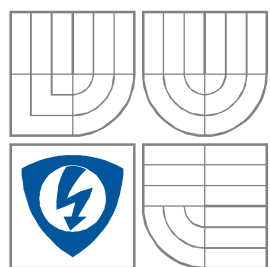


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND  
COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

## MODELOVÁNÍ VLNOVODŮ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ V ČASOVÉ OBLASTI

MODELING WAVEGUIDES BY TIME-DOMAIN FINITE ELEMENTS

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. PAVEL FASORA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. Dr. Ing. ZBYNĚK RAIDA

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav radioelektroniky

# Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor  
**Elektronika a sdělovací technika**

**Student:** Bc. Pavel Fasora

**ID:** 85758

**Ročník:** 2

**Akademický rok:** 2008/2009

## NÁZEV TÉMATU:

**Modelování vlnovodů metodou konečných prvků v časové oblasti**

## POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Seznamte se s modelováním podélně homogenních vlnovodů metodou konečných prvků v kmitočtové oblasti (s modální analýzou). Vytvořte v programu MATLAB skripty pro modální analýzu vlnovodů. Výsledky modelování ověřte v programu COMSOL Multiphysics.

Modální analýzu využijte k výpočtu budící vlny, která se bude šířit vlnovodem "parallel plate" od budící stěny k ukončení (dokonale přizpůsobená vrstva, dokonalý kov). Strukturu analyzujte pro několik kmitočtů z pásma jednovídrovosti a výsledky ověřte v programu COMSOL Multiphysics.

Výpočet šíření vlny vlnovodem přeneste z kmitočtové oblasti do oblasti časové. Navrhněte způsob ověření výsledků analýzy. Vzájemně porovnejte různé přístupy k modelování vedení v časové oblasti konečnými prvky. Formulujte obecná doporučení numerického modelování v časové oblasti.

## DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] SILVESTER, P. P., FERRARI, R. F. Finite elements for electrical engineers. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[2] LEE, J. F., LEE, R., CANGELLARIS, R. Time domain finite element methods. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1997, vol. 45, no. 3, p. 430-442.

**Termín zadání:** 9.2.2009

**Termín odevzdání:** 29.5.2009

**Vedoucí práce:** prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida

**prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida**  
Předseda oborové rady

**UPOZORNĚNÍ:**

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práve třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

## **ABSTRAKT**

Práce se zabývá metodou konečných prvků ve frekvenční oblasti a metodou konečných prvků v časové oblasti. Popisuje odvození vlnové rovnice, generování diskretizační sítě a sestavení matic pro řešení vlnové rovnice. Práce diskutuje použití programu COMSOL Multiphysics pro analýzu šíření elektromagnetické vlny ve vlnovodu. Dále práce popisuje m-soubor programu MATLAB, který analyzuje rozložení intenzity elektrického pole v podélném řezu vlnovodem ve frekvenční i v časové oblasti. Poslední kapitola stručně popisuje dokonale přizpůsobené vrstvy.

## **ABSTRACT**

The thesis deals with frequency domain finite elements and time domain finite elements. Derivation of the wave equation, generation of the discretization mesh and the composition of matrices for solving wave equation are presented. Exploitation of COMSOL Multiphysics for the analysis of the electromagnetic wave propagation in a wave guide is explained. Finally, in this thesis is described the m-file of MATLAB for analyzing electric field intensity of the waveguide in longitudinal direction to both domain. In last part is concisely exposed perfect match layers.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Metoda konečných prvků ve frekvenční oblasti, metoda konečných prvků v časové oblasti, COMSOL Multiphysics, MATLAB, vlnovod.

## **KEYWORDS**

Frequency-domain finite-element method, time-domain finite-element method, COMSOL Multiphysics, MATLAB, waveguide.

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

FASORA, P. *Modelování vlnovodů metodou konečných prvků v časové oblasti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 38 s. Vedoucí diplomové práce prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida.

## Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Modelování mikrovlnných struktur metodou konečných prvků v časové oblasti jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne 29. května 2009

.....  
podpis autora

## Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce prof. Dr. Ing. Zbyňkovi Raidovi za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne 29. května 2009

.....  
podpis autora

# OBSAH

1.	ÚVOD .....	7
2.	METODA KONEČNÝCH PRVKŮ .....	8
2.1.	MODÁLNÍ ANALÝZA VLNOVODU .....	8
2.2.	HARMONICKÁ ANALÝZA VLNOVODU .....	11
2.3.	COMSOL MULTIPHYSICS .....	12
2.4.	MATLAB .....	18
3.	ČASOVÁ ANALÝZA VLNOVODU .....	24
3.1.	TEORETICKÝ ROZBOR .....	24
3.2.	ČASOVÁ ANALÝZA V PROGRAMU COMSOL .....	27
3.3.	IMPLEMENTACE ČASOVÉ ANALÝZY V MATLABU .....	30
4.	DOKONALE PŘIZPŮSOBENÉ VRSTVY .....	33
5.	ZÁVĚR .....	35
	LITERATURA .....	36
	SEZNAM OBRÁZKŮ .....	37
	SEZNAM ZKRATEK A SYMBOLŮ .....	38

# 1. ÚVOD

Významné úsilí je v dnešní době věnováno výzkumu komunikačních kanálů s dostatečnou přenosovou kapacitou. Jednou z cest je efektivnější využití kanálů stávajících (sofistikované kódování, číslicové modulace), další možností je využít vyšší kmitočtová pásma, která odpovídají tzv. oknům v rádiovém spektru (pásma s relativně nízkým útlumem).

Pro přenos rádiových signálů ve vyšších kmitočtových pásmech (typicky desítky gigahertzů) je třeba navrhnout a vyrobit speciální elektronické obvody, vedení a antény, jejichž parametry nejsou soustředěny do jednoho diskrétního komponentu, ale jsou rozprostřeny v celé struktuře. Tato zařízení budeme v rámci tohoto projektu nazývat mikrovlnnými strukturami.

Mikrovlnné struktury v pásmech desítek gigahertzů neumíme ve většině případů popsat analyticky. Proto je zapotřebí k řešení Maxwellových rovnic, které elektromagnetické pole mikrovlnných struktur popisují, využít numerických metod.

Cílem této diplomové práce je navrhnout v programu MATLAB skript, který bude analyzovat mikrovlnný vlnovod v podélném řezu metodou konečných prvků nejprve ve frekvenční oblasti a poté v oblasti časové. Vlna se šíří od budicí stěny k vodivému ukončení, od něho se odráží a vrací se zpátky. Ve struktuře vzniká stojatá vlna, struktura se chová jako rezonátor.

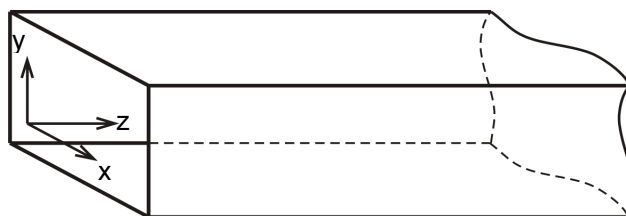


## 2. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

K numerickému řešení Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru se nejčastěji využívá metoda konečných diferencí. Analyzovaná struktura je pokryta sítí uzlů a parciální derivace v rovnicích jsou nahrazeny středovými diferencemi intenzit pole v uzlech.

V tomto projektu využíváme k řešení Maxwellových rovnic metodu konečných prvků. Metoda konečných prvků má oproti metodě konečných diferencí mnoho výhod. Pracuje s veličinami pole i mimo uzly a chyba řešení se dá kvantifikovat. Navíc metoda konečných prvků dokáže analyzovat i struktury s nepravidelnými tvary, dokáže pracovat s křivými povrchy i s nerovnoměrnou sítí. Cenou za tyto výhody je složitější matematický popis a komplikovanější softwarová implementace [1].

Matematická formulace metody konečných prvků může vycházet buď přímo z Maxwellových rovnic, nebo z vlnové rovnice. Tento semestrální projekt se zaměřuje na druhý jmenovaný případ.



**Obr. 2.1** Orientace souřadných os ve vlnovodu.

Uvažujme obdélníkový vlnovod podle obr. 2.1. Elektromagnetická vlna se šíří zleva doprava podél osy  $z$ .

Popsaný vlnovod obvykle analyzujeme dvěma různými způsoby:

1. Modální analýza vlnovodu. Předpokládáme, že vlnovod je na svém konci impedančně přizpůsoben, a proto se jím šíří pouze přímá vlna. Analýza rezonancí příčného průřezu vlnovodu vede na kritická vlnová čísla a rozložení pole vidů, které se vlnovodem mohou šířit.
2. Harmonická analýza vlnovodu. Předpokládáme, že známe rozložení elektromagnetického pole na vstupní stěně vlnovodu (tzv. budicí stěna). Harmonickou analýzou počítáme šíření vlny vlnovodem z budicí stěny směrem k jeho konci.

V podkapitole 2.1. uvádíme podrobnosti týkající se modální analýzy, kapitola 2.2. popisuje šíření harmonické vlny vlnovodem. Kapitola 2.3. vysvětluje postup modální a harmonické analýzy v programu COMSOL Multiphysics, kapitola 2.4. rozebírá skripty v programu MATLAB, které oba typy analýzy implementují.

### 2.1. Modální analýza vlnovodu

Rozložení příčně elektrického vidu je jednoznačně určeno podélnou složkou intenzity magnetického pole  $H_z$ , rozložení příčně magnetického vidu podélnou složkou intenzity pole elektrického  $E_z$ . Ve svém projektu se zabývám tímto druhým případem.

Závislost podélné složky intenzity elektrického pole ve vlnovodu na podélné souřadnici  $z$  a čase  $t$  lze vyjádřit ve tvaru [2]

$$E_z(z, t) \approx E_{z0} \exp[j(\omega t - \beta z)] , \quad (1)$$

kde  $E_{z0}$  je amplituda,  $\omega$  je úhlový kmitočet a  $\beta$  je konstanta šíření vlny ve směru podélné osy vlnovodu. Vztah (1) platí pro bezeztrátový vlnovod.

Vlnovou rovnici pro podélnou složku intenzity elektrického pole lze v kartézském souřadném systému vyjádřit ve tvaru [4]

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 , \quad (2)$$

kde  $\mu_0$  je permeabilita vakua a  $\varepsilon_0$  permitivita vakua uvnitř vlnovodu.

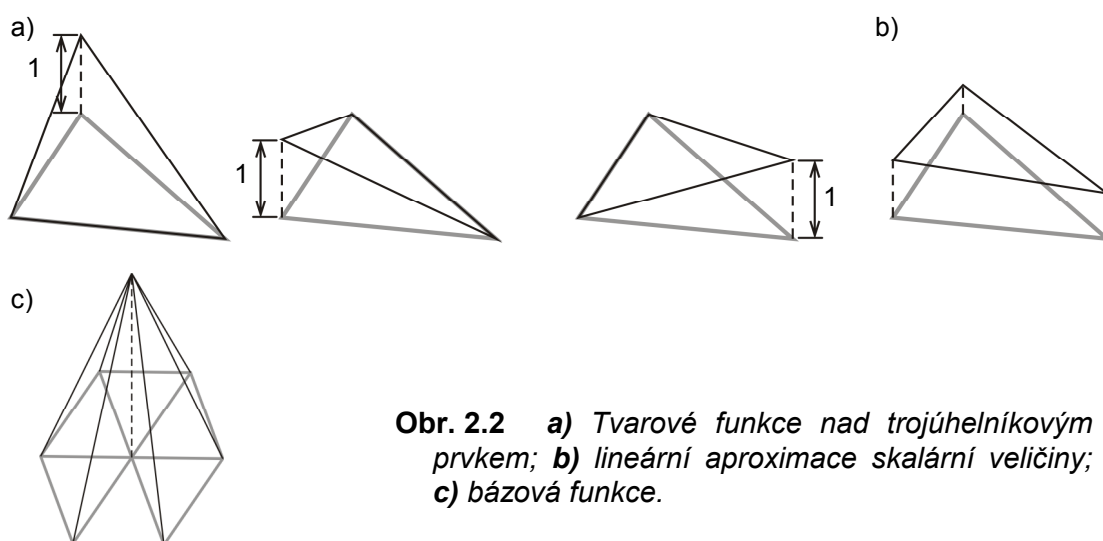
Ve směrech  $x$  a  $y$  vzniká ve vlnovodu stojaté vlnění mezi vodivými stěnami vlnovodu a ve směru  $z$  se vlna šíří. Amplituda pole se tedy mění jen ve směrech  $x$  a  $y$  a ve směru  $z$  se amplituda nemění za předpokladu šíření bez útlumu. V rovnici (1) je tedy člen  $E_{z0}$  závislý na  $x$  a  $y$  a člen  $\exp(-j\beta z)$  závislý na  $z$ . Po dosazení rovnice (1) do (2) a po derivování dostáváme

$$\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta^2) E_{z0} = 0 , \quad (3)$$

Metoda konečných prvků řeší rovnici (3) v maticovém tvaru

$$\mathbf{S} E_{z0} + (k_0^2 - \beta^2) \mathbf{T} E_{z0} = 0 , \quad (4)$$

pro sloupcový vektor neznámých hodnot intenzity elektrického pole v uzlech  $\mathbf{E}_{z0}$ .  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$  je vlnové číslo. Abychom převedli jednu spojitou rovnici na soustavu diskretních rovnic, musíme v prvním kroku vlnovod rozdělit na trojúhelníkové konečné prvky a hledanou intenzitu pole nad nimi aproximovat po částech lineární funkcí.



**Obr. 2.2** a) Tvarové funkce nad trojúhelníkovým prvkem; b) lineární aproximace skalární veličiny; c) báze funkce.

Nad každým diskretizačním prvkem jsou tři tvarové funkce – každá má v jednom uzlovém bodu velikost jedna a v dalších uzlových bodech velikost nula. Bázeová

funkce  $N_m$  vznikne tak, že se sloučí všechny tvarové funkce, které jsou nad  $m$ -tým uzlovým bodem nenulové.

Matice **S** a **T** pro obecný konečný prvek se získají integrováním rovnic [1]

$$T_{m,n} = \int_{\Omega_e} N_m(x, y) N_n(x, y) dx dy \quad m, n = 1, 2, \dots, M \quad (5a)$$

$$S_{m,n} = \int_{\Omega_e} N_m(x, y) \left[ \frac{\partial^2 N_n(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_n(x, y)}{\partial y^2} \right] dx dy \quad m, n = 1, 2, \dots, M \quad (5b)$$

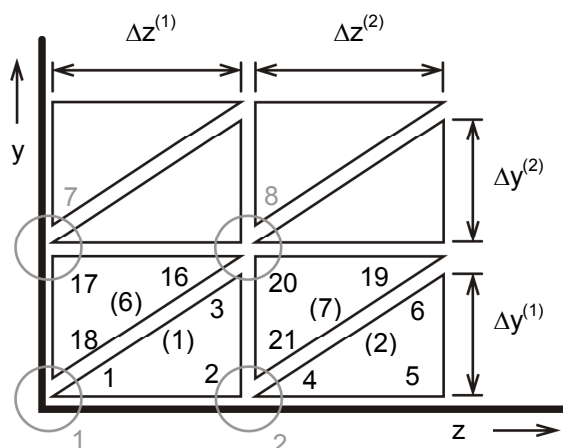
nad jednotlivými konečnými prvky  $\Omega_e$ , nad nimiž je bázová funkce  $N_m$  nenulová.

Z lokálních matic **T** a **S** pro jednotlivé konečné prvky vzniknou globální matice izolovaných koeficientů  $\tilde{\mathbf{S}}$  a  $\tilde{\mathbf{T}}$  tak, že se matice  $\mathbf{S}^{(e)}$  a  $\mathbf{T}^{(e)}$  postupně vkládají do diagonály globálních matic v pořadí konečných prvků. Rozměr matic  $\tilde{\mathbf{S}}$  a  $\tilde{\mathbf{T}}$  je tedy  $3N \times 3N$ , kde  $N$  je počet konečných prvků.

Konečné matice **S** a **T** se vypočítají násobením matic

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{C}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{C}. \quad (6)$$

kde **C** je sdružovací matice. Sdružovací matice má tolik řádků, kolik je lokálních uzlů, a tolik sloupců, kolik je globálních uzlů.



**Obr. 2.3** Číslování diskretizačních prvků. Černé číslice označují lokální uzly, šedá čísla označují globální uzly a čísla v závorkách označují konečné prvky.

Matice **C** obsahuje jen nuly a jedničky. Jednička v  $i$ -tém sloupci a v  $j$ -tém řádku udává, že  $j$ -tý lokální uzel přísluší  $i$ -tému globálnímu uzlu.

V rovnici (4) neznáme jednak sloupcový vektor  $\mathbf{E}_{z0}$ , jednak hodnotu rozdílu kvadrátů vlnového čísla a fázové konstanty. Jedná se tedy o problém vlastních čísel. Hledáme takové dvojice  $(k_0^2 - \beta^2)$  a  $\mathbf{E}_{z0}$ , pro něž je rovnice (4) splněna. Existuje tolik řešení, jaký je rozměr čtvercových matic **S** a **T**.

## 2.2. Harmonická analýza vlnovodu

Závislost podélné složky intenzity magnetického pole ve vlnovodu na podélné souřadnici  $z$  a čase  $t$  lze vyjádřit ve tvaru [2]

$$E_y(z, t) \approx E_{y0} \exp[j(\omega t - \beta z)] , \quad (7)$$

Vlnovou rovnici pro podélnou složku intenzity elektrického pole lze v kartézském souřadném systému vyjádřit ve tvaru [4]

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 , \quad (8)$$

kde  $\mu_0$  je permeabilita vakua a  $\varepsilon_0$  permitivita vakua uvnitř vlnovodu.

Při zkoumání šíření vidu  $TE_{10}$  se ve směru  $y$  intenzita nemění, takže můžeme parciální derivaci podle  $y$  vynechat. Po dosazení rovnice (1) do (2) dostáváme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [E_{y0} e^{j(\omega t - \beta z)}] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [E_{y0} e^{j(\omega t - \beta z)}] - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [E_{y0} e^{j(\omega t - \beta z)}] = 0 . \quad (9)$$

Ve směru  $x$  vzniká ve vlnovodu stojaté vlnění mezi vodivými stěnami vlnovodu a ve směru  $z$  se vlna šíří. Amplituda pole se tedy mění jen ve směru  $x$  a ve směru  $z$  se amplituda nemění za předpokladu šíření bez útlumu. V rovnici (3) je tedy člen  $E_{y0}$  závislý na  $x$  a člen  $\exp(-j\beta z)$  závislý na  $z$ . Po derivování dostáváme

$$\frac{\partial^2 E_{y0}}{\partial x^2} + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta^2) E_{y0} = 0 , \quad (10)$$

Metoda konečných prvků řeší rovnici (4) v maticovém tvaru

$$[ \mathbf{S} + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta^2) \mathbf{T} ] \mathbf{E}_{y0} = 0 , \quad (11)$$

pro sloupcový vektor neznámých hodnot intenzity magnetického pole v uzlech  $\mathbf{E}_{y0}$ .

Matice  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{T}$  se sestaví obdobně jako v modální analýze. Pouze vynechání parciální derivace podle  $y$  v (8) a změna souřadných os způsobí změnu výpočtu lokálních matic  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{T}$ .

$$T_{m,n} = \int_{\Omega_e} N_m(x, z) N_n(x, z) dx dz \quad m, n = 1, 2, \dots, M \quad (12a)$$

$$S_{m,n} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_m(x, z)}{\partial x} \frac{\partial N_n(x, z)}{\partial x} dx dz \quad m, n = 1, 2, \dots, M \quad (12b)$$

Protože známe frekvenci, na které vlnovod analyzujeme, jedinou neznámou je vektor  $\mathbf{E}_{y0}$ . Na pravé straně rovnice (5) se navíc objeví vektor pravých stran  $\mathbf{R}$ , který obsahuje známé hodnoty pole na budící stěně na začátku vlnovodu a na absorpční stěně na konci vlnovodu. Vše můžeme zjednodušeně napsat ve tvaru

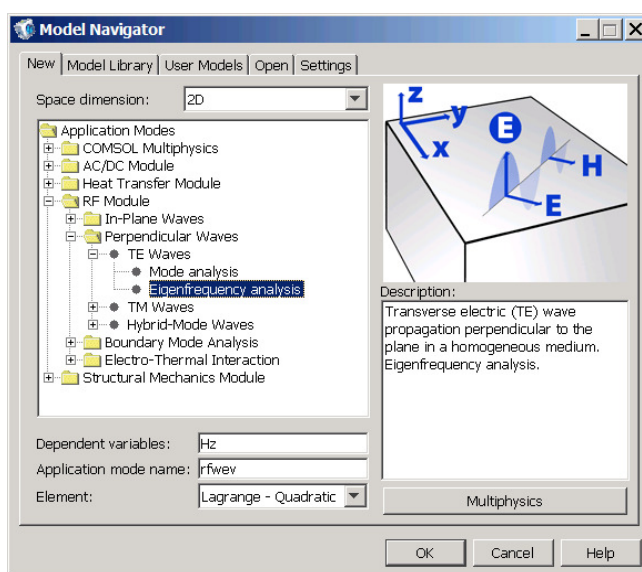
$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_{y0} = \mathbf{R} , \quad (13)$$

kde  $\mathbf{M} = \mathbf{S} + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \beta^2) \mathbf{T}$ . Hledaný vektor rozložení intenzity magnetického pole  $\mathbf{E}_{y0}$  se vypočte Gaussovou eliminací.


## 2.3. COMSOL Multiphysics

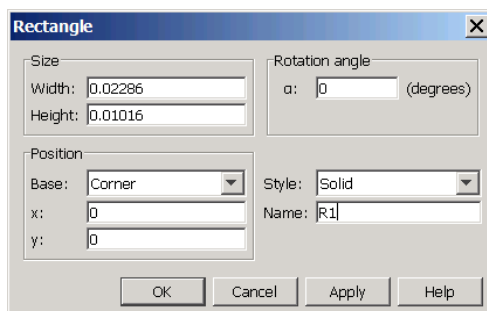
Program COMSOL Multiphysics analyzuje mikrovlnné struktury metodou konečných prvků ve frekvenční oblasti. V tomto projektu je COMSOL Multiphysics využit k ověření správnosti výsledků vypočtených programem napsaným v MATLABu.

Nejprve se zaměříme na popis modální analýzy v programu COMSOL Multiphysics. V úvodním okně aplikace vybereme typ analýzy. Modální analýza zkoumá šíření rovinné vlny v kolmém řezu vlnovodu. Proto vybereme modul **RF Module** a sub-modul **Perpendicular Waves**. Hledáme kritické kmitočty jednotlivých vidů vlny příčně magnetické. Platí ale princip duality a protože je obvyklejší pracovat s vlnami příčně elektrickými, zvolíme simulaci TE Waves a pro zobrazení vlny příčně magnetické upravíme okrajové podmínky. (**TE Waves – Eigenfrequency propagation**). Volbu potvrdíme tlačítkem <OK>.



Obr. 2.4 Výběr typu analýzy.

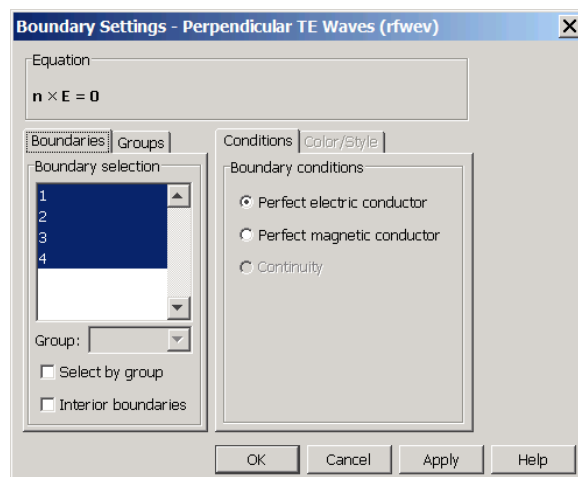
Nyní je potřeba nakreslit analyzovanou strukturu. Po klepnutí na ikonu *Rectangle/Square*  nakreslíme model vlnovodu tak, že prvním kliknutím myši označíme počáteční roh a druhým kliknutím koncový roh vlnovodu. Pro nastavení správných rozměrů je potřeba na nakreslený obdélník poklepat a v otevřeném dialogu nastavit parametry podle obr. 2.5. Tyto hodnoty odpovídají vlnovodu R100, který má rozměry 22,96 x 10,16 mm.



Obr. 2.5 Nastavení velikosti objektu.

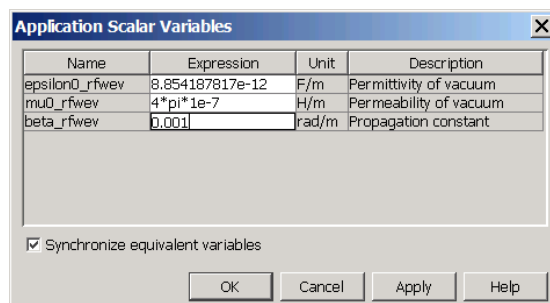
Pro lepší zobrazení je vhodné kliknout na ikonu *Zoom Extents* .

Dále je potřeba nastavit okrajové podmínky. Ve vlnovodu se má šířit vlna příčně magnetická, proto všechny stěny nastavíme jako dokonalý elektrický vodič. Toto nastavení se provede v okně *Boundary Settings*, které otevřeme pomocí nabídky *Physics/Boundary Settings...* nebo klávesou <F7>:





**Obr. 2.6** Nastavení okrajových podmínek na stěnách vlnovodu.

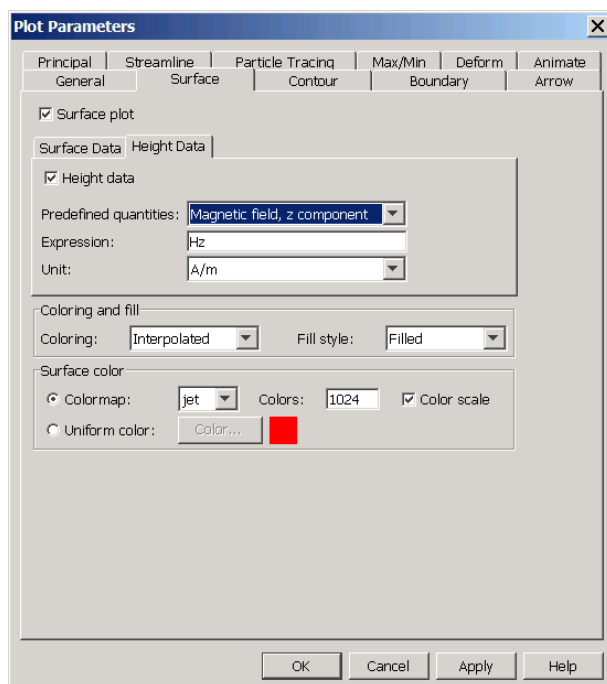
V okně *Application Scalar Variables (Physics/Scalar Variables...)* nastavíme, že v rovnici (4) počítáme kritická vlnová čísla. Provedeme to tak, že nastavíme velikost konstanty šíření na velmi malou hodnotu (například 0,001). Nulová velikost tohoto parametru znamená, že se vlna nešíří vlnovodem vůbec.



**Obr. 2.7** Nastavení skalárních proměnných.

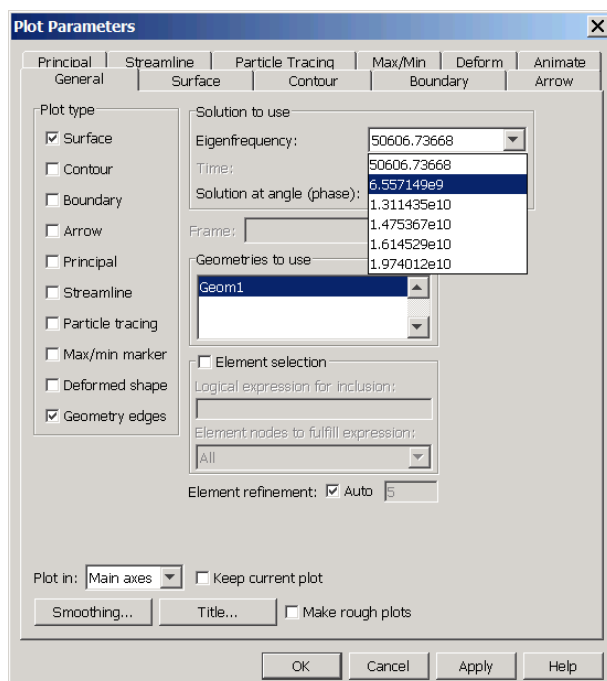
Vlastní analýza se spustí tlačítkem *Solve* . Pokud je požadován přesnější výsledek, je možné předem zjemnit diskretizační síť tlačítkem *Refine mesh*  a až poté spustit analýzu.

Dále provedeme nastavení pro správné zobrazení výsledků. V okně *Plot Parameters*, které otevřeme pomocí nabídky *Postprocessing/Plot Parameters...* nebo klávesou <F12>, zobrazíme záložku *Surface*. Zde na záložce *Surface Data* vybereme zobrazovanou veličinu *Predefined quantities: Magnetic field, z component* a na záložce *Height Data* zaškrtneme pole *Height data* a zobrazovanou veličinu vybereme opět *Magnetic field, z component*.



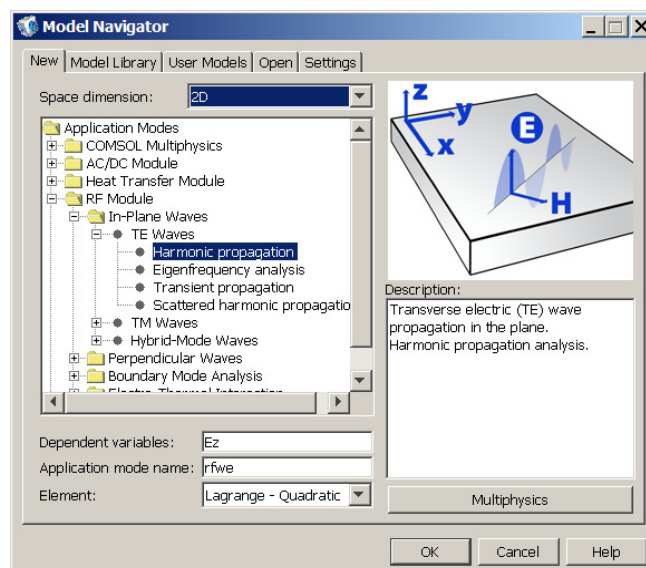
**Obr. 2.8** Nastavení zobrazené veličiny.

Na záložce *General* jsou v nabídce *Eigenfrequency* vypočtené kritické kmitočty. Po výběru frekvence se zobrazí rozložení daného vidu.




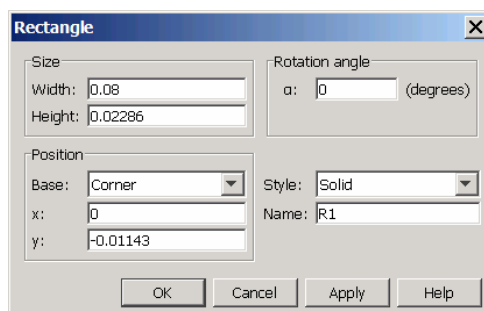
**Obr. 2.9** Vypočtené kritické kmitočty.

Nyní přistupme k harmonické analýze dvojrozměrného vlnovodu. Nejprve je nutno v úvodním okně aplikace vybrat správný typ analýzy. Modelujeme šíření rovinné vlny, které patří do okruhu modelů modulu **RF Module**. Šíření rovinné vlny je součástí sub-modulu **In-Plane Waves**. Zkoumáme vlnu příčně magnetickou. Opět vybereme díky principu duality **TE Wales**. Tato vlna se šíří na zadaném harmonickém kmitočtu (**Harmonic propagation**). Volbu potvrdíme tlačítkem **<OK>**.



**Obr. 2.10** Výběr typu analýzy.

Dále nakreslíme analyzovanou strukturu. Pomocí ikony *Rectangle/Square*  opět nakreslíme model vlnovodu. Na nakreslený obdélník poklepeme a v otevřeném dialogu nastavíme parametry podle obr. 2.11.

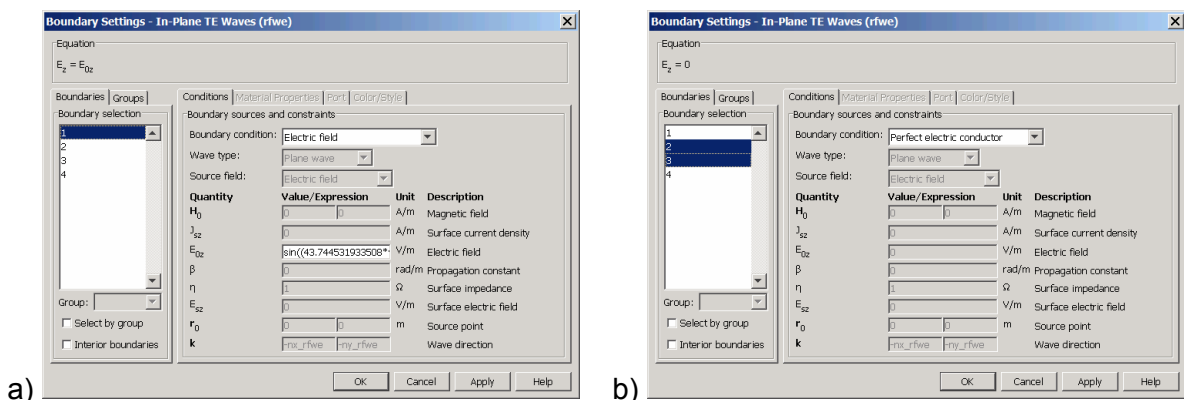


**Obr. 2.11** Nastavení velikosti objektu.

Pro lepší zobrazení je vhodné kliknout na ikonu *Zoom Extents* .

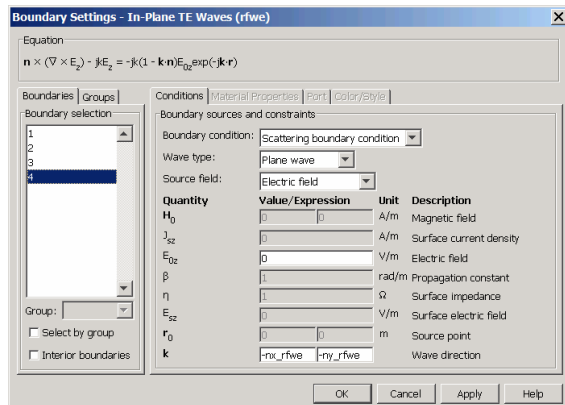
Nyní je potřeba nastavit okrajové podmínky. Ve vlnovodu se má šířit vlna příčně magnetická, proto se vrchní a spodní stěna nastaví jako dokonalý elektrický vodič (na dokonalém elektrickém vodiči je elektrická intenzita nulová). Na budící stěně se nastaví elektrické pole se sinusovým rozložením pole. Sinusové budící pole dokonaleji modeluje příčně elektrické pole – na bočních stěnách vlnovodu je nulová elektrická intenzita. Pro dané rozměry je funkce rozložení elektrické intenzity  $\sin((43.744531933508 \cdot y + 0.5) \cdot \pi)$ .





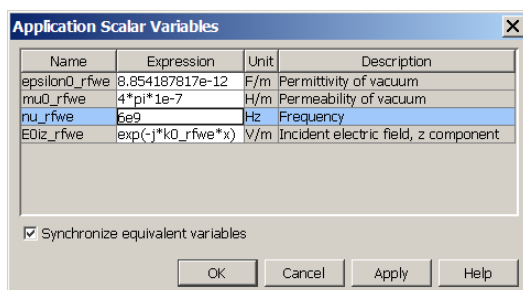
**Obr. 2.12** Nastavení okrajových podmínek: **a)** budící stěny, **b)** bočních stěn.

Zadní stěna vlnovodu se nastaví jako *Scattering boundary condition* s velikostí složky  $E_{0z} = 0$  V/m. Takto nastavená stěna se bude chovat jako dokonalý absorbér, který vlnu bezesbýtku pohltí. Toto nastavení se provede opět v okně *Boundary Settings*, které otevřeme pomocí nabídky *Physics/Boundary Settings...* nebo pomocí klávesy <F7>:



**Obr. 2.13** Nastavení okrajových podmínek absorpční stěny.


Před vlastní analýzou je potřeba nastavit skalární proměnné. V okně *Application Scalar Variables (Physics/Scalar Variables...)* se nastaví kmitočet, na kterém budeme vlnovod analyzovat. Zvolíme například kmitočet 6 GHz, což odpovídá vlnové délce 5 cm.

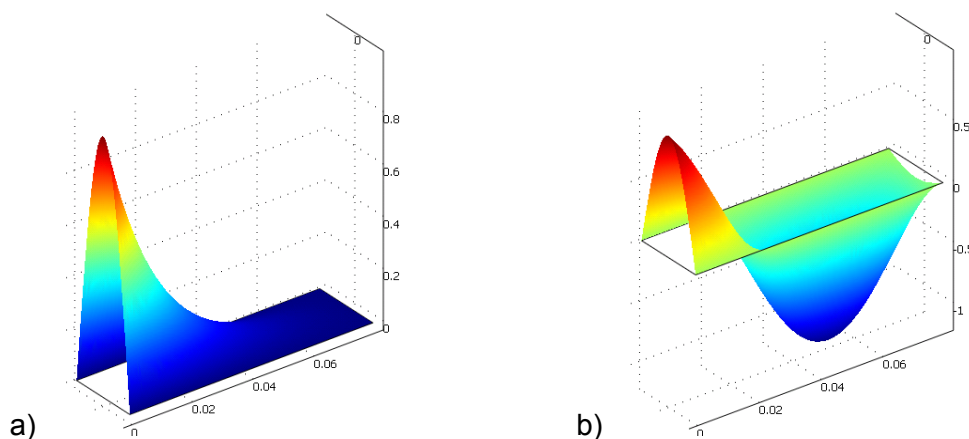


**Obr. 2.14** Nastavení skalárních proměnných.

Vlastní analýza se spustí tlačítkem *Solve* . Pokud je požadován přesnější výsledek, je možné předem zjemnit diskretizační síť tlačítkem *Refine mesh* a až poté spustit analýzu.

Výsledkem analýzy je graf zobrazený na obr. 2.15a). Je patrné, že nastavený kmitočet 6 GHz je nižší než kritický kmitočet vlnovodu. Vlna se vlnovodem nešíří, pouze exponenciálně klesá její intenzita.

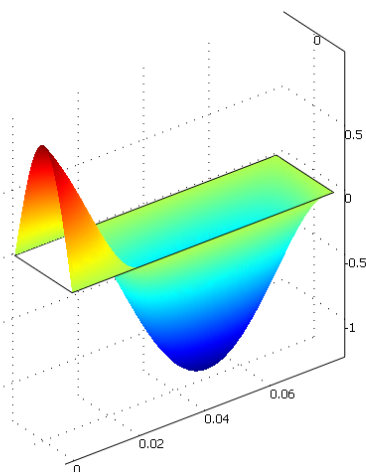
V okně *Application Scalar Variables* tedy nastavíme frekvenci nad kritickým kmitočtem (například 7 GHz) a znovu spustíme analýzu tlačítkem *Solve* .



**Obr. 2.15** Zobrazení výsledků analýzy: **a)** Evanescentní vid ve vlnovodu ( $f = 6$  GHz), **b)** Rozložení pole vidu  $TE_{10}$  pro kmitočet  $f = 7$  GHz.

V grafu na obr. 2.15b) je patrné, že kmitočet 7 GHz je nadkritický, protože se vlna již vlnovodem šíří. Dále lze na konci analyzované struktury pozorovat vliv bezodrazného zakončení. Vlna na této stěně nemá nulovou velikost a ani zde není kmitna vlny. Pro procházející vlnu se tato stěna jeví, jako by vlnovod pokračoval dále.

Pro srovnání nastavíme zadní stěnu jako dokonalý elektrický vodič. Toto nastavení provedeme opět v okně *Boundary Settings*. Výsledek po spuštění analýzy je zobrazen na obr. 2.16.



**Obr. 2.16** Rozložení pole ve vlnovodu se zadní stěnou z PEC.

Nyní má elektrická intenzita na zadní stěně nulovou hodnotu; je zde tedy uzel vlnění.

## 2.4. MATLAB

Program pro analýzu rozložení pole ve vlnovodu je rozdělen do dvou samostatných m-souborů. V prvním m-souboru počítáme rozložení pole na vstupní (budicí) stěně jednorozměrnou metodou konečných prvků (modální analýza). Druhý m-soubor analyzuje celý vlnovod dvourozměrnou metodou konečných prvků (harmonická analýza).

První m-soubor začíná hlavičkou funkce *parplate*, jejímž výsledkem je vektor **out**. Funkce má dva vstupní parametry: *b* je šířka vlnovodu a *N* je počet konečných prvků v příčném směru *x*.

```
function out = parplate( b, N)
del = ones(1,N) * (b/N);
Se = [ 1 -1; -1 1]; % normované matice
Te = [ 2 1; 1 2] / 6;
St = zeros( 2*N, 2*N); % matice pro izolované konečné prvky
Tt = zeros( 2*N, 2*N); % 2N = počet izolovaných uzlů
```

Vektor **del** obsahuje rozměry jednotlivých konečných prvků. Matice **Se** a **Te** jsou normované matice pro jednorozměrný konečný prvek. Matice **St** a **Tt** jsou nulové matice pro izolované konečné prvky, které jsou v následujícím cyklu naplněny lokálními maticemi:

```
for n=1:N % přes všechny izolované konečné prvky
    lw = 2*n-1;
    hg = 2*n;
    St(lw:hg,lw:hg) = Se / del( n); % naplnění matic pro izolované prvky
    Tt(lw:hg,lw:hg) = Te * del( n);
end
```

Následuje sestavení sdružovací matice **C** a vytvoření sdružených matic **S** a **T**. V maticích **Sr** a **Tr** jsou vynechány hodnoty z okraje struktury (splnění nulových okrajových podmínek):

```
C = zeros( 2*N, N+1); % sestavení matice C
C(1,1) = 1; % první sloupec
ind = 2;
for n=2:N % druhý až předposlední sloupec
    C(ind,n) = 1;
    ind = ind + 1;
    C(ind,n) = 1;
    ind = ind + 1;
end;
C(ind,N+1) = 1; % poslední sloupec

S = C'*St*C; % sdružování lokálních uzlů do uzlů
T = C'*Tt*C; % globálních

Sr = S(2:N,2:N); % počítá-li se elektrická intenzita
Tr = T(2:N,2:N); % vynechají se nulové hodnoty na deskách
```

Voláním funkce *eig* počítáme rozložení intenzity elektrického pole na budicí stěně. Výstupní vektor **out** obsahuje hodnotu čtverce kritického vlnového čísla dominantního vidu, a dále hodnoty rozložení intenzity elektrického pole dominantního vidu na budicí stěně:

```
[E,K] = eig( Sr, Tr); % el.intenzita - redukované matice
kn = sqrt( diag( K)); % kritická vlnová čísla
[val,ind] = min( kn); % nejnižší kritické vlnové číslo
```

```
Ez = [0;E(:,ind);0];
out = [val, Ez'];
```

Tím je dokončena část, která se týká modální analýzy, a tedy výpočtu rozložení budícího pole. Následuje část je věnována harmonické analýze, tzn. výpočtu šíření elektromagnetické vlny od budící stěny směrem k ukončení vlnovodu.

Program pro harmonickou analýzu vlnovodu je implementován jako funkce *check*. Funkce má tři vstupní parametry: počet konečných prvků ve směru z, počet konečných prvků ve směru x a kmitočet, na kterém se vlnovod analyzuje. Dále se definují rozměry vlnovodu a další pomocné vektory.

```
function check( Nz, Nx, f)

% šíření vidu TE10 vlnovodem parallel plate
% počítáno rozložení složky Ey

clear all; close all; clc;

a = 80.00e-3; % délka vlnovodu
b = 22.86e-3; % šířka vlnovodu

dz = ones(1,Nz) * (a/Nz); % vektory rozměrů konečných prvků
dx = ones(1,Nx) * (b/Nx);

out = parplate( b, Nx); % dominantní vid na budící stěně
ez = out( 2:size(out,2));
ez = ez / max( ez); % normované rozložení pole

gam = out(1); % kritické vlnové číslo
k0 = 2*pi*f/3e+8; % vlnové číslo
bt = sqrt( k0^2 - gam^2); % konstanta šíření
```

V proměnné *a* je uložena výška vlnovodu, v proměnné *b* jeho délka. Vektory *dz* a *dx* obsahují rozměry jednotlivých konečných prvků. V tomto programu jsou všechny konečné prvky stejně velké.

Následně voláme výše popsanou funkci *parplate*, která do proměnné *ez* uloží normované rozložení pole dominantního vidu na vstupu jako výsledek modální analýzy; proměnná *bt* představuje konstantu šíření dominantního vidu.

Dále definujeme pomocné matice **Q1**, **Q3** a **Te** pro následné vytvoření lokálních matic **S** a **T**. Pomocná proměnná *N* udává celkový počet diskretizačních prvků. Inicializujeme řídké globální matice **St** a **Tt** o rozměru 3xN což odpovídá počtu lokálních uzlů. Řídké matice mají tu výhodu, že šetří výpočetní paměť systému. Mají totiž v paměti uloženy jen pozice a hodnoty nenulových prvků.

```
Q1 = [ 0 0 0; 0 1 -1; 0 -1 1] / 2;
Q3 = [ 1 -1 0; -1 1 0; 0 0 0] / 2;
Te = [ 2 1 1; 1 2 1; 1 1 2] /12;

N = 2 * Nz * Nx; % celkový počet konečných prvků
St = sparse( 3*N, 3*N);
Tt = sparse( 3*N, 3*N);
```

Následující cyklus postupně vkládá do prázdných matic **St** a **Tt** na hlavní diagonálu lokální matice:

```
n = 0; % matice pro izolované konečné prvky
for nx=1:Nx
    for nz=1:Nz
        n = n + 1;
        lw = 3*n-2;
        hg = 3*n;
        St(lw:hg,lw:hg) = Q1 * dz(nz)/dx(nx) + Q3 * dx(nx)/dz(nz);
        Tt(lw:hg,lw:hg) = Te * dz(nz)*dx(nx)/2;
```

```

        St(lw+3*Nz:hg+3*Nz,lw+3*Nz:hg+3*Nz) = St(lw:hg,lw:hg);
        Tt(lw+3*Nz:hg+3*Nz,lw+3*Nz:hg+3*Nz) = Tt(lw:hg,lw:hg);
    end
    n = n + Nz;
end

```

Sestavení vazební matice **C** obstarává samostatný m-soubor `get_c1`. Vstupními parametry tohoto m-souboru jsou počet diskretizačních prvků ve směru *y* a ve směru *z* a celkový počet konečných prvků. Následují vztahy, které vytvoří výsledné matice **S** a **T**. Tyto matice jsou svázány s diskretizační sítí. Matice **L** se počítá ze známých konstant a zjednodušuje výslednou rovnici, která počítá vektor intenzit elektrického pole **E**. Vektor **R** je sloupcový vektor pravých stran, který má stejný počet řádků jako matice **L**. Na počátku je vektor **R** nulový a v následujícím cyklu se do něj vloží informace o velikosti pole na budící ploše.

```

C = get_c1( Nz, Nx, N);
S = C'*St*C;
T = C'*Tt*C;

L = S + T * gam^2;
clear C St Tt

R = zeros( size( L,1), 1);
for nx=1:Nx+1
    R = R - ex(nx)*L(:, (nx-1)*(Nz+1)+1);
end

iNz = Nz + 1; iNx = Nx + 1;

```

Na všech stěnách vlnovodu je intenzita elektrického pole známá, a proto se v maticích **L**, **S** a **T** a ve vektoru **R** vynulují všechny řádky a sloupce odpovídající globálním uzlům, které leží na těchto stěnách:

```

L = L(Nz+2:iNz*Nx,Nz+2:iNz*Nx); % vynechání dolní a horní stěny
S = S(Nz+2:iNz*Nx,Nz+2:iNz*Nx); % vynechání dolní a horní stěny
T = T(Nz+2:iNz*Nx,Nz+2:iNz*Nx); % vynechání dolní a horní stěny
R = R(Nz+2:iNz*Nx); % vynechání dolní a horní stěny

ind = 2;
for n=2:Nx % vynechání řádků
    lw = (n-2)*(Nz-1);
    hg = (n-1)*(Nz-1);
    Lr(lw+1:hg,1:(Nx-1)*iNz) = L(lw+ind:hg+ind-1,:);
    Sr(lw+1:hg,1:(Nx-1)*iNz) = S(lw+ind:hg+ind-1,:);
    Tr(lw+1:hg,1:(Nx-1)*iNz) = T(lw+ind:hg+ind-1,:);
    Rr(lw+1:hg) = R(lw+ind:hg+ind-1);
    ind = ind + 2;
end
ind = 2;
for n=2:Nx % vynechání sloupců
    lw = (n-2)*(Nz-1);
    hg = (n-1)*(Nz-1);
    Lt(1:(Nz-1)*(Nx-1),lw+1:hg) = Lr(:,lw+ind:hg+ind-1);
    St(1:(Nz)*(Nx-1),lw+1:hg) = Sr(:,lw+ind:hg+ind-1);
    Tt(1:(Nz)*(Nx-1),lw+1:hg) = Tr(:,lw+ind:hg+ind-1);
    ind = ind + 2;
end

```

Dále se již počítá intenzita pole ve vlnovodu. Výsledný vektor se počítá Gaussovou eliminací z upravené matice **Lr** a vektoru **Rr**.

```

E = Lt \ Rr';

```

Nakonec se musí vypočtený vektor přerovnat do matice, která odpovídá rozměru vlnovodu, a následně se tato matice vykreslí. Vektor **E** obsahuje informaci o intenzitě

elektrického pole jen uvnitř vlnovodu, a proto musíme do výsledné matice vložit velikost pole na budící stěně z vektoru **R**. Na ostatních stěnách zůstane nastavena nulová intenzita.

```
Em = zeros( iNx, iNz); % nulové okrajové podmínky
Em(:,1) = -ez'; % budící pole

for n=2:Nx
    Em(n,2:iNz) = E(1+(n-2)*(Nz):(n-1)*(Nz))';
end
```

V následném kroku vytvoříme nulovou matici **Es1** pro rozložení zpětné vlny (odraz od vodivého ukončení vlnovodu) a matici **Es2** pro rozložení přímé vlny. Šíření vln modelujeme postupným násobením vypočtených amplitud rozložení intenzity pole členem  $\exp(\pm j\beta z)$ , kde  $\beta$  je konstanta šíření:

```
Es1 = zeros( iNx, Nz); % zpětná vlny
sh1 = exp( +j*bt*(0:Nz-1)*dz(1));

Es2 = zeros( iNx, Nz); % dopředná vlna
sh2 = exp( -j*bt*(Nz-1:-1:0)*dz(1));

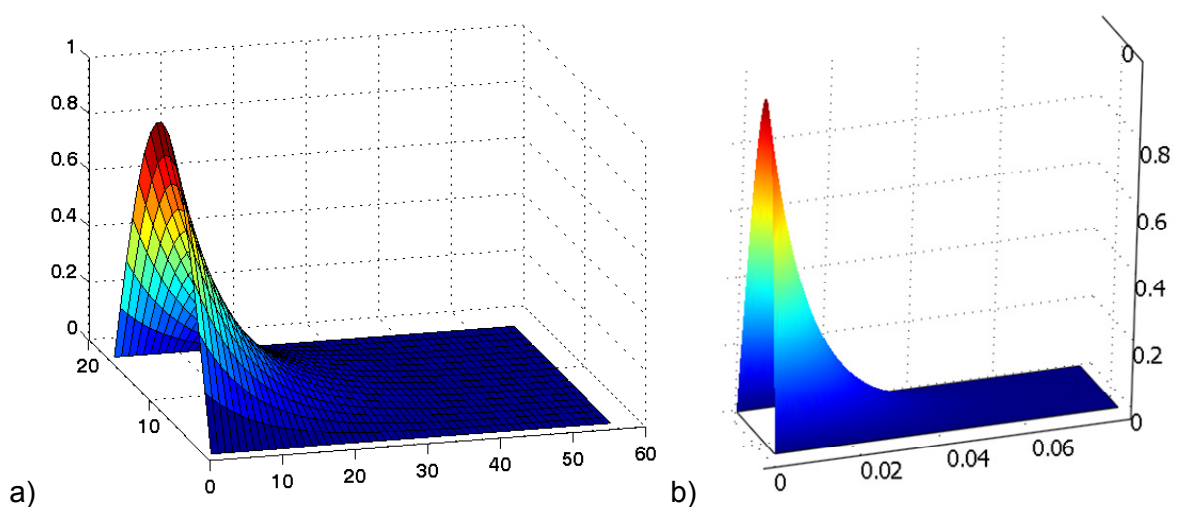
for n=1:Nz % rozložení okamžitých hodnot
    for m=1:iNx % dopředné a zpětné vlny
        Es1(m,n:Nz) = Es1(m,n:Nz) + Em(m,n)*sh1(1:Nz+1-n);
        Es2(m,n:Nz) = Es2(m,n:Nz) - Em(m,n)*sh2(1:Nz+1-n);
    end
end

% zpětná vlna na konci v kmitně nenulová
if( abs( Es1( round( Nx/2+1), Nz))) > 1e-2
    Enorm = real( Es1( round( Nx/2+1), Nz) / Es2( round( Nx/2+1), Nz));
else
    Enorm = 1; % zpětná vlna na konci v kmitně nulová
end

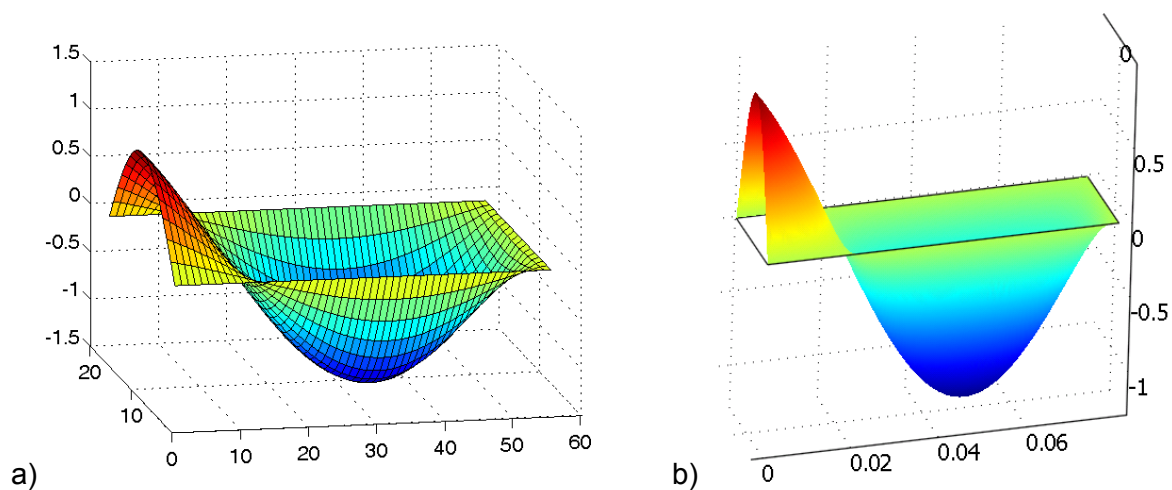
Eout = zeros( iNx, Nz); % výsledná = dopředná - zpětná
Eout(:,1:Nz-1) = Eout(:, 1:Nz-1) + real( Enorm*Es2(:,2:Nz) - Es1(:,2:Nz));

figure; surf( Eout);
```

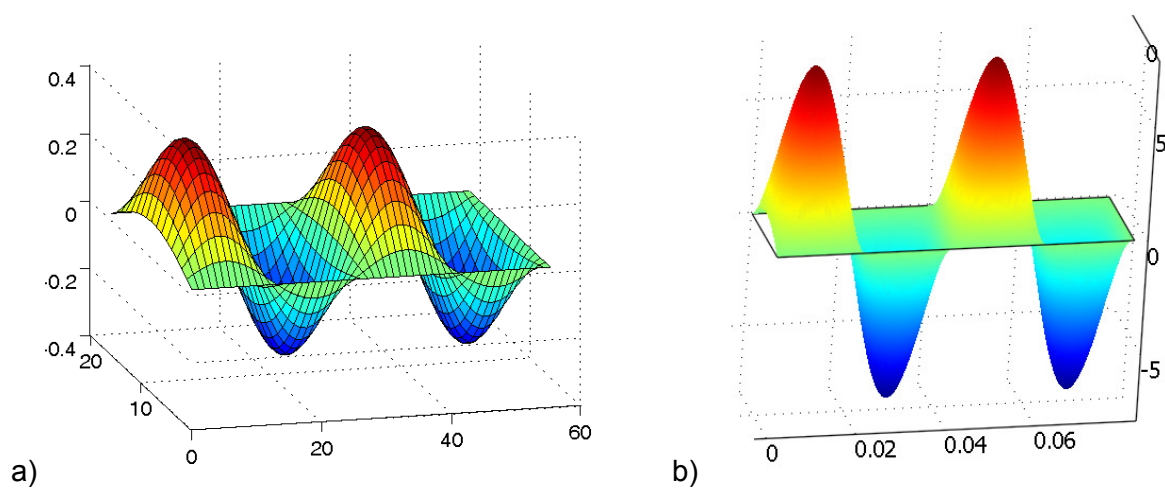
Výsledky analýzy jsou vykresleny na následujících obrázcích. Pro srovnání jsou zobrazeny i odpovídající výsledky získané v programu COMSOL Multiphysics



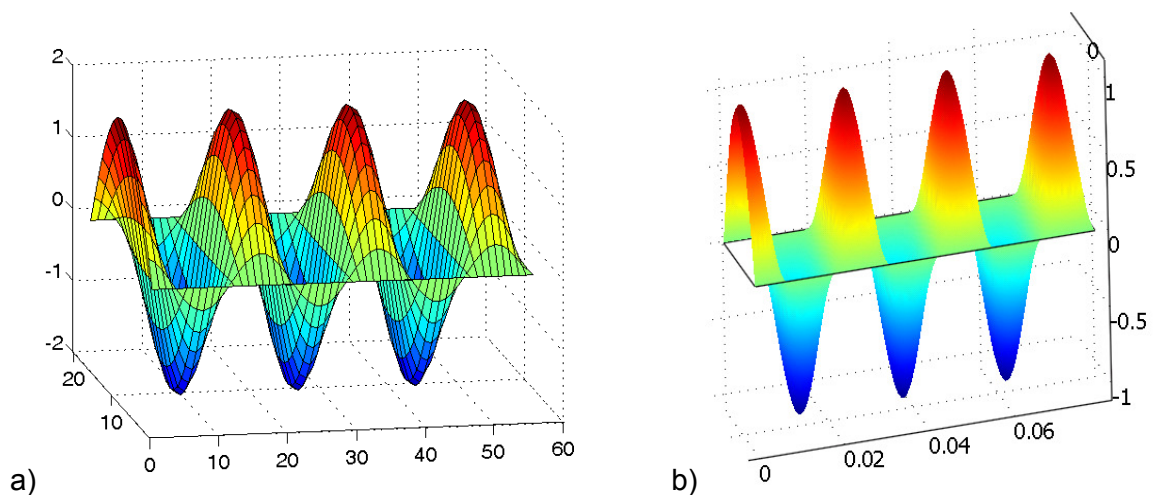
**Obr. 2.17** Evanescentní vid na kmitočtu  $f = 5$  GHz vypočítaný: **a)** v MATLABu (vstupní parametry  $N_z = 56$ ;  $N_x = 16$ ;  $f = 5$  GHz), **b)** v COMSOLu.



**Obr. 2.18** Zobrazení vlny na kmitočtu  $f = 7$  GHz: **a)** v MATLABu pro vstupní parametry  $N_z = 56$ ;  $N_x = 16$ ;  $f = 7$  GHz, **b)** v COMSOLu.



**Obr. 2.19** Zobrazení vlny na kmitočtu  $f = 10$  GHz: **a)** v MATLABu pro vstupní parametry  $N_z = 56$ ;  $N_x = 16$ ;  $f = 10$  GHz, **b)** v COMSOLu.



**Obr. 2.20** Zobrazení vlny na kmitočtu  $f = 14$  GHz: **a)** v MATLABu pro vstupní parametry  $N_z = 56$ ;  $N_x = 16$ ;  $f = 14$  GHz, **b)** v COMSOLu.

Při srovnání výsledků analýzy vlnovodu, získaných pomocí vytvořeného skriptu v MATLABu a pomocí programu COMSOL Multiphysics, je na první pohled zřejmé, že napsaný skript modeluje vlnovod stejně jako program COMSOL. Shodných výsledků bylo dosaženo jednak na podkritických kmitočtech, kdy se vlnovodem vlna nešíří, jednak na nadkritických kmitočtech, kdy se vlnovodem vlna šíří, na konci se odráží a ve vlnovodu tak vzniká stojaté vlnění.

Vytvořený skript je tedy plně funkční v kmitočtové oblasti a následně bude převeden do oblasti časové.



## 3. ČASOVÁ ANALÝZA VLNOVODU

### 3.1. Teoretický rozbor

V minulých kapitolách jsme se zabývali harmonickou analýzou vlnovodu – tedy analýzou ve frekvenční oblasti, která je založena na řešení harmonických polí. Nyní se zaměříme na analýzu v časové oblasti s uvažováním obecných časových polí.

Z hlediska prostorové diskretizace a prostorové aproximace nedochází při přechodu do časové oblasti k žádným změnám. Zaměříme se tedy na časovou diskretizaci a na aproximaci rozložení testovacích polí v čase.

Časovou osu rozdělíme na stejně dlouhé časové intervaly o délce  $\Delta t$ . Čas od počátku simulace lze vypočítat jako  $t = n \cdot \Delta t$ , kde  $n$  je číslo aktuálního časového kroku.

Co se týká aproximace testovacích polí v čase, popíšeme si tři nejčastěji používané metody. Testovací pole budeme aproximovat v rovnici

$$\mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{T} \frac{d^2 \mathbf{e}(t)}{dt^2} + \mathbf{S} \mathbf{e}(t) = -\mathbf{f}(t), \quad (14)$$

kde  $\mathbf{e}$  je sloupcový vektor neznámých uzlových hodnot testovacího pole závislých na čase,  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{T}$  jsou matice koeficientů shodné s maticemi odvozenými v harmonické analýze a  $\mathbf{f}$  je sloupcový vektor pravých stran.

**Aproximace založená na centrálních diferencích** je odvozena z rozvinutí testovacího pole do Taylorovy řady vzhledem k proměnné  $t$  v čase posunutém o krok do budoucnosti a do minulosti. Po sečtení, respektive odečtení těchto rozvojů a jednoduché úpravě získáváme vztahy pro první a druhou derivaci testovacího pole [1]

$$\frac{de}{dt} \approx \frac{e^{n+1} - e^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (15a)$$

$$\frac{d^2 e}{dt^2} \approx \frac{e^{n+1} - 2e^n + e^{n-1}}{(\Delta t)^2}. \quad (15b)$$

Tyto vztahy nyní využijeme pro jednotlivé uzlové hodnoty testovacího pole v rovnici (14) a dostaneme vztah [1]

$$\left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} \right] \mathbf{e}^{n+1} = \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} - \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^n - \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} \right] \mathbf{e}^{n-1} - \mathbf{f}^n, \quad (16)$$

kde  $c$  je rychlost světla,  $\Delta t$  je délka diskretizačního kroku,  $\mathbf{e}^n$  je sloupcový vektor uzlových hodnot testovacího pole v čase  $n\Delta t$ , matice koeficientů  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{T}$  jsou dány vztahem (12) a sloupcový vektor  $\mathbf{f}^n$  odpovídá zdrojovým polím.

Jedinou neznámou ve vztahu (16) je vektor uzlových hodnot testovacího pole v budoucnosti  $\mathbf{e}^{n+1}$ , který získáme vyčíslením pravé strany rovnice.

V **aproximaci založené na Newmarkově metodě** jsou časový průběh testovacího pole  $e(t)$  a jeho derivace v čase  $t+\Delta t$  aproximovány vztahy [1]

$$e(t + \Delta t) = e(t) + \Delta t \frac{de(t)}{dt} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + \beta(\Delta t)^2 \frac{d^2e(t + \Delta t)}{dt^2}, \quad (17a)$$

$$\frac{de(t + \Delta t)}{dt} = \frac{de(t)}{dt} + (1 - \gamma)\Delta t \frac{d^2e(t)}{dt^2} + \gamma\Delta t \frac{d^2e(t + \Delta t)}{dt^2}. \quad (17b)$$

kde  $\beta$  a  $\gamma$  jsou parametry ovlivňující přesnost a stabilitu výsledného algoritmu.

Ze vztahů (17) vyjádříme druhou derivaci testovacího pole a dosadíme ji do výchozí rovnice (14). Tím získáme [1]

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + \beta \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^{n+1} &= \left[ \frac{2}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} - \left( \frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^n - \\ &- \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} - \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^{n-1} - \left[ \beta \mathbf{f}^{n+1} + \left( \frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) \mathbf{f}^n + \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \mathbf{f}^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Tato metoda se často používá s parametrem  $\gamma = 1/2$ . Pak se jedná o Newmarkovu  $\beta$ -metodu.

**Aproximace založená na časové integraci** vychází ze spojitě aproximace testovacího pole  $e(t)$  v čase na intervalu  $t \in (-\Delta t, \Delta t)$  pomocí polynomu druhého řádu [1]

$$e(t) = \frac{1}{2(\Delta t)^2} \left\{ e^{-1} (t^2 - t\Delta t) - 2e^0 [t^2 - (\Delta t)^2] + e^1 (t^2 + t\Delta t) \right\}. \quad (19)$$

Derivováním rovnice (19) získáme aproximaci první a druhé derivace [1]

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[ e^{-1} \left( t - \frac{\Delta t}{2} \right) - 2e^0 t + e^1 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right], \quad (20a)$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [e^{-1} - 2e^0 + e^1]. \quad (20b)$$

Dosazením aproximací testovacího pole (19) a (20), místo přesného vyjádření testovacího pole, do rovnice (14) není výchozí rovnice splněna přesně a vzniká reziduum závislé na čase. Minimalizací tohoto rezidua metodou vážených reziduí získáme algoritmus [1]

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + (\Theta_1 + 2\Theta_2) \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^{n+1} &= \left[ \frac{2}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + (4\Theta_2 - 1) \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^n - \\ &- \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + (2\Theta_2 - \Theta_1) \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^{n-1} - \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (21)$$

Konstanty  $\Theta_1$  a  $\Theta_2$  opět ovlivňují přesnost a stabilitu algoritmu. Obvykle se volí  $\Theta_1 = 0$ .

Nyní pomocí těchto tří základních metod časové aproximace testovacích polí popíšeme rozdíl mezi explicitními a implicitními algoritmy pro časovou analýzu elektromagnetických polí.

**Explicitní algoritmy** vyjadřují hodnotu testovacího pole v budoucím časovém kroku přímo a jednoznačně z hodnot testovacího pole v předcházejících krocích [1].

Výše popsané metody časové aproximace obsahují na levé straně součin známé matice koeficientů a hledaného vektoru uzlových hodnot testovacího pole. Tyto algoritmy tedy nejsou explicitní a musejí být přeformulovány, aby se explicitními staly.

Jeden ze způsobů převodu na explicitní tvar převádí matice koeficientů na levé straně do diagonálního tvaru. Soustava rovnic se tak rozpadne na samostatné rovnice. Postup pro převod matice na levé straně rovnice (18) na diagonální tvar se nazývá postup celkového shrnutí [1].

Při odvození explicitního algoritmu vyjdeme z Newmarkovy  $\beta$ -metody, přičemž zvolíme  $\beta = 0$ .

Při převodu matice  $\mathbf{T}$  na diagonální matici  $\mathbf{T}^L$  získáme prvky na diagonále sečtením všech prvků na jednotlivých řádcích. Pak lze Newmarkův  $\beta$ -algoritmus přepsat do tvaru [1]

$$\left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T}^L \right] \mathbf{e}^{n+1} = \left[ \frac{2}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T}^L - \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^n - \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T}^L \right] \mathbf{e}^{n-1} - \mathbf{f}^n. \quad (22)$$

Prvky na diagonále matice na levé straně rovnice (22) jsou koeficienty jednotlivých prvků vektoru  $\mathbf{e}^{n+1}$ . Pro získání výsledného algoritmu vytvoříme vektor  $\mathbf{d}$  sestavený z diagonály matice na levé straně rovnice (22). K tomuto vektoru vytvoříme vektor inverzní a tímto vektorem násobíme prvek po prvku  $\mathbf{d}^{-1}$  vektor na pravé straně [1]

$$\mathbf{e}^{n+1} = (\mathbf{d}^{-1}) \left\{ \left[ \frac{2}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T}^L - \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^n - \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T}^L \right] \mathbf{e}^{n-1} - \mathbf{f}^n \right\}. \quad (23)$$

Výhodou explicitních algoritmů je rychlost analýzy, ale mají také řadu nevýhod:

- Pro stabilitu algoritmu je třeba volit časový krok  $\Delta t$  několikanásobně kratší než u implicitních algoritmů.
- Při různých velikostech a tvarech konečných prvků roste numerická chyba řešení.
- Explicitní algoritmus je méně univerzální a implementace složitějších modelů je komplikovanější.

V **implicitních algoritmech** není rozložení testovacího pole v budoucím časovém kroku vyjádřeno přímo. K jeho vyjádření je nutno v každém iteračním kroku řešit maticovou rovnici. Tyto algoritmy jsou tedy mnohem náročnější na výpočetní výkon než algoritmy explicitní, ale překonávají výše popsané problémy explicitních algoritmů.

Při odvození implicitních algoritmů se nejčastěji vychází z aproximace založené na časové integraci. Pro získání nepodmínečně stabilního algoritmu musí

platit  $\Theta_1 \geq 0$  a  $\Theta_2 \geq 1/8$ . Navíc pro minimální velikost disperzní chyby se volí přesně hodnoty  $\Theta_1 = 0$  a  $\Theta_2 = 1/8$ .

S těmito parametry přejde algoritmus (21) na soustavu lineárních rovnic [1]

$$\left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + \frac{1}{4} \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^{n+1} = \left[ \frac{2}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^n - \left[ \frac{1}{(c\Delta t)^2} \mathbf{T} + \frac{1}{4} \mathbf{S} \right] \mathbf{e}^{n-1} - \mathbf{g}, \quad (24)$$

kde vektor  $\mathbf{g}$  představuje vliv buzení a výrazy v závorkách reprezentují matice koeficientů.

Na pravé straně rovnice (24) jsou všechny členy známe. Vyčíslením pravé strany tedy získáme vektor známých hodnot. Na levé straně je součin známé matice s neznámým vektorem uzlových hodnot pole v následujícím časovém kroku. Jedná se tedy o soustavu lineárních rovnic s konstantní pravou stranou, kterou lze řešit například Gausovou eliminací [1].

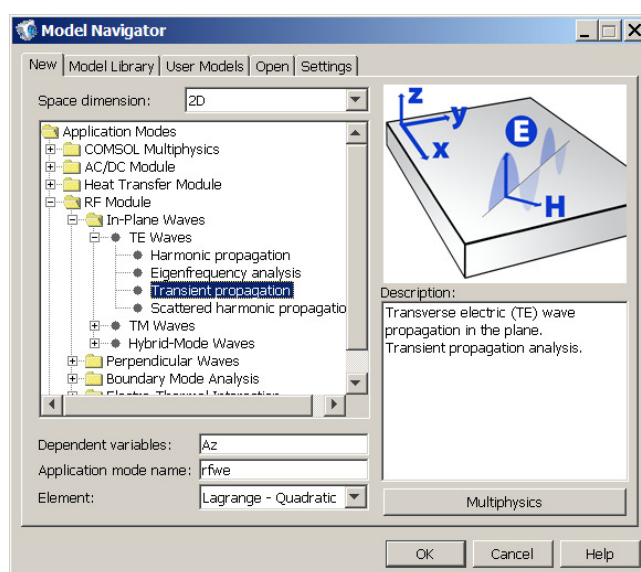
Implicitní algoritmus je bezpodmínečně stabilní pro jakoukoli velikost časového kroku  $\Delta t$ , ale při velkém časovém kroku by narůstala disperzní chyba. Pro malou disperzní chybu se volí časový krok podle vztahu [1]

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c\sqrt{M}}, \quad (25)$$



kde  $M$  je rozměr problému ( $M = 1$  značí jednorozměrný problém),  $\Delta l$  je nejmenší rozměr konečného prvku a  $c$  je rychlost světla.

### 3.2. Časová analýza v programu COMSOL

V úvodním okně programu COMSOL Multiphysics je nutno vybrat typ analýzy. Budeme zkoumat vývoj šíření rovinné vlny v podélném řezu vlnovodem v čase. Vybereme tedy simulační model **RF Modul > In-Plane Waves > TE Waves > Transient propagation**. Výběr typu analýzy je zobrazen na Obr. 2.21

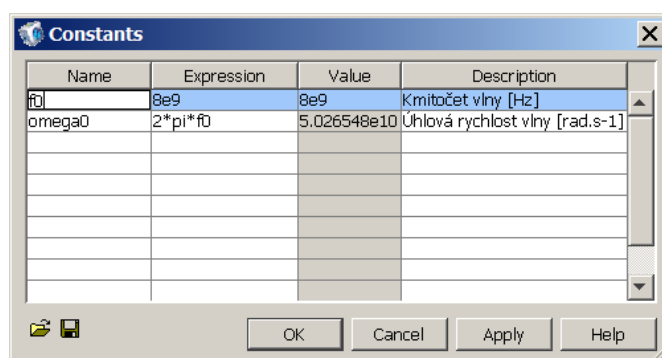


Obr. 3.1 Výběr typu analýzy.

Nyní nakreslíme analyzovanou strukturu. Pomocí ikony *Rectangle/Square*  nakreslíme model vlnovodu. Na nakreslený obdélník poklepeme a v otevřeném dialogu nastavíme délku vlnovodu (*Width*) 0.08 a šířku vlnovodu (*Height*) 0.02286. Pozici vlnovodu určíme podle rohu (*Base: Corner*). Souřadnice levého spodního rohu jsou  $x = 0$  a  $y = -0.01143$ . Nastavení potvrdíme kliknutím na tlačítko **<OK>**. Pro zobrazení celé analyzované struktury je vhodné kliknout na ikonu *Zoom Extents* .

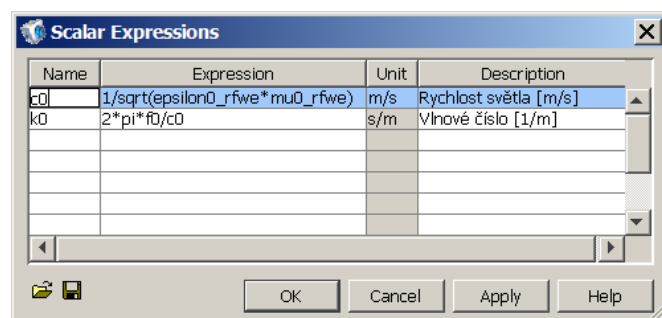
Při analýze v časové oblasti je potřeba v programu COMSOL Multiphysics nastavit vlastnosti budícího pole, okrajové podmínky a časový interval, ve kterém se bude vlnění počítat.

Nejprve v menu *Options* vybereme položku *Constants*. Do nově otevřeného dialogového okna vložíme tyto konstanty:  $f_0 = 8e9$  – kmitočet, na kterém budeme vlnovod analyzovat (jeho hodnotu budeme měnit podle potřeby) a  $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$  – úhlová rychlost vlny.



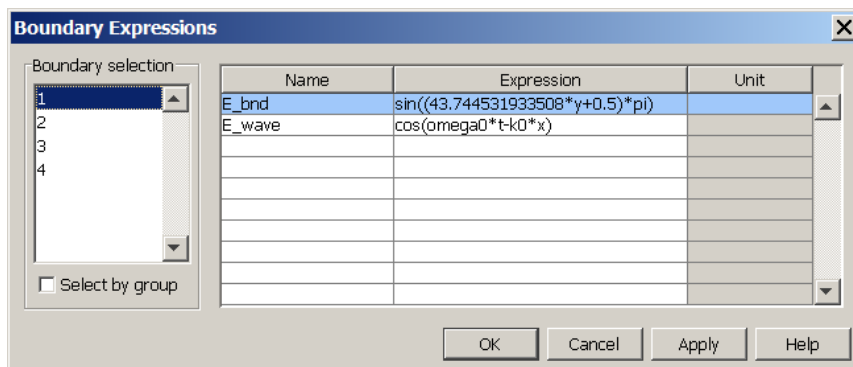
**Obr. 3.2** Nastavení konstant.

Dále v menu *Options* vybereme položku *Expressions/Scalar Expressions*. V tomto okně vyplníme výrazy pro skalární proměnné potřebné pro výpočet budícího pole. První proměnnou je rychlost světla  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_{rfe} \cdot \mu_{rfe}}$ , s jejíž pomocí vypočítáme vlnové číslo  $k_0 = 2\pi \cdot f_0 / c_0$ .



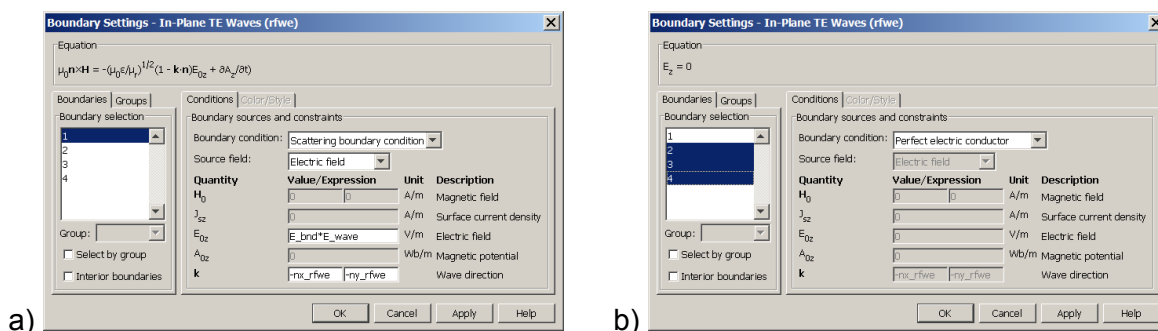
**Obr. 3.3** Nastavení skalárních proměnných.

Nyní v menu *Options* vybereme položku *Expressions/Boundary Expressions*. V dialogovém okně *Boundary Expressions* nadefinujeme následující výrazy pro budící stěnu – tedy stěnu číslo 1:  $E_{bnd} = \sin((43.744531933508 \cdot y + 0.5) \cdot \pi)$  (rozložení budícího pole – uprostřed stěny má největší velikost a na krajích nulovou velikost) a  $E_{wave} = \cos(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)$  (složka budícího pole určující závislost na čase na podélné souřadnici).






Obr. 3.4 Nastavení pro budící pole.

Dále nastavíme okrajové podmínky. V menu *Physics* otevřeme dialogové okno *Boundary Settings*. Pro vstupní stěnu vybereme okrajovou podmínku *Scattering boundary condition* a do pole  $E_{0z}$  vepíšeme výraz  $E\_bnd * E\_wave$ . Ostatní stěny nastavíme jako dokonalý elektrický vodič.





Obr. 3.5 Nastavení okrajových podmínek: a) budící stěny, b) bočních stěn.

Poslední nastavení provedeme v dialogovém okně *Solver Parameters*, které najdeme v menu *Solve*. Na záložce *General* vyplníme v poli *Times* hodnoty časového intervalu, ve kterém se šíření vlny ve vlnovodu bude počítat. První a druhé číslo značí začátek a konec tohoto intervalu. Prostřední číslo značí časový krok, v jakém budou vypočítány grafy rozložení elektromagnetické vlny. Při nastavení časového intervalu je třeba vzít v úvahu velikost periody budícího pole. Pro kmitočet 8 GHz je perioda 125 ps. Pro zobrazení například 16 period použijeme interval dlouhý 2 ns. Časový krok by měl mít takovou velikost, aby byla výsledná animace plynulá, aby tedy na každou periodu budícího pole připadalo alespoň pět nebo šest kroků. Větší počet kroků na periodu neúměrně prodlužuje vytváření animace. Použijeme například časový krok 20 ps. Do pole *Times* tedy vepíšeme výraz  $0:20e-12:2e-9$ . Dále na záložce *Time Stepping* zatrhneme pole *Manual tuning of step size* a do polí *Initial time step* a *Maximum time step* vepíšeme  $1e-12$ . Tento časový krok by měl být kratší než časový krok vyplněný na záložce *General*.

Ještě před vlastní analýzou vytvoříme diskretizační síť. Pomocí tlačítka *Initialize Mesh*  vytvoříme základní diskretizační síť. Pokud je požadována větší přesnost, můžeme pomocí tlačítka *Refine mesh*  diskretizační síť zjemnit. Vlastní analýza se spustí tlačítkem *Solve* .

Po výpočtu se zobrazí graf rozložení elektromagnetického pole ve vlnovodu odpovídající konci časového intervalu. Animaci zobrazující šíření pole zobrazíme

pomocí tlačítka *Animate* , které najdeme vlevo od zobrazeného grafu. Poznamenejme ještě, že pro zrychlení vytváření animace a pro úsporu místa na disku počítače je vhodné nastavit kompresi vytvářeného videa. Toto provedeme v okně *Plot parameters*, které otevřeme pomocí tlačítka *Plot parameters*  nebo v menu *Postprocessing*. Na záložce *Animate* zobrazíme tlačítkem *Advanced...* okno s pokročilými nastaveními animace. Z nabízených kódovacích formátů vybereme *Motion JPEG (MJPEG)*. Nastavení potvrdíme tlačítkem **<OK>**.

### 3.3. Implementace časové analýzy v MATLABu

Jak již bylo řečeno v kapitole 3.1., používá metoda konečných prvků v časové oblasti stejné matice koeficientů **S** a **T**, ke kterým jsme dopěli v metodě konečných prvků v oblasti frekvenční. Můžeme proto využít původní skript a pouze doplnit novou část na jeho konec. Implementovat budeme implicitní algoritmus.

Nejdůležitějším krokem při implementaci metody konečných prvků v časové oblasti je vytvoření časové smyčky. Do této smyčky vložíme pouze ty výpočty, které obsahují časové vzorky uzlových hodnot testovacího pole [1]. Ostatní výpočty vyčíslíme před časovou smyčkou pouze jednou.

V úvodu skriptu je určena poloha buzení na střed budící stěny. Dále se počítá velikost časového kroku v závislosti na velikosti rozměrů konečných prvků a dimenzi problému a určí se počet časových kroků cyklu ze zadané délky časového intervalu a velikosti časového kroku.

```
time = 2e-10; % čas analýzy
c = 3e+8;
pol = floor((Nx-1)/2)*Nz + 1; % určení polohy buzení
cdt = 0.5*min([dz dx])/(sqrt(2)); % součin c*delta_t (vztah 25)
dt = cdt/c; % časový krok delta_t
Ntime = round( time/dt); % počet časových kroků
```

Následně se vyčíslují lomené závorky z rovnice (24), přičemž jsou použity substituce  $\mathbf{Y} = [\mathbf{T}/(c\Delta t)^2 + \mathbf{S}/4]$  a  $\mathbf{Z} = [2\mathbf{T}/(c\Delta t)^2 - \mathbf{S}/2]$ . Následuje inicializace matice **H** a **B** a vektoru **g**. Matice **H** obsahuje tolik řádků, jaký je rozměr matice **Y** (odpovídá počtu globálních uzlů struktury), a tři sloupce reprezentující rozložení pole ve vlnovodu v minulosti, v přítomnosti a v budoucnosti. Tyto sloupce matice **H** odpovídají členům  $\mathbf{e}^{n-1}$ ,  $\mathbf{e}^n$  a  $\mathbf{e}^{n+1}$  v rovnici (24). Vektor **g** obsahuje také tolik členů, kolik je globálních uzlů, a reprezentuje vliv buzení. Do matice **B** budeme vkládat výsledek výpočtu a právě tuto matici budeme vykreslovat do grafu. Tato matice má rozměry odpovídající rozměru vlnovodu.

```
Y = ( (1/(cdt^2))*Tt + (1/4)*St); % výpočet matice Y
Z = ( (2/(cdt^2))*Tt - (1/2)*St); % výpočet matice Z

H = zeros( length(Y), 3); % minulost, přítomnost, budoucnost
g = zeros( length(Y), 1); % buzení
B = zeros( iNx, iNz);
figure; % vytvoření okna s grafem
```

Následuje vlastní časová smyčka. V úvodu je v budícím vektoru na určené pozici počítaná velikost budícího impulsu. Dále se podle vztahu (24) počítá rozložení pole ve vlnovodu v budoucím časovém kroku. Výpočet je řešen pomocí Gaussovy eliminační metody. Následuje přesun jednotlivých sloupců v matici **H** potřebný pro

výpočet v dalším časovém kroku a přerovnění výsledného vektoru do matice **B**. Nakonec se matice **B** vykreslí.

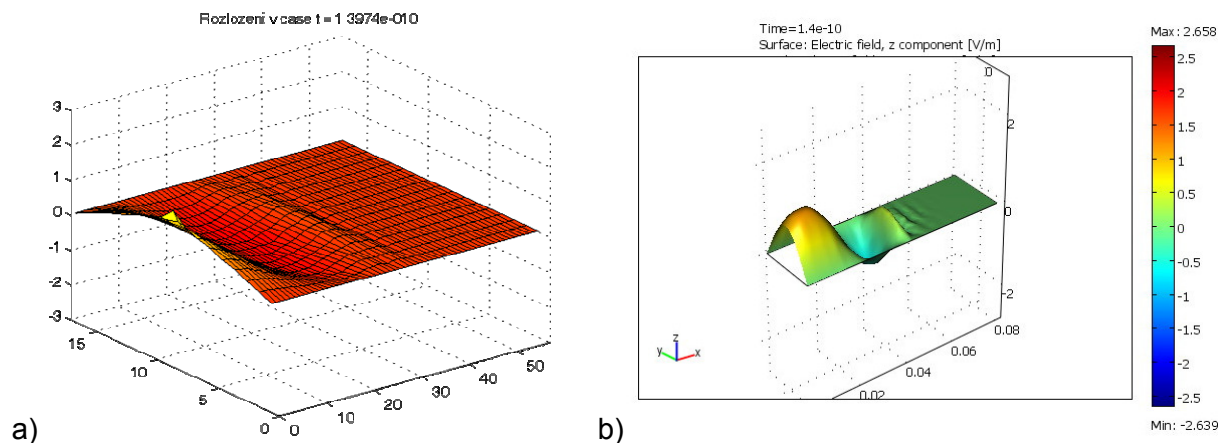
```
for l=0:Ntime
    g(pol)=cos(2*pi*f*dt*l); % budicí signál

    H(:,3) = Y \ (Z*H(:,2) - Y*H(:,1) - g);
    H(:,1) = H(:,2); H(:,2) = H(:,3);
    A = H(:,3);

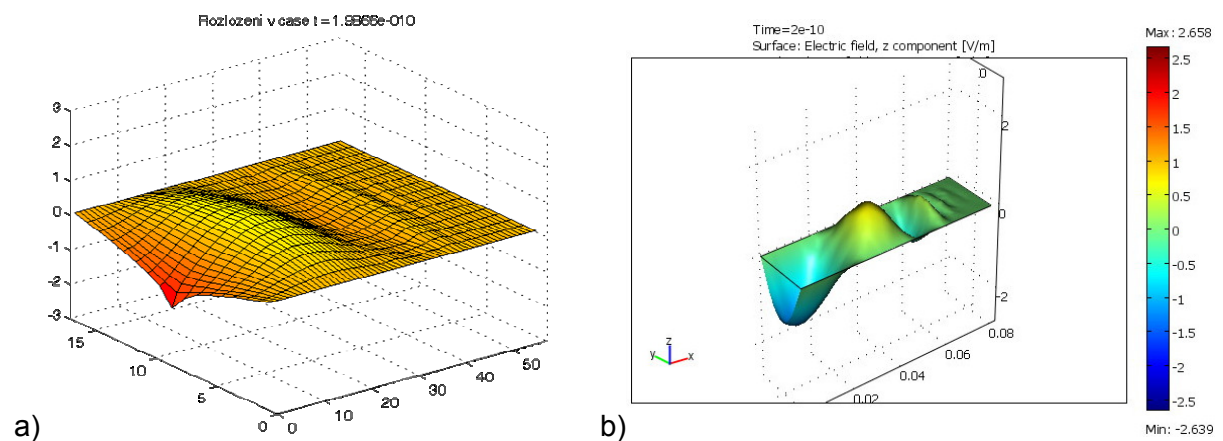
    for i=0:Nx-2
        B(i+2,1:Nz)=A((Nz)*i+1:(Nz)*(i+1)); %tvorba výstupní matice
    end

    colormap(autumn);
    surf(B) , title(['Rozložení v čase t = ',num2str(l*dt),' s']);
    axis([0 Nz+1 0 Nx+1 -3 3]);
    pause(0.01);
end
```

Na následujících obrázcích srovnáme vypočtené rozložení elektromagnetického pole ve vlnovodu pomocí programu MATLAB s rozložením získaným programem COMSOL Multiphysics na kmitočtu 8 GHz.

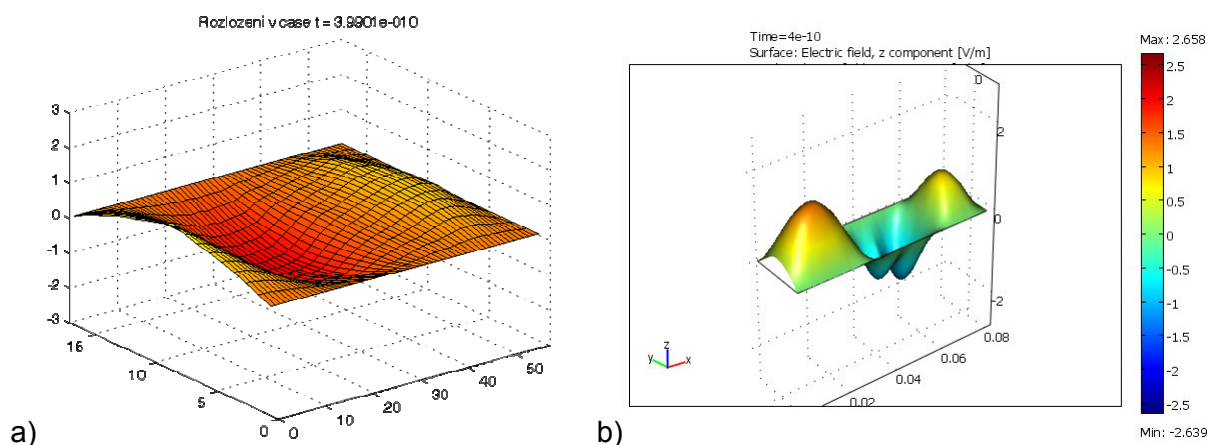


**Obr. 3.6** Rozložení pole v čase  $t = 0,14$  ns: a) MATLAB, b) COMSOL

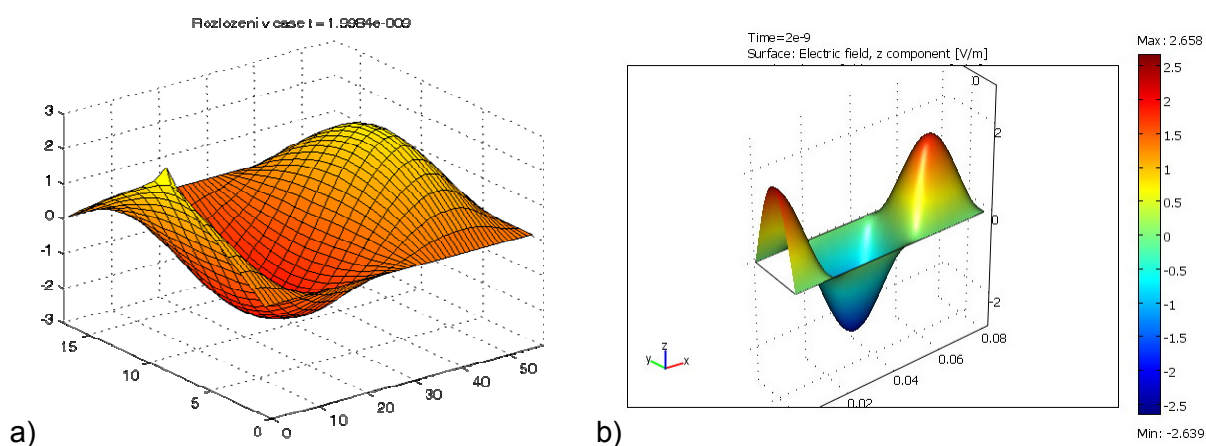


**Obr. 3.7** Rozložení pole v čase  $t = 0,20$  ns: a) MATLAB, b) COMSOL





**Obr. 3.8** Rozložení pole v čase  $t = 0,40 \text{ ns}$  – vzájemné skládání vln: **a)** MATLAB, **b)** COMSOL



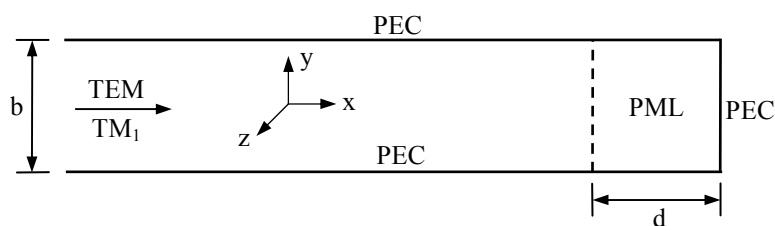
**Obr. 3.9** Rozložení pole v čase  $t = 2,00 \text{ ns}$  – ustálený stav: **a)** MATLAB, **b)** COMSOL

Z výše uvedených obrázků je patrné, že vytvořený skript v programu MATLAB analyzuje vlnovod v časové oblasti shodně s časovou analýzou programu COMSOL Multiphysics. Obě simulace znázorňují nejdříve postupující vlnu vlnovodem k vodivému ukončení, její odraz a následné skládání přímé a odražené vlny. V obou případech vlivem skládání vlny vznikne ustálené, stojaté vlnění.

## 4. DOKONALE PŘIZPŮSOBENÉ VRSTVY

Dokonale přizpůsobená vrstva (PML, *perfectly matched layer*) je vrstva, která absorbuje vlnu, aniž by došlo k jejímu odrazu. Tato vlastnost dovoluje zkoumat elektromagnetické vlny na krátkém úseku vlnovodu bez vzniku interferencí odražených vln s vlnou přímou [4].

Metodou konečných prvků je dokonale přizpůsobená vrstva modelována jako ztrátový materiál s dvojrozměrnou strukturou, který vykazuje anizotropii v jednom směru (tzv. uniaxiální anizotropní materiál) [4].



Obr. 4.1 Znárodnění vlnovodu s PML.

Při odvozování matematického popisu dokonale přizpůsobené vrstvy vyjdeme z vektorové vlnové rovnice pro vektor intenzity elektrického pole ve vlnovodu. Rovnice popisuje šíření příčně magnetické vlny v podélném směru  $x$  (obr. 4.1).

Vlnovou rovnici rozepíšeme zvlášť pro podélnou složku pole  $E_x$  a zvlášť pro složky příčné  $E_y$  a  $E_z$ . Pro anizotropní přizpůsobenou vrstvu z toho vyplývá, že tenzory permitivity a permeability mají z nediagonálních prvků nenulové jen prvky  $\varepsilon_{xy}$  ( $\mu_{xy}$ ) a  $\varepsilon_{yx}$  ( $\mu_{yx}$ ). Navíc pole nezávisí na podélné souřadnici  $z$ .

Pro vlnovod z obr. 4.1, kterým se šíří dominantní vid  $TM_1$ , se vlastní vrstva PML modeluje jako oblast s hloubkou  $d$ , která je rozdělená do  $N$  vrstev s odlišnými elektrickými a magnetickými vodivostmi [4]

$$\sigma(x) = \frac{(m+1)\varepsilon_0\varepsilon_r c}{2d} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{x-x_0}{d}\right)^m, \quad (26)$$

$$\sigma^*(x) = \frac{(m+1)\mu_0\mu_r c}{2d} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{x-x_0}{d}\right)^m, \quad (27)$$

kde  $m$  je stupeň prostorového aproximačního polynomu,  $R$  je požadovaná odrazivost v kolmém směru a  $x_0$  je pozice v PML rozhraní. Tenzory relativní permitivity a permeability v PML s maximální absorpcí vlny ve směru  $x$  získáme podle [4]

$$\overset{=p}{\varepsilon_r} = \varepsilon_r \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\overset{=p}{\mu_r} = \mu_r \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - j \frac{\sigma^*}{\omega \mu_r \mu_0}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - j \frac{\sigma^*}{\omega \mu_r \mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - j \frac{\sigma^*}{\omega \mu_r \mu_0} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Z výše uvedeného popisu by mělo být zřejmé, že pro analýzu struktury s dokonale přizpůsobenými vrstvami je nutno použít metodu konečných prvků, která uvažuje všechny tři složky intenzity pole. Z toho důvodu by bylo nutno zcela přepsat dosud vyvinuté programy. Proto se v dalším přizpůsobenými vrstvami zabývat nebudeme.

## 5. ZÁVĚR

Diplomová práce byla zaměřena na modelování vlnovodů metodou konečných prvků v časové oblasti. Metoda konečných prvků má oproti častěji používané metodě konečných diferencí mnoho výhod. Dovoluje analyzovat nepravidelné struktury, dokáže pracovat s křivými povrchy i nerovnoměrnou sítí. Navíc pracuje s veličinami pole i mimo uzly diskretizační sítě. Cenou za tyto výhody je však vyšší výpočetní náročnost.

První část práce byla věnována metodě konečných prvků ve frekvenční oblasti. Byla odvozena vlnová rovnice jak pro modální analýzu, tak pro analýzu harmonickou. Bylo popsáno generování sítě a sestavení matic pro řešení vlnové rovnice. Dále bylo vysvětleno nastavení analýzy vlnovodu v programu COMSOL Multiphysics a byl rozebrán vytvořený m-soubor pro analýzu vlnovodu ve frekvenční oblasti. Na závěr druhé kapitoly byly porovnány výsledky analýzy vlnovodu získané programem COMSOL Multiphysics s výsledky vypočtenými vytvořeným skriptem v programu MATLAB.

V další části práce byla popsána metoda konečných prvků v časové oblasti. Nejprve byl uveden teoretický popis metody zaměřený na používané metody aproximace testovacích polí v čase a na rozdíl mezi explicitními a implicitními algoritmy. Dále bylo opět uvedeno nastavení analýzy vlnovodu v programu COMSOL Multiphysics a byla popsána implementace časové analýzy vlnovodu v programu MATLAB. Závěr třetí kapitoly opět přináší srovnání analýz obou programů.

Poslední kapitola stručně seznamuje s dokonale přizpůsobenými vrstvami. Tyto vrstvy mají dokonale pohlcovat elektromagnetickou vlnu bez vzniku vlny odražené. Ve vytvořeném skriptu tyto vrstvy nejsou pro náročnost jejich modelování v metodě konečných prvků.

Výsledkem diplomové práce je vytvořený skript v programu MATLAB, který analyzuje šíření elektromagnetických vln ve vlnovodu jak v oblasti kmitočtové, tak v oblasti časové. Dále jsou popsány a vytvořeny modely vlnovodu v jednotlivých oblastech v programu COMSOL Multiphysics. Ze srovnání těchto modelů s vytvořeným skriptem plyne, že skript analyzuje šíření vlny správně.

# LITERATURA

- [1] RAIDA, Z. a kol. *Analýza mikrovlnných struktur v časové oblasti*. Brno: Nakladatelství VUTIUM, 2004.
- [2] SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. L. *Finite Elements for Electrical Engineers*. 3<sup>rd</sup> edition. Cambridge: University Press, 1996.
- [3] LEE, J. F.; LEE, R.; CANGELLARIS, R. *Time domain finite element methods*. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1997, vol. 45, no. 3, p. 430 to 442.
- [4] POLYCARPOU, C.; LYONS, M. R. A two-dimensinal finite element formulation of the perfectly matched layer. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1996, vol. 6, no. 9, p. 338–340.
- [5] *COMSOL Multiphysics Help* [počítačový program]. Ver. 3.3.0.405. USA, 2006.
- [6] *MATLAB Help* [počítačový program]. Ver. 7.1.0.246 (R14) SP3. USA, 2005

# SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 2.1	Orientace souřadných os ve vlnovodu. ....	8
Obr. 2.2	a) Tvarové funkce nad trojúhelníkovým prvkem; b) lineární aproximace skalární veličiny; c) bazová funkce.....	9
Obr. 2.3	Číslování diskretizačních prvků. Černé číslice označují lokální uzly, šedá čísla označují globální uzly a čísla v závorkách označují konečné prvky. ....	10
Obr. 2.4	Výběr typu analýzy. ....	12
Obr. 2.5	Nastavení velikosti objektu. ....	12
Obr. 2.6	Nastavení okrajových podmínek na stěnách vlnovodu. ....	13
Obr. 2.7	Nastavení skalárních proměnných. ....	13
Obr. 2.8	Nastavení zobrazené veličiny. ....	14
Obr. 2.9	Vypočtené kritické kmitočty. ....	14
Obr. 2.10	Výběr typu analýzy. ....	15
Obr. 2.11	Nastavení velikosti objektu. ....	15
Obr. 2.12	Nastavení okrajových podmínek: a) budící stěny, b) bočních stěn. ....	16
Obr. 2.13	Nastavení okrajových podmínek absorpční stěny. ....	16
Obr. 2.14	Nastavení skalárních proměnných. ....	16
Obr. 2.15	Zobrazení výsledků analýzy: a) Evanescentní vid ve vlnovodu ( $f = 6$ GHz), b) Rozložení pole vidu $TE_{10}$ pro kmitočet $f = 7$ GHz. ....	17
Obr. 2.16	Rozložení pole ve vlnovodu se zadní stěnou z PEC. ....	17
Obr. 2.17	Evanescentní vid na kmitočtu $f = 5$ GHz vypočítaný: a) v MATLABu (vstupní parametry $N_z = 56$ ; $N_x = 16$ ; $f = 5$ GHz), b) v COMSOLu. ....	21
Obr. 2.18	Zobrazení vlny na kmitočtu $f = 7$ GHz: a) v MATLAB pro vstupní parametry $N_z = 56$ ; $N_x = 16$ ; $f = 7$ GHz, b) v COMSOLu. ....	22
Obr. 2.19	Zobrazení vlny na kmitočtu $f = 10$ GHz: a) v MATLABu pro vstupní parametry $N_z = 56$ ; $N_x = 16$ ; $f = 10$ GHz, b) v COMSOLu. ....	22
Obr. 2.20	Zobrazení vlny na kmitočtu $f = 14$ GHz: a) v MATLABu pro vstupní parametry $N_z = 56$ ; $N_x = 16$ ; $f = 14$ GHz, b) v COMSOLu. ....	22
Obr. 3.1	Výběr typu analýzy. ....	27
Obr. 3.2	Nastavení konstant. ....	28
Obr. 3.3	Nastavení skalárních proměnných. ....	28
Obr. 3.4	Nastavení pro budící pole. ....	29
Obr. 3.5	Nastavení okrajových podmínek: a) budící stěny, b) bočních stěn. ....	29
Obr. 3.6	Rozložení pole v čase $t = 0,14$ ns: a) MATLAB, b) COMSOL. ....	31
Obr. 3.7	Rozložení pole v čase $t = 0,20$ ns: a) MATLAB, b) COMSOL. ....	31
Obr. 3.8	Rozložení pole v čase $t = 0,40$ ns – vzájemné skládání vln: a) MATLAB, b) COMSOL. ....	32
Obr. 3.9	Rozložení pole v čase $t = 2,00$ ns – ustálený stav: a) MATLAB, b) COMSOL. ....	32
Obr. 4.1	Znázornění vlnovodu s PML. ....	33

# SEZNAM ZKRATEK A SYMBOLŮ

H	Intenzita magnetického pole
E	Intenzita elektrického pole
$\omega$	Úhlový kmitočet
$k_0$	Vlnové číslo
$\beta$	Konstanta šíření
$\mu_0$	Permeabilita vakua
$\varepsilon_0$	Permitivita vakua
$\sigma$	Elektrická vodivost
$\sigma^*$	Magnetická vodivost
TE	Transversálně (příčně) elektrická vlna
TM	Transversálně (příčně) magnetická vlna
$\Omega_e$	Plocha jednoho konečného prvku
$S^{(e)}$ a $T^{(e)}$	Lokální matice koeficientů izolovaných konečných prvků
$\tilde{S}$ a $\tilde{T}$	Globální matice koeficientů izolovaných konečných prvků
C	Sdružovací matice
PML	Dokonale přizpůsobená vrstva