

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

ADAPTIVNÍ METODY ŘEŠENÍ ELIPTICKÝCH PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. PATRÍCIA HUMENÁ

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

ADAPTIVNÍ METODY ŘEŠENÍ ELIPTICKÝCH PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

ADAPTIVE METHODS FOR ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENCIAL EQUATIONS SOLUTION

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. PATRÍCIA HUMENÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. VÁCLAV VALENTA,

BRNO 2013

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je seznámení se s numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic. Toto řešení se bude provádět pomocí zjemňování mřížky na základe aposteriorního odhadu chyby řešení.

Abstract

The objective of this thesis is to get familiar with the numerical solution of partial differential equations. This solution will be implemented by using a grid refinement based on the aposteriory error estimation.

Klíčová slova

Parciální diferenciální rovnice, taylorova rada, mřížka

Keywords

Partial differential equations, the taylor series, grid

Citace

Patrícia Humená: Adaptivní metody řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic, diplomová práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2013

Adaptivní metody řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Ing. Václava Valenty. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

.....
Patricia Humená
20. května 2013

Poděkování

Chcela by som sa poďakovať môjmu asistentovi Ing. Václavovi Valentovi za pomoc, užitočné rady a podporu pri vytváraní tejto diplomovej práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať všetkým, ktorí si pre mňa našli chvíľu času a poskytli mi možnosť, priestor a mechanizmy na testovanie programovej časti diplomovej práce.

© Patricia Humená, 2013.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1 Úvod	3
2 Analýza diferenciálnych rovníc	4
2.1 Základná definícia diferenciálnej rovnice a typy diferenciálnych rovníc	4
2.1.1 Diferenciálna rovnica	4
2.1.2 Typy diferenciálnych rovníc	4
2.1.3 Lineárne diferenciálne rovnice	5
2.1.4 Počiatočné a okrajové podmienky diferenciálnych rovníc	5
2.1.5 Parciálne diferenciálne rovnice	5
2.1.6 Typy parciálnych diferenciálnych rovníc	7
2.1.7 Eliptické parciálne diferenciálne rovnice	9
2.1.8 Riešenie diferenciálnych rovníc	10
2.1.9 Analytické riešenie diferenciálnych rovníc	10
3 Jednoduché metódy riešenia lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc druhého rádu	12
3.1 Prvý typ	12
3.2 Druhý typ	12
3.3 Tretí typ	13
3.4 Štvrtý typ	13
3.5 Piaty typ	13
3.6 Ostatné typy	14
3.7 Fourierova metóda (metóda separácie premenných)	14
3.8 Ostatné známe metódy	14
4 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc	15
4.1 Typy numerických metód	15
4.2 Jednokrokové metódy	16
4.2.1 Eulerova metóda	16
4.2.2 Runge-Kuttové metódy	16
4.3 Viackrokové metódy	17
4.3.1 Metóda Adams-Bashforth	17
4.3.2 Taylorova rada	17
4.4 Numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc	18
4.4.1 Metóda sietí (metóda konečných diferencii)	18
4.4.2 Odhad chyby pri metóde sietí	19
4.4.3 Aposteriórny odrah chyby použitý pri tejto diplomovej práci	19
4.4.4 Zjemňovanie a zhusťovanie mriežky	20

5	Analýza požiadaviek programu	21
5.1	Analýza zadania	21
5.2	Analýza implementačnej časti	22
6	Návrh riešenia	23
6.1	Inicializačná časť	23
6.2	Sústava rovníc popisujúca body na mriežke	24
6.3	Výpočet hodnôt pre jednotlivé body na mriežke	27
6.4	Matica s hodnotami jednotlivých bodov na mriežke	28
6.5	Lineárny odhad chyby	29
6.5.1	Sústava rovníc popisujúca obdĺžnik na mriežke	29
6.5.2	Riešenie sústavy štyroch rovníc o štyroch neznámych	30
6.5.3	Lineárny odhad chyby pre obdĺžnik na mriežke	30
6.5.4	Funkcia na výpočet lineárneho odhadu chyby	30
6.6	Bilineárny odhad chyby	31
6.6.1	Hodnoty $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$	31
6.6.2	Funkcia na výpočet hodnôt $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$	37
6.6.3	Výpočet váh	37
6.6.4	Výpočet bilineárneho odhadu chyby	37
6.7	Výpočet aposteriórneho odhadu chyby	39
6.8	Výsledný program	40
7	Zhodnotenie výsledkov	41
7.1	Testovanie zjemňovania mriežky	41
7.2	Testovanie správnosti zjemňovania mriežky	43
7.3	Zhodnotenie výsledkov testovania	46
8	Záver	51

Kapitola 1

Úvod

V súčasnosti je potrebné vedieť modelovať a simulovať rôzne navrhované modely, aby sa ušetrili peniaze na vývoj. Všetko čo sme schopní popísať matematicky vieme namodelovať. Preto sa v súčasnosti veľmi často stretávame s diferenciálnymi rovnicami, pomocou ktorých sme schopní popísať rôzne matematické modely. Diferenciálne rovnice majú rôzne typy, ktoré predstavujú rôzne zložitosti modelov a rôzne zložitosti riešenia.

Riešiť diferenciálne rovnice je možné dvoma spôsobmi. Jedným z nich je analytické riešenie, ktoré je presné a rýchle. Nevýhodou však je to, že niekedy sa môže stať, že nie sme schopní nájsť analytické riešenie diferenciálnych rovníc. Toto sa týka hlavne zložitejších diferenciálnych rovníc a práve tieto vo väčšine prípadov popisujú reálne systémy. Preto je nutné použiť druhý typ riešenia diferenciálnych rovníc. Týmto typom je numerické riešenie diferenciálnych rovníc. Toto riešenie však prináša niekoľko problémov. Má dve veľké nevýhody a to nepresnosť riešenia a veľkú časovú náročnosť. Numerické metódy pracujú na princípe aproximácie zadanej funkcie. Niekedy sa však môže stať, že daná metóda nie je stabilná pre zadanú úlohu a v takom prípade sa k správne výsledku nikdy nedostaneme.

Cieľom tejto diplomovej práce je naštudovanie numerických metód riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc, zameranie sa na metódu sietí a aposteriórny odhad chyby riešenia a pomocou tohto odhadu zjemňovať vytvorenú mriežku a vo finále sa pomocou zjemňovania mriežky dopracovať k efektívnemu približnému riešeniu zadanej eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Kapitola 2

Analýza diferenciálnych rovníc

V tejto kapitole sa budú nachádzať niektoré definície a rovnice, ktoré boli použité v mojej bakalárskej práci z roku 2010, ktorá je uvedená ako zdroj literatúry v poslednej kapitole [8]. Táto diplomová práca mierne nadväzuje na myšlienky a znalosti získané pri vypracovávaní bakalárskej práce, preto sa táto bakalárska práca stala zdrojom literatúry pre túto diplomovú prácu. Ďalej boli použité literatúry [3], [1].

2.1 Základná definícia diferenciálnej rovnice a typy diferenciálnych rovníc

2.1.1 Diferenciálna rovnica

Diferenciálnou rovnicou je matematická rovnica, v ktorej vystupujú ako premenné derivácie funkcií. Ak sa na to pozrieme trochu inak, diferenciálnou rovnicou rozumieme vzťah, ktorý je platný v určitom obore a je to vzťah medzi neznámou funkciou a jej deriváciami.

Ak máme zadaných m diferenciálnych rovníc pre n neznámych funkcií, hovoríme o **sústave diferenciálnych rovníc**, pričom sa nemusí počet diferenciálnych rovníc m rovnať počtu neznámych funkcií n . Každá rovnica má svoj rád. Rádom rovnice pri diferenciálnych rovniciach je rád najvyššej derivácie, ktorá sa v rovnici nachádza. Rovnako rádom sústavy diferenciálnych rovníc je rád najvyššej derivácie, ktorá sa v sústave nachádza.

2.1.2 Typy diferenciálnych rovníc

Pri diferenciálnych rovniciach rozpoznávame niekoľko základných typov. Tieto typy sa rozlišujú hlavne podľa derivácií, ktoré sa v rovniciach nachádzajú. Ak sa v hľadanej funkcii vyskytujú derivácie len podľa jednej premennej, patrí táto diferenciálna rovnica medzi **obyčajné diferenciálne rovnice**.

Ak sa v hľadanej funkcii nachádzajú parciálne derivácie podľa viacerých premenných, patrí diferenciálna rovnica medzi **parciálne diferenciálne rovnice**. Ďalej sa diferenciálne rovnice delia na stochastické a algebrické, ale to pre túto diplomovú prácu už nie je príliš podstatné.

2.1.3 Lineárne diferenciálne rovnice

Lineárnou diferenciálnou rovnicou je rovnica obecného typu:

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

kde n je rád diferenciálnej rovnice, x je nezávislá premenná, y^k je k -tá derivácia hľadanej funkcie $y(x)$, $a_k(x)$ sú lineárne funkcie a $f(x)$ je pravá strana diferenciálnej rovnice.

Funkcie $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ sú spojité na intervale I , ktorý môže byť aj nekonečný. Ak by sa $f(x) = 0$, hovorili by sme o **homogénnej** diferenciálnej rovnici, v opačnom prípade sa jedná o **nehomogénnu** diferenciálnu rovnicu.

V lineárnych rovniciach hľadaná funkcia nie je argumentom inej funkcie a ani sa tu nepoužívajú súčiny medzi jej deriváciami.

2.1.4 Počiatočné a okrajové podmienky diferenciálnych rovníc

Poznáme dva známe spôsoby, ako môžu byť zadané počiatočné podmienky na riešenie diferenciálnej rovnice.

Prvým spôsobom je takzvaná **Cauchyova počiatočná úloha** (problém), kde hľadáme riešenie diferenciálnej rovnice so zadanými počiatočnými podmienkami. Príkladom pre obyčajné diferenciálne rovnice, je úloha, ktorá má nájsť riešenie rovnice

$$y' = f(t, y(t)) \quad (2.2)$$

s počiatočnými podmienkami

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.3)$$

teda napríklad

$$y(0) = 7 \quad (2.4)$$

Druhým typom, s ktorým sa môžeme stretnúť, sú **úlohy so zadanými okrajovými podmienkami**, kde máme napríklad zadanú rovnicu ako v predchádzajúcom ukážkovom príklade, teda rovnicu

$$y' = f(t, y(t)) \quad (2.5)$$

a riešime ju na zadanom intervale $\langle a, b \rangle$ a poznáme teda okrajové podmienky $y(a)$ a $y(b)$, ktoré nám z tohto intervalu vyplývajú.

2.1.5 Parciálne diferenciálne rovnice

Parciálna diferenciálna rovnica je chápaná ako určitý vzťah medzi neznámou funkciou a jej deriváciami. Je to napríklad vzťah medzi neznámou funkciou

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.6)$$

pričom $n \geq 2$ a jej deriváciami

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_1, x_1}, z_{x_2, x_2}, z_{x_1, x_2}, \dots) = 0 \quad (2.7)$$

Pre lepšie pochopenie, je možné rovnicu 2.7 prepísať pomocou *Jacobiovho* označenia.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}) = 0 \quad (2.8)$$

Zjednodušene povedané, jedná sa o rovnice, v ktorých sa okrem hľadanej funkcie premenných nachádzajú aj jej parciálne derivácie rôznych rádov podľa rôznych premenných. Tieto rovnice sa používajú hlavne na modelovanie rôznych, hlavne fyzikálnych, zákonitostí. Vystupujú všade tam, kde sa do úvahy berú rôzne fyzikálne veličiny, ktoré závisia na viacerých premenných a je teda možné očakávať, že daný matematický model bude v sebe používať parciálne derivácie hľadanej funkcie. Známymi modelmi, ktoré používajú parciálne diferenciálne rovnice sú napríklad **zákon zachovania hmoty**, **modelovanie šírenia tepla** alebo aj **matematický opis kmitania struny**. Ďalšie informácie k tejto téme sú dostupné v literatúre [11] a [6], [7].

Aj pri parciálnych diferenciálnych rovniciach existujú rôzne spôsoby, ktorými môžu byť zadané počiatočné podmienky pre výpočet. Obdobne, ako pri lineárnych diferenciálnych rovniciach, aj tu sa jedná o spôsob zadania pomocou Cauchyovej počiatočnej úlohy a o spôsob zadania pomocou úlohy s okrajovými podmienkami. Často sa tu však vyskytujú aj **zmiešané úlohy**, v ktorých sú zadané počiatočné aj okrajové podmienky.

Keď sa zameriame na Cauchyovu počiatočnú úlohu a obmedzíme sa hlavne na parciálne rovnice prvého a druhého rádu, tak pri parciálnych diferenciálnych rovniciach prvého rádu s rovnicou tvaru

$$u_x = f(x, y, z, u, u_y, u_z) \quad (2.9)$$

s hľadanou funkciou

$$u = u(x, y, z) \quad (2.10)$$

býva počiatočná podmienka daná požiadavkou na partikulárne riešenie u tak, aby pre pevné číslo $x = a$ platil vzťah

$$u(a, y, z) = \varphi(y, z) \quad (2.11)$$

kde daná funkcia φ závisí iba na argumentoch y a z . Pri parciálnych diferenciálnych rovniciach druhého rádu s rovnicou v tvare

$$u_{xx} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zz}) \quad (2.12)$$

s hľadanou funkciou

$$u = u(x, y, z) \quad (2.13)$$

býva počiatočná podmienka daná požiadavkou na partikulárny integrál u tak, aby pre pevné číslo $x = a$ platili dve rovnice

$$u(a, y, z) = \varphi(y, z) \quad (2.14)$$

$$u_x(a, y, z) = \psi(y, z) \quad (2.15)$$

kde dané funkcie ψ, φ závisia iba na argumentoch y a z .

Teraz sa však naskytla otázka, kedy tieto uvedené úlohy majú práve jedno riešenie, ktoré musí vyhovovať predpísaným počiatočným podmienkam. Ak bude takéto požadované

riešenie existovať, je zrejmé, že bude obecné riešenie parciálnej rovnice 2.9 závisieť na jednej ľubovoľnej funkcii s argumentmi y a z . Naproti tomu, obecné riešenie parciálnej rovnice 2.12 bude závisieť na dvoch ľubovoľných funkciách s argumentmi y a z . Existuje veta, ktorá hovorí o jednoznačnosti riešenia, táto veta je citovaná z literatúry [6] a nazýva sa **veta Sofie Vasilijevny Kovalovskej**.

Ak je funkcia f v rovnici 2.9 analytická na okolie bodu $P = [a, b, c, d_1, d_2, d_3]$ a ak je funkcia φ analytická na okolie bodu $Q = [b, c]$, potom na určitom okolí bodu $R = [a, b, c]$ existuje analytické riešenie danej úlohy s počiatočnou podmienkou 2.11, ktoré je v triede analytických funkcií jediné.

Ak je funkcia f v rovnici 2.12 analytická na okolie bodu $P = [a, b, c, d_1, d_2, \dots, d_9]$ a ak sú funkcie φ, ψ analytické na okolie bodu $Q = [b, c]$, potom na určitom okolí bodu $R = [a, b, c]$ existuje analytické riešenie danej úlohy s počiatočnými podmienkami 2.11 a 2.14, ktoré je v triede analytických funkcií jediné.

Keď sa pozrieme bližšie na riešenie (Cauchyovej) úlohy v rámci parciálnej diferenciálnej rovnice, tak ide o to, aby sme určili integrálnu plochu rovnice 2.26 (táto rovnica sa nachádza v nasledujúcej podkapitole) tak, aby prechádzala nejakou danou krivkou L , ktorá je daná parametrickými rovnicami

$$x = x_0(t) \quad (2.16)$$

$$y = y_0(t) \quad (2.17)$$

$$u = u_0(t) \quad (2.18)$$

pre $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Prvý integrál sústavy diferenciálnych rovníc $F(x, y)$ nech je v tvare

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)} \quad (2.19)$$

Zostrojme krivku, ktorá prechádza každým bodom $[x_0, y_0, z_0]$ na krivke L s nasledujúcou rovnicou

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) \quad (2.20)$$

pre $u = u_0$. Majme sústavu kriviek s rovnicou

$$F(x, y) = F(x_0(t), y_0(t)) \quad (2.21)$$

pre $u = u_0$. Za predpokladu, že parametrické funkcie 2.16, 2.17, 2.18 sú diferenciable a za predpokladu, že krivka L je rôzna od krivky 2.20, tak potom táto sústava kriviek predstavuje hľadanú integrálnu plochu. Jej rovnica sa dá určiť vylúčením parametra t z rovníc 2.21. Ak každým bodom krivky L prechádza práve jedna krivka sústavy, je táto integrálna plocha určená jednoznačne. Ak by nastal prípad, kedy by krivka L splývala s krivkou sústavy, mala by Cauchyova úloha nekonečne mnoho riešení, ktoré by sme získali tak, že by sme preložili každým bodom ľubovoľnej krivky K , ktorá pretína krivku L , krivku sústavy. Bližšie informácie k tejto téme sú dostupné v literatúre [11] a [6].

2.1.6 Typy parciálnych diferenciálnych rovníc

Keď sa zameriame na rovnicu 2.7, môžeme definovať **lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu**. Ak je parciálna diferenciálna rovnica v takom tvare ako rovnica 2.7 a pritom je ešte funkcia F lineárna vzhľadom k hľadanej funkcii z aj ku všetkým jej deriváciám, ktoré

sa nachádzajú v rovnici 2.7, pričom koeficienty v hľadanej funkcii z a v jej deriváciách závisia iba na argumentoch x_1, x_2, \dots a nie na funkcii z a jej deriváciách, potom označíme rovnicu 2.7 za lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu.

Môže sa stať, že funkcia F bude lineárna vzhľadom ku svojej najvyššej derivácii, napríklad rádu n , ak jej príslušné koeficienty závisia na funkcii z , prípadne na jej deriváciách až do rádu $n - 1$, potom je rovnica 2.7 nazývaná **kvázilineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou**. Kvázilineárnymi parciálnymi diferenciálnymi rovnicami prvého rádu sú teda rovnice s tvarom

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z) \quad (2.22)$$

kde P, Q, R sú dané funkcie argumentov x, y, z a neznáma funkcia je $z = z(x, y)$. Zvyčajne sa predpokladá, že funkcie P, Q, R sú spojité na niektoré trojrozmerné oblasti Ω , na ktoré P, Q nie sú zároveň identicky rovné nule. Kvázilineárna parciálna diferenciálna rovnica sa integruje tak, že sa určia dva na sebe nezávislé prvé integrály kanonickej sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc s tvarom

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (2.23)$$

Nehomogénnou lineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s neznámou funkciou $u = u(x, y)$ nazývame rovnicu tvaru

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y = C(x, y)u + D(x, y) \quad (2.24)$$

kde funkcie $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y)$ sú spojité na určitej dvojrozmernej oblasti Ω , v ktorej nie sú v žiadnom bode zároveň rovné nule. Ak pre všetky $[x, y]$ patriace Ω je

$$C(x, y) = D(x, y) = 0 \quad (2.25)$$

potom sa príslušná rovnica s tvarom

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y = 0 \quad (2.26)$$

nazýva **skrátenu homogénnou lineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu**.

Zameriame sa teraz na obecnú parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s dvoma argumentmi x a y . Táto rovnica bude mať nasledujúci obecný tvar

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_x z_x, z_x z_y, z_y z_y) = 0 \quad (2.27)$$

Táto rovnica bude lineárna ak bude v tvare

$$a_{11}z_{xx} + 2a_{12}z_{xy} + a_{22}z_{yy} + 2b_1z_x + 2b_2z_y + cz + d = 0 \quad (2.28)$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{22}, \dots, d$ sú spojito diferenciable funkcie argumentov x, y na určitom obore G , pričom

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| > 0 \quad (2.29)$$

Pre $d = 0$ sa jedná o **skrátenu lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu**. Pre $d \neq 0$ hovoríme o **neskrátenej (úplnej) lineárnej parciálnej diferenciálnej rovnici druhého rádu**. Majme danú lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu tvaru 2.28

a nech $M = [x, y]$ je ľubovoľný bod, ktorý musí byť pevný v obore G . Určíme hodnotu diskriminantu v bode M

$$\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

Rovnica 2.28 sa bude nazývať **hyperbolická parciálna diferenciálna rovnica v bode M** , ak v bode M platí vzťah $\delta > 0$. Rovnica 2.28 bude **parabolická**, ak $\delta = 0$ v bode M . Posledným možným typom v tomto delení je **eliptická parciálna diferenciálna rovnica v bode M** . Rovnica 2.28 je tohto typu, ak je splnená podmienka, že v bode M platí $\delta < 0$. Ak má diskriminant δ rovnaké znamienko v každom bode oboru G , potom hovoríme o hyperbolickej/parabolickej/eliptickej rovnici na obore G .

Táto diplomová práca sa bude ďalej zaoberať výhradne eliptickými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami a preto si práve tento typ parciálnych diferenciálnych rovníc bližšie rozoberieme. Ďalšie informácie k deleniu parciálnych diferenciálnych rovníc sa nachádzajú v literatúre [11],[6].

2.1.7 Eliptické parciálne diferenciálne rovnice

Existuje niekoľko oblastí, v ktorých sa eliptické parciálne diferenciálne rovnice používajú. Sú to hlavne oblasti, ktoré pracujú s modelmi, ktoré opisujú stacionárne, teda časovo ustálené stavy fyzikálnych systémov. Uplatňujú sa pri teórii pevnosti a pružnosti. Okrem fyzikálnych oblastí sa eliptické parciálne rovnice používajú aj pri práci s elektrickým a magnetickým poľom, takzvané Maxwellove rovnice. Bližšie informácie sa dajú nájsť v [11],[6].

Známym príkladom eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice je napríklad **Poissonova diferenciálna rovnica**, ktorá má nasledujúci tvar

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.31)$$

pričom Δ je takzvaný **Laplaceov operátor** definovaný ako

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (2.32)$$

Ďalším známym príkladom je **Laplaceova rovnica**

$$\Delta u = 0 \quad (2.33)$$

Laplaceova rovnica v rovine

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.34)$$

Laplaceova rovnica v priestore

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (2.35)$$

a **Helmholtzova rovnica**

$$u_{xx} + u_{yy} + a^2 u = 0 \quad (2.36)$$

Pri eliptických parciálnych diferenciálnych rovniciach sa môžeme stretnúť s **Dirichletovou počiatočnou úlohou** a **Neumannovou počiatočnou úlohou**. Dirichletovou počiatočnou úlohou pre Poissonovu rovnicu nazývame problém, ktorým je úloha na nájdenie riešenia tejto rovnice, ktorá nadobúda na hranici danej oblasti predpísané hodnoty. Formálne povedané, nech je daná oblasť Ω s hranicou S , nech je na S daná spojitá funkcia g . Hľadá sa taká funkcia u , ktorá je v Ω riešením Poissonovej rovnice, je spojitá v $\bar{\Omega}=\Omega + S$ a na S nadobúda predpísané hodnoty, ktoré sú dané funkciou g .

Neumannovou počiatočnou úlohou nazývame úlohu, ktorej cieľom je nájsť riešenie danej rovnice, ktoré je spojité vrátane prvých derivácií v $\bar{\Omega}$ a také, že na S nadobúda derivácia podľa vnútornej normály $\frac{\partial u}{\partial n}$ predpísané hodnoty dané spojitou funkciou h .

2.1.8 Riešenie diferenciálnych rovníc

Veľmi zaujímavé pri diferenciálnych rovniciach je získanie analytického riešenia. Čo v jednoduchosti znamená nájdenie funkcie, ktorá danú diferenciálnu rovnicu rieši. Niekedy sa však môže stať, že takúto funkciu nie sme schopní nájsť. Ak teda nie je možné takúto funkciu analyticky vyjadriť, je potom nutné použiť numerické metódy na riešenie diferenciálnych rovníc.

Riešenie diferenciálnej rovnice môžeme rozdeliť na dva spôsoby. Na **obecné riešenie**, ktoré obsahuje ľubovoľnú funkciu a takýchto riešení môže byť teda *ľubovoľne veľa*.

Druhým typom je **partikulárne riešenie**, v ktorom sa namiesto ľubovoľnej funkcie dosadí konkrétna funkcia a tým získame *práve jedno* riešenie.

2.1.9 Analytické riešenie diferenciálnych rovníc

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice znamená hľadanie riešenia zadanej funkcie pomocou postupnej aplikácie známych vzťahov. Ako už však bolo spomínané vyššie, analytické riešenie zložitejších diferenciálnych rovníc je vo väčšine prípadov veľmi zložitá alebo priam nemožná. Preto sa v tejto diplomovej práci zameriame na numerické metódy riešenia týchto rovníc.

Pre jednoduchšie vysvetlenie zložitosti analytického riešenia tu bude ukázané analytické riešenie jednoduchej diferenciálnej rovnice, kde sa na jej riešenie použijú známe vzťahy. Toto riešenie spolu so zadaním jednoduchej diferenciálnej rovnice a jej počiatočných podmienok je prebraté z mojej bakalárskej práce [8] a nachádza sa tu len pre jednoduchú ukážku zložitosti analytického riešenia diferenciálnych rovníc.

Zadanie riešenej jednoduchej diferenciálnej rovnice je nasledovné

$$y' + y = 0 \tag{2.37}$$

a táto diferenciálna rovnica má stanovenú počiatočnú podmienku

$$y(0) = 1 \tag{2.38}$$

Pri riešení rovnice 2.38 sa musí stanoviť takzvaná charakteristická rovnica, ktorá má nasledovný tvar

$$\lambda - 1 = 0 \tag{2.39}$$

Z tejto charakteristickej rovnice sme schopní základnými matematickými postupmi vypočítať, čomu je rovná λ .

$$\lambda = 1 \tag{2.40}$$

Následne, keď vieme túto hodnotu, dokážeme zostrojiť obecné riešenie rovnice, ktoré má nasledovný tvar

$$y = Ce^{\lambda t} \tag{2.41}$$

Funkcia, ktorá je v rovnici 2.41 reprezentovaná konštantou C , predstavuje nekonečné množstvo rovníc, ktoré je možné z tohto obecného riešenia odvodiť. Ak chceme ale toto obecné riešenie použiť v praxi, je nutné zistiť iba jedno konkrétne riešenie. Je teda nutné vybrať si jednu rovnicu z nekonečného množstva dostupných rovníc. Aby sme sa dostali k tomuto jednému konkrétnemu riešeniu, je nutné sa obrátiť teraz na počiatkové podmienky, ktoré boli k tejto diferenciálnej rovnici stanovené rovnicou 2.38. A keďže je stanovená počiatková podmienka, môže sa dosadiť do tohto obecného riešenia.

Zo zadanej počiatkovej podmienky je teda zrejmé, že

$$t = 0 \tag{2.42}$$

a teda po dosadení do obecného riešenia dostaneme nasledujúce vzťahy

$$1 = Ce^0 C = 1 \tag{2.43}$$

Keď sme dostali konkrétnu hodnotu pre konštantu C , je jasné, že sme dostali analytické riešenie rovnice, ktoré je po dosadení C nasledovné

$$y = e^t \tag{2.44}$$

Kapitola 3

Jednoduché metódy riešenia lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc druhého rádu

V tejto kapitole sa budeme venovať jednoduchým metódam, pomocou ktorých dokážeme riešiť niektoré lineárne parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu. Ako už bolo spomenuté vyššie, aj eliptické parciálne diferenciálne rovnice patria medzi lineárne parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu.

Bližšie údaje k jednotlivým typom, ktoré budú nasledovať sa nachádzajú v literatúre [6] aj s jednotlivými ukázkovými príkladmi riešenia.

3.1 Prvý typ

Prvým typom rovníc, s ktorými sa môžeme stretnúť sú rovnice s nasledujúcim tvarom

$$u_{xx} = 0, u_{yy} = 0 \quad (3.1)$$

Rovnice tohto typu riešime najčastejšie tak, že položíme

$$u_x = p = p(x, y) \quad (3.2)$$

potom získame

$$u_{xx} = p_x = 0, u_{xy} = p_y = 0 \quad (3.3)$$

3.2 Druhý typ

Druhým typom rovníc sú rovnice, ktoré majú tvar

$$u_{xx} = G(x, y), u_{yy} = G(x, y) \quad (3.4)$$

Tento typ rovníc sa rieši obdobne, ako typ v predchádzajúcej podkapitole. To znamená, že napríklad pre prvú rovnicu máme pre $u_x = p(x, y)$ rovnicu

$$p_x = G(x, y) \quad (3.5)$$

Z tejto rovnice dokážeme dostať integráciou podľa premennej x nasledujúcu rovnicu

$$p = \int G(x, y) dx + f(y) = u_x \quad (3.6)$$

Z tejto rovnice ďalšou integráciou podľa tej istej premennej x dostaneme nasledujúcu rovnicu, v ktorej f a g sú ľubovoľné funkcie argumentu y

$$u = \int \left[\int G(x, y) dx \right] dx + x f(y) + g(y) \quad (3.7)$$

3.3 Tretí typ

Tretí typ rovníc má nasledujúci tvar

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_x = F(x, y), A(x, y)u_{xy} + B(x, y)u_x = F(x, y) \quad (3.8)$$

Tento typ rovníc riešime tak, že položíme $u_x = p(x, y)$. Vďaka tomuto dostaneme z danej rovnice lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre funkciu $p = p(x, y)$. Analogicky sa riešia aj rovnice podobného typu a to s tvarom

$$A(x, y)u_{xy} + B(x, y)u_y = F(x, y), A(x, y)u_{yy} + B(x, y)u_y = F(x, y) \quad (3.9)$$

kde pomocou substitúcie $u_y = q(x, y)$ toto dokážeme previesť na lineárne obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu s funkciou $q = q(x, y)$.

3.4 Štvrtý typ

Predposledným podstatným typom je typ s rovnicami tvaru

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_x + F(x, y)u = G(x, y), A(x, y)u_{yy} + B(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y) \quad (3.10)$$

Tento typ rovníc predstavuje lineárne obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu argumentu x , prípadne argumentu y , ak považujeme druhý argument za parameter.

3.5 Piaty typ

Posledným dôležitým typom sú parciálne diferenciálne rovnice zapísané nasledujúco

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + K(x, y)u_x = F(x, y), A(x, y)u_{xy} + B(x, y)u_{yy} + K(x, y)u_y = F(x, y) \quad (3.11)$$

Tento typ rovníc predstavuje po substitúcii $u_x = p(x, y) = p$, prípadne po substitúcii $u_y = q(x, y) = q$, lineárne parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu pre neznámu funkciu p , prípadne pre neznámu funkciu q . Ak určíme jej obecný integrál s jednou ľubovoľnou funkciou, potom integráciou podľa argumentu x , poprípade podľa y , získame hľadanú funkciu u s druhou ľubovoľnou funkciou.

3.6 Ostatné typy

Môže sa stať, že sa stretne s parciálnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu, ktorá nemá tvar rovnice ani jedného uvedeného typu. V takomto prípade sa snažíme takúto rovnicu previesť na kanonický tvar a to pomocou vhodných substitúcií. Tento tvar potom riešime pomocou známych metód, prípadne pomocou metód, ktoré budú uvedené v nasledujúcom texte.

3.7 Fourierova metóda (metóda separácie premenných)

Pri tejto metóde hľadáme riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice v nasledujúcom tvare

$$u = X(x)Y(y) \quad (3.12)$$

v prípade ako

$$u = X(x) + Y(y) \quad (3.13)$$

To znamená, že sa hľadá tvar, v ktorom ide o súčin, prípadne súčet dvoch funkcií X a Y a zároveň každá z nich závisí na jednom argumente. Ak sa teda podarí, upraviť danú parciálnu diferenciálnu rovnicu pomocou substitúcie tak, že sa na jednej strane bude nachádzať funkcia len premennej x a na druhej strane sa bude nachádzať druhá funkcia len premennej y je logické, že taká rovnica môže existovať len ak sa obidve strany rovnajú nejakej rovnakej konštante. Z toho teda vyplýva, že v tomto prípade musia funkcie $X(x)$ a $Y(y)$ vyhovovať dvom príslušným obyčajným diferenciálnym rovniciam. Je dobré poznamenať, že táto metóda sa nepoužíva len pri parciálnych diferenciálnych rovniciach druhého rádu, ale aj pri rovniciach prvého a dokonca aj vyšších rádov.

3.8 Ostatné známe metódy

Existuje ešte niekoľko metód pomocou ktorých sa dajú riešiť parciálne diferenciálne rovnice. Je to napríklad **metóda vlastných funkcií**, ktorá je vlastne zobecnením Fourierovej metódy. Ďalej sa dá použiť **metóda exponenciálnej substitúcie** pri riešení lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Táto metóda slúži k určeniu partikulárnych riešení rovnice. Tieto metódy nebudú rozoberané podrobnejšie, lebo nie sú náplňou tejto diplomovej práce.

Kapitola 4

Numerické riešenie diferenciálnych rovníc

V tejto kapitole sa zameriame na numerické postupy, ktoré nám pomáhajú riešiť diferenciálne rovnice. Numerické metódy však danú funkciu len aproximujú, čo znamená, že získame body, ktorými táto funkcia prechádza. Avšak pri aproximácii vzniká jeden nechcený jav a to taký, že dochádza k nepresnostiam a tým sa dostávame k nepresným výsledkom v porovnaní s analytickým riešením. Aj výpočty pomocou týchto metód bývajú časovo veľmi náročné, rovnako ako je tomu pri analytickom riešení, avšak výhodou numerického riešenia je, že vďaka týmto metódam sme schopní vypočítať aj zložité diferenciálne rovnice.

Pre všetky nasledujúce numerické metódy platí, že sa riešenie hľadá iba v konečnom počte uzlových bodov a nie na celom skúmanom intervale. Aj pri tejto kapitole sa informácie čerpali z literatúry [8], [11],[6],[5] a [9], [4].

4.1 Typy numerických metód

Aj pri numerických metódach rozlišujeme niekoľko typov. Tieto typy sa delia hlavne podľa toho, aké informácie používame na výpočet nasledujúcich hodnôt. Ak pri výpočte nasledujúcej hodnoty používame iba informácie z jedného predchádzajúceho bodu jedná sa o **metódu jednokrokovú**. Ak na výpočet nasledujúcej hodnoty používame informácie z viacerých predchádzajúcich krokov, ide o **metódu viackrokovú**.

Presnosť riešenia pri numerických metódach závisí na dĺžke kroku h , ktorý sa na výpočet použije. Keď sa spomína presnosť riešenia, je nutné poznamenať, že existujú dva typy chýb, ktoré pri numerických metódach rozlišujeme. Prvým typom je **chyba aritmetická** a druhým typom je **chyba metódy**. Čím menší je zadaný krok h , tým je menšia chyba metódy, ale zároveň je tým väčšia aritmetická chyba. Naproti tomu, čím väčšie je h , tým je menšia aritmetická chyba, ale zase je väčšia chyba metódy. Veľmi dôležitým bodom pri numerických metódach je, že od použiteľnej numerickej metódy požadujeme, aby numerické riešenie získané touto metódou pre nejaký krok h konvergovalo k presnému riešeniu danej riešenej úlohy.

4.2 Jednokrokové metódy

4.2.1 Eulerova metóda

Majme zadanú pravidelnú sieť x_0, x_1, \dots, x_n s krokom h . Krok h vypočítame ako rozdiel hodnoty predchádzajúcej a hodnoty aktuálnej. Teda formálne sa krok h vypočíta

$$h = x_{i+1} - x_i \quad (4.1)$$

Pri tejto metóde vychádzame z počiatočného bodu $[x_0, y_0]$. Z tohto zadaného bodu sa pohybuje po priamke, pričom vychádzame z predpokladu, že pri použití malého kroku sa funkcia bude približovať priamke. Táto priamka bude mať rovnicu

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \quad (4.2)$$

kde $f(x_0, y_0)$ je smernica priamky. Týmto smerom ideme, až pokiaľ nedôjdeme do bodu s x -ovou súradnicou x_1 . Ypsilonová súradnica tohto bodu bude

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (4.3)$$

Z bodu $[x_1, y_1]$ pokračujeme opäť smerom, ktorý udáva smernica priamky v tomto bode. Z tohto vieme odvodiť vzorec pre Eulerovu metódu, ktorý je teda nasledovný

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (4.4)$$

4.2.2 Runge-Kuttové metódy

Tieto metódy patria medzi najdôležitejšie jednokrokové metódy. Nasledujúce dve metódy sú modifikácie Eulerovej metódy.

Prvá modifikácia:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (4.5)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (4.6)$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 \quad (4.7)$$

Druhá modifikácia:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (4.8)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \quad (4.9)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \quad (4.10)$$

Najznámejšou metódou z metód Runge-Kutta je metóda 4. rádu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.11)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (4.12)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (4.13)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (4.14)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (4.15)$$

Metódy Runge - Kutta nepotrebuju dodatočné počiatkové hodnoty a krok integrácie je možné ľubovoľne meniť. Tieto metódy majú veľký význam na získanie počiatkových hodnôt viackrokových metód. Pri riešení na celom intervale sú niekedy menej vhodné ako viackrokové metódy, z ktorých niektoré sú popísané v nasledujúcej podkapitole.

4.3 Viackrokové metódy

4.3.1 Metóda Adams-Bashforth

Táto metóda sa počíta podľa vzorca:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (4.16)$$

Na začiatku počítania je nutné použiť jednokrokovú metódu.

Koeficienty je možné odvodiť pomocou Newtonovho interpolačného polynómu, ktorý má tvar

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) \quad (4.17)$$

a potom sa musia definovať pomerné diferencie

$$P[x_i] := y_i \quad (4.18)$$

$$P[x_i, x_{i+1}] := \frac{(P[x_{i+1}] - P[x_i])}{(x_{i+1} - x_i)} \quad (4.19)$$

pričom $a_i = P[x_0, x_1, \dots, x_i]$.

4.3.2 Taylorova rada

Taylorova rada má obecný tvar:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i + \frac{h^3}{3!}y'''_i + \dots + \frac{h^n}{n!}y_i^{(n)} \dots \quad (4.20)$$

Jej nevýhodou je, že potrebujeme vedieť hodnoty vyšších derivácií. Lenže vyššie derivácie sa dajú vypočítať rekurzívne, čo nám umožňuje prepísať tento obecný tvar. Nasledujúci príklad je prebratý z literatúry [8], keďže táto práca sa celá zaoberala práve touto metódou.

Ak by sme mali teda napríklad rovnicu

$$y' = y \quad (4.21)$$

tak by sme vedeli zapísať členy tejto metódy v rekurzívnom tvare nasledovne:

$$y_{i+1} = Y0_i + Y1_i + Y2_i + \dots + Yn_i \quad (4.22)$$

kde premenné $Y0_i, Y1_i, Y2_i, \dots, Yn_i$ majú nasledujúce hodnoty:

$$Y0_i = y_i \quad (4.23)$$

$$Y1_i = Y0_i * h \quad (4.24)$$

$$Y2_i = Y1_i * \frac{h}{2} \quad (4.25)$$

$$: Yn_i = Y(n-1)_i * \frac{h}{n} \quad (4.26)$$

Každá nasledujúca derivácia sa dá vypočítať z predchádzajúcej hodnoty.

Táto metóda je zaujímavá aj ako metóda na riešenie diferenciálnej rovnice s viacerými premennými. Keď sa zameriame na dvojprvkovú rovnicu, napríklad na rovnicu

$$z = f(x, y) \quad (4.27)$$

s bodom (x_0, y_0) , dostaneme nasledujúci vzťah pre Taylorovu metódu s dvomi premennými

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x-x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!} (x-x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2!} (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots \quad (4.28)$$

4.4 Numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc

Ďalšie rozširujúce informácie k numerickému riešeniu parciálnych diferenciálnych rovníc je k dispozícii v literatúre [11],[6] a [5], [7], [10], [4].

4.4.1 Metóda sietí (metóda konečných diferencií)

V dnešnej dobe je asi jednou z najpoužívanějších metód na numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc. Jej význam sa ešte zvyšuje používaním modernej výpočtovej techniky. Táto metóda sa používa hlavne pri počítaní lineárnych diferenciálnych rovníc, ale bolo dokázané, že je možné túto metódu použiť na riešenie akýchkoľvek typov parciálnych diferenciálnych rovníc.

Základný princíp tejto metódy spočíva v tom, že v oblasti, v ktorej hľadáme riešenie danej parciálnej diferenciálnej rovnice, zvolíme nejakú konečnú množinu bodov. To znamená, že danú oblasť pokryjeme dostatočne hustou sieťou, ktorá sa skladá z vlákien. Tieto vlákna sú reprezentované krivkami. Pretínajú sa v konečnom počte takzvaných uzlových bodov, pričom je nutné v jednotlivých uzloch nahradiť parciálne derivácie hľadanej funkcie príslušnými diferenčnými podielmi. Diferenčný podiel je chápaný ako lineárna kombinácia funkčných hodnôt v danom bode a v niekoľkých okolitých bodoch, ktorá danú deriváciu aproximuje a ktorá vznikne tak, že hodnotami hľadanej funkcie v niekoľkých uzloch preložíme interpolačný polynóm a vypočítame jeho deriváciu. Touto náhradou sa teda vyjadří riešený problém pomocou sústavy algebraických rovníc, ktorá má konečný počet neznámych približných hodnôt tejto funkcie v uvedených uzlových bodoch siete. Takáto získaná sústava sa potom rieši pomocou vhodných numerických metód a tým sa dostaneme k približnému vyjadreniu hľadanej funkcie.

Poznáme niekoľko druhov sietí, pomocou ktorých môžeme vyplniť oblasť, s ktorou pracujeme. Podľa počtu rozmerov delíme tieto siete na **dvojrozmerné, trojrozmerné a viacrozmerné**. Pri ďalšom výklade sa zameriame na **rovinné priamkové siete**, ktorých vlákna sú priamky v rovine. Podľa tvaru rovinatej priamkovej siete sa siete delia na **pravouhlé**, ktoré dnes patria medzi prakticky najpoužívanjšie, lebo ako uzly v nich berieme priesečníky rovnobežiek s osami súradníc. Ďalej sú to **kosouhlé rovnobežníkové, šesťuholníkové a trojuholníkové, nepravidelné**, čo sa tvaru aj veľkosti týka. Najčastejšie sa používajú štvorcové, prípadne obdĺžnikové siete, ktoré spadajú pod siete pravouhlé. Používajú sa najčastejšie preto, lebo sú z praktického hľadiska najvýhodnejšie, hlavne čo sa týka odhadu chyby.

4.4.2 Odhad chyby pri metóde sietí

Pri tejto metóde ide o pomerne zložitý problém a to vzhľadom k tomu, že tu existujú dva dôležité zdroje chyby. Prvým zdrojom chyby je nahradenie parciálnych derivácií príslušnými diferencnými podielmi (diferenciami), táto chyba sa tiež nazýva **chyba prvého druhu**. Druhým zdrojom je riešenie sústavy algebraických rovníc pomocou aproximáciej metódy, toto je **chyba druhého druhu**. Hrubú orientáciu o celkovej chybe sme schopní získať pomocou veľkosti lokálnej chyby, teda chyby prvého druhu. Väčšina **apriórnych odhadov** je skôr príliš pesimistická a teda skoro nepoužiteľná. Apriórny odhad chyby predstavuje odhad, ktorý sa dá vytvoriť ešte pred začatím výpočtu.

V mnohých prípadoch sa dá prakticky celkom jednoducho urobiť odhad chyby pomocou takzvanej **Rungovej metódy polovičného kroku**. Nech je teda rád chyby n . Zvyčajne to je rád presnosti, s ktorou je aproximovaný diferenciálny operátor daným diferencným operátorom tak, že platí vzťah

$$\varepsilon_h(x, y) = u(x, y) - u_h(x, y) = \alpha(x, y)h^n + o(h^n) \quad (4.29)$$

kde u je presné riešenie, u_h je približné riešenie pri stanovenom kroku h . Potom pre chybu ε_h platí vzorec

$$\varepsilon_h(x, y) = \frac{2^n}{2^n - 1} (u_{\frac{h}{2}}(x, y) - u_h(x, y)) + o(h^n) \quad (4.30)$$

kde $u_{\frac{h}{2}}$ znamená približné riešenie pri polovičnom kroku $\frac{h}{2}$. Aby sme teda získali takýto odhad chyby je nutné riešiť daný problém dvakrát. Tento uvedený vzorec je typickým príkladom **aposteriórneho odhadu chyby**.

4.4.3 Aposteriórny odhad chyby použitý pri tejto diplomovej práci

V tejto diplomovej práci bude použitý aposteriórny odhad chyby, ktorý vo vytvorenej mriežke počíta v každom vrchole gradient. Tento gradient je vlastne derivácia v x a v y . Bude sa to počítať pomocou metódy priamok s presnosťou $O(h)$ a pomocou metódy váženého priemeru derivácií s presnosťou $O(h^2)$.

$$\iint_{\Omega} (u_{xyx} - \Pi[u_x])^2 dx dy \quad (4.31)$$

$$\iint_{\Omega} (u_{xyy} - \Pi[u_y])^2 dx dy \quad (4.32)$$

Pričom v tomto vzorci $\Pi[u_x]$ prípadne $\Pi[u_y]$ predstavuje lineárny interpolant funkcie u , čo je po častiach spojitá lineárna funkcia, ktorá vo vrchoch nadobúda funkciu u . Ďalej sa vo vzorci nachádzajú funkcie u_{xyx} a u_{xyy} , ktoré predstavujú funkcie derivácie funkcie u . Z čoho vyplýva, že interpolant týchto funkcií je znovu po častiach spojitá funkcia. Rovnica 4.31 predstavuje aposteriórny odhad chyby podľa x a rovnica 4.32 predstavuje aposteriórny odhad chyby podľa y .

Tento aposteriórny odhad chyby aproximuje chybu riešenia. Je teda možné identifikovať elementy s veľkou chybou a na základe toho zjemniť mriežku.

4.4.4 Zjemňovanie a zhusťovanie mriežky

Presnosť aproximácie závisí z veľkej časti na hustote siete, pri zhusťovaní siete však rastie numerická zložitosť výpočtu, preto je dobré zhusťovať sieť iba v miestach, kde nás vysoká presnosť približného riešenia skutočne zaujíma.

Zjemňovanie mriežky sa používa na zmenšenie chyby výpočtu. Mriežka sa zjemňuje hlavne na miestach, kde sa vypočítala príliš veľká chyba, teda chyba, ktorá prekračuje nejakú stanovenú hranicu. Toto zjemnenie mriežky môže výrazne ovplyvniť výsledky riešenia.

Kapitola 5

Analýza požiadaviek programu

Pri tejto diplomovej práci sa bude pracovať s eliptickými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami, ktoré budú riešené pomocou metódy sietí. Vytvorená sieť sa bude zjemňovať pomocou aposteriórneho odhadu chyby. Tento postup riešenia bol bližšie popísaný v predchádzajúcej kapitole.

V tejto kapitole budú ďalej popísané požiadavky na vstupné dáta systému a na výsledný program. Celá táto kapitola sa opiera o znalosti popísané v predchádzajúcich kapitolách.

5.1 Analýza zadania

Zameriame sa na Poissonovu rovnicu s okrajovými podmienkami. Teda na Dirichletovu počiatočnú úlohu. Pracovať budeme na dvojrozmernej oblasti, konkrétne sa obmedzíme na obdĺžnikovú oblasť. Budeme sa teda snažiť riešiť rovnicu, ktorá bude mať nasledujúci tvar

$$\Delta u = f(x, y) \tag{5.1}$$

v $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$ a zároveň $u = g(x, y)$ na hranici obdĺžnika.

V tejto rovnici premenné a, b predstavujú kladné reálne čísla, ktoré znázorňujú rozmery obdĺžnikovej oblasti. Funkcia $f(x, y)$ je funkcia pravej strany a funkcia $g(x, y)$ je zadaná okrajová podmienka. Zo zadania je zrejmé, že sa na riešenie musí použiť metóda sietí, ktorá bola popísaná v predchádzajúcej kapitole.

Začiatok riešenia začneme vykonávať na počiatočnej triangulácii, ktorá bude tvorená niekoľkými obdĺžnikmi, ktoré musia pokrývať oblasť, s ktorou pracujeme. To znamená, že sa stanovena obdĺžniková oblasť, v ktorej sa má vykonávať výpočet, rozdelí na niekoľko menších obdĺžnikov. Počet týchto obdĺžnikov bude spresnený pri programovacej časti. Keď bude oblasť popísaná mriežkou, vyrieši sa zadaná Poissonova rovnica. Pre upresnenie je dobré si vysvetliť, čo sa skrýva pod pojmom triangulácia. Označme si T element, ktorý môže byť trojuholníkom alebo obdĺžnikom. V našom prípade sa zameriame na obdĺžniky. Systém T_h týchto elementov nazveme trianguláciou na Ω pričom $\bigcup_{T \in T_h} T = \bar{\Omega}$, ak 2 rôzne elementy majú disjunktné oblasti a niektorá strana elementu je taktiež stranou iného elementu alebo podmnožinou hranice $\partial\Omega$.

Keď sa dopracujeme k určitému výsledku, nasleduje ďalšia fáza výpočtu. Touto fázou je aposteriórny odhad chyby. To znamená, že v každom uzlovom bode mriežky sa vypočítajú gradienty. Jeden gradient sa vypočíta lineárne pomocou metódy priamky a druhý gradient sa vypočíta bilineárne pomocou metódy váženého priemeru. Tieto dva gradienty sa potom od seba odpočítajú, urobí sa druhá mocnina tohto výsledku a spraví sa nad ním dvojitý

integrál podľa vzorca 4.31. V prípade obdĺžnika je výpočet tohto integrálu jednoduchý. Ide len o to, aby sa od seba odčítali tieto gradienty a vynásobili sa plochou obdĺžnika.

Keď je pre každý uzlový bod vypočítaný aposteriórny odhad chyby, podľa týchto chýb sa zoradia jednotlivé obdĺžniky a ten ktorý má najväčšiu chybu sa rozdelí na polovicu. Čo je veľmi podstatné pri tomto delení, je to, aby všetky obdĺžniky, ktoré sa v danom kroku budú deliť, rozdelili podľa jednej osi, teda podľa x alebo podľa y . Keby sa jednotlivé obdĺžniky delili na polovicu podľa ľubovoľnej osi, mohlo by sa stať, že by nám začali vznikáť trojuholníky, čo pre nás momentálne nie je prípustné. Keďže sa v danom kroku všetky obdĺžniky, ktoré je nutné rozdeliť na polovicu, rozdelia podľa rovnakej osi, je zaručené, že výsledkom delenia budú vždy obdĺžniky.

Tým, že sa jednotlivé obdĺžniky, ktorých aposteriórny odhad chyby je príliš veľký, budú deliť na polovicu, bude tak dosiahnuté zjemňovanie mriežky. Keď sa teda dané obdĺžniky rozdelia a tým sa zjemní mriežka oblasti, zaháji sa výpočet Poissonovej rovnice odznovu, ale na zjemnenej mriežke.

Z toho vyplýva, že výpočet Poissonovej rovnice, výpočet aposteriórnych odhadov chýb pre každý uzlový bod mriežky, zoradenie jednotlivých obdĺžnikov mriežky na základe aposteriórneho odhadu chyby a zjemnenie mriežky sa bude opakovať, až kým sa nedosiahne požadovanej presnosti riešenia. A keď sa táto presnosť dosiahne, dostaneme sa tým pádom aj k finálnemu výsledku eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice.

5.2 Analýza implementačnej časti

Pred začiatkom vytvárania programu bolo nutné predstaviť si, čo všetko bude musieť program zvládať a s čím bude musieť pracovať. Môj pôvodný plán bol postavený na jazyku C++, neskôr som sa však rozhodla pracovať s jazykom C. Táto zmena plánu nastala, kvôli väčším skúsenostiam s jazykom C. Táto podkapitola však patrí analýze požiadaviek programu, tak sa zameriame hlavne na to.

V prvom rade, bude musieť program nejakým spôsobom prijímať vstupné údaje. Keďže by bolo asi dosť komplikované, keby sa okrajové podmienky a samotná rovnica zadávali z konzolového vstupu alebo zo súboru, kvôli komplikovanému parsovaniu reťazca, vstupné rovnice popisujúce štyri okrajové podmienky a vstupná rovnica na riešenie, sa budú zadávať priamo úpravou kódu programu. Časť, v ktorej sa tieto údaje majú upraviť sú zvýraznené blokovým komentárom a nachádzajú sa hneď na začiatku zdrojového kódu. Ďalšími vstupnými údajmi sú rozmery obdĺžnikovej oblasti, s ktorou sa bude pracovať. Tieto rozmery sa už načítavajú z konzolového vstupu, kde výpisy v konzolovom okne navádzajú užívateľa čo má robiť a ktorá súradnica je momentálne očakávaná. Toto sú všetky vstupné údaje, ktoré program bude potrebovať na svoju prácu.

Keď program získa vstupné údaje, musí vypočítať počiatočné súradnice pre os x a pre os y . Je logické, že sa tieto súradnice budú zaznamenávať do dvoch polí. Jedno pole bude reprezentovať os x a druhé os y . Keďže sa súradnice oboch os budú v priebehu výpočtu meniť, budú musieť byť tieto polia dynamického typu. Ďalšie štyri polia budú musieť reprezentovať vypočítané okrajové podmienky pre dané súradnice. Keďže sa pri výpočte budú používať súradnice, ktoré majú dynamický charakter, aj tieto polia musia byť dynamicky definované. Pre všetky tieto polia bude musieť byť teda implementovaná funkcia, ktorá ich bude po každom výpočetnom prechode realokovať. Ďalšie pole, tento krát dvojrozmerné, sa bude určite používať na výpočet hodnôt vstupnej funkcie pre každý bod mriežky. S týmito hodnotami sa bude počítať a prebiehať celý výpočet. Ďalšie potrebné dátové štruktúry a údaje sa pravdepodobne prejavajú až v priebehu implementácie.

Kapitola 6

Návrh riešenia

V tejto kapitole bude podrobne popísaný návrh riešenia, ktorý sa v konečnom dôsledku implementoval a vytvorila sa tak finálna implementačná časť tejto diplomovej práce. Budú tu postupne popísané kroky, ktorými sa program postupne dostáva k optimálnemu riešeniu.

6.1 Inicializačná časť

Ako bolo spomenuté v predchádzajúcej kapitole, vstupné rovnice sa budú zadávať úpravou zdrojového kódu a ostatné vstupné parametre cez konzolový vstup. V prvom rade teda musí byť program schopný tieto informácie zo vstupu načítať. Najprv sa načítavajú prvé dve hodnoty oddelené enterom. Tieto dve hodnoty predstavujú interval na mriežke pre os x . Rovnakým spôsobom sa následne zadávajú ďalšie dve hodnoty, ktoré predstavujú interval na mriežke pre os y .

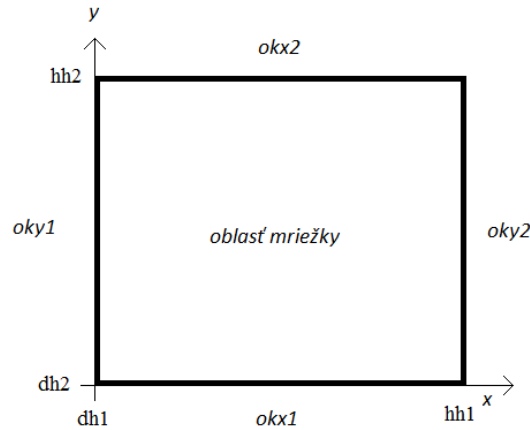
Potom sa naplnia dve globálne premenné $i1$ a $i2$ hodnotou 1. Tieto premenné predstavujú počet vnútorných bodov na mriežke. V prvom kroku výpočtu to bude len jeden bod, pretože mriežku rozdelíme na 4 rovnaké obdĺžniky. Následne sa alokujú dva polia, do ktorých sa vypočítajú počiatkové súradnice. V tomto bode výpočtu je zrejmé, že keď máme zadané rozsahy hodnôt pre x a pre y a vieme, že chceme mať len jeden vnútorný uzol na mriežke, tak že výpočet jeho súradníc je veľmi jednoduchý. Pre súradnicu na ose x je to súčet prvých dvoch zadaných hodnôt podelený číslom 2 a pre y je to súčet druhých dvoch hodnôt podelený číslom 2. Prvé dve zadané hodnoty si pre prehľadnosť a zmysluplnosť textu pomenujeme ako $dh1$ a $hh1$ a druhé dve hodnoty ako $dh2$ a $hh2$. Pričom dh znamená dolná hranica a hh znamená horná hranica. Keď sme vypočítali súradnice jediného vnútorného bodu, naplnia sa dve dynamické polia hodnotami súradníc. V prvom poli s názvom $ssur1$ sa budú nachádzať x -ové súradnice a v poli $ssur2$ y -ové. Pri počiatkovej inicializácii budú mať obidva tieto polia 3 prvky a to nasledujúce. V poli $ssur1$ sa na indexe 0 nachádza hodnota $dh1$, na indexe 1 hodnota

$$\frac{dh1 + hh1}{2} \tag{6.1}$$

a na indexe 2 sa bude nachádzať hodnota $hh1$. Presne takto isto bude naplnené aj pole $ssur2$, jediný rozdiel bude, že sa bude naplňať hodnotami $dh2$ a $hh2$.

Keď sa vypočítajú počiatkové súradnice, je nutné vypočítať okrajové podmienky. Preto sa alokujú 4 dynamické polia, kde každé pole predstavuje okrajové podmienky pre niektorú os pri hraničnom nastavení niektorej súradnice. Vytvorila sa teda 4 polia s názvami $okx1$, $okx2$, $oky1$, $oky2$. V poli $okx1$ budú uložené okrajové podmienky pre x -ovú os pri y -ovej

súradnici nastavenej na $dh2$. V poli $okx2$ budú uložené okrajové podmienky pre x -ovú os pri y -ovej súradnici nastavenej na $hh2$. V poli $oky1$ budú okrajové podmienky pre y -ovú os pri x -ovej súradnici nastavenej na $dh1$ a v poli $oky2$ budú okrajové podmienky pre y -ovú os pri x -ovej súradnici nastavenej na $hh1$. Aby sa to lepšie predstavovalo, nasleduje obrázok, ktorý to znázorňuje graficky.



Obrázok 6.1: Grafická reprezentácia pozície polí okrajových podmienok v rámci mriežky

Funkcia na výpočet okrajových podmienok bude len jedna. Ako parameter sa jej bude predávať číslo od 1 do 4 podľa toho, ktoré okrajové podmienky sa majú naplniť. Teda napĺňanie polí pre okrajové podmienky bude prebiehať v cykle, ktorý bude napĺňať premennú od jednotky po štvorku a volať funkciu na výpočet okrajových podmienok s jedným parametrom a to práve touto premennou. Funkcia na výpočet podľa tohto čísla bude vedieť, ktoré zo štyroch polí má naplniť a podľa ktorej funkcie. Toto bude riešiť jednoduchá podmienka typu switch-case.

V tejto podkapitole bola popísaná celá inicializačná časť, ktorá je nutná na to, aby mohol výpočet zadanej parciálnej diferenciálnej rovnice začať.

6.2 Sústava rovníc popisujúca body na mriežke

V tejto podkapitole sa budeme venovať funkcii, ktorá bude vytvárať sústavu n rovníc o n neznámych. Táto sústava bude popisovať jednotlivé body na mriežke, okrem okrajových bodov. Počet vnútorných bodov na mriežke si vieme vypočítať ako $i1 * i2$, pričom $i1$ je počet vnútorných bodov v smere osi x a $i2$ je počet vnútorných bodov v smere osi y . Táto sústava rovníc sa bude ukladať do dvojrozmerného poľa s veľkosťou $(i1 * i2) \times (i1 * i2 + 1)$. Je zrejmé, že keďže sa hodnoty premenných $i1$ a $i2$ budú v priebehu výpočtu meniť, aj toto pole musí byť definované dynamicky.

Každý riadok tejto matice bude predstavovať jednu rovnicu. Každý stĺpec tejto matice bude predstavovať určitú premennú. Napĺňanie matice bude prebiehať podľa vzťahu, ktorý si teraz odvodíme. Ak si bod, pre ktorý ideme vypočítať jeho popisnú rovnicu nazveme X , bod, ktorý sa nachádza na ľavej strane od neho nazveme L , bod napravo P , nad ním H a pod ním D , dokážeme potom vypočítať prvú deriváciu v bode X pre x . Najprv si pre zjednodušenie predstavme, že medzi bodmi X a L rovnako aj medzi X a P je rovnaká vzdialenosť, teda používame rovnaký krok h . Platí teda nasledujúci vzťah, ktorý popisuje

rovnica 6.2.

$$x_X - x_L = x_P - x_X = h \quad (6.2)$$

Prvá derivácia v bode X má teda nasledujúci tvar.

$$u'(X) = \frac{u(X) - u(L)}{h} \quad (6.3)$$

Pre tento bod však prvú deriváciu vieme vypočítať aj iným vzťahom a ten popisuje rovnica 6.4.

$$u'(X) = \frac{u(P) - u(X)}{h} \quad (6.4)$$

Druhú deriváciu podľa premennej x vypočítame ako rozdiel rovnice 6.3 a rovnice 6.4, to celé podelené dĺžkou kroku. Keď si to teda prepíšeme do jedného vzťahu dostaneme nasledujúcu rovnicu.

$$u''(X) = \frac{\frac{u(P)-u(X)}{h} - \frac{u(X)-u(L)}{h}}{h} \quad (6.5)$$

Pričom si dokážeme rovnicu 6.5 prepísať do prehľadnejšieho tvaru.

$$u''(X) = \frac{u(P) - 2u(X) + u(L)}{h^2} \quad (6.6)$$

Ak si predstavíme, že aj v smere y -ovej osi máme definovaný rovnaký krok h , tak dokážeme vypočítať prvú deriváciu aj druhú deriváciu podľa y rovnako, ako tomu bolo pre x . Dostaneme teda nasledujúce rovnice.

$$u'(X) = \frac{u(X) - u(D)}{h} \quad (6.7)$$

$$u'(X) = \frac{u(H) - u(X)}{h} \quad (6.8)$$

$$u''(X) = \frac{u(H) - 2u(X) + u(D)}{h^2} \quad (6.9)$$

Pri pohľade na tieto rovnice je zrejmé, že rovnica 6.7 pre y odpovedá rovnici 6.3 pre x , rovnica 6.8 pre y odpovedá rovnici 6.4 pre x a rovnica 6.9 pre y odpovedá rovnici 6.6 pre x .

Keď máme takto definované druhé derivácie pre počítaný bod, dokážeme zostaviť rovnicu, ktorá bude tento bod popisovať. Rovnica bude mať nasledovný tvar.

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}(u(P) + u(L) + u(H) + u(D) - 4u(M)) \quad (6.10)$$

Týmto sme si predstavili spôsob vytvorenia popisujúcich rovníc pre jednotlivé vnútorné body na mriežke keby sme mali definovaný rovnaký krok h medzi všetkými bodmi na mriežke, či už v smere osi x , či už v smere osi y . Pri tejto diplomovej práci sa však s pevne stanoveným a rovnakým krokom nepracuje, pretože sa obdĺžniky budú podľa vypočítanej chyby postupne znižovať, čiže krok medzi bodmi sa bude meniť. Preto je nutné vytvoriť vzťahy, ktoré budú pracovať na rovnakom princípe aký bol spomenutý doteraz, ale budú

používať ľubovoľné kroky medzi bodmi. Z tohto dôvodu si teraz prepíšeme rovnice 6.3, 6.4, 6.6, 6.7, 6.8 a 6.9 tak, že bude platiť nasledujúci vzťah.

$$x_X - x_L \neq x_P - x_X \quad (6.11)$$

$$y_X - y_D \neq y_H - y_X \quad (6.12)$$

Pre prvú deriváciu podľa x dostaneme tieto vzťahy.

$$u'(X) = \frac{u(X) - u(L)}{x_X - x_L} \quad (6.13)$$

$$u'(X) = \frac{u(P) - u(X)}{x_P - x_X} \quad (6.14)$$

Pre druhú deriváciu dostaneme vzťah popísaný nasledujúcou rovnicou.

$$u''(X) = \frac{\frac{u(P)-u(X)}{x_P-x_X} - \frac{u(X)-u(L)}{x_X-x_L}}{x_P - x_X} \quad (6.15)$$

$$u''(X) = \frac{(x_X - x_L)(u(P) - u(X)) - (x_P - x_X)(u(X) - u(L))}{(x_P - x_X)(x_X - x_L)(x_P - x_X)} \quad (6.16)$$

Toto sú rovnice platné pre derivácie podľa x . Je zrejmé, že derivácie podľa y budú mať rovnice totožné, len tam, kde sa v predchádzajúcich rovniciach nachádzajú písmená L a P sa budú nachádzať písmená D a H a nebude sa používať rozdiel x -ových súradníc, ale y -ových. Preto tieto rovnice už nebudem uvádzať. Teraz bude nasledovať prepísaná rovnica 6.10 do takéhoto tvaru.

$$\Delta u = \frac{(x_X - x_L)(u(P) - u(X)) - (x_P - x_X)(u(X) - u(L))}{(x_P - x_X)(x_X - x_L)(x_P - x_X)} + \frac{(y_X - y_D)(u(H) - u(X)) - (y_H - y_X)(u(X) - u(D))}{(y_H - y_X)(y_X - y_D)(y_H - y_X)} \quad (6.17)$$

Pomocou tohto vzťahu sa teda pre každý vnútorný bod vytvorí rovnica, ktorá ho popisuje. Funkcia, ktorá vytvára tieto rovnice a ukladá ich do dvojrozmerného poľa je rozdelená na niekoľko častí. Rozdelená na niekoľko častí je z toho dôvodu, že môže nastať niekoľko možných stavov, ktoré treba riešiť rozdielne. Funkcia sa delí podľa osi x . Podmienka rozdeľuje možnosti na nasledujúce stavy:

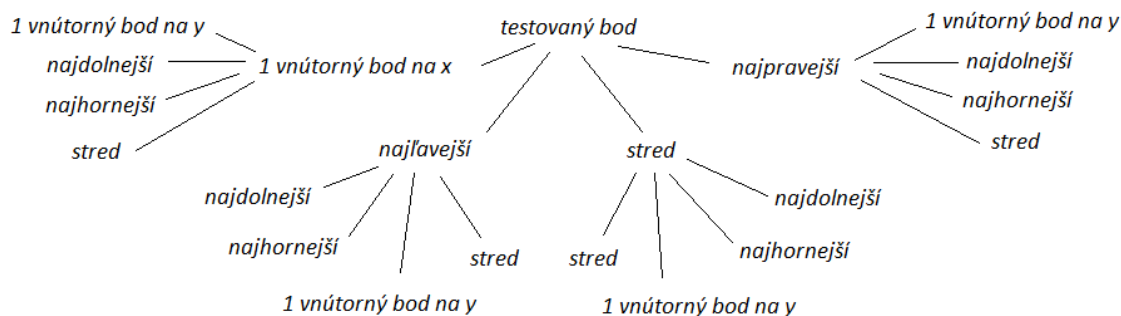
- na osi x sa nachádza len 1 pás vnútorných bodov
- na osi x pracujeme s najľavejšími vnútornými bodmi
- na osi x pracujeme s najpravejšími vnútornými bodmi
- na osi x pracujeme s niektorým zo stredových bodov (to znamená, že nie je ani, pravý ani ľavý)

Rovnako sa takéto stavy overujú aj v smere y -ovej osi. Teda

- na osi y sa nachádza len 1 pás vnútorných bodov
- na osi y pracujeme s najdolnejšími vnútornými bodmi

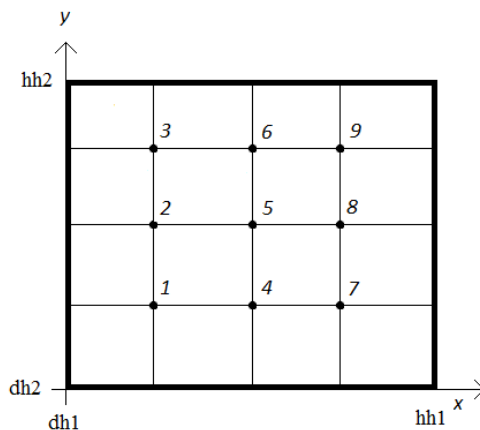
- na osi y pracujeme s najhornejšími vnútornými bodmi
- na osi y pracujeme s niektorým zo stredových bodov (to znamená, že nie je ani dolný, ani horný)

Pre prehľadnosť nasleduje obrázok, ktorý zobrazuje tento popísaný podmienkový strom.



Obrázek 6.2: Podmienkový strom

Rovnice pre jednotlivé body sa vytvárajú v takom poradí, že sa pre najdolnejšiu x -ovú súradnicu (ak sa nepočíta x -ová súradnica v dolnej hranici) popíšu všetky body, potom sa posunieme na ďalšiu x -ovú súradnicu a zase sa popíšu postupne všetky body s touto x -ovou súradnicou a tak to pokračuje ďalej, až kým nie sú popísané všetky vnútorné body na mriežke. Jednotlivé vnútorné body na mriežke majú teda poradie, ktoré zobrazuje obrázok 6.3.



Obrázek 6.3: Poradie vnútorných uzlov

6.3 Výpočet hodnôt pre jednotlivé body na mriežke

V tejto podkapitole bude popísaný spôsob výpočtu, akým sa získajú hodnoty pre všetky vnútorné body na mriežke. Pôjde teda o postupy, ktorými sa zo sústavy n rovníc o n neznámych získajú hodnoty všetkých neznámych.

Sústavu rovníc sme si vytvorili už v predchádzajúcej podkapitole 6.2 pomocou funkcie, ktorá túto sústavu uložila do matice s rozmerami $(i1 * i2) \times (i1 * i2 + 1)$. Asi najtypickejším riešením sústavy s n rovnicami s n neznámymi, je upraviť maticu sústavy pomocou **Gaussovej eliminačnej metódy**. Táto metóda upraví danú maticu na tvar, kde sa všetky hodnoty pod diagonálou rovnajú nule, pričom hodnoty v diagonále sa nule rovnajú nemusia. V poslednom riadku matice teda ostane rovnica v tvare

$$aZ = b \tag{6.18}$$

kde a a b predstavujú ľubovoľné reálne čísla a Z je daná neznáma. Z tejto rovnice je teda ľahké odvodiť výsledok prepísaním rovnice do tvaru

$$Z = \frac{b}{a} \tag{6.19}$$

Takto vypočítaná hodnota premennej sa dosadí do rovnice, ktorá sa nachádza o jeden riadok vyššie v matici, ktorá predstavuje sústavu rovníc a tým sa získa opäť rovnica v tvare aký znázorňuje rovnica 6.18. Takto to pokračuje až dokým sa nevypočíta hodnota každej premennej nachádzajúcej sa v zadanej sústave rovníc.

Funkcia na výpočet Gaussovej eliminačnej metódy pracuje na takom spôsobe, že sa prechádza zadaná vstupná matica so sústavou rovníc po riadkoch. Ak sa hodnota na pozícii $[i][i]$, čo spĺňajú len hodnoty na diagonále, rovná nule, vymení sa tento riadok matice s riadkom, ktorý sa nachádza v matici na vyššom indexe riadku a na pozícii stĺpca s hodnotou i , pričom tento prvok matice neobsahuje nulovú hodnotu. Na výmenu týchto dvoch riadkov je implementovaná pomocná funkcia. Pre takto upravenú maticu sa vo všetkých riadkoch, ktoré majú v matici vyšší index ako index ktorý sa práve používa, vykoná nasledujúca akcia. Najprv sa do pomocnej premennej uloží hodnota, ktorá sa rovná výsledku nasledujúcej rovnice

$$pom = \frac{sustava[j][i]}{sustava[i][i]} \tag{6.20}$$

pričom i predstavuje index rovnice, podľa ktorej sa momentálne matica upravuje a j predstavuje index ľubovoľného riadku matice, ktorý je vyšší ako index i . Takto získaná hodnota v premennej pom sa potom násobí s každou hodnotou v jednotlivých stĺpcoch v riadku s indexom j .

Tento cyklus sa vykonáva pre každý riadok matice, ktorý má index vyšší ako index i . Týmto sa v danom riadku pre stĺpec s indexom i získa nulová hodnota. Celý tento postup sa vykonáva až po predposledný riadok matice a tým sa celá matica upraví na tvar, ktorý bol popísaný vyššie.

Z takto upravenej matice sa vypočítajú hodnoty jednotlivých neznámych sústavy spôsobom, akým popisujú rovnice 6.18 a 6.19, pričom sa daná upravená matica prechádza cez riadky od dola hore. Takto získané hodnoty sa ukládajú do poľa s veľkosťou $i1 * i2$, pričom daný index v poli udáva poradie uzla, ako to zobrazuje obrázok 6.3.

6.4 Matica s hodnotami jednotlivých bodov na mriežke

V tomto kroku výpočtu máme vytvorené štyri polia s okrajovými podmienkami a pole, v ktorom sú uložené hodnoty pre všetky vnútorné uzly. Pre lepšiu prácu s týmito všetkými hodnotami bude lepšie uložiť si tieto hodnoty do jednej matice s rozmermi $(i1 + 2) \times (i2 + 2)$.

Do prvku tejto matice s indexom $[0][0]$ sa uloží hodnota okrajovej podmienky pre súradnice $x = dh1$ a $y = dh2$, do prvku s indexom $[i1 + 1][0]$ sa uloží hodnota okrajovej podmienky pre súradnice $x = hh1$ a $y = dh2$, do prvku s indexom $[0][i2 + 1]$ sa uloží hodnota okrajovej podmienky pre súradnice $x = dh1$ a $y = hh2$ a do prvku s indexom $[i1 + 1][i2 + 1]$ sa uloží hodnota okrajovej podmienky pre súradnice $x = hh1$ a $y = hh2$. Pri tomto kroku ma napadlo, že pre okrajové podmienky v týchto štyroch prípadoch bude nutné overiť, či sú správne zadané, keďže v týchto krajných bodoch mriežky musia byť naraz splnené dve rovnice okrajových podmienok. Tým, že musia byť splnené je myslené to, že musia vracieť rovnakú hodnotu. Preto sa na tento test vytvorila pomocná funkcia, ktorá sa vykoná hneď po inicializačnej časti programu.

Keď sa teraz vrátíme k napĺňaniu spomínanej matice, tak po naplnení štyroch okrajov sa naplnia ostatné okrajové body z polí, v ktorých sa nachádzajú hodnoty, ktoré sa vypočítali na základe okrajových podmienok. Hodnoty z týchto polí sa do matice naplnia tak, ako tam patria. Po takomto naplnení ostane matica prázdna vo vnútorných bodoch. Práve tam sa naplnia hodnoty z poľa, ktoré sme získali z predchádzajúceho výpočtu z matice upravenej Gaussovou eliminačnou metódou. Týmto krokom sme naplnili maticu a teda sa v nej nachádzajú hodnoty všetkých bodov (už nie len vnútorných bodov), ktoré sa nachádzajú na mriežke.

6.5 Lineárny odhad chyby

V tejto podkapitole sa budeme venovať výpočtu lineárneho odhadu chyby. Táto časť bude rozdelená na ďalšie časti, pretože tento výpočet je o trochu rozsiahlejší ako všetky doposiaľ popisované výpočty. Pre väčšiu prehľadnosť som sa teda rozhodla túto podkapitolu ešte rozdeliť.

Pri výpočte lineárneho odhadu chyby sa budú vytvárať matice so štyrmi rovnicami o štyroch neznámych pre každý obdĺžnik ktorý sa v mriežke nachádza. Popíšeme si teda v prvom rade funkciu, ktorá bude tieto sústavy vytvárať.

6.5.1 Sústava rovníc popisujúca obdĺžnik na mriežke

Každý obdĺžnik na mriežke bude popísaný nejakou sústavou so štyrmi rovnicami o štyroch neznámych. V tejto podkapitole sa zameriame len na prácu s jedným takýmto obdĺžnikom. Konkrétne na vytvorenie sústavy rovníc, ktorej riešením získame funkciu, ktorá ho popisuje. Takáto sústava rovníc bude vyzerať nasledovne

$$ax_1 + by_1 + cx_1y_1 + d = f(x_1, y_1) \quad (6.21)$$

$$ax_2 + by_1 + cx_2y_1 + d = f(x_2, y_1) \quad (6.22)$$

$$ax_1 + by_2 + cx_1y_2 + d = f(x_1, y_2) \quad (6.23)$$

$$ax_2 + by_2 + cx_2y_2 + d = f(x_2, y_2) \quad (6.24)$$

Do takto definovanej sústavy vieme dosadiť súradnice bodov, teda hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 . Preto sa do pomocnej matice s rozmermi 4×5 dosadia hodnoty tak, že na indexe stĺpca s hodnotou 0, bude hodnota x -ovej súradnice, v stĺpci s hodnotou indexu 1 bude uložená hodnota y -ovej súradnice, v stĺpci s indexom 2 súčin týchto dvoch súradníc, v stĺpci s indexom 3 bude vždy jednotka, pretože sa tam vždy nachádza d . V poslednom stĺpci sa bude nachádzať hodnota z matice ktorá obsahuje hodnoty všetkých uzlov na mriežke s indexami definovanými rovnako, ako indexy vďaka ktorým sa vyťahujú súradnice zo súradnicových

polí pre daný riadok napĺňanej matice. Takto sa matica naplní pre všetky štyri body, ktoré popisujú riešený obdĺžnik.

6.5.2 Riešenie sústavy štyroch rovníc o štyroch neznámých

Keď sa pozrieme na sústavu rovníc, ktorá je popísaná rovnicami 6.21, 6.22, 6.23 a 6.24 vidíme, že neznáme ktoré sa hľadajú sú definované premennými a, b, c, d . Takáto zadaná sústava sa môže riešiť rovnako, ako keď sme sa snažili vypočítať hodnoty vnútorných uzlov na mriežke. Teda na výpočet sa použije Gaussova eliminačná metóda, pomocou ktorej sa matica upraví na ľahko riešiteľný tvar. Funkciu na úpravu matice pomocou Gaussovej eliminačnej metódy už teda máme implementovanú, rovnako aj funkciu, ktorá takto upravenú sústavu rovníc vyrieši. Stačí teda tieto dve funkcie zavolať na našu riešenú maticu. Riešením sústavy teda dostaneme hodnoty bodov a, b, c, d , ktoré sa uložia do dvojrozmerného poľa, ktoré bude mať toľko riadkov ako je obdĺžnikov na mriežke a 4 stĺpce. V prvom stĺpci bude uložená hodnota a , v druhom hodnota b , v treťom c a v štvrtom hodnota d pre daný obdĺžnik.

6.5.3 Lineárny odhad chyby pre obdĺžnik na mriežke

Pri tejto podkapitole už máme získané hodnoty a, b, c, d , ktoré sme získali vyriešením sústavy rovníc, ktorá popisovala body riešeného obdĺžnika. Máme teda naplnené pole týmito parametrami pre každý obdĺžnik na mriežke. Na základe týchto hodnôt sme schopní vypočítať derivácie v jednotlivých bodoch obdĺžnika podľa x aj podľa y . Derivácia podľa x je definovaná rovnicou 6.25 a derivácia podľa y je definovaná rovnicou 6.26.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = a + cx \quad (6.25)$$

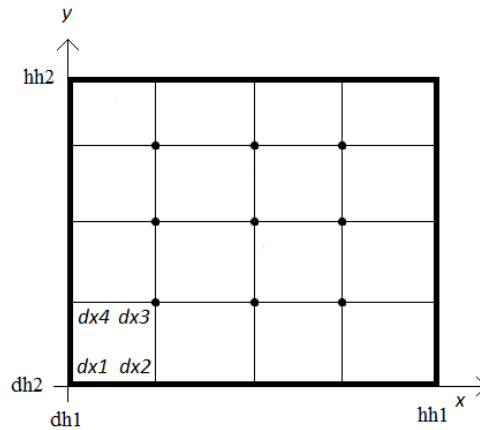
$$\frac{\partial u(y)}{\partial y} = b + cy \quad (6.26)$$

Pre každý bod riešeného obdĺžnika teda dostaneme dve hodnoty. Deriváciu podľa x a deriváciu podľa y .

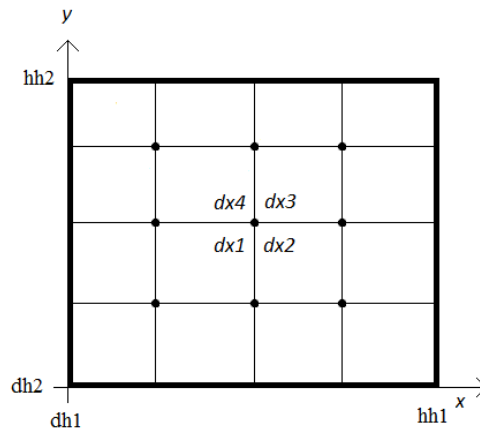
6.5.4 Funkcia na výpočet lineárneho odhadu chyby

V podkapitole 6.5.3 sme sa dopracovali k lineárnemu odhadu chyby podľa x a podľa y pre každý bod obdĺžnika. Teraz už teda len stačí vypočítať tieto odhady pre všetky obdĺžniky na mriežke. Je teda logické, že celý postup spomenutý v podkapitole 6.5 sa bude opakovať pre všetky obdĺžniky mriežky. Ešte je dobré spomenúť, že derivácie podľa x sa budú ukladať do dvojrozmerného poľa, ktoré bude mať toľko riadkov koľko je obdĺžnikov na mriežke a 4 stĺpce. V stĺpcoch sa budú nachádzať jednotlivé štyri hodnoty derivácií, ktoré sa pre daný obdĺžnik vypočítali. Pre derivácie podľa y je vytvorené rovnako definované pole. Poradie zapísaných derivácií pre daný obdĺžnik, teda pre nejaký daný riadok matice ide v protismere hodín. Pre ľahšiu predstavivosť je to zobrazené na obrázku 6.4 pre prvý obdĺžnik na mriežke, kde číslo za deriváciou predstavuje číslo jej indexu stĺpca v matici zväčšeného o jednotku.

Keď sa nad týmto postupom zamyslíme, zistíme, že takýmto výpočtom získame pre ľubovoľný uzol na mriežke 4 hodnoty x -ovej derivácie a 4 hodnoty y -ovej derivácie. Tento stav zobrazuje nasledujúci obrázok 6.5, pričom dx znamená deriváciu podľa x . Pre derivácie podľa y by bol obrázok identický, len by sa tam namiesto dx nachádzalo dy .



Obrázek 6.4: Poradie zápisu derivácií do riadku matice



Obrázek 6.5: Štyri hodnoty derivácie pre jeden uzol mriežky

6.6 Bilineárny odhad chyby

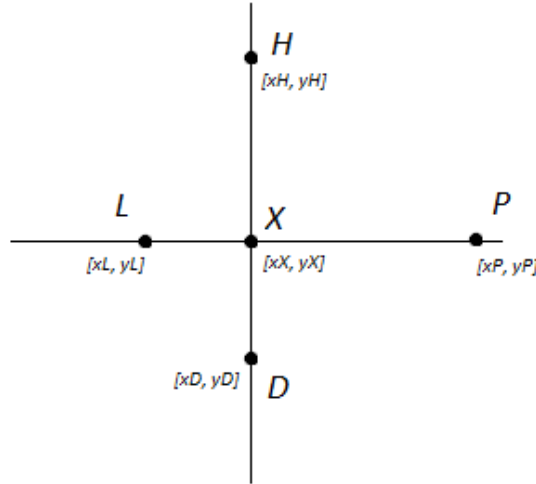
Bilineárny odhad chyby sa počíta pomocou metódy váženého priemeru. Táto kapitola bude taktiež ako kapitola o lineárnom odhade chyby 6.5 rozdelená na ďalšie časti, kvôli lepšej prehľadnosti.

Pri bilineárnom odhade chyby sa používajú niektoré výpočty, ktoré sa vypočítali pri lineárnom odhade chyby. Ide konkrétne o výsledné derivácie podľa x a y . Na začiatku je však dôležité vypočítať pomocné hodnoty, pomocou ktorých sa potom vypočítajú váhy. Na základe vypočítaných váh sa potom vypočíta bilineárny odhad chyby pre každý bod.

6.6.1 Hodnoty $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$

Zoberme v úvahu teraz jeden uzol na mriežke, ktorý sa určite nenachádza na žiadnom z okrajov mriežky. Jedná sa teda o vnútorný bod mriežky. Takýto uzol má z každej svojej strany susedný uzol. Jeho susedia vytvárajú štvorokolie tohto bodu. Keďže ideme pracovať

opäť s piatimi bodmi, môžeme ich pomenovať pre jednoduchosť rovnako, ako sme to spravili v kapitole 6.2. Skúmaný uzol dostane teda pomenovanie X , jeho sused napravo P , naľavo L , hore H a dole D . Teraz si tieto body aj s pomenovaním ich súradníc môžeme ukázať na obrázku 6.6.



Obrázek 6.6: Skúmaný vnútorný uzol a jeho štyria susedia

Ako je viditeľné na obrázku 6.6, susedné body nemusia byť od skúmaného uzla vzdialené rovnakou vzdialenosťou. Toto je, ako už bolo spomínané v niekoľkých predchádzajúcich kapitolách, spôsobené zjemňovaním mriežky. Vzdialenosť $x_M - x_L$ sa bude rovnáť vzdialenosti $x_P - x_X$ zaručene len v prípade prvého výpočetného kroku programu. Teda len po počiatočnej inicializácii. To isté platí aj pre vzdialenosti v osi y .

Na základe vzdialeností susedných bodov od skúmaného bodu vypočítame hodnoty, na základe ktorých sa potom vypočíta váhový vektor. Pre skúmaný bod počítame nasledujúce vzťahy.

$$\varphi_N = -(x_X - x_L) \quad (6.27)$$

$$\varphi_P = x_P - x_X \quad (6.28)$$

$$\zeta_N = -(y_X - y_D) \quad (6.29)$$

$$\zeta_P = y_H - y_X \quad (6.30)$$

Aby sa v ďalšom odseku dali jednoduchšie vysvetľovať výpočty pomocou týchto vzťahov pre okrajové uzly na mriežke, ukážeme si najprv jednoduchý príklad pre jeden vnútorný bod. Predstavme si teda, že máme mriežku s rozmermi $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Definujme si teraz súradnice spomínaných piatich bodov a grafická reprezentácia tohto príkladu sa nachádza na obrázku 6.7.

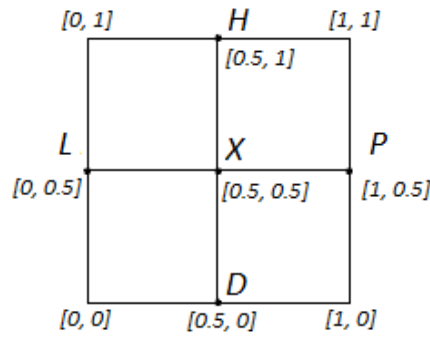
$$X = [0.5, 0.5] \quad (6.31)$$

$$L = [0, 0.5] \quad (6.32)$$

$$D = [0.5, 0] \quad (6.33)$$

$$P = [1, 0.5] \quad (6.34)$$

$$H = [0.5, 1] \quad (6.35)$$



Obrázek 6.7: Grafická reprezentácia príkladu

Pri výpočte hodnôt $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$ dostaneme nasledujúce výsledky.

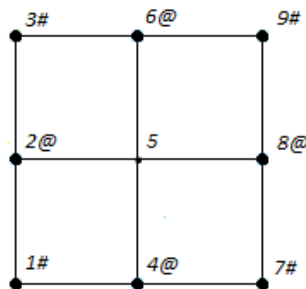
$$\varphi_N = -(0.5 - 0) = -0.5 \quad (6.36)$$

$$\varphi_P = 1 - 0.5 = 0.5 \quad (6.37)$$

$$\zeta_N = -(0.5 - 0) = -0.5 \quad (6.38)$$

$$\zeta_P = 1 - 0.5 = 0.5 \quad (6.39)$$

Po tomto jednoduchom príklade sa môžeme zamerať na okrajové body mriežky. Každý z takýchto bodov bude mať troch alebo len dvoch susedov. Ostatných susedov bude nutné doplniť. Dvoch susedov budú mať uzly, ktorých súradnice sú tvorené hraničnými bodmi zadaných intervalov, ktoré vytvárajú mriežku. Takéto uzly sú teda štyri. Všetky ostatné okrajové body budú mať troch susedov. Na obrázku 6.8 sú pridaním # k pomenovaniu bodu znázornené body, ktoré majú len 2 susedov a pridaním @ k pomenovaniu bodu znázornené body, ktoré majú troch susedov.



Obrázek 6.8: Mriežka so znázornenými okrajovými uzlami

Na obrázku 6.8 si budeme vysvetľovať postup, ktorým určíme chýbajúcich susedov pre jednotlivé body. Začneme najprv s dopĺňaním jedného chýbajúceho suseda. Ak sa zameriame napríklad na uzol s pomenovaním $2\@$, jeho susedia sú $1\#, 5, 3\#$. Ak si ich premenujeme na

naše používané značenie, tak platia nasledujúce vzťahy:

$$2@ \rightarrow X \quad (6.40)$$

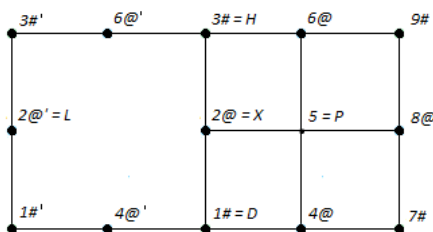
$$1\# \rightarrow D \quad (6.41)$$

$$5 \rightarrow P \quad (6.42)$$

$$3\# \rightarrow H \quad (6.43)$$

Zistili sme, že jediný sused ktorý chýba, je bod L . Tento bod sa získa preklopením celej mriežky tým smerom, v ktorom chýba bod. V našom prípade chýba bod na ľavo od riešeného bodu, preto sa celá mriežka preklopí naľavo. Pri preklopení sú vnútorné body mriežky zanedbateľné, preto ich nie je nutné preklápať.

Bodom L sa stane bod, ktorý sa nachádza v najľavejšej časti novovytvorenej mriežky. Pre lepšiu orientáciu sa preklopené body pomenovali tak, ako body, z ktorých sa preklopili, len kvôli rozlíšeniu sa k ich pomenovaniu pridal apostrof. Obrázok 6.9 zobrazuje novovytvorenú mriežku aj s určením susedných bodov pre bod $2@$. Súradnice takto vytvoreného bodu L



Obrázok 6.9: Prilepenie preklopenej mriežky k pôvodnej pre bod $2@$

už vieme ľahko dopočítať.

Rovnakým spôsobom pracujeme aj pri iných hraničných bodoch, ktorým chýba jeden sused. Vždy sa mriežka preklopí v takom smere, v akom sa má nachádzať chýbajúci sused a chýbajúcim susedom sa stane bod, ktorý sa nachádza na okraji novovytvorenej mriežky v smere, v ktorom hľadáme suseda.

Teraz sa ešte pozrime na prípad, kedy riešenému bodu chýbajú dvaja susedia. Takýmto bodom je napríklad bod $1\#$, čo dokazuje obrázok 6.8. Aj pre tento bod si pre jednoduchosť a prehľadnosť premeníme body tak, ako sme to používali doteraz.

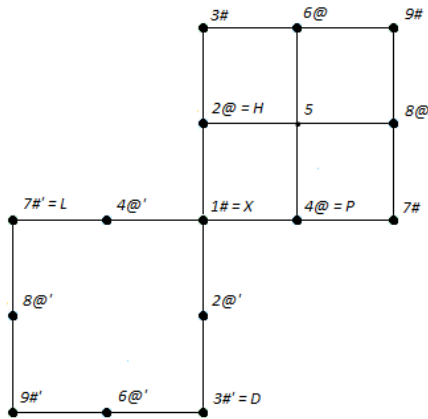
$$1\# \rightarrow X \quad (6.44)$$

$$4@ \rightarrow P \quad (6.45)$$

$$2@ \rightarrow H \quad (6.46)$$

Z tohto je zrejmé, že nám pre tento riešený bod chýbajú susedia L a D . Keby sme postupovali tak, ako sme dopĺňali jedného chýbajúceho suseda, museli by sme preklopiť mriežku nadol a mriežku doľava. Aby sme však nemuseli vykovávať 2 preklopenia a nevytvárali tak zbytočne veľkú mriežku, pôvodnú mriežku jednoducho preklopíme vľavo-dole tak, ako to zobrazuje obrázok 6.10.

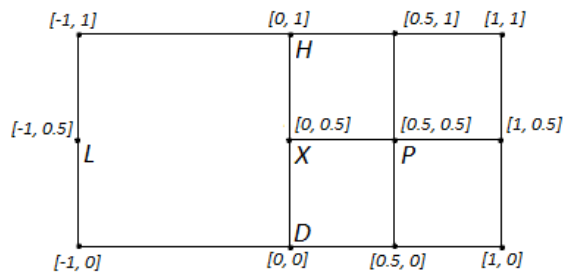
Rovnakým spôsobom by sme postupovali aj pre ostatné krajné body. To znamená, že mriežka by sa naraz preklopila v tých dvoch smeroch, v ktorých hľadáme susedov. Susedmi by sa potom stali body, ktoré sa nachádzajú na hranici mriežky v smeroch, v ktorých hľadáme susedov.



Obrázek 6.10: Prilepenie preklopenej mriežky k pôvodnej pre bod 1#

Aj pre riešený uzol, ktorému chýba jeden sused, aj pre riešený uzol, ktorému chýbajú dvaja susedia, sú vzťahy na výpočet $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$ trochu odlišné, ako tomu bolo pri vnútorných uzloch. Jediný rozdiel je však v tom, že výsledok rovnice, v ktorej sa používa súradnica bodu, ktorý sa získal preklopením, sa ešte prenášobí hodnotou -1 . Všetky ostatné vzťahy ostávajú rovnaké.

Pre zhrnutie si aj v tomto prípade vypočítame $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$ pre nejaký bod, ktorému chýba jeden sused a pre nejaký bod, ktorému chýbajú dvaja susedia. Zadanie príkladu ostane, čo sa rozmerov mriežky týka, rovnaké ako v predchádzajúcom príklade. Zadanie pre prvý príklad, kde riešenému bodu X chýba jeden sused zobrazuje obrázok 6.11. Pod týmto obrázkom sa nachádzajú štyri rovnice zobrazujúce riešenie tohto príkladu.



Obrázek 6.11: Grafická reprezentácia druhého príkladu

$$\varphi_N = (-1)(-(x_X - x_L)) \quad (6.47)$$

$$\varphi_N = (-1)(-(0 - (-0.5))) = (-1)(-0.5) = 0.5 \quad (6.48)$$

$$\varphi_P = x_P - x_X \quad (6.49)$$

$$\varphi_P = 0.5 - 0 = 0 \quad (6.50)$$

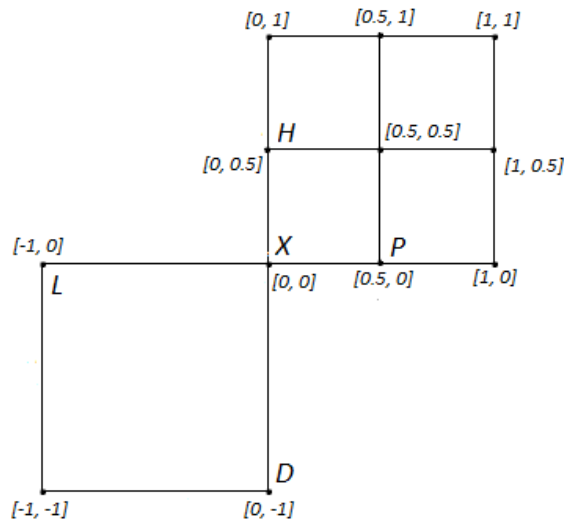
$$\zeta_N = -(y_X - y_D) \quad (6.51)$$

$$\zeta_N = -(0.5 - 0) = -0.5 \quad (6.52)$$

$$\zeta_P = y_H - y_X \quad (6.53)$$

$$\zeta_P = 1 - 0.5 = 0.5 \quad (6.54)$$

Teraz nasleduje posledný typ príkladu, kedy pre zadaný bod X , ktorému chýbajú dvaja susedia, vypočítame hodnoty $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$. Nasledujúci obrázok 6.12 predstavuje grafické zadanie tohto príkladu.



Obrázek 6.12: Grafická reprezentácia tretieho príkladu

$$\varphi_N = (-1)(-(x_X - x_L)) \quad (6.55)$$

$$\varphi_N = (-1)(-(0 - (-1))) = (-1)(-1) = 1 \quad (6.56)$$

$$\varphi_P = x_P - x_X \quad (6.57)$$

$$\varphi_P = 0.5 - 0 = 0.5 \quad (6.58)$$

$$\zeta_N = (-1)(-(y_X - y_D)) \quad (6.59)$$

$$\zeta_N = (-1)(-(0 - (-1))) = (-1)(-1) = 1 \quad (6.60)$$

$$\zeta_P = y_H - y_X \quad (6.61)$$

$$\zeta_P = 0.5 - 0 = 0.5 \quad (6.62)$$

Dopočítaním tohto príkladu sa ukončilo vysvetľovanie výpočtov, ktorými sa získajú hodnoty $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$ pre všetky typy uzlov, ktoré sa v mriežke nachádzajú. Tieto hodnoty sa vypočítajú pre každý uzol v mriežke a na základe týchto hodnôt sa pre daný uzol dopočíta váhový vektor. Postup týchto výpočtov sa nachádza v nasledujúcich kapitolách.

6.6.2 Funkcia na výpočet hodnôt $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$

V predchádzajúcej podkapitole sme si popísali postup výpočtu pre hodnoty $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N$ a ζ_P . V tejto podkapitole si popíšeme postup implementácie tohto výpočtu.

Pre každý bod mriežky sa vypočítajú tieto štyri hodnoty rovnakým postupom, aký bol popísaný v podkapitole 6.6.1. Vypočítané výsledky sa ukladajú do pomocného statického poľa, ktoré má štyri prvky. Tieto prvky poľa sa naplňujú v rovnakom poradí, v akom sa naplňovalo pole derivácií, teda v protismere hodín. Pre riešený bod sa musí teda kontrolovať, či je vnútorným bodom, okrajovým bodom ale rohovým bodom mriežky. Tento výpočet neprebíha v samostatnej funkcii, ale prebieha to priamo vo funkcii na výpočet váh pre tento bod.

6.6.3 Výpočet váh

Pre každý bod mriežky sa vypočítavajú 4 hodnoty váhy bodu. Tieto váhy vytvoria váhový vektor, ktorým sa potom násobia derivácie, ktoré sme získali pri lineárnom odhade chyby.

Na výpočet váh sú stanovené nasledujúce vzťahy:

$$w_1 = 0.25 \left(1.0 + \frac{\varphi_P + \varphi_N}{\varphi_P - \varphi_N} + \frac{\zeta_P + \zeta_N}{\zeta_P - \zeta_N} \right) \quad (6.63)$$

$$w_2 = 0.25 \left(1.0 + \frac{\varphi_P + \varphi_N}{\varphi_N - \varphi_P} + \frac{\zeta_P + \zeta_N}{\zeta_P - \zeta_N} \right) \quad (6.64)$$

$$w_3 = 0.25 \left(1.0 + \frac{\varphi_P + \varphi_N}{\varphi_N - \varphi_P} + \frac{\zeta_P + \zeta_N}{\zeta_N - \zeta_P} \right) \quad (6.65)$$

$$w_4 = 0.25 \left(1.0 + \frac{\varphi_P + \varphi_N}{\varphi_P - \varphi_N} + \frac{\zeta_P + \zeta_N}{\zeta_N - \zeta_P} \right) \quad (6.66)$$

Vypočítané hodnoty $\varphi_N, \varphi_P, \zeta_N, \zeta_P$ sa dosadia do rovníc 6.63, 6.64, 6.65, 6.66. Takto vypočítané hodnoty sa uložia do dvojrozmerného poľa, ktoré má toľko riadkov koľko je uzlov na mriežke a 4 stĺpce.

6.6.4 Výpočet bilineárneho odhadu chyby

Postup výpočtu, ktorý popisujú kapitoly 6.6.2, 6.6.3 a táto, sa vykonávajú v jednej implementovanej funkcii. Na konci tejto funkcie sa aj vypočíta bilineárny odhad chyby.

Bilineárny odhad chyby potrebuje k výpočtu výstup lineárneho odhadu chyby, teda dva polia s deriváciami (podľa x a podľa y), a vypočítané váhy pre každý uzol mriežky. Keď sú tieto údaje k dispozícii, začnú sa prechádzať polia derivácií, obidva súčasne. Tieto polia sa prechádzajú cez dva cykly for. Prvý cyklus prechádza cez počet uzlov v smere osi x a bude indexovať premennou označenou i , druhý cyklus prechádza cez počet uzlov v smere osi y a bude indexovať premennou označenou j . Následne sa hodnoty v poliach derivácií začnú

prepisovať hodnotami, ktorá sa vypočíta ako súčin pôvodnej hodnoty s hodnotou váhy. Keďže aj pole derivácií aj pole váh má rovnakú štruktúru, teda $pocet_uzlov_na_mriezke \times 4$, dokážeme obe polia prechádzať pomocou indexov i a j . Problém je, že pole derivácií má v riadkoch poznačené údaje pre každý obdĺžnik mriežky a pole váh má poznačené váhy pre každý uzol mriežky.

Pre každý bod obdĺžnika ale vieme, ktorou váhou sa má násobiť. Dokážeme teda zostaviť také prepojenie derivácií s váhami, aby sa násobili správne. Ak nám teda premenná i označuje riadok, s ktorým práve pracujeme a premenná j stĺpec, s ktorým pracujeme, $i1$ počet vnútorných uzlov v smere osi x a $i2$ počet vnútorných uzlov v smere osi y , tak zostavíme nasledujúce vzťahy:

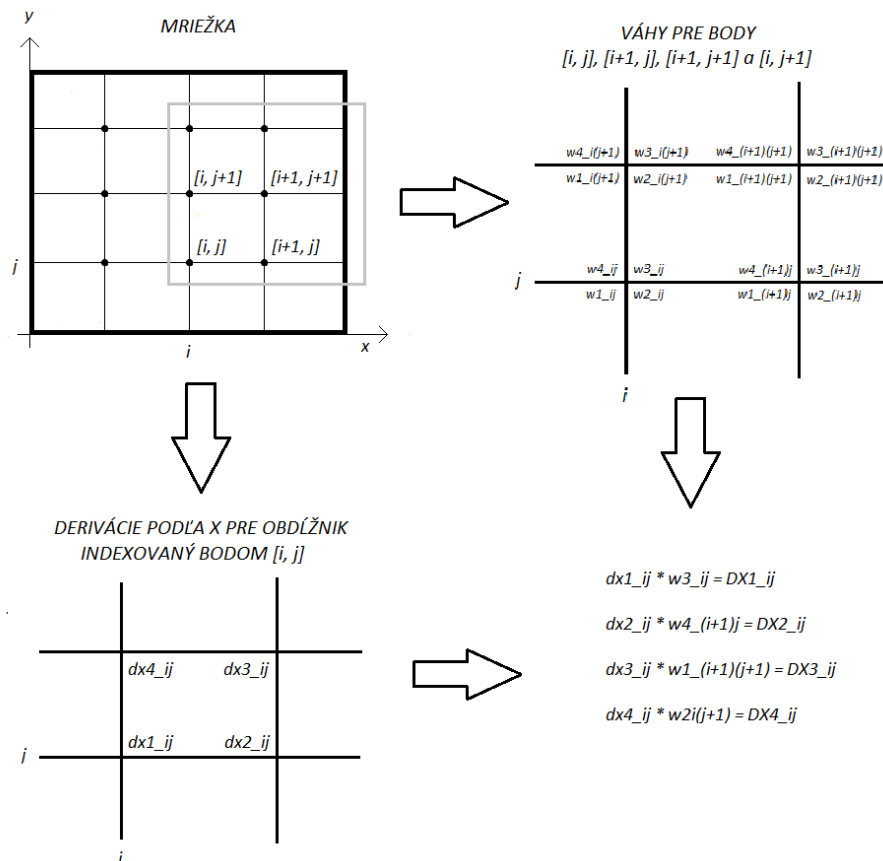
$$der[i(i1 + 1) + j][0] = der[i(i1 + 1) + j][0] * w[(i1 + 2)i + j][2] \quad (6.67)$$

$$der[i(i1 + 1) + j][1] = der[i(i1 + 1) + j][1] * w[(i1 + 2)(i + 1) + j][3] \quad (6.68)$$

$$der[i(i1 + 1) + j][2] = der[i(i1 + 1) + j][2] * w[(i1 + 2)(i + 1) + j + 1][0] \quad (6.69)$$

$$der[i(i1 + 1) + j][3] = der[i(i1 + 1) + j][3] * w[(i1 + 2)i + j + 1][1] \quad (6.70)$$

Je vidieť, že tieto vzťahy nie sú moc prehľadné. Pokúsime sa to teda pre jeden konkrétny bod mriežky zobraziť graficky.



Obrázek 6.13: Grafická reprezentácia výpočtu bilineárneho odhadu chyby

Na obrázku 6.13 je v ľavom hornom rohu zobrazená riešená mriežka a na nej je vyznačený bod so súradnicami $[i, j]$. Tento bod je ako keby ukazovateľom na obdĺžnik, ktorý je tvorený

bodmi $[i, j]$, $[i + 1, j]$, $[i + 1, j + 1]$ a $[i, j + 1]$. Preto sú tieto body taktiež znázornené na tejto mriežke. V dolnom ľavom rohu, sú pre riešený obdĺžnik zobrazené derivácie v takom označení, ako sú uložené v poli *der* na riadku $i(i + 1) + j$. Na obrázku 6.13 v hornom pravom rohu, sú pre tie štyri spomínané body, ktoré vytvárajú riešený obdĺžnik, zobrazené váhy tak, ako sú uložené v poli *wáh*. Aj pri deriváciách aj pri váhach je číslo v názve jeho index stĺpca zvýšený o jednotku, pretože jazyk C indexuje od 0.

Keď si teraz predstavíme, že by sme ten kúsok mriežky z dolného ľavého rohu zobrali a prekryli ním pravý horný roh, zistili by sme, že sa nám $dx1$ prekryje s $w3_i j$, rovnako ako sa $dx2$ prekryje s $w4(i+1)j$, $dx3$ s $w1(i+1)(j+1)$ a $dx4$ s $w2_i(j+1)$. A presne toto predstavujú vzťahy 6.67, 6.68, 6.69 a 6.70. Tieto vzťahy sú však zovšeobecnené pre každý obdĺžnik, ktorý sa v mriežke nachádza.

Takýto istý postup platí aj pre bilineárny odhad chyby pri y -ových deriváciách, preto to tu nie je nutné vysvetľovať znovu. Týmto sme vypočítali bilineárny odhad chyby pre každý obdĺžnik. Teraz by bolo dobré si pripomenúť, čo máme uložené v pamäti po týchto krokoch. Pomocou lineárneho odhadu chyby sme získali pole x -ových derivácií, 4 pre každý obdĺžnik. Ďalej pole y -ových derivácií, taktiež 4 pre každý obdĺžnik. Potom sme popri tom získali aj pole, ktoré obsahuje parametre a, b, c, d pre každý obdĺžnik mriežky. Práve pomocou týchto parametrov sa počítali derivácie. Teraz to znie možno trochu zvláštne, že sa ukladali aj derivácie, aj parametre, vďaka ktorým sa dajú dopočítať. Avšak vypočítané derivácie podľa x , sa prepísali bilineárnym odhadom chyby pre x a vypočítané derivácie podľa y sa prepísali bilineárnym odhadom pre y . Týmto prepisom sme teda stratili údaje o deriváciách. Tieto derivácie už však nebudeme ďalej potrebovať, pretože pri aposteriornom odhade chyby budeme potrebovať práve parametre a, b, c, d a bilineárne odhady chyby.

6.7 Výpočet aposteriorného odhadu chyby

Ako už bolo spomenuté v kapitole 4.4.3, výpočet aposteriorného odhadu chyby sa bude počítať pomocou nasledujúceho vzorca:

$$\iint_{\Omega} (u_{xyx} - \Pi[u_x])^2 dx dy \quad (6.71)$$

$$\iint_{\Omega} (u_{xyy} - \Pi[u_y])^2 dx dy \quad (6.72)$$

Zameriame sa teraz len na rovnicu 6.71, pretože postup pri oboch rovniciach je rovnaký. Označenie u_{xy} predstavuje funkciu, ktorá popisuje chybu vypočítanú bilineárnym odhadom. Môžeme si to teda predstaviť ako

$$u_{xy} = ex + fy + gxy + h \quad (6.73)$$

kde e, f, g, h sú parametre tejto funkcie. Rovnako vieme, že $\Pi[u_x]$ predstavuje funkciu popisujúcu lineárny odhad chyby a pre výpočet chyby podľa x si ju môžeme predstaviť ako

$$\Pi[u_x] = a + cy \quad (6.74)$$

Keďže sa podľa vzorca 6.71 majú tieto funkcie od seba odčítať, postup bude nasledovný

$$\begin{aligned} u_{xy} - \Pi[u_x] &= (ex + fy + gxy + h) - (a + cy) = \\ &= ex + (f - c)y + gxy + (h - a) \end{aligned} \quad (6.75)$$

Teraz už je len nutné umocniť to na druhú a vypočítať určitý integrál podľa x a podľa y . Integrál podľa x sa bude počítať v intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$, kde tieto hodnoty predstavujú x -ové súradnice bodov, ktoré popisujú riešený obdĺžnik a integrál podľa y sa bude počítať v intervale $\langle y_1, y_2 \rangle$, kde tieto hodnoty predstavujú y -ové súradnice bodov, ktoré popisujú riešený obdĺžnik. Pre jednoznačnosť je teda riešený obdĺžnik popísaný bodmi so súradnicami $[x_1, y_1], [x_1, y_2], [x_2, y_1], [x_2, y_2]$.

Funkcia na výpočet aposteriórneho odhadu chyby pracuje presne tak, ako bolo práve popísané. To znamená, že vypočíta rozdiel funkcií, ktoré popisujú vypočítané odhady chýb, umocní to na druhú a vypočíta integrál.

6.8 Výsledný program

V tejto kapitole popíšeme celkový postup výpočtu pomocou krokov, ktoré boli spomenuté v predchádzajúcich podkapitolách.

Program na začiatku dostane rozsah mriežky v oboch smeroch. Vytvorí sa jeden bod presne uprostred mriežky a následne sa vypočítajú počiatočné súradnice na osi x a y . Následne sa ešte overuje, či sú zadané okrajové podmienky správne zadané. Potom sa inicializujú pomocné premenné pre počet bodov na súradnicových osiach. V tomto momente sa inicializujú aj pomocné premenné, ktoré sa budú používať na pamätanie chyby z predchádzajúceho výpočtu v oboch smeroch. Potom nasleduje inicializácia a alokácia všetkých potrebných polí, ktoré sa budú v priebehu výpočtu používať.

Ďalším krokom je naplnenie polí pre súradnice a potom prichádza cyklus, v ktorom sa budú vykonávať všetky úkony spomenuté v predchádzajúcich podkapitolách, až dokým má zjemňovanie mriežky význam, to znamená, kým sa týmto zjemňovaním mriežky prispieva k výraznejšiemu znižovaniu chyby, pretože keď sa chyba znižuje už len o nejaké stotiny, pravdepodobne to nema väčší význam. Tento cyklus sleduje najvyššie chyby pre x a y a ak tieto chyby klesajú, zjemňovanie mriežky splní svoj účel.

Na začiatku tohto cyklu sa vypočítajú okrajové podmienky a naplnia sa tým štyri polia, ktoré sú na to vytvorené. Následne sa zostaví sústava rovníc, ktoré popisujú jednotlivé body na mriežke. Takto zadaná matica, ktorá predstavuje túto sústavu sa upraví tak, aby sa na ňu mohla použiť Gaussova eliminačná metóda. Keď sa to spraví, táto metóda sa na ňu následne aplikuje a získajú sa tak hodnoty všetkých bodov, ktoré sa na mriežke nachádzajú. Potom sa vytvorí pole, do ktorého sa uložia hodnoty týchto bodov na mriežke aj s okrajovými hodnotami. Vznikne teda pole s hodnotami pre úplne všetky uzly na mriežke, nie len pre uzly vnútorné. Potom nasleduje funkcia, ktorá vypočíta lineárny odhad chyby. Pričom postup tohto výpočtu bol popísaný v podkapitole 6.5.3. Potom sa vypočítajú váhy pre všetky uzly na mriežke a vypočíta sa bilineárny odhad chyby. Na koniec cyklu sa vypočíta aposteriórny odhad chyby pre x a pre y pre každý obdĺžnik na mriežke.

Celý tento popísaný postup sa teda opakuje, kým je splnená podmienka, že zjemňovanie mriežky plní svoj účel a teda postupuje k presnejším výsledkom.

Kapitola 7

Zhodnotenie výsledkov

V tejto kapitole budú popísané výsledky, ktoré boli získané experimentovaním s výslednou aplikáciou. Získané výsledky boli hodnotené na základe porovnávania s presným analytickým riešením.

7.1 Testovanie zjemňovania mriežky

Keďže cieľom tejto diplomovej práce bolo implementovať aplikáciu, ktorá bude na základe zjemňovania zadanej mriežky spresňovať výsledky výpočtov pri výpočte eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice, je nutné ako prvé otestovať to, či sa mriežka skutočne zjemňuje. Pre tento prípad bola teda zvolená jednoduchá mriežka s rozmermi

$$\langle 0, 4 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle \quad (7.1)$$

a zadaná úloha mala nasledovný tvar:

$$\Delta u(x, y) = 6x + 2 \quad (7.2)$$

Okrajové podmienky pre túto rovnicu boli zadané nasledovne:

$$u(0, y) = y^2 \quad \text{pre } y \in \langle 0, 4 \rangle \quad (7.3)$$

$$u(x, 0) = x^3 \quad \text{pre } x \in \langle 0, 4 \rangle \quad (7.4)$$

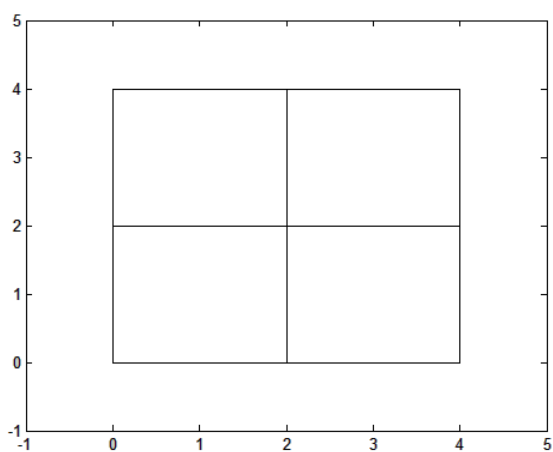
$$u(4, y) = y^2 + 8y + 64 \quad \text{pre } y \in \langle 0, 4 \rangle \quad (7.5)$$

$$u(x, 4) = x^3 + 8x + 16 \quad \text{pre } x \in \langle 0, 4 \rangle \quad (7.6)$$

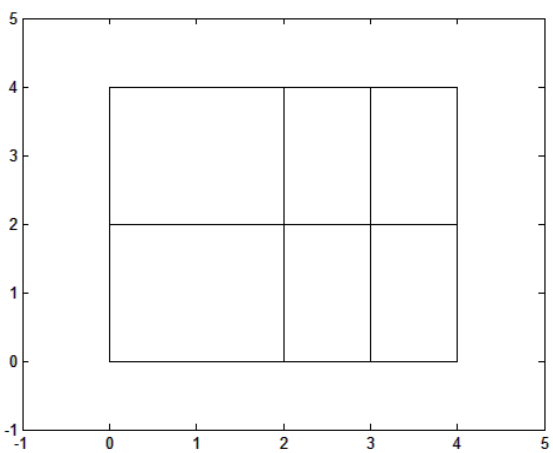
Tento príklad bol získaný z literatúry [2].

Na začiatku sa na mriežke vytvoril 1 bod. Vytvorila sa mriežka, ktorá sa nachádza na obrázku 7.1. Mriežka po prvom prechode vyzerala tak, ako je zobrazené na obrázku 7.2. To teda znamená, že sa prešiel obdĺžnik v smere osi x ohraničený súradnicami $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$ a tak vznikla nová y -ová súradnica s hodnotou $x = 3$. Po druhom prechode je mriežka zobrazená na obrázku 7.3. Tento obrázok znázorňuje, že sa prešiel obdĺžnik v smere osi x ohraničený x -ovými súradnicami $x_1 = 3$ a $x_2 = 4$. Vznikol tak nový bod s x -ovou súradnicou $x = 3.5$. Po treťom prechode na obrázku 7.4 je zobrazená mriežka, na ktorej vznikla nová x -ová súradnica s hodnotou $x = 3.75$.

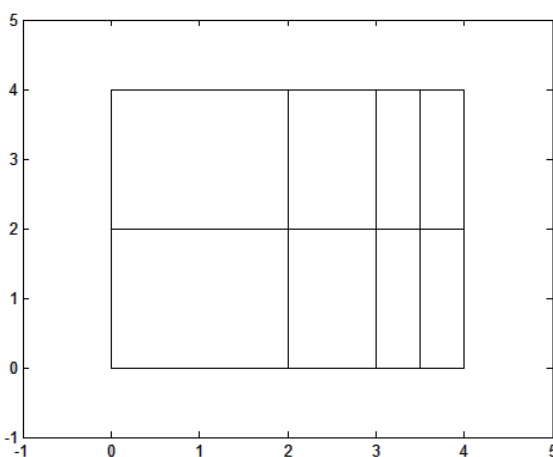
Z tohto je zrejmé, že zjemňovanie mriežky funguje.



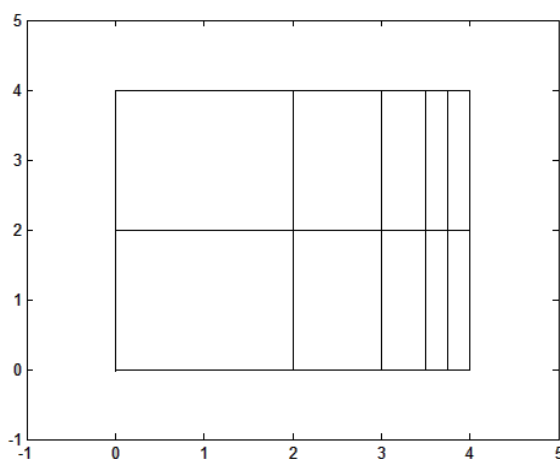
Obrázek 7.1: Počiatočná mriežka



Obrázek 7.2: Mriežka po prvom prechode výpočtom



Obrázek 7.3: Mriežka po druhom prechode výpočtom

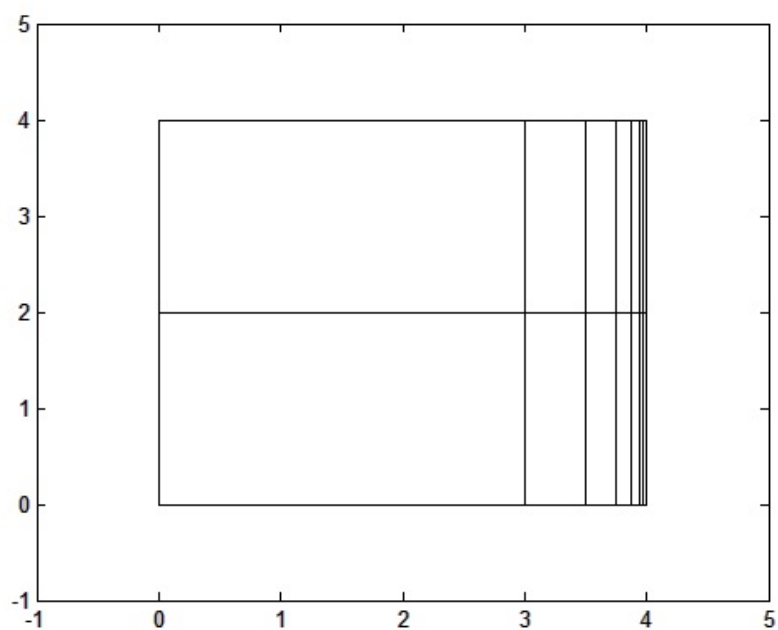


Obrázek 7.4: Mriežka po treťom prechode výpočtom

7.2 Testovanie správnosti zjemňovania mriežky

V predchádzajúcej kapitole sa testovalo, či zjemňovanie mriežky funguje, ale neskúmalo sa, či je toto zjemňovanie správne. To, že sa mriežka zjemňuje, ešte neznamená, že funguje všetko tak ako má. Preto sa v tejto kapitole zameriame na testovanie správnosti zjemňovania mriežky.

Aj v tejto kapitole sa bude testovať na príklade, ktorý bol zadaný v predchádzajúcej kapitole. Pre takto zadaný príklad skončil program s mriežkou zjemnenou tak, ako to zobrazuje obrázok 7.5 pri presnosti zjemňovania 0.01.



Obrázek 7.5: Výsledná mriežka

Ukážeme si, ako sa vyvíjali hodnoty jednotlivých bodov na mriežke. V nasledujúcich

tabuľkách 7.6, 7.7, 7.8 budú zobrazené výstupy programu v porovnaní s presným riešením, pričom presné riešenie pre tento príklad rozbrazuje rovnica 7.7.

$$u(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 \quad (7.7)$$

Výstup programu:				Presné riešenie:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4	x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	4.0000	16.0000	x = 0	0.0000	4.0000	16.0000
x = 2	8.0000	20.0000	40.0000	x = 2	8.0000	20.0000	40.0000
x = 4	64.0000	84.0000	112.0000	x = 4	64.0000	84.0000	112.0000

Chyba:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	0.0000	0.0000
x = 2	0.0000	0.0000	0.0000
x = 4	0.0000	0.0000	0.0000

Obrázek 7.6: Počiatočné nastavenie mriežky

Výstup programu:				Presné riešenie:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4	x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	4.0000	16.0000	x = 0	0.0000	4.0000	16.0000
x = 2	8.0000	21.8750	40.0000	x = 2	8.0000	20.0000	40.0000
x = 3	27.0000	43.7500	67.0000	x = 3	27.0000	43.0000	67.0000
x = 4	64.0000	84.0000	112.0000	x = 4	64.0000	84.0000	112.0000

Chyba:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	0.0000	0.0000
x = 2	0.0000	1.8750	0.0000
x = 3	0.0000	0.7500	0.0000
x = 4	0.0000	0.0000	0.0000

Obrázek 7.7: Prvý prechod

Pri tomto príklade je vidieť, že počiatočné nastavenie mriežky bolo voči presnému riešeniu bezchybné a zjemňovaním mriežky sa niektoré hodnoty uzlov začali od presného riešenia mierne odchyľovať. Avšak hodnoty, pri ktorých sa mriežka zjemňovala začali naberať presnejšie výsledky a čím viac sa mriežka zjemnila, tým viac sa výsledok blížil k správne presnému výsledku. Nie je nutné sem zobrazovať ďalšie tabuľky, ktoré boli ako medzikroky k finálnemu výsledku. Teraz bude už nasledovať len tabuľka riešenia, pri ktorom sa program zastavil. Ako je vidieť na obrázku 7.9 hodnoty, ktoré sa od správneho riešenia začali zjemňovaním mierne vzdalovať správne riešenie, sa časom ustálili na hodnote nie príliš vzdialenej presnému výsledku.

Tento príklad bol vytvorený na výpočet s rovnakým krokom vo všetkých smeroch na mriežke. V tejto diplomovej práci sa však počíta s rôznymi krokmi na základe toho, ako sa mriežka zjemňuje. Práve preto bolo spôsobené mierne odchylenie sa niektorých výsledkov od správneho riešenia.

Keď sa však zameriame na pokles chyby pre x a y pri zjemňovaní chyby, ktorú počítal program, dostaneme grafy, ktoré sú zobrazené na obrázkoch 7.10 a 7.11.

Výstup programu:				Presné riešenie:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4	x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	4.0000	16.0000	x = 0	0.0000	4.0000	16.0000
x = 2	8.0000	22.9512	40.0000	x = 2	8.0000	20.0000	40.0000
x = 3	27.0000	45.9024	67.0000	x = 3	27.0000	43.0000	67.0000
x = 3.5	42.8750	62.2408	86.8750	x = 3.5	42.8750	60.8750	86.8750
x = 4	64.0000	84.0000	112.0000	x = 4	64.0000	84.0000	112.0000

Chyba:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	0.0000	0.0000
x = 2	0.0000	2.9512	0.0000
x = 3	0.0000	2.9024	0.0000
x = 3.5	0.0000	1.3658	0.0000
x = 4	0.0000	0.0000	0.0000

Obrázek 7.8: Druhý prechod

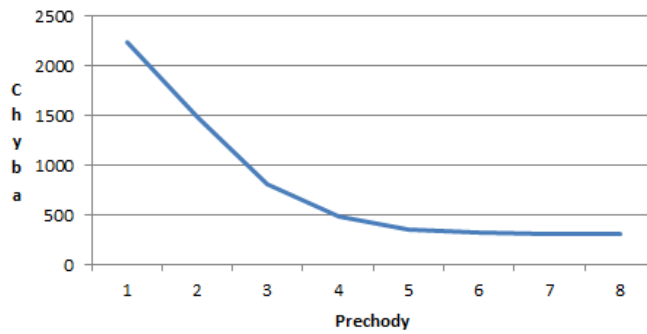
Výstup programu:				Presné riešenie:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4	x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	4.0000	16.0000	x = 0	0.0000	4.0000	16.0000
x = 2	8.0000	23.4219	40.0000	x = 2	8.0000	20.0000	40.0000
x = 3	27.0000	46.8438	67.0000	x = 3	27.0000	43.0000	67.0000
x = 3.5	42.8750	63.5352	86.8750	x = 3.5	42.8750	60.8750	86.8750
x = 3.75	52.7343	73.2766	98.7343	x = 3.75	52.7343	71.7343	98.7343
x = 3.875	58.1855	78.5109	105.1855	x = 3.875	58.1855	77.6855	105.1855
x = 3.9375	61.0466	81.2205	108.5466	x = 3.9375	61.0466	80.7966	108.5466
x = 3.96875	62.5116	82.5985	110.2616	x = 3.96875	62.5116	82.3867	110.2616
x = 4	64.0000	84.0000	112.0000	x = 4	64.0000	84.0000	112.0000

Chyba:			
x/y	y = 0	y = 2	y = 4
x = 0	0.0000	0.0000	0.0000
x = 2	0.0000	2.4219	0.0000
x = 3	0.0000	3.8438	0.0000
x = 3.5	0.0000	2.6602	0.0000
x = 3.75	0.0000	1.5423	0.0000
x = 3.875	0.0000	0.8254	0.0000
x = 3.9375	0.0000	0.4239	0.0000
x = 3.96875	0.0000	0.2118	0.0000
x = 4	0.0000	0.0000	0.0000

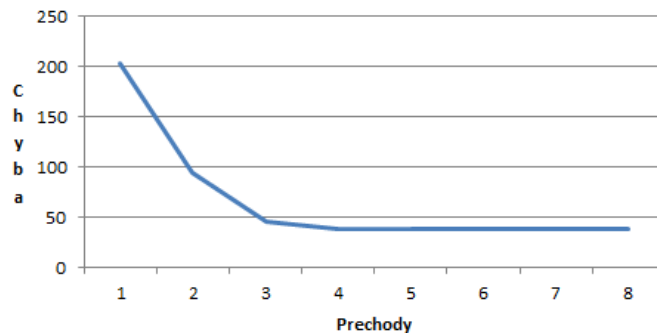
Obrázek 7.9: Finálny výstup programu

Z týchto grafov je vidieť, že chyba pri zjemňovaní mriežky klesala v oboch prípadoch, teda aj pre x aj pre y . Mriežka sa pritom zjemňovala iba na osi x -ovej. Ani raz nenastala situácia, kedy by sa mriežka zjemnila na osi y -ovej a aj napriek tomu chyba klesala aj v tomto smere.

Ďalší testovací príklad som vymyslela sama. Riešená rovnica aj s okrajovými podmien-



Obrázek 7.10: Priebek chyby pre x pri zjemňovaní mriežky



Obrázek 7.11: Priebek chyby pre y pri zjemňovaní mriežky

kami boli nasledovné:

$$\Delta u(x, y) = 3y \quad (7.8)$$

$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{pre } x \in \langle 0, 5 \rangle \quad (7.9)$$

$$u(x, 5) = x^2 + 10x + 125 \quad \text{pre } x \in \langle 0, 5 \rangle \quad (7.10)$$

$$u(0, y) = y^3 \quad \text{pre } y \in \langle 0, 5 \rangle \quad (7.11)$$

$$u(5, x) = y^3 + 10y + 25 \quad \text{pre } y \in \langle 0, 5 \rangle \quad (7.12)$$

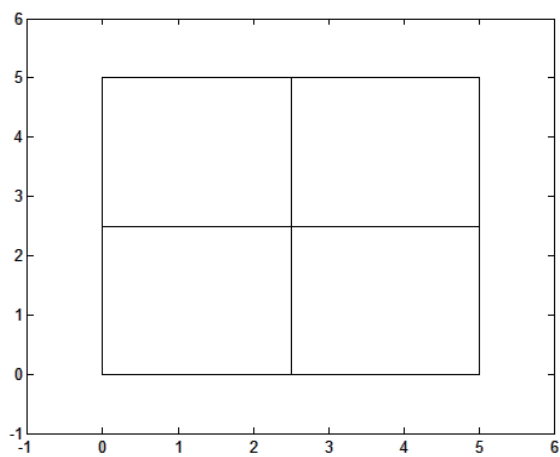
Mriežka pri tomto príklade sa vyvíjala tak, ako zobrazujú nasledujúce obrázky 7.12, 7.13, 7.14, 7.15 a na obrázku 7.16 je znázornené finálne zjemnenie mriežky.

Ako je vidieť na nasledujúcich obrázkoch, zjemňovanie mriežky v tomto prípade vznikalo v smere y -ovej osi. Tentokrát nenastalo zase zjemňovanie v smere osi x , pričom v predchádzajúcom prípade nastávala len táto možnosť. Avšak zjemňovanie mriežky malo zase význam, pretože chyba výpočtu sa opäť, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, znižovala. Či sa to už týka chyby podľa y , alebo chyby podľa x . Znižovanie výpočtovej chyby je opäť znázornené na dvoch nasledujúcich grafoch, kde prvý graf 7.17 predstavuje x -ovú chybu voči prechodom a graf 7.18 zobrazuje chybu y -ovú voči prechodom.

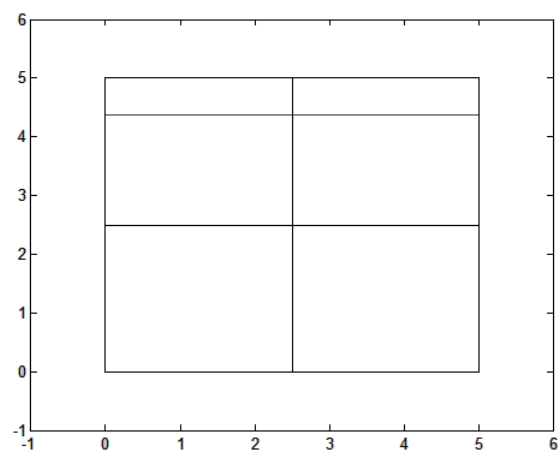
Posledná tabuľka 7.19 zobrazuje hodnoty, ktoré vrátil program ako svoj výstup.

7.3 Zhodnotenie výsledkov testovania

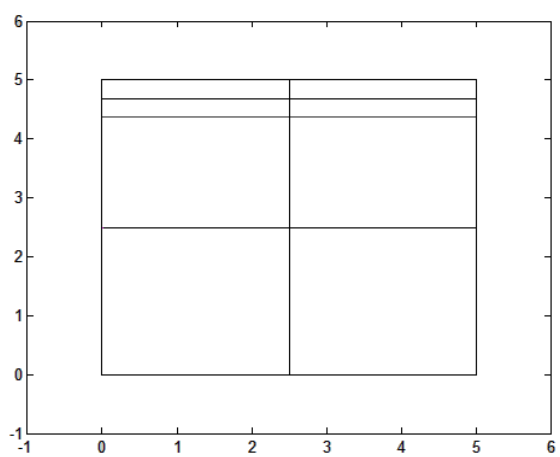
V predchádzajúcich podkapitolách 7.1 a 7.2 bola testovaná výsledná aplikácia na rôznych vstupných príkladoch. Avšak uvedené sú tu príklady len dva. Je to z toho dôvodu, že sa



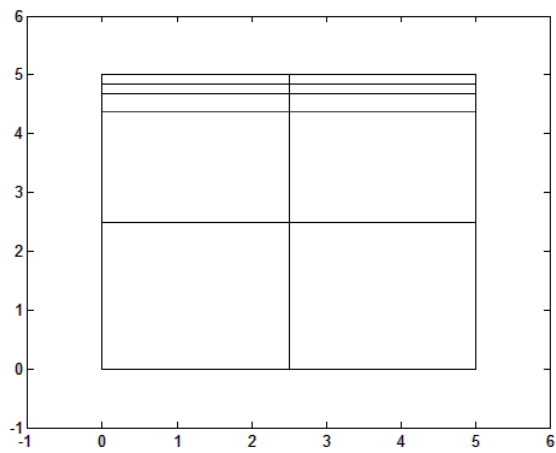
Obrázek 7.12: Počiatočná mriežka



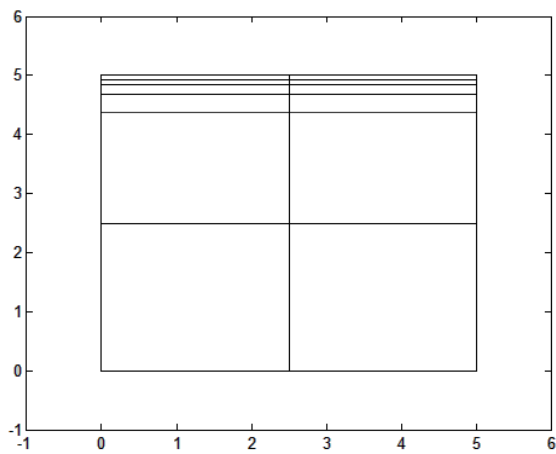
Obrázek 7.13: Mriežka po prvom prechode



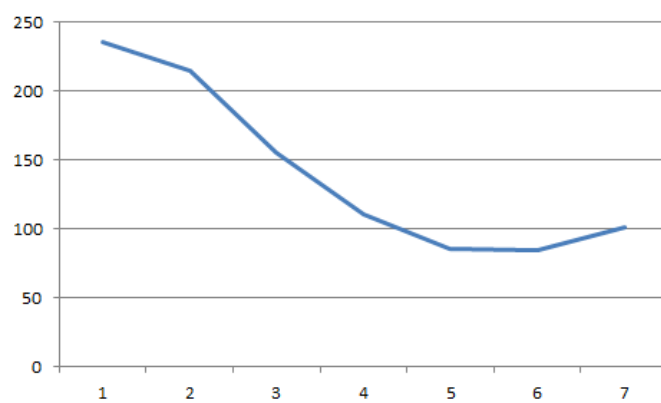
Obrázek 7.14: Mriežka po druhom prechode



Obrázek 7.15: Mriežka po treťom prechode

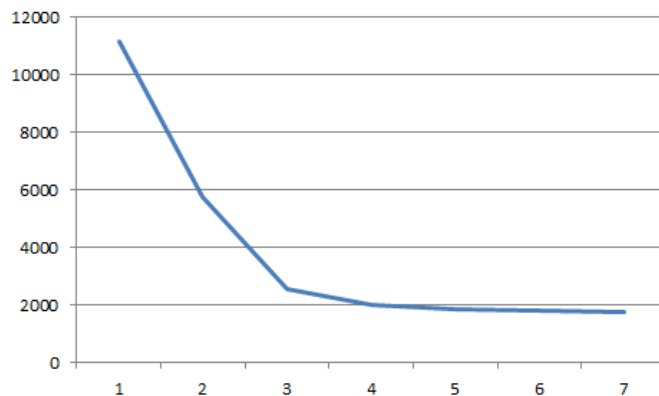


Obrázek 7.16: Finálna mriežka



Obrázek 7.17: Priebeh chyby pre x pri zjemňovaní mriežky

mi pri testovaní nepodarilo vytvoriť taký vstupný príklad, pri ktorom by nastávali iné zjemňovacie postupy. Vždy sa zjemňovalo buď výlučne v smere osi x alebo výlučne v smere



Obrázek 7.18: Priebeh chyby pre y pri zjemňovaní mriežky

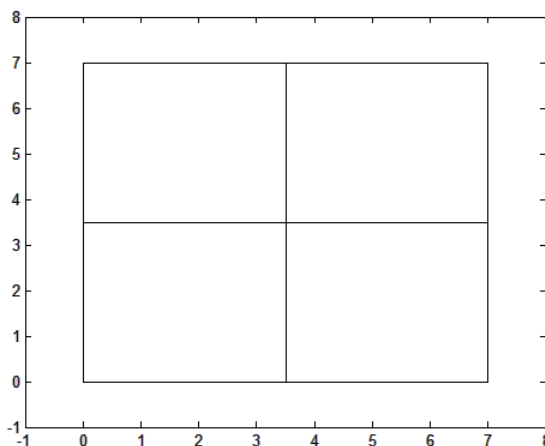
Výstup programu:

x/y	y = 0	y = 2.5	y = 3.75	y = 4.375	y = 4.688	y = 4.844	y = 4.922	y = 5
x = 0	0.000	15.625	52.734	83.740	102.997	113.644	119.232	125.000
x = 2.5	6.250	54.539	97.359	124.836	140.066	148.033	152.100	156.250
x = 5	25.000	65.625	115.234	152.490	174.872	187.081	193.450	200.000

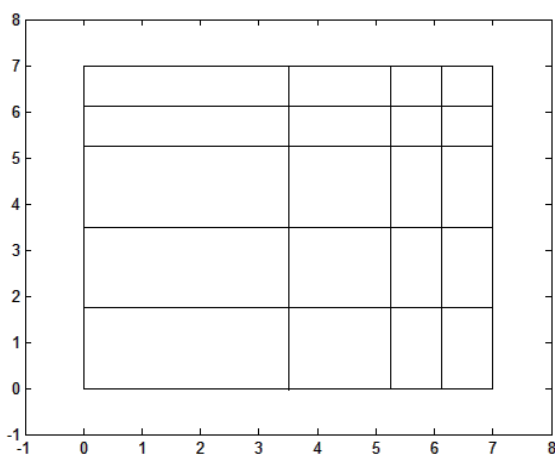
Obrázek 7.19: Výstupné hodnoty programu

osi y . Situáciu, kedy by sa pri jednom príklade uskutočnilo zjemňovanie mriežky v oboch smeroch som nebola schopná vytvoriť. Avšak pri umelom odsimulovaní toto zjemňovanie fungovalo.

Pod pojmom umelé odsimulovanie sa myslí to, že program nepočítal žiadne hodnoty, ale dostával náhodne zadané chyby, na základe ktorých zjemňoval mriežku. V takomto prípade nastala situácia, ktorú reprezentuje obrázok 7.21 pri počiatočnom nastavení mriežky tak, ako to zobrazuje obrázok 7.20. Je vidieť, že mriežka je zjemnená v oboch smeroch, teda ako v smere osi x tak aj v smere osi y .



Obrázek 7.20: Počiatočné nastavenie mriežky



Obrázek 7.21: Náhodné zjemnenie mriežky

V konečnom dôsledku môžeme zhodnotiť, že zjemňovanie mriežky funguje. Pretože mriežka sa skutočne zjemňuje a zjemňovanie spĺňa svoj účel. Chyba výpočtu klesá úmerne so zjemňovaním, až kým sa nedosiahne požadovanej presnosti zjemňovania. Ako je vidieť napríklad na grafe 7.17, v poslednom prechode nastala zmena chyby smerom hore. Táto chyba nebola však až taká výrazná, aby to radikálne ovplyvnilo výsledok. A táto chyba bola spôsobená zjemňovaním v smere druhej osi a nie v tom smere, v ktorom sa mriežka zjemňovala.

Kapitola 8

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo naštudovať a porovnať analytické a numerické metódy riešenia eliptických parciálnych diferenciálnych rovníc. Táto diplomová práca sa zameriava konkrétne na metódu sietí, pomocou ktorej sa zadaná eliptická parciálna diferenciálna rovnica riešila. Druhým dôležitým cieľom tejto práce bola implementácia programu, ktorý riešenie zadanej eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice rieši pomocou tejto metódy. Bolo nutné sa oboznámiť s detailným postupom výpočtu pomocou tejto metódy. Táto práca sa obmedzila na prácu s mriežkou v tvare obdĺžnika, čo znamená, že zjemňovanie mriežky prebiehalo vždy v celej dĺžke, prípadne šírke, mriežky tak, aby nevznikali iné útvary, ako obdĺžniky.

Vytýčené ciele táto diplomová práca splnila. Výsledná implementácia riešenia je funkčná a otestovaná, o čom svedčí predchádzajúca kapitola. Nedokázala sa však vytvoriť dostatočne rozsiahla sada testov, ktorá by dávala rôznorodé výsledky, preto museli byť testy na zjemňovanie vykonávané aj náhodným zjemňovaním.

Možným rozšírením tejto diplomovej práce by mohol byť prístup, ktorý by v rámci zjemňovania mriežky po niekoľkých rovnakých zjemneniach (rovnakých v zmysle neustáleho zjemňovania v rámci jedného smeru) skúsil zjemniť mriežku druhým smerom a ak by sa výsledky zlepšili, toto zjemnenie by nechal, ak by to však k zmenšeniu chyby nedopomohlo, vrátil by sa o krok späť. Tento prístup sa mi zdá logický z toho dôvodu, že sa zjemňovanie mriežky začalo ustálovať na hodnotách, ktoré sa začali líšiť iba jednotkami prípadne desatinami a následne po niekoľkých takýchto krokoch sa výpočet ukončil, kvôli presnosti zjemňovania.

Ďalším možným a náročnejším rozšírením, by mohlo byť riešenie problému, ktoré by nezjemňovalo mriežku po celej dĺžke, prípadne šírke, ale iba v rámci oblasti, ktorá by vykazovala najvyššiu chybu. Tým by sa mohlo odstrániť znepresňovanie hodnôt v oblastiach, ktoré sa nezjemňujú.

Pri celkovom pohľade na čas a úsilie, ktoré boli vynaložené na túto diplomovú prácu môžem prehlásiť, že táto téma mi priniesla to, čo som od nej očakávala. A to nové informácie, zaujímavé skúsenosti a overenie mojich zručností. Táto práca ma motivovala do ďalšieho štúdia diferenciálnych rovníc, lebo ako je vidieť, je to široká oblasť, s ktorou sa dá pracovať.

Literatura

- [1] [Online; navštívené 3.3.2013].
URL http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation
- [2] [Online; navštívené 23.3.2013].
URL http://www.math.sk/mpm/otazka_14.pdf
- [3] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce*. Praha: Mladá fronta, 2000, ISBN 80-204-0607-7.
- [4] Dalík, J.: *Matematika, numerické metody*. 2008.
- [5] Doc. RNDr. Ševčovič, D. C.: *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*. IRIS, 2008.
- [6] Doc. RNDr. Škrášek, J.; Ing. Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL, 1994, 896 s.
- [7] Firer, P., Stanley: *Analogue Computation, Theory, Techniques and Applications VOL III*. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., New York, Toronto, London, 1961.
- [8] Humená, P.: *Paralelní řešení soustav obyčejných lineárních diferenciálních rovnic*. FIT VUT v Brně, 2010, "PDF".
- [9] Ing. Valenta, V.: *Moderní metody řešení parciálních diferenciálních rovnic*. [slajdy].
- [10] Kubiček, M.: *Numerické metody a algoritmy*. 2008, ISBN 80-7080-559-7.
- [11] Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky II*. Praha, Prometheus, 2000, ISBN 80-7196-179-5, 874 s.