



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

NESTACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ V POTRUBÍ

UNSTEADY FLOW IN PIPELINE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

David Šrenk

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Daniel Himr, Ph.D.

BRNO 2017

Abstrakt

Práce se zabývá nestacionárním prouděním v potrubí. Při proudění v potrubí je dominantní pouze jedna složka rychlosti, problém se tedy zjednoduší na jednodimenzionální. Bakalářská práce má analytický základ v parciálních diferenciálních rovnicích hyperbolickeho typu. Dále je numericky popsán problém a typy numerických metod. U numerických metod jsou popsány okrajové podmínky a vlastnosti daných metod.

Summary

The thesis deals with unsteady flow in the pipeline. Only one component of velocity is dominant in piping, so the problem is simplified to one-dimensional. Bachelor thesis has an analytical basis in partial differential equations of hyperbolic type. The problem and types of numerical methods are also numerically described. The numerical methods describe the boundary conditions and properties of the given methods.

Klíčová slova

Nestacionární proudění v 1D, rovnice kontinuity, pohybová rovnice, metoda FTCS, metoda Lax Friedrich, metoda Leapfrog, metoda Lax Wendroff, metoda Beam Warming.

Keywords

Unsteady flow in 1D, continuity equation, motion equation, FTCS method, Lax Friedrich method, Leapfrog method, Lax Wendroff method, Beam Warming method.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Nestacionární proudění v potrubí* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Daniela Himra, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

David Šrenk

Děkuji všem, kteří mi s mou prací pomohli, primárně však mému vedoucímu práce
Ing. Danielu Himrovi, Ph.D..

David Šrenk

Obsah

1	Úvod	2
2	Analytický úvod	3
3	Numerický Úvod	10
3.1	Neumannova podmínka stability	11
3.2	CFL podmínka stability	12
3.3	Okrajové podmínky	13
3.4	Numerická viskozita	15
4	Metoda FTCS	16
5	Metoda Lax Friedrich	18
6	Metoda Leapfrog	19
7	Metoda Lax Wendroff	20
8	Metoda Beam Warming	22
9	Závěr	24
10	Seznam nejdůležitějších symbolů	26

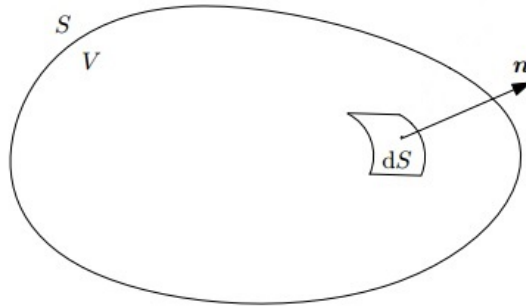
1. Úvod

Bakalářská práce řeší problematiku nestacionárního proudění v potrubí. Jedná se o proudění tekutiny jejíž velikost rychlosti je v závislosti na čase nekonstantní. Pro jednoznačný popis proudění je tedy nutné znát velikost rychlosti i čas v daném zkoumaném bodě. U proudění v potrubí je dominantní pouze jedna složka rychlosti, obecné rovnice pro nestacionární proudění můžeme vyjádřit pouze pro jednorozměrný případ. Problém nestacionárního pohybu tekutiny vyjadřují dvě základní rovnice. Jedná se o rovnici kontinuity a pohybovou rovnici. Tyto dvě rovnice nám dávají analytické řešení problému. Jde o parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu. Řešení nestacionárního proudění v potrubí tímto způsobem je zřídka kdy použitelné. V praxi řešíme problém numerickými metodami. V práci je provedena rešerše různých typů numerických metod řešící tento problém. U každé metody se pozorují určité vlastnosti, jako je stabilita, přesnost numerické metody, početní náročnost, závislost na k předešlých krocích, díky kterým si uživatel vybere tu nejvhodnější.

2. Analytický úvod

Rovnice kontinuity

Problém pohybu tekutiny je jednoznačně určen třemi složkami rychlosti $v_i = f(x_i, t)$ $i = 1, 2, 3$, a dvěma veličinami popisujícími stav tekutiny. Tyto veličiny jsou tlak $p = f(x_i, t)$ a hustota $\rho = f(x_i, t)$. Všechny další stavové veličiny jsou přímo vyjádřitelné pomocí již známých dvou veličin. Rovnice kontinuity vyjadřuje vzájemný vztah těchto veličin při pohybu tekutiny. Při pohybu tekutiny se přemísťuje její hmotnost, z této úvahy předpokládáme zákon zachování její hmotnosti. Zvolíme tedy libovolně objem V kapaliny a z něj vybereme malý element tohoto objemu dV , který má plošný element dS , což je tedy jednoduchá uzavřená plocha.



Obrázek 2.1: Kontrolní objem

Uvažujeme kapalinu o objemu V , kterou libovolně zvolíme. Hmotnost kapaliny v tomto objemu V je vyjádřitelná pomocí integrálu $\int_V \rho dV$. Poté je možné změnu hmotnosti kapaliny vyjádřit jako

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

Nezáleží na tom, v jakém pořadí provedeme derivaci a integraci, získáme

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

Dále tok tekutiny, která proteče kontrolní plochou S je tedy

$$\int_S \rho v_i n_i dS$$

kde ρ je hustota, v_i je rychlost tekutiny v místě plochy dS a n_i je jednotkový vektor vnější normály dS . Vektor n_i má hodnotu kladnou pro tekutinu vytékající z kontrolní plochy S , pro vtékající je hodnota záporná. Vektor n_i zavádíme pouze pro určení směru kontrolní plochy jako kolmici na plochu a jeho velikost je jedna.

Platí rovnost mezi hmotností tekutiny a tokem tekutiny

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = - \int_S \rho v_i n_i dS$$

Znaménko mínus na pravé straně rovnice dostáváme z úvahy, že $\int_V \frac{d\rho}{dt} dV > 0$ a n_i je vektor vnější normály. Totální derivaci ρ upravíme dle identity

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

Druhý člen na pravé straně rovnice můžeme zanedbat, jelikož totální derivace polohy podle času $\frac{dx_i}{dt}$, tedy velikost rychlosti proudění tekutiny, je mnohem menší než rychlosti zvuku v tekutině.

Po úpravě a užití Gauss-Ostrogradského věty, která nám převede plošný integrál na objemový, získáme

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV = 0$$

Objem V byl vybrán libovolně, musí také platit.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Pro následující využití této rovnice vyjádříme závislost na tlaku p a toku Q . Pomocí vztahu $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ získáme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Vyjádříme rychlost pomocí vztahu $v = \frac{Q}{S}$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho}{S} \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0$$

ρc^2 nahradíme k , c je rychlost zvuku v tekutině. Dostáváme konečný tvar rovnice vhodný k užití při výpočtech pomocí numerických metod [1]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Pohybová rovnice

V kapalině vybereme nějakou část o objemu V a povrchu S . Vycházíme z úvahy $\sum F_i = ma_i$, F_i rozepíšeme jako tíhovou sílu a plošnou sílu, m je hmotnost elementu kapaliny a a_i je zrychlení kapaliny. Vezmeme element objemu dV (popřípadě plochy dS) a dostáváme tvar rovnice

$$\int_V \rho g dV + \int_S T^r dS = \int_V \rho a dV \quad (2.2)$$

složky vektoru T^r jsou složky napěťového vektoru σ_{ij} , tedy $T_i^r = \sigma_{ij} n_j$, kde n_i je normálový vektor, ρ je hustota kapaliny a g je tíhové zrychlení. Užitím Gauss-Ostrogradského věty na část s plošným integrálem získáme

$$\int_S T_i^r dS = \int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$$

2. ANALYTICKÝ ÚVOD

Dosažením do rovnice (2.2) dostaneme tvar

$$\int_V \rho g dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \rho a dV$$

Zrychlení a můžeme nahradit totální derivací rychlosti podle času $a = \frac{dv}{dt}$ a celou rovnici vydělíme ρ . Objem jsme zvolili zcela libovolně, můžeme tedy element zmenšovat až na tvar

$$g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{dv_i}{dt} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Tento tvar rovnice nazýváme pohybovou rovnicí kontinua. Následně je pro nás důležitý tenzor napětí σ_{ij} , který chceme vyjádřit a dosadit do pohybové rovnice kontinua (2.3).

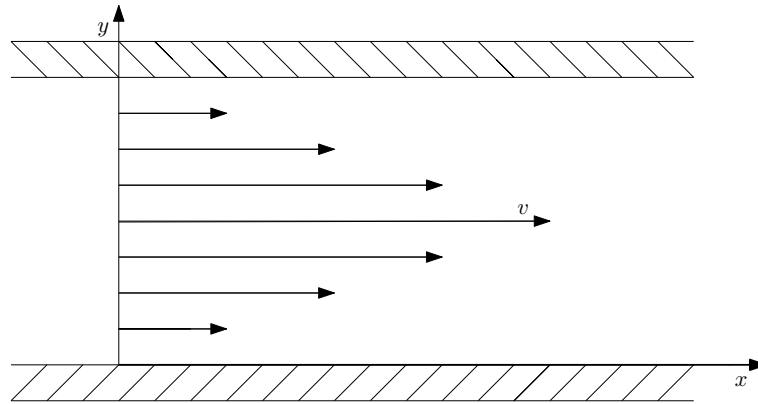
Pro dokonalou tekutinu položíme tenzor napětí.

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p$$

δ_{ij} je Kroneckerovo delta ($\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$), vidíme zde, že tečná napětí jsou rovna nule a normálová napětí mají hodnotu $-p$. Tento vztah nám vyjadřuje, že tekutina je závislá pouze na tlaku p . To však není u viskózní tekutiny pravda. Hodnota viskozity závisí hlavně na přitažlivých silách mezi částicemi tekutin. Tekutina, která má větší přitažlivou sílu, má také větší viskozitu. Viskozita je vlastnost tekutiny, která udává odpor tekutiny proti změně tvaru, tedy brždění pohybu. Tenzor σ_{ij} charakterizující silové působení uvnitř tekutiny musí mít dvě části

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \sigma'_{ij} \quad (2.4)$$

σ'_{ij} je odpor, který klade tekutina při vzájemném pohybu částic. Pro názornost budeme brát model pohybující se viskózní tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými deskami.



Obrázek 2.2: Proudění v potrubí

Osa x je rovnoběžná s pohybem tekutiny a osa y je kolmá na pohyb, rychlost $v = v_x$ je funkcí y jednotlivých vrstev tekutiny. Síly vnitřního tření jsou přenášeny v rovinách kolmých na osu y . Jsou tedy podle Newtonova zákona přímo úměrné parciální derivaci rychlosti podle času $\sigma' = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Napětí σ' působí ve směru osy x , tenzor napětí je syme-

trický. Výraz $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ vystupuje v definici deformace složek rychlosti e_{ij} , z lineární závislosti tenzoru napětí σ' na tenzoru deformace získáme

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Tenzor napětí σ' má tvar

$$\sigma' = \kappa \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + 2\mu e_{ij}$$

κ je druhá viskozita a μ je dynamická viskozita. Dosadíme tedy rovnice tenzoru napětí (2.4)

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \kappa \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + 2\mu e_{ij}$$

Tento konečný tvar tenzoru napětí dosadíme do pohybové rovnice (2.3), totální diferenciál můžeme rozepsat pomocí identity

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = g_i + \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] \quad (2.5)$$

Získali jsme nejobecnější tvar pohybové rovnice. Dále budeme považovat tekutinu za nestlačitelnou $\rho = konst.$ tedy $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$. Získáme Navier Stokesovu rovnici pro nestlačitelnou viskózní tekutinu

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (2.6)$$

Uvažujme případ jednorozměrného proudění. Rovnici (2.6) vyjádříme v 1D

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 = g_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}$$

Zde je mnoho členů nulových, dostáváme tedy

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 = g_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}$$

Uvažujeme nestlačitelnost $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$, rovnoběžné jednorozměrné potrubí, můžeme tedy přestat psát indexy a pomocí vztahu $Q = vS$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

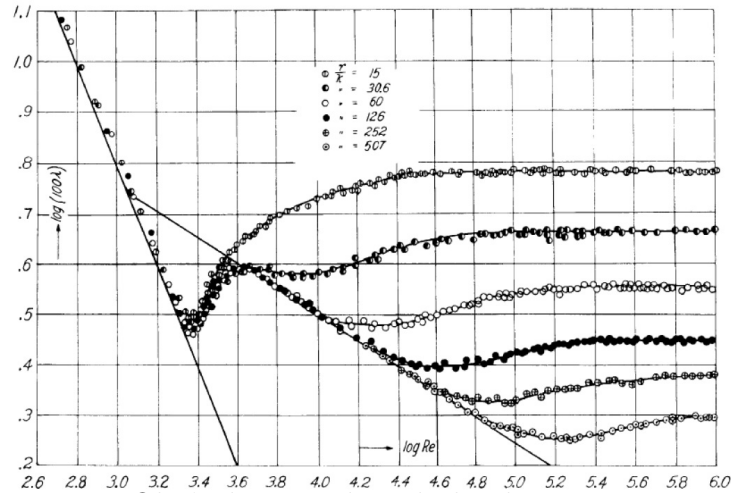
Člen pro překonání vnitřního tření $\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$ můžeme aproximovat úvahou kvazilineárního proudění výrazem $\frac{\lambda}{2DS} Q|Q|$, na tento konečný tvar mělo poměrně velký vliv měření praktického chování [6]. Získáme tedy výslednou rovnici pro 1D proudění

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DS} Q|Q| = 0 \quad (2.7)$$

kde Q je tok tekutiny, S je plocha průřezu, ρ je hustota, p je tlak a D je hydraulický průměr potrubí. Lambda λ v naší rovnici má význam součinitele délkových ztrát.[1]

Součinitel délkových ztrát

Součinitel délkových ztrát popisuje stacionární proudění tekutin. Vyjadřuje míru přeměny mechanické energie na teplo. Závislost součinitele délkových ztrát λ na Reynoldsově čísle Re vyjadřuje Nikuradzeho diagram, který ukazuje jednotlivé laminární a turbulentní proudění. Nikuradzeho diagram byl vytvořen na základě měření proudění tekutiny o různých hydraulických průměrech, rychlostech proudění tekutiny a drsnosti potrubí.



Obrázek 2.3: Nikuradzeho diagram

J.: Laws of flow in rough pipes. Washington 1950. Přel. z: Strömungsgesetze in rauhen ohren. Berlin 1933

Existuje nespočet metod, jak spočítat λ . Ukážeme si jen některou z univerzálního způsobu výpočtu.

Churchill (1977):

$$\lambda = 8 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + (A + B)^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{12}}$$

$$A = \left[-2 \ln \left(\frac{h}{3,7D} + \left(\frac{7}{Re} \right)^{0,9} \right) \right]^{16}$$

$$B = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

Romeo a kolektiv (2002):

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \log \left(\frac{h}{3,7065D} - \frac{5,0272}{Re} A \right)$$

$$A = \log \left(\frac{h}{3,827D} - \frac{4,567}{Re} \log \left(\left(\frac{h}{7,77918D} \right)^{0,9924} + \left(\frac{5,3326}{208,815 + Re} \right)^{0,9345} \right) \right)$$

kde h je drsnost potrubí. [7]

Parciální diferenciální rovnice

V této kapitole udáváme jinou symboliku, než u všech ostatních. Z důvodu obecné známosti značených pojmů to bude vhodnější pro čtenáře. Tedy a, b, c jsou konstanty, λ, ν vlastní čísla a nemají tedy souvislost s λ , která značí součinitele délkových ztrát.

V problematice nestacionárního proudění vycházíme ze dvou parciálních diferenciálních rovnic: kontinuity

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

a pohybové rovnice v 1D

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DS} Q|Q| = 0$$

Rovnici kontinuity vynásobíme $\frac{\partial}{\partial t}$ a pohybovou rovnicí zase $\frac{\partial}{\partial x}$. Získáme společný člen $\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x}$, vyjádříme tedy hodnotu tohoto členu z obou rovnic

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} = -\frac{S}{k} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2DS} Q|Q| \frac{\partial}{\partial x}$$

Položíme rovnost

$$\frac{S}{k} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{2DS} Q|Q| \frac{\partial}{\partial x}$$

Po úpravě získáme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\lambda k}{2DS^2} Q|Q| \frac{\partial}{\partial x}$$

Získáme parciální diferenciální rovnici druhého řádu v separovaném tvaru tak, že členy s nejvyššími derivacemi funkce p budeme psát na levou stranu. Obecně zapíšeme

$$L(p) = ap_{tt} + bp_{tx} + cp_{xx} = f(t, x, p_t, p_x) \quad (2.8)$$

koeficienty $a = 1$, $b = 0$, $c = -\frac{k}{\rho}$ a $f(t, x, p_t, p_x) = \frac{\lambda k}{2DS^2} Q|Q| \frac{\partial}{\partial x}$. Dostáváme tím explicitní vyjádření rovnice. Nezávislé proměnné t, x a neznámá p tlak. Jelikož nám jedna z proměnných reprezentuje čas, mluvíme o *nestacionární rovnici*. Předpokládejme, že a, b, c

2. ANALYTICKÝ ÚVOD

nejsou současně všechny nulové a závisejí na t, x . Hlavním cílem je určit typ rovnice. Určíme charakteristickou rovnici příslušné rovnici (2.8)

$$a(n_t)^2 + bn_t n_x + c(n_x)^2 = 0$$

Za předpokladu, že $n_x \neq 0$ charakteristickou rovnici vydělíme $(n_x)^2$ a zavedeme substituci $\lambda_{vl} = \frac{n_t}{n_x}$, dostáváme kvadratickou rovnici

$$a\lambda_{vl}^2 + b\lambda_{vl} + c = 0$$

Pro tuto rovnici řešíme diskriminant. Diskriminant je tvaru $D_{is} = b^2 - 4ac$. Podle teorie kvadratických rovnic rozlišujeme tři případy hodnot kořenů. Rovnice má žádný, jeden, nebo dva reálné kořeny. V naší problematice nestacionárního proudění vedou rovnice na případ dvou různých reálných kořenů, rovnice má tedy dva charakteristické směry. Tato rovnice je známá jako rovnice hyperbolického typu, tedy diskriminant $D_{is} > 0$. U hyperbolické rovnice máme dva různé reálné kořeny $\lambda_{vl1}, \lambda_{vl2}$.

Zvolíme nové souřadnice ξ, η , pro něž platí $\frac{\xi_t}{\xi_x} = \lambda_{vl1}$ a $\frac{\eta_t}{\eta_x} = \lambda_{vl2}$. Hyperbolické rovnici dále chceme přiřadit kanonický tvar.

U kanonického tvaru vycházíme z (2.8), uvažujeme regulární transformaci (t, x) na (ξ, η) , kde $\xi(t, x), \eta(t, x)$. Nyní transformujeme funkci $p(t, x)$ na $p^*(\xi(t, x), \eta(t, x))$, pomocí této transformace přejde rovnice na tvar

$$a^* p_{\xi\xi}^* + b^* p_{\xi\eta}^* + c^* p_{\eta\eta}^* = f^*$$

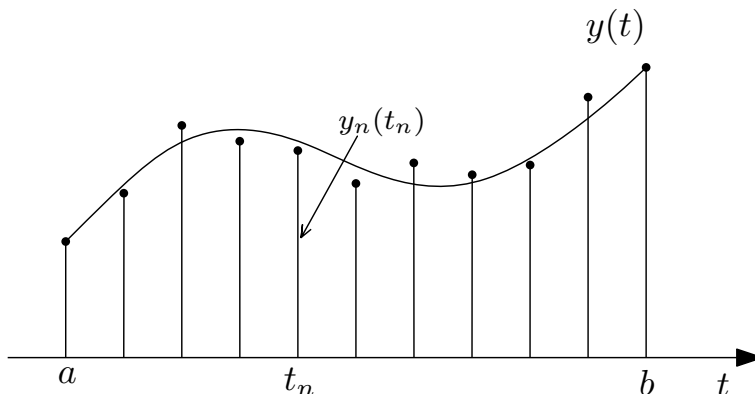
Díky teorii rovnic prvního řádu (více viz [5]) víme, že lineární rovnice mají alespoň v okolí bodu řešení. Získáme tedy řešení ve tvaru

$$p_{\xi\eta}^* = \frac{f^*}{b^*}$$

Získali jsme analytické řešení problému. Z důvodu komplikovanosti výpočtu řešíme soustavu hyperbolických rovnic pomocí numerických metod.[5]

3. Numerický Úvod

Numerické řešení problému znamená přibližně vypočítat funkční hodnotu hledaného řešení. Postupujeme tak, že interval, na kterém chceme vypočítat funkční hodnoty, rozdělíme na více částí. Vezmeme tedy interval $\langle a, b \rangle$, který rozdělíme $a = t_0 < t_1 < \dots < t_q = b$ body t_n nazýváme uzly a vzdálenost dvou sousedních bodů(uzlů) $\tau_i = t_{n+1} - t_n$ nazýváme délkou kroku, tato délka nemusí být ekvidistantní

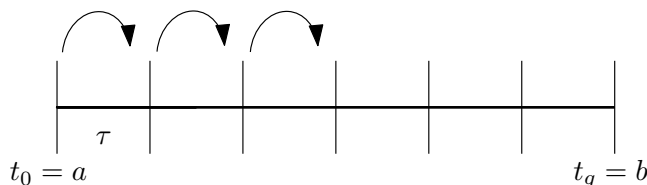


Obrázek 3.1: Numerický úvod

Na obrázku máme znázorněno ideální přesné řešení $y(t)$ a výpočet funkčních hodnot $y_n(t_n)$ v bodech t_n pomocí numerické metody. Máme tedy aproximaci funkce $y_n \approx y(t_n)$. Musíme znát funkční hodnotu na koncích intervalů, jedná se tedy o okrajové podmínky k výpočtu.

Výpočet následujícího kroku y_{n+1} , může být závislý na jednom, či více krocích předchozích. Mluvíme tedy o jednokrokové, či vícekrokové metodě.

U řešení pomocí numerických metod nás také zajímá její přesnost. Přesnost se kvalifikuje řádem přesnosti. Pro ukázkou vezmeme *řád přesnosti 1*, což odpovídá diskretizační chybě $O(\tau^2)$. Máme zde ještě zaokrouhlovací chybu, která má hodnotu $\frac{R\epsilon}{\tau}$, R je konstanta, ϵ je strojové epsilon. Epsilon je velmi malé číslo, kvůli čemuž se vliv zaokrouhlovací chyby se projeví až po velkém počtu kroků q , tedy pro velmi malé τ . Tato situace při řešení běžných úloh nenastává. Vliv zaokrouhlovací chyby tak bývá nepodstatný oproti diskretizační chybě. Ukážeme si hodnotu chyby. Vezmeme τ konstantní (ekvidistantní dělení), tedy $b - a = \tau q$



Obrázek 3.2: interval

$$|c_1\tau^2 + c_2\tau^2 + \dots + c_q\tau^2| \leq cq\tau^2$$

kde $cq\tau^2 = \frac{b - a}{\tau}q\tau^2 = c^*\tau$, hodnota chyby je menší nebo maximálně rovna $c^*\tau$, kde τ je velikost dílčího intervalu a c^* je nějaká konstanta, jejíž velikost je nějak závislá na derivaci

a hladkosti funkce.

Problematika nestacionárního proudění v potrubí se v numerice řeší metodou konečných objemů. Problém jednorozměrného proudění splývá z metod konečných objemů na metodu konečných diferencí, známý také jako metoda konečných sítí. Tato metoda rozdělí oblast, na které nás zajímá výsledek diferenciální rovnice, na množinu konečných bodů. Jednotlivé body nazýváme uzly. Derivace nahrazujeme diferencemi, které jsou lineární kombinací funkčních hodnot v daném uzlu a několika dalších vedlejších uzlů, více u metod řešení později.[3]

Numerické řešení získáme pomocí konečných diferencí. Bereme dvourozměrný prostor. Na ose vodorovné zavedeme délkovou souřadnici x a na ose svislé časovou souřadnic t . Pro výše odvozené vztahy, jako je rovnice kontinuity(2.1) a pohybové rovnice (2.7), zabývající se problémem proudění tekutiny v potrubí, použijeme maticový zápis těchto rovnic

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2DS} |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} = 0$$

tedy označíme matice

$$u = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2DS} |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získáme maticový zápis rovnice kontinuity a pohybové rovnice tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} u + K \frac{\partial}{\partial x} u + Lu = 0 \quad (3.1)$$

3.1. Neumannova podmínka stability

U numerických metod řešíme podmínku stability. Neumannovu podmínku stability, kterou si probereme na příkladu metody Lax Friedrich, která je zde probrána později.

Podmínka má tvar

$$u_i^n = \xi e^{lsi\Delta x}$$

ξ je zesilovací činitel, s je vlnové číslo, e Eulerovo číslo a l je imaginární jednotka. Toto vyjádření dosadíme do rovnice (5.1) a zanedbáme kvazistacionární člen, dostaneme

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} K (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$\xi^{n+1} e^{lsi\Delta x} = \frac{1}{2} (\xi^n e^{l(s+1)\Delta x} + \xi^n e^{l(s-1)\Delta x}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} K (\xi^n e^{l(s+1)\Delta x} - \xi^n e^{l(s-1)\Delta x})$$

Tento výraz vydělíme $\xi^n e^{lsi\Delta x}$ a nahrazením $\frac{(e^{ls\Delta x} - e^{-ls\Delta x})}{2} = l \sin(s\Delta x)$,
 $\frac{(e^{ls\Delta x} + e^{-ls\Delta x})}{2} = \cos(s\Delta x)$ a dostanu hodnotu pro ξ a hodnotu komplexně sdruženou ξ^* ve tvaru

$$\xi = \cos(s\Delta x) - l \frac{\Delta t}{\Delta x} K \sin(s\Delta x) \quad \xi^* = \cos(s\Delta x) + l \frac{\Delta t}{\Delta x} K \sin(s\Delta x)$$

3.2. CFL PODMÍNKA STABILITY

Získáme amplitudu $|\xi|$. Numerické schéma je stabilní, když

$$|\xi| = \sqrt{\xi\xi^*} \leq 1$$

$$|\xi| = \sqrt{\cos^2(s\Delta x) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}K\right)^2 \sin^2(s\Delta x)} \leq 1$$

Platí, že $\cos^2 + \sin^2 = 1$, aby byl tedy celý výraz menší nebo roven jedné, musí být $\sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}K\right)^2} \leq 1$ rozepíšeme si tento výraz a upravíme

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}K\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & \frac{S \Delta t}{\rho \Delta x} \\ \frac{k \Delta t}{S \Delta x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{S \Delta t}{\rho \Delta x} \\ \frac{k \Delta t}{S \Delta x} & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{S k \Delta t^2}{\rho S \Delta x^2} & 0 \\ 0 & \frac{S k \Delta t^2}{\rho S \Delta x^2} \end{pmatrix}} \leq 1$$

$k = \rho c^2$ dostáváme tedy

$$\sqrt{\begin{pmatrix} \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \end{pmatrix}} \leq 1$$

po odmocnění získáme

$$\begin{pmatrix} \frac{c\Delta t}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{c\Delta t}{\Delta x} \end{pmatrix} \leq 1$$

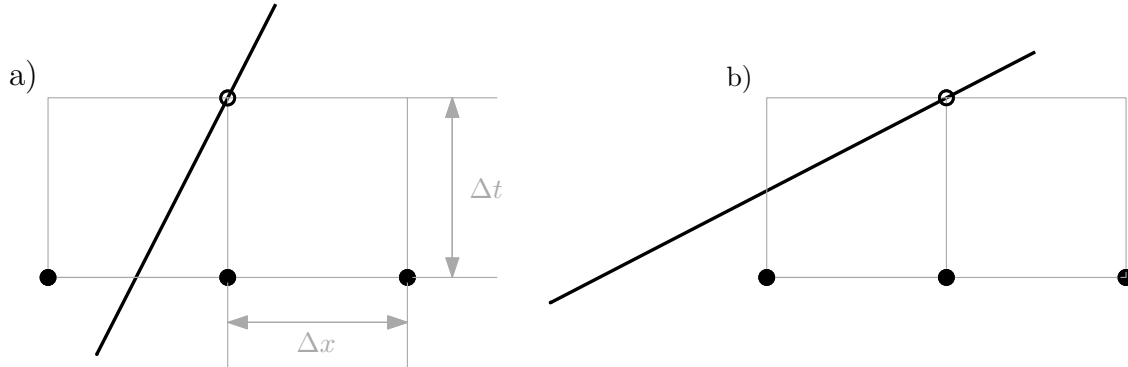
Když si napíšeme matici $u = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}$ vidíme, že hodnota je stejná jak pro tlak p , tak i tok Q . Dostáváme tedy výraz $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, který je v literatuře zmiňován jako CFL podmínka.

3.2. CFL podmínka stability

Courant-Friedrichs-Levy condition je nezbytnou podmínkou pro konvergenci při řešení určitých parciálních diferenciálních rovnic, v našem případě hyperbolického typu, numericky pomocí metody konečných diferencí. Je to určité, uživatelsky příjemnější vyjádření stability vycházející z vyjádření Neumannovi podmínky. Pro CFL nás zajímá prostorová souřadnice a čas, jako parametr popisující vývoj systému. Podmínka je závislá na délce časového kroku v závislosti na délce prostorového intervalu. Pomocí těchto údajů a rychlosti c , kterou může informace cestovat v tekutině, získáme vyjádření podmínky $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq C_{FL}$, kde C_{FL} je bezrozměrné číslo Courant number, velikost rychlosti zvuku v tekutině c , Δt je délka časového kroku a Δx je délka prostorového intervalu sítě. U metody explicitní, Lax Friedrich, se stanovuje hodnota pravé strany 1. Implicitní metody nejsou obecně tak náchylné na stabilitu a tedy můžeme brát v úvahu o něco větší hodnotu pravé strany, těmi se dále nezabýváme. Explicitní metoda využívá fakt, že známe závislou proměnou u u všech x v čase t a můžeme vypočítat jedinou neznámou hodnotu u_i^{t+1} . Řešením se tedy

pohybujeme v následujícím časovém kroku. Explicitní metoda je poměrně dobře řešitelná. Bohužel má omezenou stabilitu pro dané Δx má maximální limitní hodnotu Δt , ve které můžeme dopočítat funkční hodnotu.

CFL je nezbytnou podmínkou pro konvergenci, ale nemusí být dostatečnou. Hodnota na pravé straně rovnice je dána podle typu metody.



Obrázek 3.3: stabilita CFL
Obrázek a) stabilní řešení b) nestabilní řešení

Na obrázku můžeme vidět geometrickou interpretaci CFL podmínky, kde znázorněná přímka udává směrnici $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}$. Je zde graficky znázorněna stabilita v bodové síti dílčích řešení.

3.3. Okrajové podmínky

Okrajové podmínky je nutné stanovit na hranici oblasti, na které úlohu řešíme. Obecně můžeme okrajové podmínky zapsat ve tvaru:

$$\alpha u(\phi) + \beta u'(\phi) = u_\phi \quad (3.2)$$

α, β jsou libovolná reálná čísla a ϕ je bod, ve kterém podmínku stanovujeme.

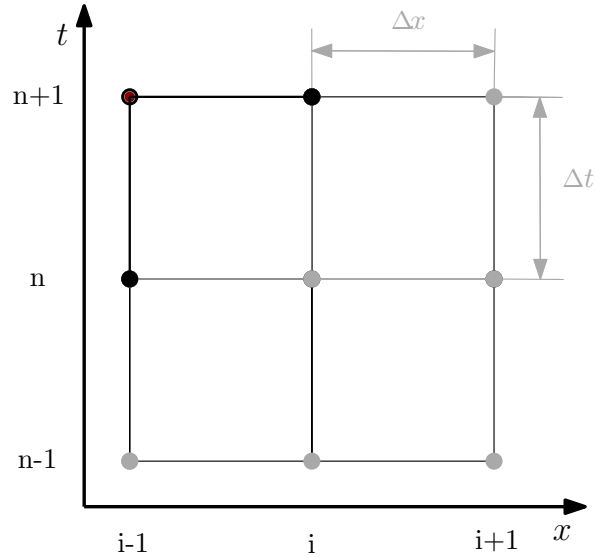
Existují tři typy okrajových podmínek. Obecná podmínka splňující $|\alpha| \neq 0, |\beta| \neq 0$ se nazývá Newtonova. Podmínka, která má $|\alpha| \neq 0, |\beta| = 0$, se nazývá Dirichletova a Neumannova podmínka je taková, že $|\alpha| = 0, |\beta| \neq 0$.

U numerických metod bude vycházet z rovnice problému (3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & \rho \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 2DS & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} = 0$$

Můžeme vzít rovnici kontinuity (2.1) nebo pohybovou rovnici (2.7). Ukážeme si vyjádření pomocí obou rovnic. Myšlenku postupu diference pro okrajovou podmínku nám ukáže obrázek (3.4). Vezmeme nejprve rovnici kontinuity

3.3. OKRAJOVÉ PODMÍNKY



Obrázek 3.4: OP síť

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Z obrázku (3.4) vidíme, jak lze vyjádřit parciální derivace pomocí diferencí

$$\frac{p_{i-1}^{n+1} - p_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{k}{S} \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

Můžeme uvažovat okrajovou podmínku pro tlak, či průtok. Budeme-li uvažovat podmínku pro tlak, konkrétně otevřenou nádrž $p = p_0 = konst$, tedy podmínku Dirichletova typu, získáme rovnici pro výpočet průtoku v daném počátečním bodě uzlu

$$Q_{i-1}^{n+1} = Q_i^n + \frac{S\Delta x}{k\Delta t} (p_{i-1}^{n+1} - p_{i-1}^n)$$

Za p_{i-1}^{n+1} dosadíme naši stanovenou podmínku $p_{i-1}^{n+1} = p_0$. Získáme tedy explicitní výraz pro jedinou neznámou - průtok v čase $n + 1$

$$Q_{i-1}^{n+1} = Q_i^n + \frac{S\Delta x}{k\Delta t} (p_0 - p_{i-1}^n)$$

Druhá možnost je, že můžeme vycházet z pohybové rovnice

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DS} Q|Q| = 0$$

Dále budeme postupovat analogicky jako u rovnice kontinuity výše

$$\frac{Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2DS} Q_{i-1}^n |Q_{i-1}^n| = 0$$

Podmínka pro tlak

$$Q_{i-1}^{n+1} = Q_i^n + \frac{S\Delta t}{\rho\Delta x} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) - \frac{\lambda\Delta t}{2DS} Q_{i-1}^n |Q_{i-1}^n|$$

$$Q_{i-1}^{n+1} = Q_i^n + \frac{S\Delta t}{\rho\Delta x} (p_i^{n+1} - p_0) - \frac{\lambda\Delta t}{2DS} Q_{i-1}^n |Q_{i-1}^n|$$

Podobně bychom získali podmínky pro průtok. U všech numerických metod, které zde probíráme, kromě metody Beam Warming, se dají stanovit okrajové podmínky tímto způsobem. Tyto podmínky jsou vyjádřením pro počáteční bod. Podmínky pro koncový bod bychom získali analogicky. Máme tedy podmínky vyjádřené pomocí dvou rovnic. Nabízí se otázka, kterou použít? Ve většině případů obě podmínky dávají srovnatelné výsledky, výběrem vhodnější se dále zabývat již nebudeme.

Podívejme se ještě na metodu Beam Warming detailněji. U této metody se musí stanovit difference jiným způsobem. Z obrázku metody (8.1) celkem intuitivně diferencii polohy stanovíme pro dvojnásobné Δx a časovou posuneme z polohy buňky $i - 1$ na $i - 2$, poté následuje identický postup.

$$\text{Pro rovnici kontinuity: } \frac{p_{i-2}^{n+1} - p_{i-2}^n}{\Delta t} + \frac{k}{S} \frac{Q_{i-2}^{n+1} - Q_{i-2}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\text{Pro pohybovou rovnici: } \frac{Q_{i-2}^{n+1} - Q_{i-2}^n}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \frac{p_{i-2}^{n+1} - p_{i-2}^n}{2\Delta x} + \frac{\lambda}{2DS} Q_{i-2}^n |Q_{i-2}^n| = 0$$

Počáteční podmínka $p_{i-2}^{n+1} = p_0$ se dosadí do rovnice a vyjádříme hodnotu neznáme Q_{i-2}^{n+1} . Podrobné dořešení problému je kompletně vyřešeno výše. Máme tedy spočítané hodnoty v čase t_{n+1} a poloze x_{i-2} . Hodnoty v bodě t_{n+1} x_{i-1} je nutné ještě dopočítat a to například pomocí vhodné numerické metody. Můžeme použít všechny metody v práci zmíněné, kromě metody Leapfrog, která potřebuje znát hodnotu navíc v čase t_{n-1} , kterou zde zadanou nemáme. [6]

3.4. Numerická viskozita

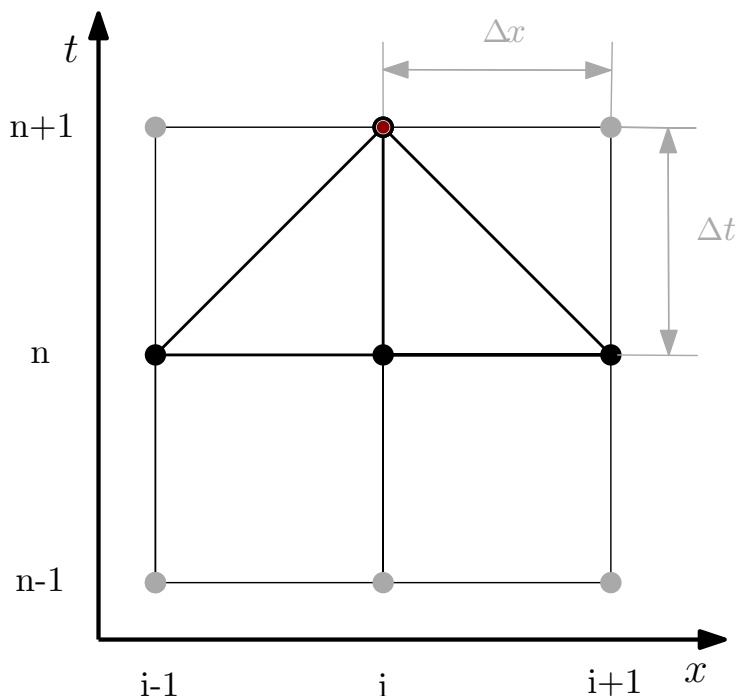
Při proudění tekutin dokonale tuhým potrubím za předpokladu nulového tření by nemělo docházet ke ztrátám energie. V praxi ale pozorujeme ztráty energie, přestože není numericky uvažována. Jedná se o vnitřní tlumení numerické metody. Při aproximaci řešení Taylorovým polynomem, které zde využívají numerické metody dochází k tomu, že zanedbáváme zbylé polynomy řady Taylorova rozvoje. Ukážeme si například pro Taylorův polynom druhého řádu.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i^n + O(\Delta t^3)$$

Tímto zanedbáním $O(\Delta t^3)$ zbylých členů vzniká chyba přesnosti numerické metody. Tato chyba se nazývá numerická viskozita a způsobuje energetickou ztrátu navíc. Numerickou viskozitu lze pro konkrétní případ získat z frekvenčně-amplitudové charakteristiky. Útlum je závislý na frekvenci impulsu a velikosti délkového a časového kroku metody. [6]

4. Metoda FTCS

Jedná se o numerickou metodu prvního řádu. Vyjadřujeme časovou derivaci naší vyjádřené funkci u . Při numerickém řešení derivaci nahrazujeme diferencí. Numerická metoda vyjadřuje explicitně hodnotu funkce v čase $t + \Delta t$. Jedná se o postupné přičítání hodnoty funkce v časovém kroku Δt . Toto explicitní schéma je poměrně dobře odvoditelné.



Obrázek 4.1: FTCS síť

Na obrázku máme znázorněno, že pro každý následující časový krok t_{n+1} na místě x_i je potřeba třech délkových kroků x_{i-1} , x_i , x_{i+1} v časovém kroku t_n . Tato metoda je tedy tří kroková. Z názvu FTCS neboli forward in time center in space, tedy popředná časová diference a centrální prostorová diference, nám určují metodu. Derivaci aproximujeme v numerických metodách diferencí.

$$\text{Forward in time: } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\text{Center in space: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Toto nahrazení derivací dosadíme do rovnice problému v maticovém zápisu (3.1)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + K \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + Lu_i^n = 0$$

Vyjádříme si explicitně hodnotu u_i^{n+1}

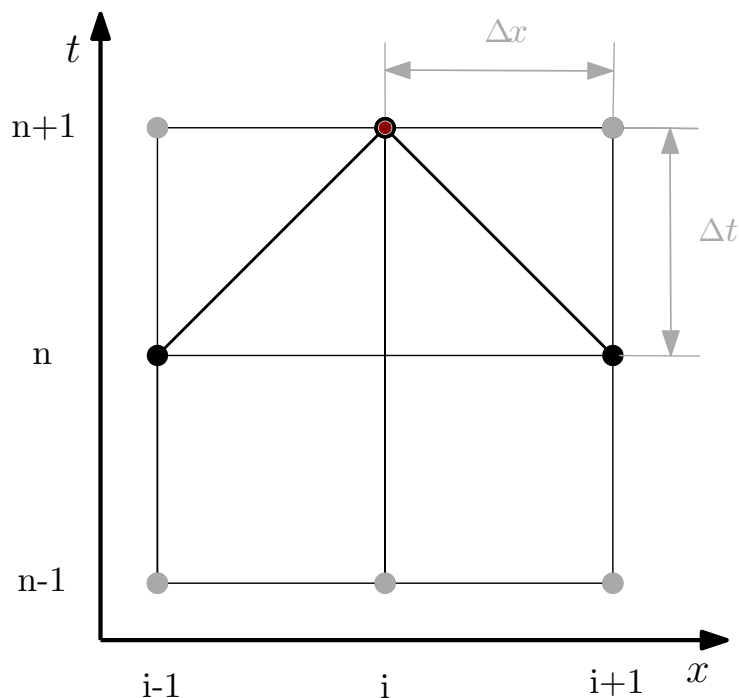
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} K (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \Delta t Lu_i^n \quad (4.1)$$

Tuto rovnici si můžeme vyjádřit maticově, kde vidíme, že tento vztah je vyjádření pro tok i tlak tekutiny

$$\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} K \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{i+1}^n - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{i-1}^n \right) - \Delta t L \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_i^n \quad (4.2)$$

K a L jsou matice, jejíž hodnoty byly popsány výše v kapitole numerický úvod. Schéma nepotřebuje velkou paměť pro výpočet a výpočet je poměrně rychlý. Bohužel poměrně velkou nevýhodou této metody je malá stabilita. Numerické řešení bude nepoužitelné díky numerické chybě, která vzniká díky stanovení délky kroku a roste exponenciálně. Proto se tato metoda používá zřídka. Metoda je použitelná pro malý časový úsek. Podmínkou pro stabilitu metody je $\frac{c\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$. [4]

5. Metoda Lax Friedrich



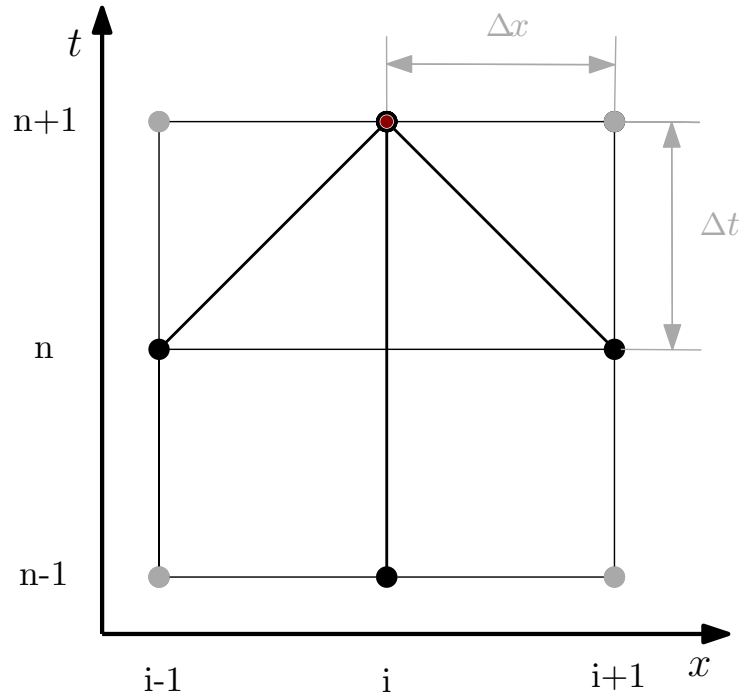
Obrázek 5.1: Lax Friedrich síť

Metoda je přesnosti prvního řádu. Změna od metody FTCS je v nahrazení členu $u_i^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$, jde o vyjádření z prostorového průměru. Touto úpravou jsme získali dvou krokovou metodu viz (5.1). Tato úprava členu u_i^n vede ke zlepšení stability oproti FTCS, za kterou se zasloužil Peter Lax. Tento výraz dosadíme do předpisu rovnice pro metodu FTCS (4.1) a získáme metodu Lax Friedrich

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} K (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \Delta t L u_i^n \quad (5.1)$$

Metoda je stabilní, splňuje-li podmínku stability, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru $\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, kde rychlost zvuku získáme z již známého tvaru $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$. Z výrazu tedy vidíme, že co se týče stability, vadí nám spíše délka časového kroku. [2]

6. Metoda Leapfrog



Obrázek 6.1: Leapfrog síť

Tato metoda je přesnosti prvního řádu. Metoda je dvou stupňovým schématem, vyžaduje tedy hodnoty v časovém kroku t_n a t_{n-1} pro získání hodnoty v čase t_{n+1} . Máme zde tři vstupní požadavky. Jedná se o tří krokovou metodu. Derivace nahrazujeme centrálními diferencemi jak v prostoru, tak i v čase.

Centrální diference prostorová: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$

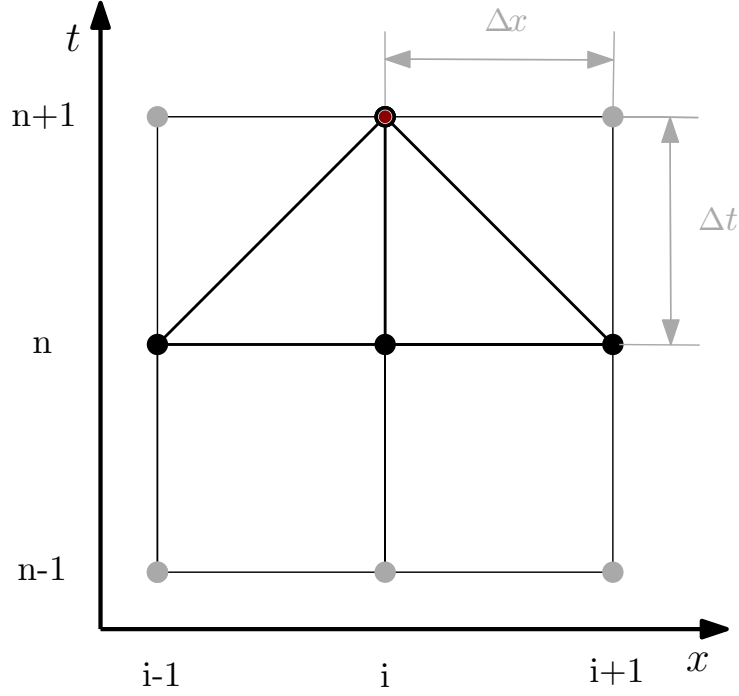
Centrální diference časová: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$

Její předpis po dosazení diferencí do rovnice (3.1) je tvaru:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (6.1)$$

Hlavní nevýhodou tohoto schéma je, že jsou sudé a liché buňky sítě zcela oddělené, tedy můžeme pracovat pouze jedním z nich. Hodnota Leapfrog má poměrně malou oblast stability. Pro stabilitu řešení by měly být hodnoty $c\Delta t$ podstatně menší než Δx , abychom dosáhli požadované přesnosti. U metody je tedy nutné získat $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \ll 1$, tedy pro stabilitu se nám výraz blíží nule. [4]

7. Metoda Lax Wendroff



Obrázek 7.1: Lax-Wendroff síť

Tříkroková metoda přesnosti druhého řádu. Tato metoda vychází z Taylorova rozvoje druhého řádu. Předpis metody

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i^n \quad (7.1)$$

V tomto předpisu neznáme druhou derivaci u podle času. Musíme si ji tedy vyjádřit z maticového zápisu problému (3.1), který vynásobíme $\frac{\partial}{\partial t}$ a vyjádříme explicitně hodnotu $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = -K \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u - L \frac{\partial}{\partial t} u$$

Po úpravách získáme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + KL \frac{\partial}{\partial x} u + LK \frac{\partial}{\partial x} u + L^2 u$$

Tento výraz a výraz pro první derivaci u podle t dosadíme do rovnice metody (7.1)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(-K \frac{\partial}{\partial x} u - Lu \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + KL \frac{\partial}{\partial x} u + LK \frac{\partial}{\partial x} u + L^2 u \right)$$

Derivace přepíšeme na difference

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

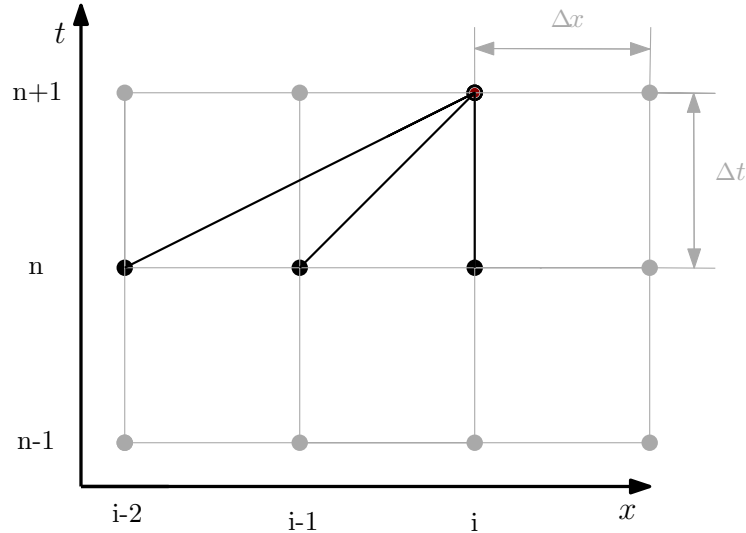
7. METODA LAX WENDROFF

Pomocí všech těchto pomocných vyjádření můžeme napsat konečný tvar pro metodu Lax Wendroff

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left[-\frac{K}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - Lu_i^n \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{K^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{KL}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{LK}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + L^2 u_i^n \right] \quad (7.2)$$

Pro stabilitu metody je důležité splnit podmínku $\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. [2]

8. Metoda Beam Warming



Obrázek 8.1: BeamWarming síť

Jedná se o tříkrokovou metodu. K výpočtu hodnoty v časovém kroku $n + 1$ je třeba tři známé hodnoty v časovém kroku n . Metoda je přesnosti druhého řádu. Vychází z Taylorova polynomu druhého řádu. Metoda je tvaru

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i^n \quad (8.1)$$

Z maticového zápisu problému si vyjádříme parciální derivaci u podle t a také druhou parciální derivaci. Tento postup už známe z metody Lax Wendroff

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -K \frac{\partial}{\partial x} u - Lu$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = -K \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u - L \frac{\partial}{\partial t} u$$

Druhou parciální derivaci upravíme, abychom získali závislost pouze na x

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + KL \frac{\partial}{\partial x} u + LK \frac{\partial}{\partial x} u + L^2 u$$

Takto připravené parciální derivace dosadíme do rovnice (8.1)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(-K \frac{\partial}{\partial x} u - Lu \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + KL \frac{\partial}{\partial x} u + LK \frac{\partial}{\partial x} u + L^2 u \right)$$

Parciální derivace vyjádříme pomocí diferencí

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{1}{2\Delta x} (3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{1}{\Delta x^2} (u_i^n - 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n)$$

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t & \left[-\frac{K}{2\Delta x} (3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) - Lu_i^n \right] \\
+ \frac{\Delta t^2}{2} & \left[\frac{K^2}{\Delta x^2} (u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{KL}{2\Delta x} (3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{LK}{2\Delta x} (3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + L^2 u_i^n \right]
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Velkou výhodou této explicitní metody je větší oblast stability než u již zmíněných metod a to $\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 2$. [2]

9. Závěr

Problematika nestacionárního proudění se vyskytuje při přepravě kapalin z místa na místo. Práce začíná analytickým zkoumáním problematiky nestacionárního proudění v potrubí. První zmiňovaná analytická rovnice vychází z myšlenky zákona zachování hmotnosti. Rovnice odvozující tuto myšlenku se nazývá rovnice kontinuity. Druhá analytická rovnice vychází z úvahy $\sum F_i = ma_i$ na nějaký objemový element kapaliny, tato rovnice se nazývá pohyb. Jedná se o určitou úpravu Navier Stokesovi rovnice. Obě rovnice jsou parciální diferenciální a vedou na problematiku hyperbolického typu. Z těchto rovnic získáme analytické řešení problému. Z důvodu komplikovanosti výpočtu řešíme soustavy hyperbolického typu numerickými metodami. Je zde popsán postup při numerické aproximaci analytického řešení. Numerické řešení získáme pomocí aproximace z Taylorova polynomu a nahrazením derivací diferencemi. Díky rozvoji do Taylorova polynomu a zanedbáním části jeho posloupnosti dochází k numerickému útlumu řešení, které způsobuje nepřesnost od řešení analytického. Tato nepřesnost není paradoxně negativní, protože nahrazuje ztráty vznikající při proudění tekutiny, které se při výpočtu nijak nezahrnovaly. Dále jsou zde klasifikovány numerické metody podle hlavních vlastností, jako je například přesnost, stabilita, či závislost na krocích předchozích. Pro řešení je také podstatné znát okrajové podmínky, které charakterizují vlastnost systému. V práci je například uvažována otevřená nádrž, z níž plyne konstantní tlak jako okrajová podmínka. Je zde udělána rešerše numerických metod řešení i s případným postupem výpočtu. Vybrané metody mají různé charakteristické vlastnosti, díky kterým si může uživatel zvolit nejvhodnější z nich.

Literatura

- [1] BRDIČKA, M., Ladislav S., SOPKO B.: *Mechanika kontinua*, Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005, 799 s. : il. ; 24 cm. ISBN 802001344X.
- [2] LEVEQUE, R. J.: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, New York, NY : Cambridge University Press, 2002. ISBN 978-0-521-00924-9.
- [3] ČERMÁK, L.: *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*,
- [4] REZZOLLA, L.: *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations*
- [5] FRANČŮ, J.: *Parciální diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2011. ISBN:978-80-214-4399-0
- [6] HIMR, D.: *Řešení nelineárních hydraulických sítí*, Brno, 2011
- [7] ŠTEFAN, D.: *Hydraulické ztráty v potrubí*, Brno, 2009

10. Seznam nejdůležitějších symbolů

Symbol	Jednotka	Popis
t	s	čas
v	$m \cdot s^{-1}$	rychlost
x	m	délková souřadnice
p	Pa	tlak
ρ	$kg \cdot m^{-3}$	hustota
V	m^3	objem
S	m^2	obsah
Q	$m^3 \cdot s^{-1}$	průtok
c	$m \cdot s^{-1}$	rychlost zvuku
F	N	síla
m	kg	hmotnost
a	$m \cdot s^{-2}$	zrychlení
g	$m \cdot s^{-2}$	tíhové zrychlení
κ	$m^2 \cdot s^{-1}$	druhá viskozita
μ	$Pa \cdot s$	dynamická viskozita
δ_{ij}	–	Kroneckerovo delta
D	m^2	hydraulický průměr
λ	–	součinitel délkových ztrát
Re	–	Reynoldsovo číslo
σ_{ij}	Pa	tenzor normálových napětí