institution of Electrical Engineers, 1991. 293 s. ISBN 08-634-1358-7

7. Zoznam použitých symbolov a skratiek

ODR	obyčajné diferenciálne rovnice
RK metóda	Runge-Kuttova metóda
DP metóda	Dormand-Princova metóda
FSAL	vlastnosť First Same As Last
$F_I(A, x_I, y_I, z_I)$	inerciálna súradnicová sústava s počiatkom A a osami x_I, y_I a z_I
$F_e(O, x_e, y_e, z_e)$	Zemská súradnicová sústava s počiatkom O a osami x_e, y_e a z_e
$F_b(G, x_b, y_b, z_b)$	súradnicová sústava tela lietadla s počiatkom G a osami x_b, y_b a z_b
$F_a(G, x_a, y_a, z_a)$	aerodynamická súradnicová sústava s počiatkom G a osami x_a, y_a a z_a
$F(O, x, y, z)$	ľubovoľná súradnicová sústava s počiatkom O a osami x, y a z
F_i, F_j, F_c, F_f	pomocné súradnicové sústavy
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	jednotkové vektory príslušné osiam x_n, y_n a z_n
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	uhly otáčajúce okolo osí x, y, z
$\mathbf{V_a} = (u_a, v_a, w_a)$	vektor aerodynamickej rýchlosti lietadla
$\alpha_a = \alpha$	aerodynamický uhol nábehu
$\beta_a = \beta$	uhol sklzu
$\mathbf{X}$	ľubovoľný vektor
$\mathbf{X^i}$	ľubovoľný vektor v súradnicovej sústave F_i
$\mathbb{T}$	transformačná matica
$\mathbb{T}_{ij}$	transformačná matica zo súradnicovej sústavy F_i do sústavy F_j
xyz	označenie postupných rotácií okolo osí xyz
ψ	uhol vybočenia
θ	uhol pozdĺžneho sklonu
ϕ	priečny náklon
c_{ij}	prvok z matice 3x3, kde $i, j = 1, 2, 3$
Φ	hlavný uhol
$\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$	vektor určujúci Eulerovu os

$\operatorname{tr}\mathbb{T}$	stopa transformačnej matice $\mathbb{T}$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	vlastné čísla transformačnej matice $\mathbb{T}$
(q_1, q_2, q_3, q_4)	kvaternión ako štvorzložkový vektor
$(\mathbf{q}, q_4)$	kvaternión ako usporiadaná dvojica
$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$	vektor tvoriaci prvý prvok z usporiadanej dvojice kvaterniónu
i, j, k	imaginárne jednotky kvaterniónu
I_k	jednotková matica
$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$	vektor uhlovej rýchlosti
$\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$	derivácie Eulerových uhlov podľa času
$\mathbf{F_{xyz}} = (F_x, F_y, F_z)$	vektor celkovej silya pôsobiacej na teleso
m	hmotnosť telesa
a	zrýchlenie telesa
$\mathbf{M_{xyz}} = (L, M, N)$	celkový moment sily
$\mathbf{V_b} = (u_b, v_b, w_b)$	vektor rýchlosti lietadla v suradnicovej sústave F_b
I_x, I_y, I_z	momenty zotrvačnosti k osiam x_b, y_b a z_b
I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}	deviačné momenty k rovinám $x_b y_b, x_b z_b$ a $y_b z_b$
$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$	vektor uhlového zrýchlenia tj. časová derivácia vektoru uhlovj rýchlosti
$(\dot{u_b}, \dot{v_b}, \dot{w_b})$	vektor zrýchlenia v F_b tj. časovej derivácie vektoru rýchlosti $\mathbf{v_b}$
$(\dot{q_1}, \dot{q_2}, \dot{q_3}, \dot{q_4})$	časová derivácia štvorzložkového vektoru kvaterniónu
F_e^*	dvojrozmerná Zemská súradnicová sústava
F_b^*	dovjrozmerná súradnicová sústava tela lietadla
$\mathbf{F^*_{xz}} = (F_x, F_z)$	celková sila pôsobiaca na teleso v dvojrozmernom priestore
$\mathbf{V^*_b} = (u_b, w_b)$	celková rýchlosť telesa v súradnicovej sústave F_b*
$y(t)$	funkcia y s premennou t
y_n	odhad presného riešenia $y(t_n)$
$y\prime(t)$	derivácia funkcie y podľa t
a, b	hranice intervalu

τ_n	dĺžka n-tého kroku
a_{ij}, b_i, c_i	konštatnty určujúce Runge-Kuttovu metódu
s	počet stupňov metódy
lte_n	lokálna diskretizačná chyba
p_r	rád metódy
$p_r(s)$	maximálny dosiahnuteľný rád s-stupňove RK metódy
est_n	odhad lokálnej chyby
λ	komlexné číslo, ktorého reálna časť je menšia ako nula
z_o	konštanta určená $z_o = \lambda\tau_n$
ε	tolerancia
ε_r	relatívna tolerancia
ε_a	absolútna tolerancia
C	chybová konštanta
le_n	lokálna chyba
τ_n^*	návrh novej dĺžky kroku
$S(\lambda\tau_n)$	funkcia stability metódy
R_a	oblasť absolútnej stability metódy
I_a	interval absolútnej stability metódy
$\mathbf{V_e}$	vektor rýchlosti lietadla v súradnicovej sústave F_e
$\mathbf{X_e}$	polohový vektor určujúci polohu telesa v súradnicovej sústave F_e
$\mathbf{A_b} = (\dot{u}_b, \dot{v}_b, \dot{w}_b)$	vektor cekového zrýchlenia telesa
$DCM_{be} = \mathbb{T}_{be}$	transformačná matica zo súradnicovej sústavy F_b do súradnicovej sústavy F_e
I	matica tvorená momentami zotrvačnosti a deviačnými momentami
K	konštanta pre optimalizáciu normalizačnej chyby
ε_k	$\varepsilon_k = 1 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)$
F_w	iné označenie pre aerodynamickú sústavu F_a