VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

DEFORMAČNĚ NAPĚŤOVÁ ANALÝZA VYBRANÉ LEZECKÉ PŘÍČKY
STRESS-STRAIN ANALYSIS OF CHOSEN CLIMBING RUNG

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Jiří Hložek
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Ing. Kamil Novák
SUPERVISOR

BRNO 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	**Jiří Hložek**
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	**Ing. Kamil Novák**
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Deformačně napěťová analýza vybrané lezecké příčky

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Lezecké příčky jsou důležitými částmi výškových budov, komínů nebo vstupů do studní a podzemních kanalizací. Umožňují operátorům vyšplhat nahoru a dolů a musí vydržet různé zatížení. Typická příčka může být modelována jako 3D zakřivený prut s definovaným příčným průřezem, který je vetknut na obou jeho koncích. Může být definováno různé zatížení plynoucí z rozmístění nohou na horní straně samotné příčky. Problém získání rozdílných součinitelů bezpečnosti by měl být proveden za statických podmínek, tj. není důležité uvažovat únavu materiálu.

Cíle bakalářské práce:

1. Provést rešerši literatury zabývající se řešením prostorových rámů
2. Provést deformačně napěťovou analýzu vybrané lezecké příčky analyticky a numericky
3. Srovnat a diskutovat výsledky

Seznam literatury:

JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 802142592X.

JANÍČEK, Přemysl a Zdeněk FLORIAN. Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I. 5. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010. ISBN 8021441224.

JANÍČEK, Přemysl a Jindřich PETRUŠKA. Pružnost a pevnost II: úlohy do cvičení. 3. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 9788021434417.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 2. 11. 2016

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá deformačně napěťovou analýzou vybrané lezecké příčky. Práce je rozdělena do čtyř hlavních částí. První část této práce popisuje prostorové rámy (rošty) a možnosti jejich řešení. Druhá část zahrnuje analytické řešení vybrané, idealizované příčky užitím Castiglianovy věty. Třetí část obsahuje numerické řešení pomocí metody konečných prvků v programu ANSYS. V poslední části jsou zhodnoceny výsledky, které jsou důkladně prodiskutovány.

KLÍČOVÁ SLOVA

lezecká příčka, rám, deformačně napěťová analýza, ANSYS

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with a stress-strain analysis of chosen climbing rung. The thesis is divided into four main parts. The first part of the thesis reviews three-dimensional frames (grates) and their possible solution. The second part includes analytical solution of chosen, idealized climbing rung by using Castigliano´s theorem. The third part includes numerical solution by using finite element method performed in ANSYS software. Finally, the last part summarizes results which are also thoroughly discussed.

KEY WORDS

climbing rung, frame, stress-strain analysis, ANSYS

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

HLOŽEK, J. *Deformačně napěťová analýza vybrané lezecké příčky.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 58s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Kamil Novák.

PROHLÁŠENÍ AUTORA O PŮVODNOSTI PRÁCE

Tímto prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Deformačně napěťová analýza vybrané lezecké příčky vypracoval samostatně s využitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce.

V Brně dne 26. května 2017 …………………………

Jiří Hložek

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji především svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Kamilu Novákovi za jeho cenné rady, připomínky a odborné a pečlivé vedení při psaní této práce.

Děkuji své rodině a přítelkyni za podporu po celou dobu studia a při psaní této závěrečné práce.

OBSAH

ÚVOD

Již od pradávna člověk toužil zdolávat překážky, které mu stály v cestě. Ať to byly překážky přírodní, umělé či jiné. Touha člověka se dále rozvíjet, poznávat nové věci a objevovat je, jej hnala kupředu i v oblasti nalezení a zvolení takových metod, pomůcek a technických prostředků, aby zdolání těchto překážek bylo snazší, rychlejší a bezpečné. S přirozeným vývojem člověka, rozvojem jeho myšlení a manuálních schopností se technické pomůcky vytvořené člověkem, stávaly stále více propracovanějšími a dokonalejšími, až do dnešní podoby. Jedním z mnoha příkladů těchto člověkem vytvořených pomůcek je téma mé bakalářské práce – lezecká příčka. Lezecká příčka neboli stupadlo je stavební prvek připevněný nebo zabudovaný do stěny podzemních šachet, jímek nebo jiných podzemních staveb. Také slouží k usnadnění přístupu na vysoké komíny a sloupy. Pro mnohé možná samozřejmost, která je očekávána na většině svislých konstrukcí či překážek, které je nutno překonat ve směru nahoru či dolů. Tato, řekněme samozřejmost, však hraje velkou roli při výkonu mnoha povolání, ale také při sportu či jiném způsobu trávení volného času. Špatná konstrukce nebo upevnění lezecké příčky může znamenat vážné ohrožení života. Naproti tomu však může být jediným technickým prostředkem při záchraně lidského života při zajištění záchranářských týmů při jejich práci.

V práci je sepsána rešerše týkající se oblasti Pružnosti a Pevnosti, zejména tedy teorie rámů, která je v této bakalářské práci hojně využívána. Pomocí programu MAPLE je v této bakalářské práci vypočítáno analytické řešení a pomocí ANSYS Workbench numerické řešení. Výsledky řešení jsou následně porovnány a určena velikost chyby analytického výpočtu od numerického řešení.

obr. 1: Lezecké příčky na komíně v Hodoníně

1 CÍLE PRÁCE

Cíle bakalářské práce, které byly stanoveny vedoucím práce:

1. Provést rešerši literatury zabývající se řešením prostorových rámů
2. Provést deformačně napěťovou analýzu vybrané lezecké příčky analyticky a numericky
3. Srovnat a diskutovat výsledky

2 REŠERŠNÍ STUDIE

2.1 Historie

I v minulosti bylo nezbytné provádět opravy a jiné pracovní úkony na sloupech elektrického a telegrafního vedení. Pro tyto účely se používala stoupací železa (obr. 2). Tato stoupací železa fungují tak, že osoba, která pomocí těchto želez šplhá nahoru po sloupu, je zatíží svou hmotností, čímž se železa vzpříčí okolo sloupu. To je způsobeno tím, že síla, kterou je působeno na stoupací železo, leží v oblasti průniku třecích (frikčních) kuželů, proto je pro správnou funkci těchto želez dostatečná vzdálenost nohy od sloupu. Výpočet této minimální vzdálenosti je demonstrován na následujícím příkladu.

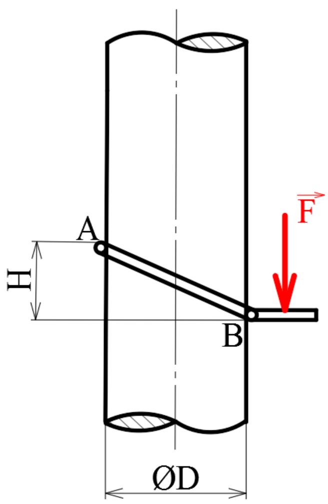
obr. 2: Stoupací železa [1]

Příklad [2]:

Určení minimální vzdálenosti zatěžující síly, od sloupu, tak aby nedošlo ke smýkání.

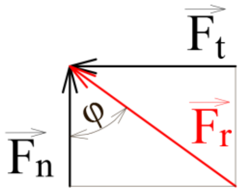
tab. 1: Zadané parametry

Součinitel smykového tření – f	0,2 [-]
Průměr sloupu – D	400 [mm]
Výška – H	110 [mm]



obr. 3: Zadání příkladu [2]

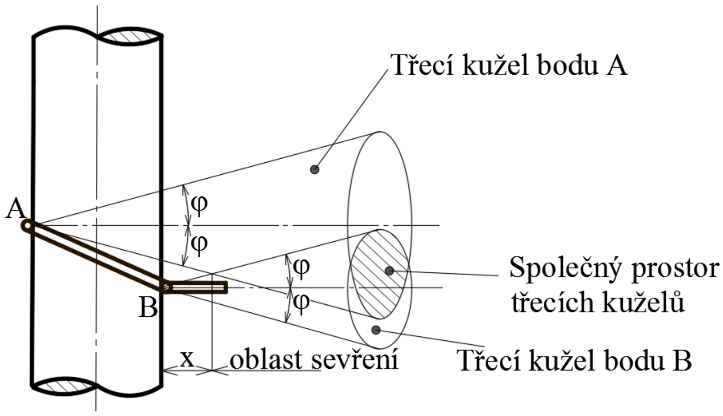
Nejdříve je třeba určit úhel sklonu površky třecího kužele, rov. (1) a (2):



$$\tan\varphi = \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_n \cdot f}{F_n} = f \tag{1}$$

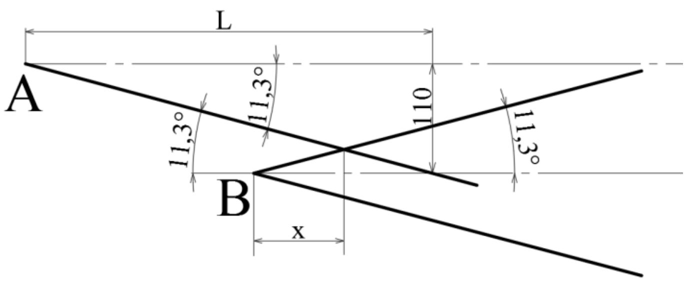
$$\varphi = \tan^{-1} f = \tan^{-1} 0{,}2 = 11{,}3° \tag{2}$$

Jelikož součinitel smykového tření je na celém povrchu sloupu stejný, tudíž mají oba třecí kužely stejný sklon površek, obr. 4.



obr. 4: Zobrazení třecích kuželů [2], x – hledaná vzdálenost.

Výpočet:



obr. 5: Detail průsečíku kuželů

$$L = 110 \cdot \tan 11{,}3° = 550 \text{ mm} \tag{3}$$

Od vzdálenosti L je odečten průměr sloupu D, čímž je získána délka přepony rovnostranného trojúhelníku, která je dvojnásobkem hledané vzdálenosti.

$$L - D = 550 - 400 = 150 \text{ mm} \tag{4}$$

$$x = \frac{150}{2} = 75 \text{ mm} \tag{5}$$

Stupadlo je možné nejblíže zatížit ve vzdálenosti 75 mm od sloupu (rov. (5)), aniž by došlo ke smýkání.

2.2 Teoretický základ prosté pružnosti pevnosti

V následující kapitole je čerpáno z těchto zdrojů [3], [4].

Pružnost a pevnost (PP) se zabývá určováním deformací, napjatostí a porušováním těles v závislosti na vnějším zatížení. Další součástí PP je rovněž formulace tzv. mezních stavů, bezpečnosti a spolehlivosti.

2.2.1 Lineární pružnost a pevnost

Při řešení úloh v PP je třeba nejdříve rozlišit, zda se jedná o lineární, či nelineární úlohu. Toto posouzení má zcela zásadní význam pro výsledné řešení, protože úlohy lineární jsou podstatně jednodušší z hlediska řešení daného problému.

Lineární závislost mezi vnějšími zatěžujícími silami, parametry napjatosti a deformace vyšetřuje právě lineární PP. Toto lineární chování je také předpokládáno pro řešení zadaného problému. Aby se tedy jednalo o lineární úlohu, musí být splněny následující podmínky:

- materiál tělesa je lineárně pružný
- deformace tělesa jsou malé (menší než rozměr příčného průřezu)
- složky tenzoru přetvoření jsou malé (menší než 1%)
- okrajové podmínky jsou lineární

2.2.2 Lineárně pružný materiál

Pokud se jedná o lineárně pružný materiál, dá se říci, že po odstranění zatížení se těleso vrací do počátečního stavu. To znamená, že vztahy popisující lineárně pružný materiál je závislost složek tenzoru napjatosti na složkách tenzoru přetvoření. Což je nazýváno jako Hookeův zákon. V případě, že se jedná o izotropní materiál, je tento materiál popsán materiálovými konstantami: modulem pružnosti (E) a Poissonovým číslem (μ).

materiál	E	μ
ocel	210 000	0,3

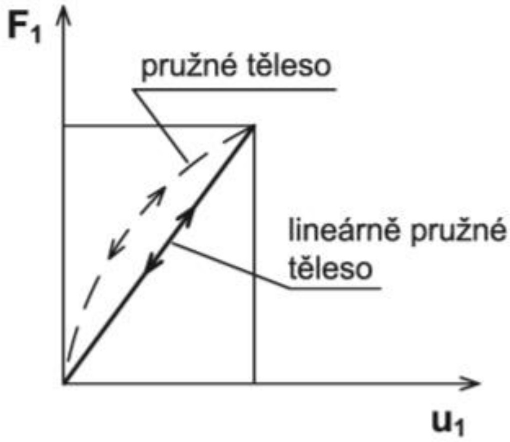
tab. 2: Příklady materiálových charakteristik [3]

Během zatěžování konají vnější síly deformační práci – A. Jelikož v celém průběhu tohoto zatěžování zůstává těleso pružné a nevznikají v něm žádné jiné změny než pružné deformace, pak platí, že přírůstek energie napjatosti je roven přírůstku deformační práce.

$$dW = dA \tag{6}$$

Tato rovnost je nazývána jako *zákon zachování energie pro pružné těleso*. Dále platí, že pokud je těleso, které je v nezatíženém stavu a nemá žádnou vnitřní napjatost, zatíženo, pak je hodnota deformační práce rovna energii napjatosti, což je znázorněno rovnicí (7).

$$W = A \tag{7}$$



obr. 6:Pružný materiál – závislost posuvů a zatěžující síly [3]

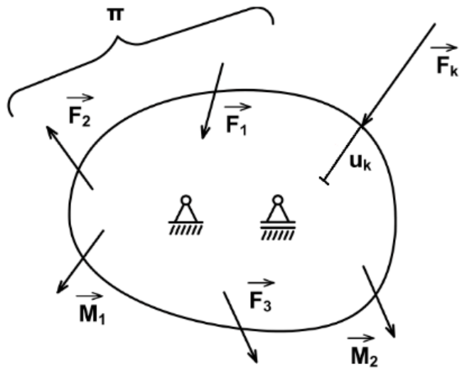
2.2.3 Obecné věty lineární pružnosti

Existuje několik vět, které jsou v lineární PP velmi významné (Věta o superpozici, Věta o vzájemnosti prací, Věta o vzájemnosti posuvů atd.). V této bakalářské práci jsou však zmíněny jen ty, které jsou pro tuto práci podstatné, což znamená, že jsou využity v analytickém přístupu řešení.

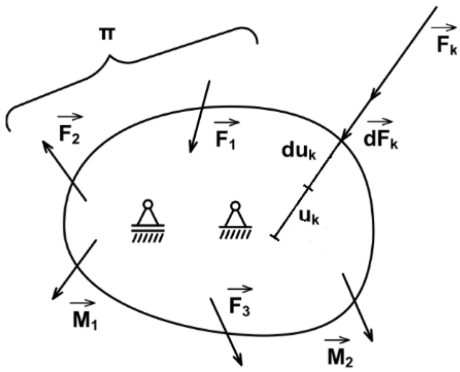
Věta Castiglianova

Castiglianova věta je jednou z nejdůležitějších vět lineární PP, protože je obecnou metodou pro výpočet deformací.

Je uvažována silová soustava Π a osamělá síla $\overrightarrow{F_k}$. Právě tato soustava Π a síla $\overrightarrow{F_k}$ působí na těleso v lineárně pružném stavu. Soustava vykoná určitou práci A a je předpokládáno, že síla $\overrightarrow{F_k}$ je zvětšena o $d\overrightarrow{F_k}$. To vede k tomu, že se zvětší velikost síly, ale nezmění se její nositelka.



(a) Stav I – zatížení tělesa silovou soustavou $\pi \cup \overrightarrow{F_k}$



(b) Stav II – zatížení tělesa silovou soustavou $\pi \cup \overrightarrow{F_k} \cup d\overrightarrow{F_k}$

obr. 7: Castiglianova věta [4]

Vykonané deformační práce:

$$A_I = A_\pi + \frac{1}{2} F_k u_k \tag{8}$$

$$A_{II} = A_\pi + \frac{1}{2} F_k u_k + F_k u_k \tag{9}$$

Přírůstek práce vnějších sil:

$$\mathrm{d}A = A_{II} - A_I = dF_k u_k \tag{10}$$

Totální diferenciál(11), přičemž jeho členy vyšších řádů jsou zanedbány:

$$\mathrm{d}A_k = \frac{\partial A}{\partial F_k} dF_k \tag{11}$$

Z porovnání rovnic (10) a (11) a jejich úpravě, je možné vyjádřit vztah pro posuv:

$$u_k = \frac{\partial A}{\partial F_k} = \frac{\partial W}{\partial F_k} \tag{12}$$

Analogicky lze vyjádřit také vztah pro úhel natočení. Rozdíl je pouze v tom, že místo osamělé síly $\overrightarrow{F_k}$, je uvažována silová dvojice $\overrightarrow{M_e}$:

$$\varphi_e = \frac{\partial A}{\partial M_e} = \frac{\partial W}{\partial M_e} \tag{13}$$

2.2.4 Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v pružnosti a pevnosti je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa z hlediska napjatosti a deformace. Každý prut je charakterizován svou střednicí a příčným průřezem, přičemž splňuje určité předpoklady, které jsou nazývány jako prutové předpoklady.

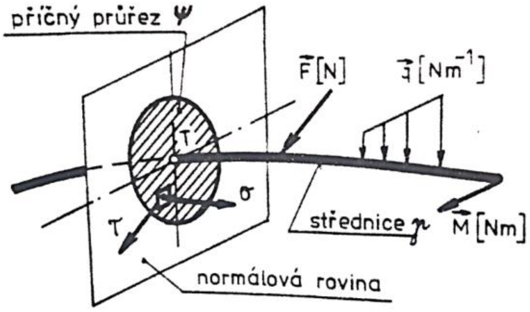
Prutové předpoklady

Jelikož tato práce prakticky využívá prutové předpoklady u prostorových rámů (z hlediska zatížení se jedná o rošty), je třeba je charakterizovat.

Prutové předpoklady tedy dělíme do těchto skupin:

a) Předpoklady geometrické

1) Prut je určen křivkou γ, tzv. střednicí, a v každém bodě střednice příčným průřezem ψ, který obsahuje všechny body tělesa, ležící v normálové rovině. Průsečík γ s ψ je geometrickým těžištěm T průřezu ψ, viz obr. 8.
2) Střednice γ je spojitá a hladká křivka konečné délky.
3) Příčný průřez je spojitá jedno nebo vícenásobně souvislá oblast, ohraničená obrysem a charakterizovaná charakteristikami příčného průřezu.
4) Délka střednice je řádově minimálně stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu.



obr. 8: Prut [4]

b) Předpoklady vazbové a zatěžovací

1) Vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice.
2) Zatížení je soustředěno na střednici, tj. silovým působením na prut jsou osamělé a liniové síly a silové dvojice s působištěm na střednici, obr. 10.

c) Předpoklady deformační

1) Střednice prutu zůstává v procesu deformace spojitá a hladká.
2) Příčné průřezy zůstávají v průběhu deformace zase příčnými průřezy, tj. zachovávají si rovinnost a kolmost k deformované střednici. Příčné průřezy se podle charakteru zatěžování:
   - vzájemně oddaluj a deformují – tah
   - vzájemně přibližují a deformují – tlak
   - natáčejí kolem osy v ψ a deformují se – ohyb
   - natáčejí kolem osy kolmé k ψ a nedeformují se – krut
   - posouvají se bez deformace – smyk

d) Předpoklady napjatostní

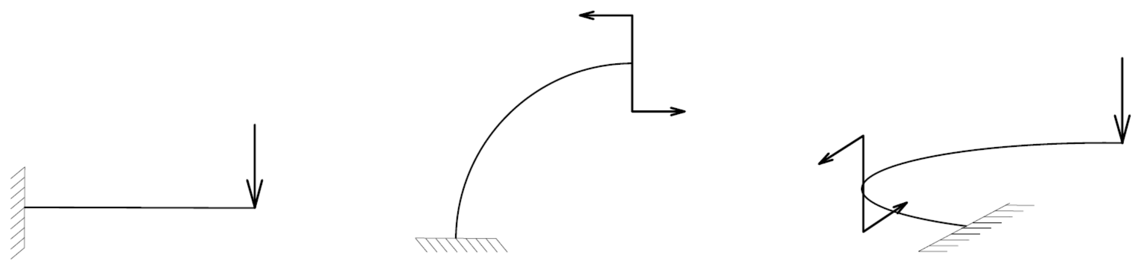
- Napjatost v prutu je určena normálným a smykovým napětím v příčném průřezu. Je to zvláštní typ napjatosti, kterou budeme uvažovat jako prutovou napjatost.

Klasifikace prutů

Pruty, jakož to lineárně pružná tělesa vykazují velkou různorodost v PP. Lze je dělit dle různých hledisek. V této kapitole jsou však zmíněny jen ty, které jsou pro tuto práci důležité.

Hledisko geometrie prutu

1) Podle křivosti střednice
   - Pruty přímé (obr. 9a)
   - Pruty zakřivené (rovinné – viz obr. 9b, prostorové – viz obr. 9c)
   - Pruty lomené

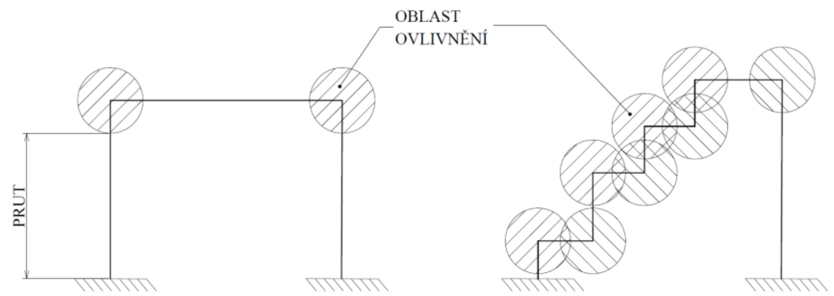


(a) (b) (c)

obr. 9: Dělení dle křivost střednice [4]
(a) prut přímý, (b) prut zakřivený – rovinný, (c) prut zakřivený – prostorový

U lomených prutů je střednice spojitá, ale rozdělena po částech na hladké křivky (každý zlom dělí střednici na další části). Lomené pruty mají tedy konečný počet zlomů (bodů). Energie napjatosti v okolí zlomu je zanedbatelná, z čehož vyplývá, že zlomy jsou dokonale tuhé a zachovávají úhel střednice před i po deformaci. Aby tedy mohl být prut řešen jako lomený, pak:

- Je jako prut řešena pouze část, která je dostatečně vzdálena od oblasti zlomů, přičemž je využíváno Saint Venantova principu, obr. 10a.
- Je možné se zabývat jen takovými lomenými pruty, u nichž součet zlomy ovlivněných délek střednice je malý vzhledem k celé délce střednice, obr. 10b.

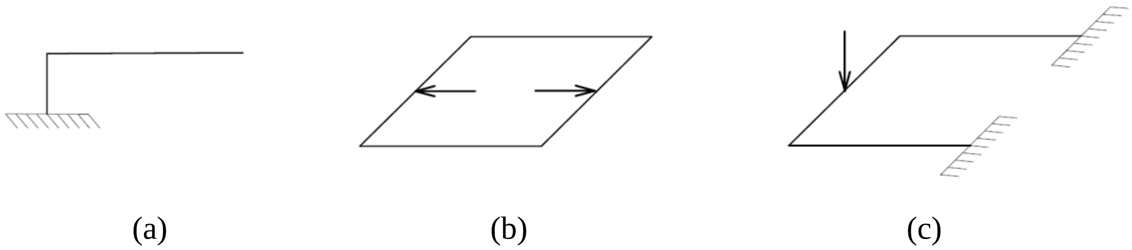


(a) (b)

obr. 10: Lomený prut [4]: (a) prutové těleso, (b) není prutové těleso

2) Podle uzavřenosti střednice
   - Pruty otevřené – střednici prutu je možné rozdělit na dva prvky řezem ω, přičemž bod řezu leží na střednici řezaného prutu
   - Pruty uzavřené (n-krát) – střednici prutu je možné rozdělit na dva prvky řezem ω, který je určen (n+1) body střednice

3) Podle hladkosti střednice
   - Pruty s hladkou střednicí
   - Pruty s konečným počtem bodů nespojitosti (zlomů) střednice, přičemž:
     - V místech nespojitosti není zaručena vzájemná pohyblivost prvků (obr. 11a, b)
     - V místech nespojitosti je zaručena vzájemná pohyblivost (obr. 11c)



obr. 11: Dělení dle hladkosti střednice [4]
(a) otevřený rám, (b) uzavřený rám, (c) rošt

4) Podle tvaru příčného průřezu
   - Elementární pruty (kruh, čtverec, obdélník, …)
   - Profily – příčný průřez prutu je normovaný (válcované profily tvar I, U, Z, T)
   - Pruty s obecným příčným průřezem

2.2.5 Principy a definice PP

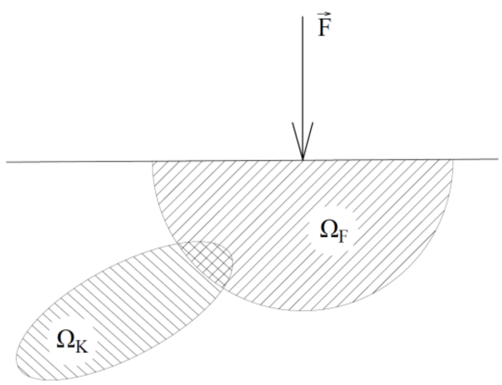
Saint Venantův princip

Jedním z velmi důležitých principů PP je Saint Venantův princip. Tento princip má velký význam pro PP, protože umožňuje:

a) Zavádět výpočtové modely (zavedení osamělé síly, silové dvojice, liniového zatížení atd.)
b) vytvářet výpočtové modely styku těles
c) rozdělit řešení napjatosti a deformace vázaného tělesa na řešení rovnováhy tělesa jako celku a pak napjatosti a deformace uvolněného tělesa

Přesná definice tohoto zákona tedy zní:

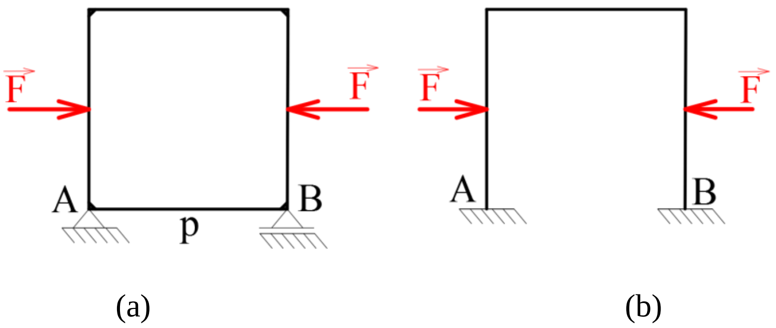
Nahradíme-li silovou soustavu, která působí v dané oblasti, jinou staticky ekvivalentní silovou soustavou, pak napjatost tělesa bude přibližně stejná pro oba zatěžující stavy, s výjimkou bezprostředního okolí náhrady. [4]



obr. 12: Nepřípustné nahrazení, Předloha z [4]

2.3 Uzavřené pruty – rámy

Rámy jsou uzavřené pruty, které jsou 3x a více staticky neurčité. V určitých případech je možné rám nahradit zalomeným prutem, a to za předpokladu, že ohybová tuhost ($E \cdot J_y$) jednoho z prutů rámu (p) je řádově větší, než u ostatních prutů (obr. 13). Okolí vazeb A a B by se pak chovalo stejně.

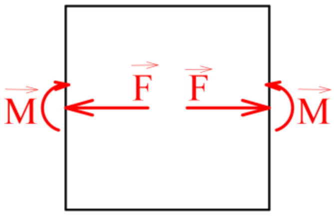


obr. 13: Uzavřené pruty: a) rám, b) lomený prut

Při řešení těchto úloh je potřeba nejdříve rám rozdělit řezem, aby vznikl prut otevřený, pro který se pak určují složky výsledných vnitřních účinků. Pro jeden konec tohoto otevřeného prutu se zvolí vhodné deformační podmínky a na druhý se umístí vetknutí.

2.3.1 Rovinný rám

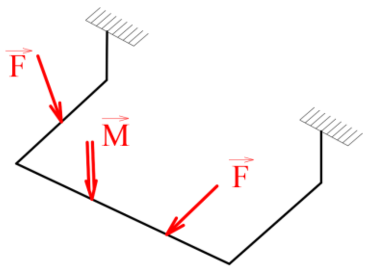
Za rovinný rám je považován rám, na který působí vnější zatěžující síly, jenž leží v rovině rámu a střednice je rovinná křivka, obr. 14. Rovinné rámy jsou minimálně tři krát staticky neurčité.



obr. 14: Rovinný rám

2.3.2 Prostorový rám

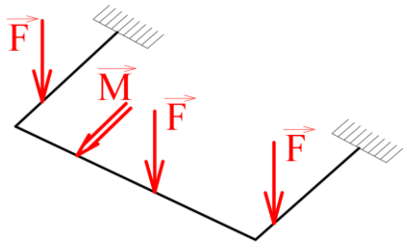
Na rozdíl od rovinných rám, na prostorový rám působí síly v jakémkoliv směru a střednice může být prostorová, viz obr. 15.



obr. 15: Prostorový rám [4]

2.3.3 Rošt

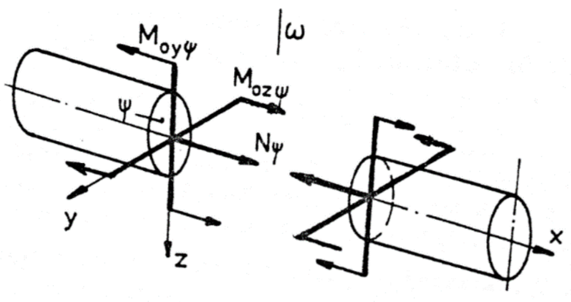
Především tímto druhem rámů se zabývá tato bakalářská práce. Jedná se o speciální druh prostorového rámu, kdy rám (rošt) leží v jedné rovině, a právě na tuto rovinu působí vnější zatěžující síly tak, že jsou k ní kolmé, obr. 16.



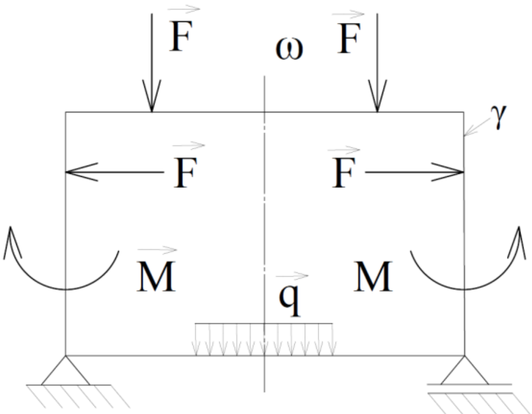
obr. 16: Rošt [4]

2.3.4 Vlastnosti symetrie

Pokud chceme využít vlastností symetrie, je nutné, aby byl prut symetrický z hlediska geometrie, materiálu a zatížení. Z hlediska vazeb nemusí být symetrický, ale je důležité, aby silové působení ve vazbách bylo symetrické. Díky využití symetrie se sníží početní složitost úlohy, a to výrazným způsobem. Při řešení těchto prutů platí, že v řezu symetrie ω, který je vedený osou symetrie je nenulová složka normálové síly N_ψ a ohybových momentů $M_{oy\psi}$ a $M_{oz\psi}$. Složky posouvající sily T_ψ a krouticího momentu $M_{k\psi}$ jsou naopak nulové.



obr. 17: Nenulové složky symetrického zatížení v řezu ω [4]



obr. 18: Symetrické zatížení [4]:

2.4 Předpokládané mezní stavy

Mezní stav tělesa nastává, když stavová veličina dosáhne své mezní hodnoty, čímž těleso ztrácí dočasně nebo trvale schopnost konat svou požadovanou funkci.

V technické praxi se často setkáváme s různými druhy mezních stavů, zde jsou však zmíněny pouze ty, které jsou podstatné.

Mezní stav deformace

Mezní stav deformace nastává právě tehdy, pokud se deformace funkčně přípustné změní na deformace funkčně nepřípustné.

Mezní stav pružnosti

U mezního stavu pružnosti je předpokládáno, že těleso je z výchozího stavu zatěžováno, až do určitého zatížení a následně odlehčeno. Tento mezní stav je tedy takový stav, kdy při jeho překročení vznikají na tělese plastické deformace. Právě tento mezní stav se objevuje v analytické části této bakalářské práce.

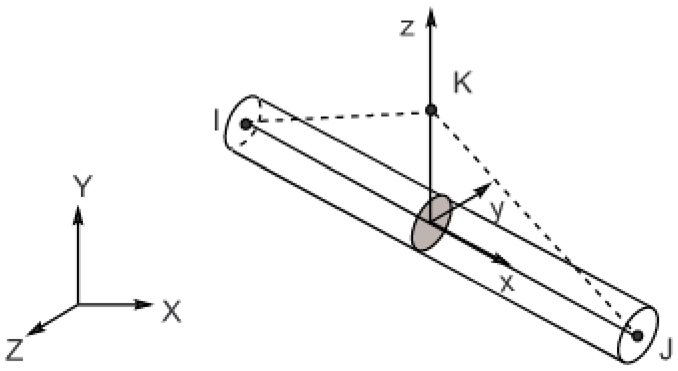
2.5 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je obecná numerická metoda, která simuluje základní fyzikální jevy. Historie této metody sahá do 50. let 20. století, kdy její základy položil John Argys, který navázal na práci Raye W. Clougha. Až roku 1965, Feng Kang publikoval ekvivalentní numerickou metodu, kterou nazval „metoda konečných diferencí založená na principu variace", což je ekvivalentní metoda dnešní MKP. V dnešní době je možné pomocí metody konečných prvků řešit problémy z oblasti statických výpočtů, pružnosti, dynamiky, kinematiky, proudění kapalin atd. [5]

Princip MKP je založen na numerickém přístupu řešení, který převádí spojitý problém na problém diskrétní, což znamená, že geometrii tělesa nahradí prvky konečných rozměrů, pro které je získáno přibližné číselné řešení. V praxi, je při řešení problému nutno řešenou oblast rozdělit na určitý počet podoblastí (prvků), čímž se vytvoří síť konečných prvků. Výhodou MKP je, že díky ní je možné řešit komplikovaná prostorová tělesa, která jsou analyticky velice náročná na vyřešení ne-li neřešitelná.

Prvek BEAM188

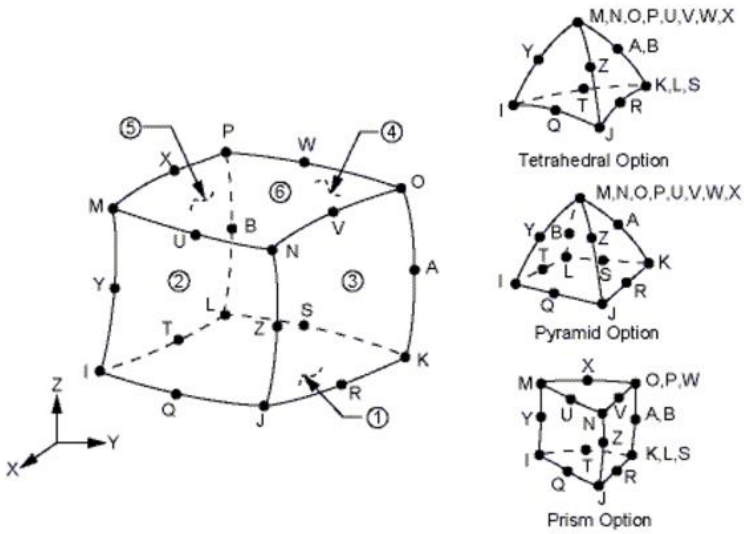
Prvek BEAM188 je prvek, který je vhodný pro řešení prutových konstrukcí. Jedná se o kvadratický prvek se třemi uzly v 3D prostoru. Každý uzel má šest stupňů volnosti, které zahrnují translace ve směrech os x, y a z a rotace kolem těchto os. Sedmý stupeň volnosti je volitelný a využívá se jen při velkých rotacích nebo u nelineárních úloh. Více informací viz ANSYS HELP [6].



obr. 19: Geometrie prvku BEAM188 [6]
I, J, K – uzly prvku

Prvek SOLID186

Prvek SOLID186 je prostorový kvadratický objemový prvek. Je definován 20 uzly, které mají tři stupně volnosti, což jsou posuvy ve směrech os x, y a z. Prvek podporuje plasticitu, hyperelasticitu, creep (tečení) a spoustu dalších nelineárních chování. Více informací viz ANSYS HELP [6].

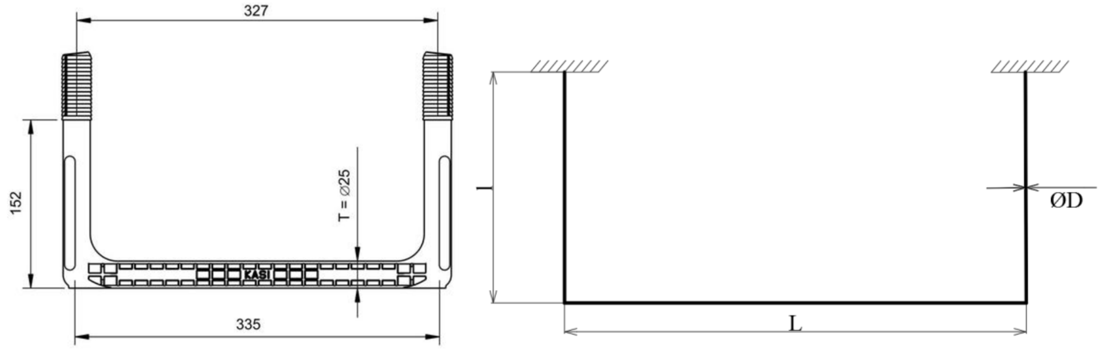


obr. 20: Geometrie prvku SOLID186 [6]
I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, A, B – uzly prvku
1-6 – plochy prvku

3 LEZECKÁ PŘÍČKA

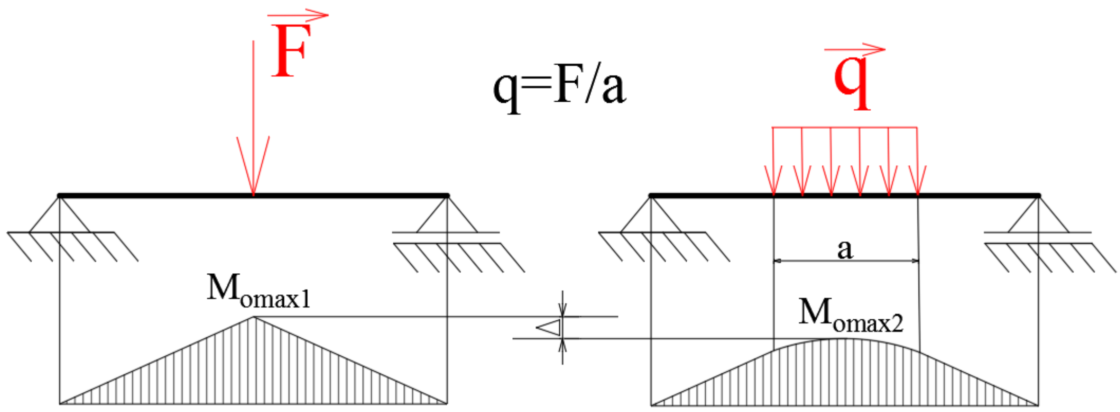
Vstup do problematiky deformačně napěťové analýzy vybrané lezecké příčky představuje lezecká příčka firmy KASI (obr. 21a) [7]. Jedná se o příčku, která je používána pro usnadnění přístupu do kanalizací a šachet. Jelikož samotná příčka by byla pro výpočet značně komplikovaná z důvodu velké členitosti (zdrsněný plastový obal, zábrana proti sklouznutí nohy), byly pro zjednodušení výpočtu tyto nerovnosti odstraněny, čímž bylo dosaženo kruhového příčného průřezu. Zjednodušený výpočtový model je zobrazen na obr.21b.

Zatížení je simulováno pomocí osamělých sil, které nahrazují stoj na jedné noze nebo na dvou nohou. Liniové zatížení není uvažováno, a to z důvodu, že při namáhání osamělou silou vznikne větší ohybový moment (obr. 22). V místě, kde je příčka zabetonována je uvažováno vetknutí.



(a) (b)

obr. 21: lezecká příčka



(a) (b)

obr. 22: Rozdíl mezi zatížením osamocenou silou a liniovým zatížením

Materiál

Materiál, ze kterého je příčka vyrobena, j ušlechtilá uhlíková ocel *ČSN 12050* (možno tuto ocel značit také *C45* dle normy *ČSN EN 10027-1*) [8]. K výpočtu jsou potřeba materiálové charakteristiky (E, μ), které jsou uvedeny v tab. 2.

Vstupní parametry

Výpočet zatěžující síly – F:

Každá lezecké příčka musí splňovat určitá kritéria, dle normy ČSN EN 13 101 [9]. Ta říká, že příčky nesmí obsahovat žádné výrobní vady, výčnělky a ostré hrany. Dále musí vyhovět proti vytržení při minimální síle o hodnotě 5 kN, deformace musí být menší než 10 mm při zatížení 2 kN a současně po odlehčení musí být trvalé deformace menší než 2 mm. Příčky také musí odolat při nárazu dopadové hmotnosti o hodnotě 20 kg z výšky 1 m, aniž dojde ke zlomení. V této práci bude tedy příčka zatížena hmotností o velikosti 204 kg, z čehož lze vypočítat velikost zatěžující síly (14):

$$F = m \cdot g = 204 \cdot 9.81 = 2000\ [N] \tag{14}$$

Výpočet modulu pružnosti ve smyku – G:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{210\ 000}{2(1+0{,}3)} = 80\ 770\ \text{MPa} \tag{15}$$

Výpočet osového kvadratického momentu – J_y (kruhový průřez):

$$J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi * 25^4}{64} = 19\ 175\ \text{mm}^4 \tag{16}$$

Výpočet polárního kvadratického momentu – J_p:

$$J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi * 25^4}{32} = 38\ 350\ \text{mm}^4 \tag{17}$$

Výpočet obsahu plochy příčného průřezu – S:

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi * 25^2}{4} = 491\ \text{mm}^2 \tag{18}$$

Výpočet koeficientu β pro kruhový průřez [4]:

$$\beta = \frac{32}{27} = 1{,}19 \tag{19}$$

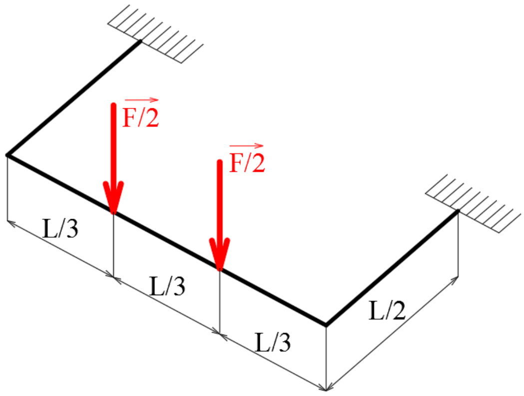
tab. 3: Vstupní parametry

Geometrické a materiálové charakteristiky	
Délka – L	327 [mm]
Délka – l	152 [mm]
Rádius – R	27 [mm]
Průměr – D	25 [mm]
Síla – F	785 [N]
Modul pružnosti ve smyku – G	80 770 [MPa]
Osový kvadratický moment – J_y	19175 [mm^4]
Polární kvadratický moment – J_p	38350 [mm^4]
Obsah příčného průřezu – S	491 [mm^2]
Koeficient – β	1,19 [-]

3.1 Analytický přístup

3.1.1 Výpočtový model 1

Tento model simuluje zatížení lezecké příčky osobou, která stojí na obou nohách, přičemž je předpokládáno, že síla je rozložena do obou noh rovnoměrně, viz obr. 23 .

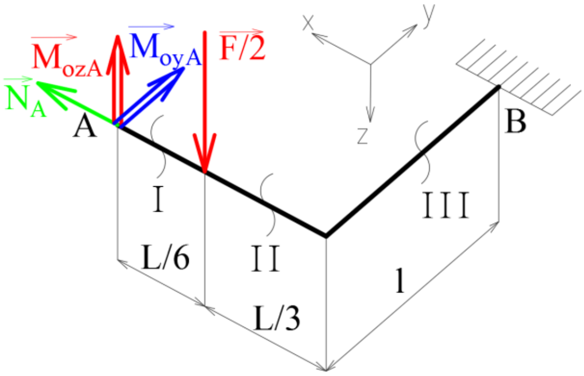


obr. 23: výpočtový model 1

Rošt je zatížen dvěma osamocenými silami, které jsou symetrické, tudíž je možné využít osové symetrie.

Osová symetrie (viz kapitola 2.3.4)

První krok, který usnadní výpočet je využití osové symetrie. V místě řezu bude tedy působit normálová síla N_A a ohybové momenty M_{oyA} a M_{ozA}. Částečné uvolnění je znázorněno v následujícím obrázku (obr. 24).



obr. 24: Částečné uvolnění a myšlené řezy VVÚ lomeného prutu

Deformační podmínky

V bodě A nenastane posuv v ose x, a také nenastane natočení střednice okolo osy y ani okolo osy z. Toto prutové těleso je tedy třikrát staticky neurčité, tudíž je potřeba tří deformačních podmínek (21), (22) a (23).

$$s = \mu - \nu = 7 - 4 = 3 \tag{20}$$

kde s je stupeň statické neurčitosti
µ je počet neznámých parametrů (N_A, M_{oyA}, M_{ozA}, T_{xB}, T_{zB}, M_{oyB}, M_{ozB})[1]
ν je počet použitelných podmínek (F_x, F_z, M_{oz}, M_{oy})

Deformační podmínky (DP):

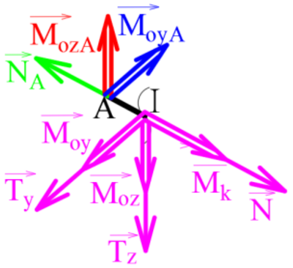
$$u_{Ax} = 0 \tag{21}$$

$$\varphi_{Ay} = 0 \tag{22}$$

$$\varphi_{Az} = 0 \tag{23}$$

Rovnice výsledných vnitřních účinků (VVÚ)

Na obr. 24 jsou vyznačeny myšlené řezy (I, II a III), které určují jednotlivé intervaly složek VVÚ. Souřadný systém VVÚ byl zvolen tak, aby co nejméně složek vycházelo záporných. Pro každou část jsou vypsány nenulové rovnice VVÚ, přičemž velikost ohybových momentů (25), (26), (29), (30), (34) a (35) závisí na velikosti parametru x_i.



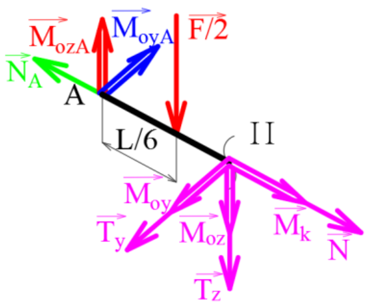
obr. 25: Interval I

I: $x_1 = \left(0;\, \frac{L}{6}\right)$

$$N_1 = N_A \tag{24}$$

$$M_{oy1} = M_{oyA} \tag{25}$$

$$M_{oz1} = M_{ozA} \tag{26}$$



obr. 26: Interval II

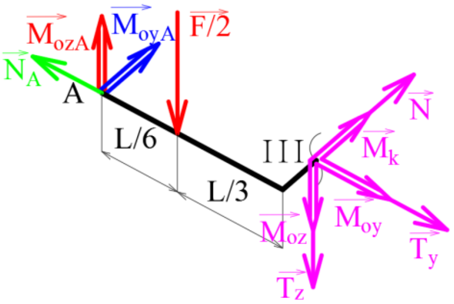
II: $x_2 = \left(0;\, \frac{L}{3}\right)$

$$N_2 = N_A \tag{27}$$

$$T_{z2} = -F/2 \tag{28}$$

$$M_{oy2} = M_{oyA} - \frac{F}{2} \cdot x_2 \tag{29}$$

$$M_{oz2} = M_{ozA} \tag{30}$$



obr. 27: Interval III

III: $x_3 = (0;\, l)$

$$T_{y3} = N_A \tag{31}$$

$$T_{z3} = -F/2 \tag{32}$$

$$M_{k3} = -\,M_{oyA} + \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{3} \tag{33}$$

$$M_{oyI} = -(F/2) \cdot x_3 \tag{34}$$

$$M_{ozI} = M_{ozA} - N \cdot x_3 \tag{35}$$

[1] Síly T_{xB}, T_{zB} a momenty M_{oyB}, M_{ozB} nejsou na obr. 24 zobrazeny, ale působí ve vetknutí.

Castiglianova věta (viz kapitola 2.2.3)

K řešení byla použita Maxwell – Mohrova varianta Castiglianovy věty, díky které lze deformační podmínku (21) vyjádřit následujícím způsobem:

$$u_{Ax} = \frac{\partial W_A}{\partial N_A} = \int_0^{L/6} \frac{N_1}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_A}\, dx_1 + \int_0^{L/3} \frac{N_2}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N_A}\, dx_2 + \\ + \int_0^{l} \frac{\beta T_{y3}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{y3}}{\partial N_A}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{oz3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz3}}{\partial N_A}\, \mathrm{dx}_3 = 0 \tag{36}$$

Výsledky parciálních derivací, které z rovnice (36) jsou vyjádřeny rovnicemi (37) a (38):

$$\frac{\partial N_1}{\partial N_A} = \frac{\partial N_2}{\partial N_A} = \frac{\partial T_{y3}}{\partial N_A} = 1 \tag{37}$$

$$\frac{\partial M_{oz3}}{\partial N_A} = -x_3 \tag{38}$$

Obdobně lze zbylé dvě deformační podmínky (22) a (23) vyjádřit jako funkci silových účinků odvozením Castiglianovy věty:

Deformační podmínka (22):

$$\varphi_{Ay} = \frac{\partial W_A}{\partial M_{oyA}} = \int_0^{L/6} \frac{M_{oy1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy1}}{\partial M_{oyA}}\, \mathrm{dx}_1 + \int_0^{L/3} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial M_{oyA}}\, dx_2 + \\ + \int_0^{l} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k3}}{\partial M_{oyA}}\, \mathrm{dx}_3 = 0 \tag{39}$$

Parciální derivace z rovnice (39) jsou vyjádřeny rovnicemi (40) a (41):

$$\frac{\partial M_{oy1}}{\partial M_{oyA}} = \frac{\partial M_{oy2}}{\partial M_{oyA}} = 1 \tag{40}$$

$$\frac{\partial M_{k3}}{\partial M_{oyA}} = -1 \tag{41}$$

Deformační podmínka (23):

$$\varphi_{Ay} = \frac{\partial W_A}{\partial M_{ozA}} = \int_0^{L/6} \frac{M_{oz1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz1}}{\partial M_{ozA}}\, \mathrm{dx}_1 + \int_0^{L/3} \frac{M_{oz2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz2}}{\partial M_{ozA}}\, d\mathrm{x}_2 + \\ + \int_0^{l} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k3}}{\partial M_{ozA}}\, d\mathrm{x}_3 = 0 \tag{42}$$

Parciální derivace z rovnice (42) jsou vyjádřeny rovnicí (43):

$$\frac{\partial M_{oz1}}{\partial M_{ozA}} = \frac{\partial M_{oz2}}{\partial M_{ozA}} = \frac{\partial M_{oz3}}{\partial M_{ozA}} = 1 \tag{43}$$

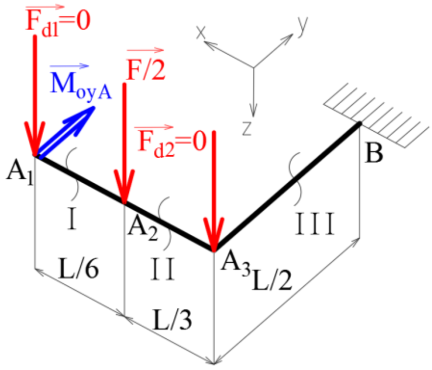
Dosazením vyčíslených parciálních derivací do příslušných rovnic, byla následně sestavena soustava tří rovnic (36), (39) a (42) o třech neznámých (N_A, M_{oyA}, M_{ozA}), které byly zavedeny z důvodu symetrie. Vyřešením[2] soustavy rovnic jsou získány hledané neznámé silové parametry, které jsou shrnuty v tab. 4.

tab. 4: Hodnoty parametrů získané výpočtem pro model 1

Silový parametr	Číselná hodnota
N_A	0 [N]
M_{oyA}	76 098 [N·mm]
M_{ozA}	0 [N·mm]

Deformace

Po vyčíslení neznámých silových parametrů, je možné dopočítat velikost posuvů. Posuvy jsou řešeny ve třech bodech prutu (body A_1, A_2, A_3), opět použitím Castiglianovy věty. Jelikož na ose symetrie (A_1) ani v místě zlomu (A_3) nepůsobí žádná síla, jenž je zde potřeba kvůli parciální derivaci (vstupuje do Castiglianovy věty), byla zde použita doplňková síla F_d, jejíž velikost je nulová, obr. 28.



obr. 28: Znázornění doplňkových sil a silových působení na prut

Castiglianova věta pro posuv pod silou F_{d1}:

$$
\begin{aligned}
u_1 = \frac{\partial W}{\partial F_{d1}} = \int_0^{L/6} \frac{\beta T_{z1}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{z1}}{\partial F_{d1}}\, dx_1 + \int_0^{L/6} \frac{M_{oy1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy1}}{\partial F_{d1}}\, dx_1 + \\
+ \int_0^{L/3} \frac{\beta T_{z2}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{z2}}{\partial F_{d1}}\, dx_2 + \int_0^{L/3} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial F_{d1}}\, dx_2 + \\
+ \int_0^{l} \frac{\beta T_{z3}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{z3}}{\partial F_{d1}}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k3}}{\partial F_{d1}}\, dx_3 + \\
+ \int_0^{l} \frac{M_{oy3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy3}}{\partial F_{d1}}\, dx_3
\end{aligned}
\tag{44}
$$

[2] Vyřešeno pomocí programu MAPLE 2015. Soubory MAPLE se nachází na CD, které je součást přílohy.

Castiglianova věta pro posuv pod silou F/2:

$$u_2 = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial F/2} = \int_0^{\mathrm{L}/3} \frac{\beta T_{z2}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{z2}}{\partial F/2}\, dx_2 + \int_0^{L/3} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial F/2}\, d\mathrm{x}_2 + \\ + \int_0^{l} \frac{\beta T_{z3}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{z3}}{\partial F/2}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k3}}{\partial F/2}\, d\mathrm{x}_3 + \\ + \int_0^{l} \frac{M_{oy3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy3}}{\partial F/2}\, d\mathrm{x}_3 \tag{45}$$

Castiglianova věta pro posuv pod silou F_{d2}:

$$u_3 = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial F_{d1}} = \int_0^{l} \frac{\beta T_{z3}}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_{z3}}{\partial F_{d1}}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{oy3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy3}}{\partial F_{d1}}\, d\mathrm{x}_3 \tag{46}$$

Následnou integrací a dosazením[3] všech číselných hodnot vyšly hodnoty posuvů, které jsou uvedeny v tab. 5.

tab. 5: Posuvy v bodech A_1, A_2 a A_3 (obr. 28).

Posuv	Číselná hodnota posuvu
u_1	0,49 [mm]
u_2	0,47 [mm]
u_3	0,29 [mm]

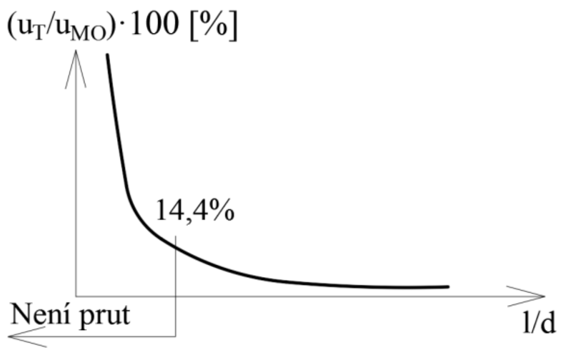
Posuv ve směru osy z vyjádřený číselně a procentuálně pro bod A_1:

tab. 6: Číselné a procentuální vyjádření posuvu

	M_o	N	T	M_k
u_1 [mm]	0,224	0	0,003	0,264
u_1 [%]	54,3	0	0,6	45,1

Z tab. 6 plyne, že posouvající síla T, má na posuv velmi malý vliv, tudíž ji v dalších výpočtech budeme zanedbávat, obr. 29.

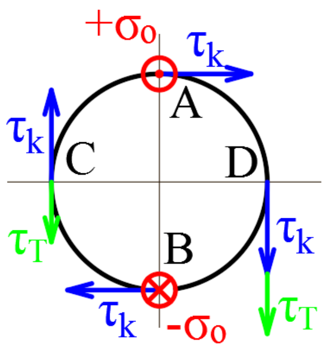
[3] Řešeno v programu MAPLE 2015, viz příloha na CD.



obr. 29: Vliv posouvající síly T na celkový posuv [4]

Výpočet napětí

Závěrem bylo z dosažených hodnot dopočítat redukované napětí podle podmínky HMH (50), do kterého vstupuje ohybové napětí (47) od ohybového momentu a smykové napětí od krouticího momentu (48) a posouvající síly (48)(49). Toto napětí je počítáno právě ve vetknutí, protože zde dosahuje největší hodnoty.



obr. 30: Znázornění průběhu napětí ve vetknutí

$$\sigma_o = \left|\frac{M_{oy3}}{W_o}\right| = 99 \text{ [MPa]} \tag{47}$$

$$\tau_k = \left|\frac{M_{k3}}{W_k}\right| = 11 \text{ [MPa]} \tag{48}$$

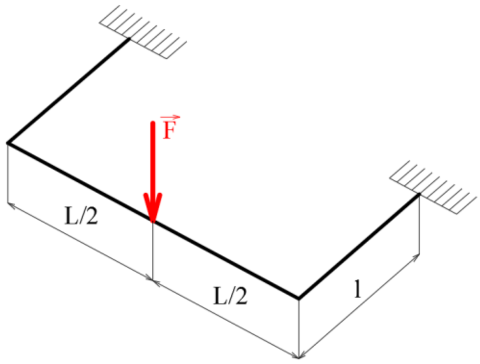
$$\tau_T = \left|\frac{4(F/2)}{3S}\right| = 2{,}7 \text{ [MPa]} \tag{49}$$

$$\sigma_{redHMH(A,B)} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3\cdot\tau_k^2} = 101 \text{ [MPa]} \tag{50}$$

Průběh napětí v místě vetknutí je znázorněn na obr. 30. Největší hodnota redukovaného napětí bude v bodech A a B.

3.1.2 Výpočtový model 2

Druhý výpočtový model zobrazuje stoj na jedné noze uprostřed (na ose symetrie) lezecké příčky.

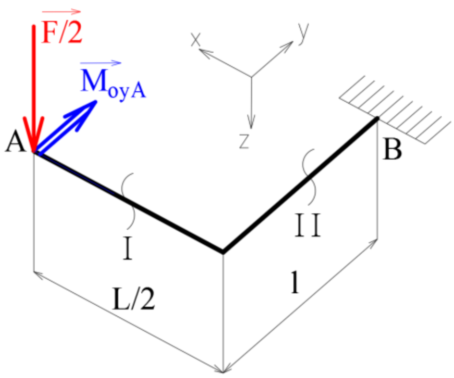


obr. 31: Výpočtový model 2

Rošt je zatížen jednou silou, která leží na ose symetrie, tudíž je opět možné využít osové symetrie.

Osová symetrie (viz kapitola 2.3.4)

Díky této teorii je prut rozdělen na dvě části, přičemž je třeba uvažovat, že v místě řezu působí síla, kterou je nutno také rozdělit. V místě řezu je tedy uvažována normálová síla N_A a ohybové momenty M_{oyA} a M_{ozA}, přičemž je patrné, že právě normálová síla N_A a ohybový moment M_{ozA} vyjdou nulové, proto je můžeme zanedbat (viz Výpočtový model, kap 3.1).



obr. 32: Částečné uvolnění a myšlené řezy VVÚ

Deformační podmínky

Prutové těleso, které je zobrazeno na obr. 32, je jedenkrát staticky neurčité (51). V bodě A, který leží na ose symetrie, nenastane natočení střednice prutu kolem osy y a díky tomu je možné předepsat deformační podmínku (52) pro toto místo.

$$s = \mu - \nu = 3 - 2 = 1 \tag{51}$$

kde s je stupeň statické neurčitosti
μ je počet neznámých parametrů (T_{zB}, M_{oyA}, M_{oyB})[4]
ν je počet použitelných podmínek (F_z, M_{oy})

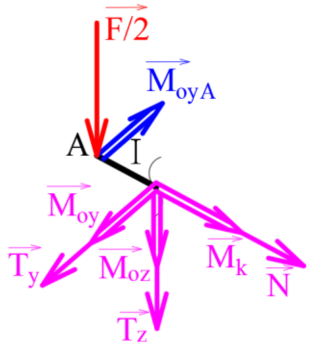
DP:

$$\varphi_{Ay} = 0 \tag{52}$$

[4] Moment M_{oyB} působí ve vetknutí.

Rovnice VVÚ

V obr. 32 jsou vyznačeny řezy (I, II), které určují jednotlivé části prutu a zvoleny složky VVÚ, podle kterých jsou sestaveny rovnice (53) – (57), které jsou sestaveny pouze pro složky, jejichž hodnota není rovna nule. Parametr x_i závisí na délce střednice.

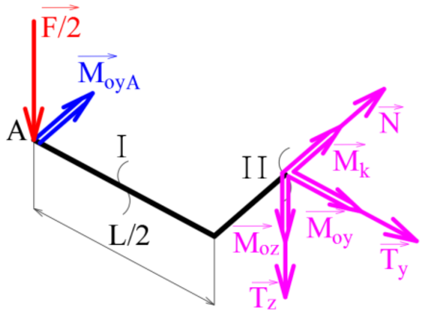


obr. 33: Interval I

I: $x_1 = \left(0;\ \frac{L}{2}\right)$

$$T_{z1} = -\frac{F}{2} \tag{53}$$

$$M_{oy1} = M_{oyA} - \frac{F}{2} \cdot x_1 \tag{54}$$



obr. 34: Interval II

II: $x_2 = (0;\ l)$

$$T_{z2} = -\frac{F}{2} \tag{55}$$

$$M_{k2} = -M_{oyA} + \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} \tag{56}$$

$$M_{oyI} = -\frac{F}{2} \cdot x_2 \tag{57}$$

Castiglianova věta (viz kapitola 2.2.3)

Stejně jako u výpočtového modelu 1 (kap. 3.1), je využito Maxwell – Mohrovy varianty Castiglianovy věty.

$$\varphi_{Ay} = \frac{\partial W_A}{\partial M_{oyA}} = \int_0^{L/2} \frac{M_{oy1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy1}}{\partial M_{oyA}}\, d\mathrm{x}_1 + \int_0^{l} \frac{M_{k2}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k2}}{\partial M_{oyA}}\, d\mathrm{x}_2 = 0 \tag{58}$$

Parciální derivace v rovnici (58):

$$\frac{\partial M_{oy1}}{\partial M_{oyA}} = 1 \tag{59}$$

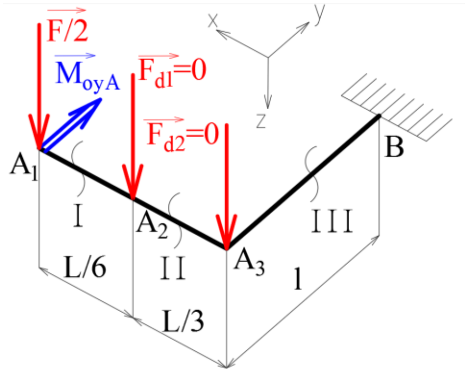
$$\frac{\partial M_{k2}}{\partial M_{oyA}} = -1 \tag{60}$$

Dosazením rovnic (59) a (60) do rovnice (58) a následným vyřešením rovnice, je získán hledaný ohybový moment M_{oyA}:

$$M_{oyA} = 126\ 485\ [\mathrm{N/mm}] \tag{61}$$

Deformace

Jelikož jsou všechny silové parametry působící na ose symetrie známy, je možné řešit průhyb. Nejdříve je nutno v místech, kde je určován průhyb, zavést doplňkovou sílu F_{di}, obr. 35, která je zde nezbytná z důvodu parciální derivace. Následně je pro určení velikosti posuvu opět použita Castiglianova věta.



obr. 35: Znázornění doplňkových sil a silových působení na prut.

Castiglianova věta pro průhyb v bodě A_1 (pod silou $F/2$):

$$u_1 = \frac{\partial W}{\partial F/2} = \int_0^{L/2} \frac{M_{oy1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy1}}{\partial F/2}\, dx_1 + \int_0^{l} \frac{M_{k2}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k2}}{\partial F/2}\, dx_2 + \int_0^{l} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial F/2}\, dx_2 \tag{62}$$

Castiglianova věta pro průhyb v bodě A_2 (pod silou F_{d1}):

$$u_2 = \frac{\partial W}{\partial F_{d1}} = \int_0^{L/4} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial F_{d1}}\, dx_2 + \int_0^{l} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k3}}{\partial F_{d1}}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{oy3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy3}}{\partial F_{d1}}\, dx_3 \tag{63}$$

Castiglianova věta pro průhyb v bodě A_3 (pod silou F_{d2}):

$$u_3 = \frac{\partial W}{\partial F_{d2}} = \int_0^{l} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial F_{d2}}\, dx_2 \tag{64}$$

Dosazením do jednotlivých rovnic a následnou integrací[5] byly získány výsledné posuvy v bodech A_1, A_2, A_3, jejichž hodnoty jsou uvedeny v tab. 7.

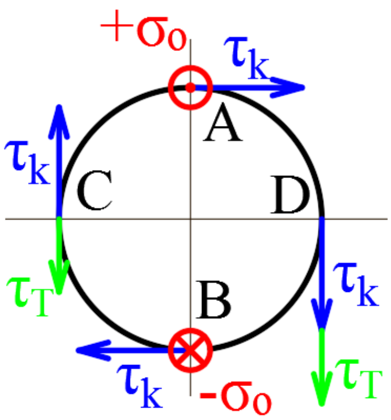
[5] Řešeno v programu MAPLE 2015. Dokument s podrobným řešením se nachází v příloze na CD.

tab. 7: Výsledné posuvy v bodech A_1, A_2 a A_3 (obr. 35).

Posuv	Číselná hodnota posuvu
u_1	0,53 [mm]
u_2	0,45 [mm]
u_3	0,29 [mm]

Výpočet napětí

Závěrem bylo ze získaných hodnot vypočítáno redukované napětí podle podmínky HMH, do kterého vstupuje ohybové napětí a smykové napětí od krouticího momentu a posouvající.



obr. 36: Znázornění průběhu napětí v místě vetknutí

$$\sigma_o = \left|\frac{M_{oy2}}{W_o}\right| = 100 \text{ [MPa]} \tag{65}$$

$$\tau_k = \left|\frac{M_{k2}}{W_k}\right| = 11 \text{ [MPa]} \tag{66}$$

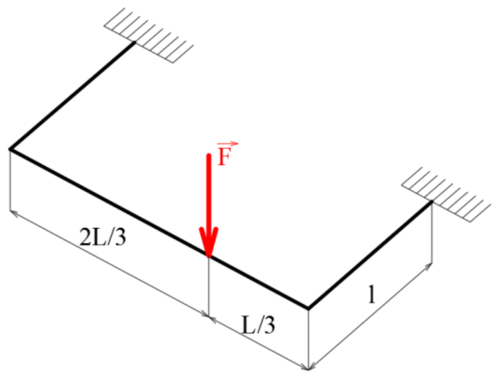
$$\tau_T = \left|\frac{4(F/2)}{3S}\right| = 2{,}7 \text{ [MPa]} \tag{67}$$

$$\sigma_{redHMH(A,B)} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3 \cdot \tau_k^2} = 101 \text{ [MPa]} \tag{68}$$

Redukované napětí dosáhlo svého maxima v bodech A a B, jehož hodnota je vyčíslena, rov. (68).

3.1.3 Výpočtový model 3

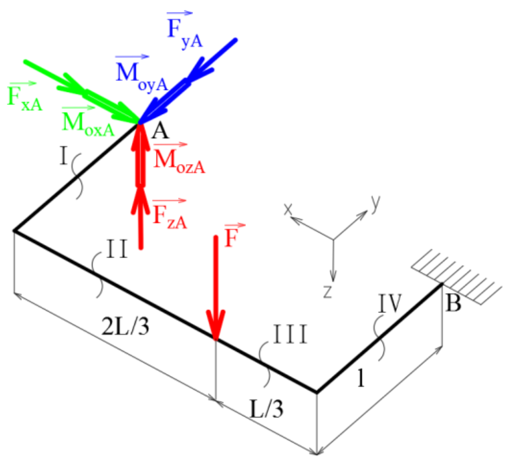
Jedná se model, který zobrazuje stoj na jedné noze, přičemž osoba stojí mimo osu symetrie.



obr. 37: Výpočtový model pro stoj na jedné noze, mimo osu symetrie.

Tento rošt, je zatížen jednou silou, které se nachází mimo osu symetrie, což značně zkomplikuje samotný výpočet.

Částečné uvolnění



obr. 38: Znázornění částečného uvolnění a řezů VVÚ

Deformační podmínky

V místě vetknutí A nedochází k posuvu ve směru žádné osy, ani k rotaci okolo těchto os. Toto prutové těleso je šestkrát staticky neurčité (69), tudíž je potřeba šest DP (70) – (75).

$$s = \mu - \nu = 12 - 6 = 6 \tag{69}$$

kde s je stupeň statické neurčitosti
μ je počet neznámých parametrů (F_{xA}, F_{yA}, F_{zA}, M_{oxA}, M_{oyA}, M_{ozA}, F_{xB}, F_{yB}, F_{zB}, M_{oxB}, M_{oyB}, M_{ozB})[6]
ν je počet použitelných podmínek (F_x, F_y, F_z, M_{ox}, M_{oy}, M_{oz})

Deformační podmínky:

$$u_{Ax} = 0 \tag{70}$$

$$u_{Ay} = 0 \tag{71}$$

$$u_{Az} = 0 \tag{72}$$

[6] Síly F_{xB}, F_{yB} a F_{zB} a momenty M_{oxB}, M_{oyB}, M_{ozB} působí ve vetknutí B, nejsou zakresleny na obr. 38.

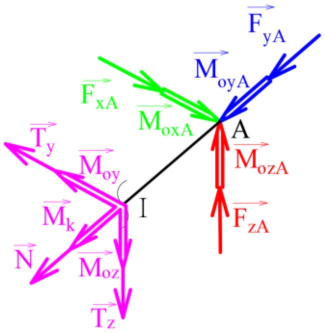
$$\varphi_{Ax} = 0 \tag{73}$$

$$\varphi_{Ay} = 0 \tag{74}$$

$$\varphi_{Az} = 0 \tag{75}$$

Rovnice VVÚ

V obr. 38 jsou znázorněny myšlené řezy (I-IV), které určují jednotlivé úseky prutu. Pro každý interval jsou vypsány rovnice VVÚ, přičemž rovnice momentových působení závisí na délkovém parametru x_i.



obr. 39: Interval I

I: $x_1 = (0;\ l)$

$$N_1 = -F_{yA} \tag{76}$$

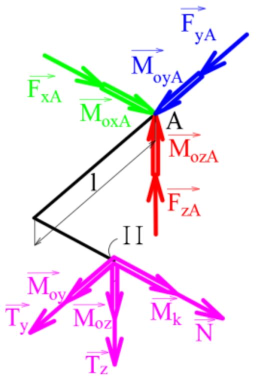
$$T_{y1} = F_{xA} \tag{77}$$

$$T_{z1} = F_{zA} \tag{78}$$

$$M_{k1} = -M_{oyA} \tag{79}$$

$$M_{oy1} = M_{oxA} + F_{zA} \cdot x_1 \tag{80}$$

$$M_{oz1} = M_{ozA} + F_{xA} \cdot x_1 \tag{81}$$



obr. 40: Interval II

II: $x_2 = \left(0;\ \frac{2L}{3}\right)$

$$N_2 = -F_{xA} \tag{82}$$

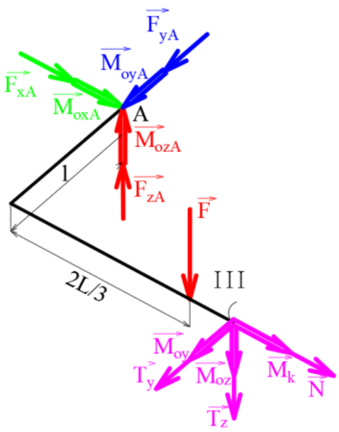
$$T_{y2} = -F_{yA} \tag{83}$$

$$T_{z2} = F_{zA} \tag{84}$$

$$M_{k2} = -M_{oxA} - F_{zA} \cdot l \tag{85}$$

$$M_{oy2} = -M_{oyA} + F_{zA} \cdot x_2 \tag{86}$$

$$M_{oz2} = M_{ozA} - F_{xA} \cdot l + F_{yA} \cdot x_2 \tag{87}$$



obr. 41: Interval III

III: $x_3 = \left(0;\ \frac{L}{3}\right)$

$$N_3 = -F_{xA} \tag{88}$$

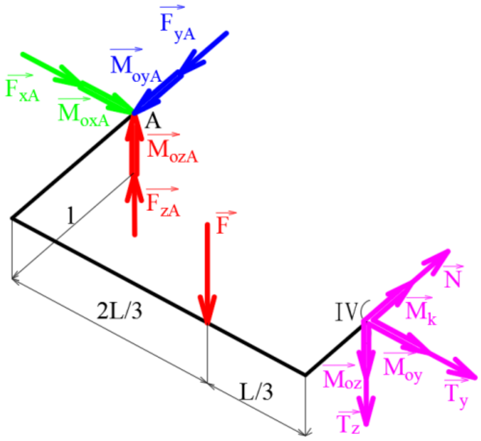
$$T_{y3} = -F_{yA} \tag{89}$$

$$T_{z3} = F_{zA} - F \tag{90}$$

$$M_{k3} = -M_{oxA} - F_{zA} \cdot l \tag{91}$$

$$M_{oy2} = -M_{oyA} + F_{zA} \cdot \\ \cdot (2L/3\ +\ x_3) - F\ \cdot x_3 \tag{92}$$

$$M_{oz2} = M_{ozA} - F_{xA} \cdot l + F_{yA} \cdot \\ \cdot (2L/3\ +\ x_3) \tag{93}$$



obr. 42: Interval IV

IV: $x_4 = (0;\ l)$

$$N_4 = F_{yA} \tag{94}$$

$$T_{y4} = -F_{xA} \tag{95}$$

$$T_{z4} = F_{zA} - F \tag{96}$$

$$M_{k4} = M_{oyA} - F_{zA} \cdot L + F \cdot \frac{L}{3} \tag{97}$$

$$M_{oy4} = -M_{oxA} + F_{zA} \cdot (l - x_4) - F \cdot x_4 \tag{98}$$

$$M_{oz4} = M_{ozA} - F_{xA} \cdot (l - x_4) + F_{yA} \cdot L \tag{99}$$

Castiglianova věta (kapitola 3.2.3)

K řešení byla použita Maxwell – Mohrova varianta Castiglianovy věty, stejně jako u předchozích dvou výpočtových modelů, jen se změnily deformační podmínky, viz rov. (70) - (75).

$$u_{Ax} = \frac{\partial W_A}{\partial F_{xA}} = \int_0^{l} \frac{M_{oz1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial 1}{\partial F_{xA}}\, dx_1 + \int_0^{2L/3} \frac{M_{oz2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz2}}{\partial F_{xA}}\, dx_2 + \int_0^{L/3} \frac{M_{oz3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz3}}{\partial F_{xA}}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{oz4}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz4}}{\partial F_{xA}}\, dx_4 = 0 \tag{100}$$

$$\varphi_{Ax} = \frac{\partial W_A}{\partial M_{oxA}} = \int_0^{l} \frac{M_{oy1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy1}}{\partial M_{oxA}}\, dx_1 + \int_0^{2L/3} \frac{M_{k2}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k2}}{\partial M_{oxA}}\, dx_2 + \int_0^{L/3} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k2}}{\partial M_{oxA}}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{oy4}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy4}}{\partial M_{oxA}}\, dx_4 = 0 \tag{101}$$

$$u_{Ay} = \frac{\partial W_A}{\partial F_{yA}} = \int_0^{2L/3} \frac{M_{oz2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz2}}{\partial F_{yA}}\, dx_2 + \int_0^{L/3} \frac{M_{oz3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz3}}{\partial F_{yA}}\, dx_3 + \int_0^{l} \frac{M_{oz4}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz4}}{\partial F_{yA}}\, dx_4 = 0 \tag{102}$$

$$\varphi_{Ay} = \frac{\partial W_A}{\partial M_{oyA}} = \int_0^l \frac{M_{k1}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k1}}{\partial M_{oyA}}\, dx_1 + \int_0^{2L/3} \frac{M_{oy2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy2}}{\partial M_{oyA}}\, dx_2 + \\ + \int_0^{L/3} \frac{M_{oy3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy3}}{\partial M_{oyA}}\, dx_3 + \int_0^l \frac{M_{k4}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k4}}{\partial M_{oyA}}\, dx_4 = 0 \tag{103}$$

$$u_{Az} = \frac{\partial W_A}{\partial F_{zA}} = \int_0^l \frac{M_{oz1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz1}}{\partial F_{zA}}\, dx_1 + \int_0^{2L/3} \frac{M_{k2}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k2}}{\partial F_{zA}}\, dx_2 + \\ + \int_0^{2L/3} \frac{M_{oz2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz2}}{\partial F_{zA}}\, dx_2 + \int_0^{L/3} \frac{M_{k3}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k3}}{\partial F_{zA}}\, dx_3 + \\ + \int_0^{L/3} \frac{M_{oz3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz3}}{\partial F_{zA}}\, dx_3 + \int_0^l \frac{M_{k4}}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_{k4}}{\partial F_{zA}}\, dx_4 + \\ + \int_0^l \frac{M_{oz4}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz4}}{\partial F_{zA}}\, dx_4 = 0 \tag{104}$$

$$\varphi_{Az} = \frac{\partial W_A}{\partial M_{ozA}} = \int_0^l \frac{M_{oz1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz1}}{\partial M_{ozA}}\, dx_1 + \int_0^{2L/3} \frac{M_{oz2}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz2}}{\partial M_{ozA}}\, dx_2 + \\ + \int_0^{L/3} \frac{M_{oz3}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz3}}{\partial M_{ozA}}\, dx_3 + \int_0^l \frac{M_{oz4}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oz4}}{\partial M_{ozA}}\, dx_4 = 0 \tag{105}$$

Soustava rovnic (100) až (105), která má 6 neznámých, byla vyřešena[7], čímž byly získány hledané neznámé silové parametry působící ve vetknutí A, tab. 8.

tab. 8: Hledané silové parametry

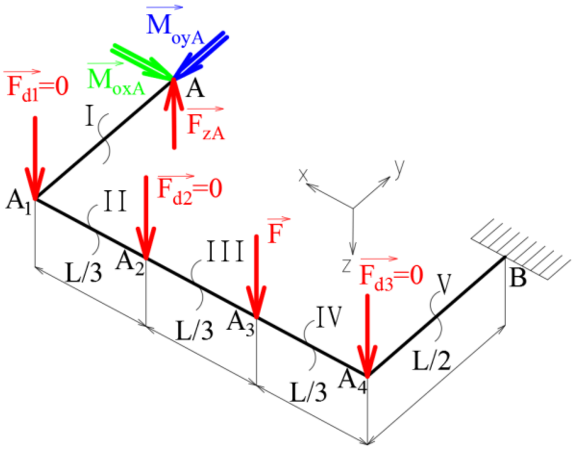
Silový parametr	Číselná hodnota
F_{xA}	0 [N]
F_{yA}	0 [N]
F_{zA}	674 [N]
M_{oxA}	-112 731 [N·mm]
M_{oyA}	34 037 [N·mm]
M_{ozA}	0 [N·mm]

[7] Vyřešeno v programu MAPLE v příloze na CD, včetně parciálních derivací rovnic (99) - (104).

Deformace

Jelikož už jsou všechny silové parametry, vstupující do Castiglianovy věty určeny, je možné zjistit posuvy. Nejprve je však třeba výpočtový model doplnit o doplňkové síly F_{di}, protože jinak by posuv v daném místě nešel určit.

Pro určení posuvů je opět použita Castiglianova věta. Dosazením všech vstupních parametrů do rovnic Castiglianovy věty jsou vypočítány následující průhyby, v bodech A_1, A_2, A_3 a A_4, obr. 43. Z důvodu obsáhlosti je podrobné řešení v příloze na CD.



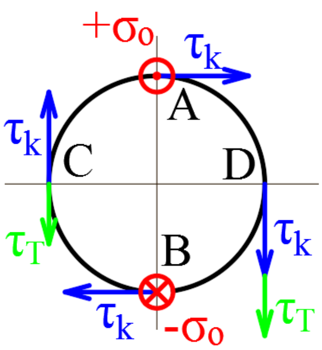
obr. 43: Znázornění doplňkových sil a silových působení na prut.

tab. 9: Hodnoty výsledných posuvů v bodech $A_{1\text{-}4}$ (obr. 43):

Posuv	Číselná hodnota posuvu
u_1	0,23 [mm]
u_2	0,46 [mm]
u_3	0,61 [mm]
u_4	0.36 [mm]

Výpočet napětí

Podle podmínky HMH byla určena velikost redukovaného napětí, které maximální vychází ve vetknutí B, obr. 43:



obr. 44: Působení napětí v místě vetknutí

Největší napětí působí v bodech A a B obr. 44.

$$\sigma_o = \left|\frac{M_{oy4}}{W_o}\right| = 125 \text{ [MPa]} \tag{106}$$

$$\tau_k = \left|\frac{M_{k4}}{W_k}\right| = 10 \text{ [MPa]} \tag{107}$$

$$\tau_T = \left|\frac{4(F - F_z)}{3S}\right| = 3{,}6 \text{ [MPa]} \tag{108}$$

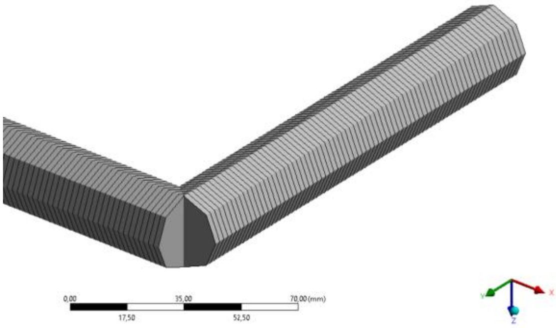
$$\sigma_{redHMH(A,B)} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3 \cdot \tau_k^2} = 126 \text{ [MPa]} \tag{109}$$

3.2 Numerický přístup

Jednotlivé druhy prvků, které jsou použity v numerickém přístupu jsou popsány v kapitole 2.5. Samotný výpočet byl proveden pomocí programu *Ansys Workbench 18,* přičemž byl zvolen prutový prvek BEAM188. Tento prvek byl zvolen z důvodu, že je vhodný pro řešení prutových konstrukcí. Pro další výpočet byl zvolen objemový prvek SOLID186. Jednotlivým prvkům byly přiřazeny odpovídající materiálové charakteristiky, geometrické rozměry a velikost zatížení.

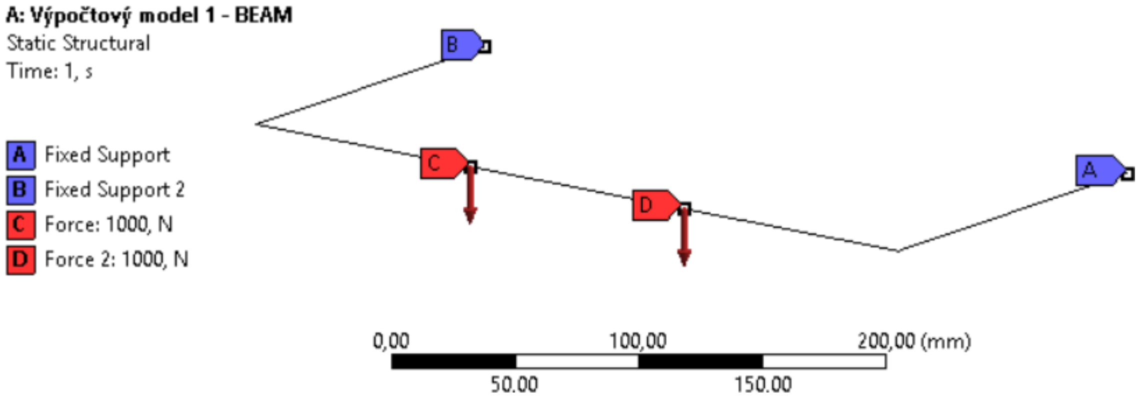
3.2.1 Řešení pomocí prvku BEAM188

Pomocí modeleru v programu ANSYS byl vytvořen výpočtový model. Nejprve byla nakreslena střednice příčky, které byl následně přiřazen průřez pomocí funkce Cross Section. Pro vytvoření sítě byla použita funkce Edge Sizing, přičemž počet jednotlivých elementů byl 317

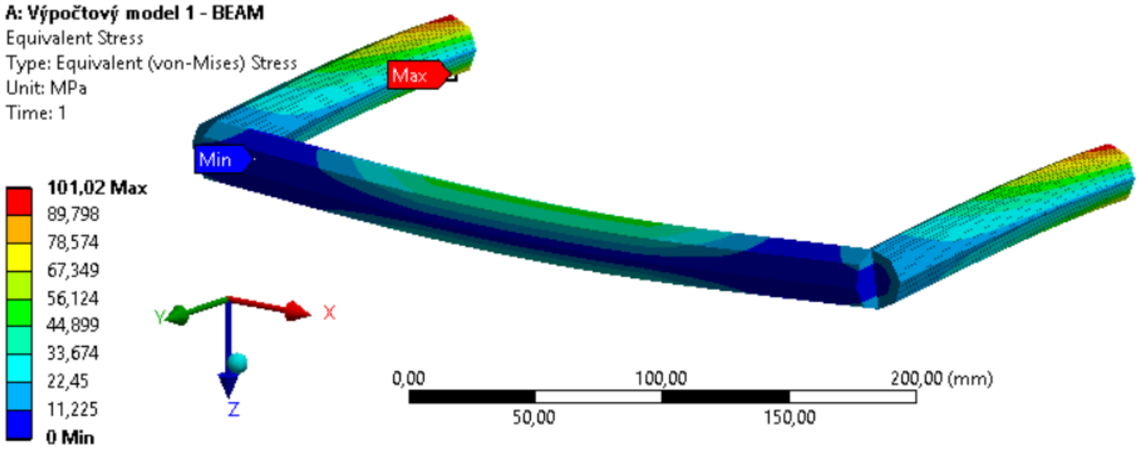


obr. 45: Vygenerovaná síť pro BEAM188

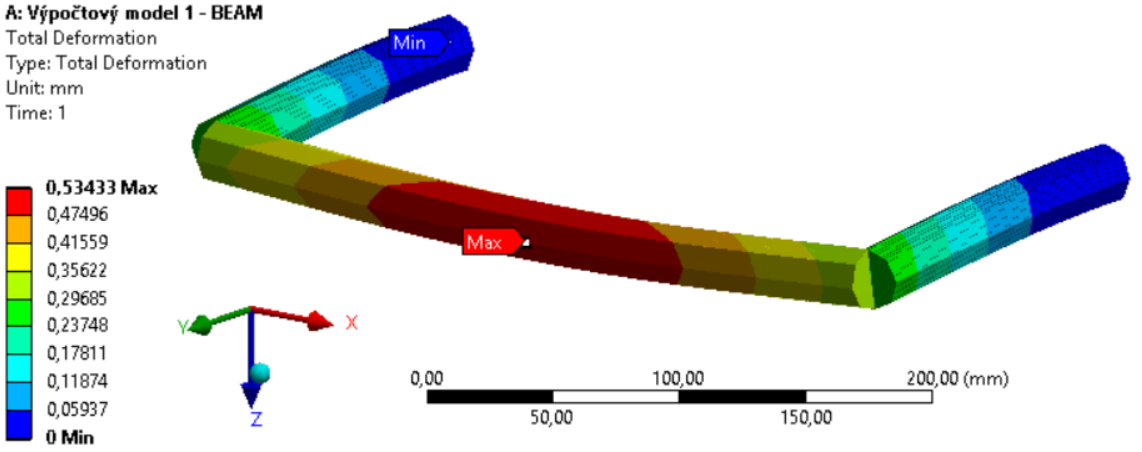
Výpočtový model 1



obr. 46: Okrajové podmínky prutu
A, B – vetknutí (zamezení rotací a posuvů ve všech směrech)
C, D – zatěžující síly

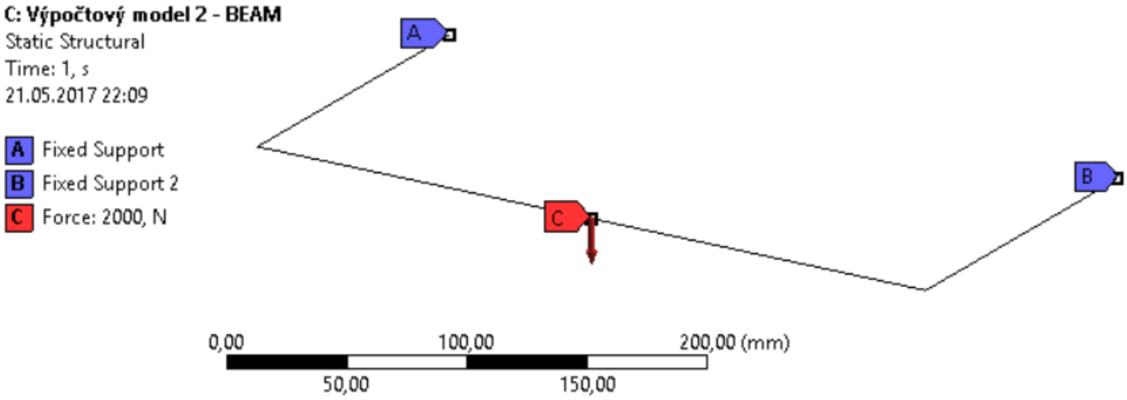


obr. 47: Průběh redukovaného napětí

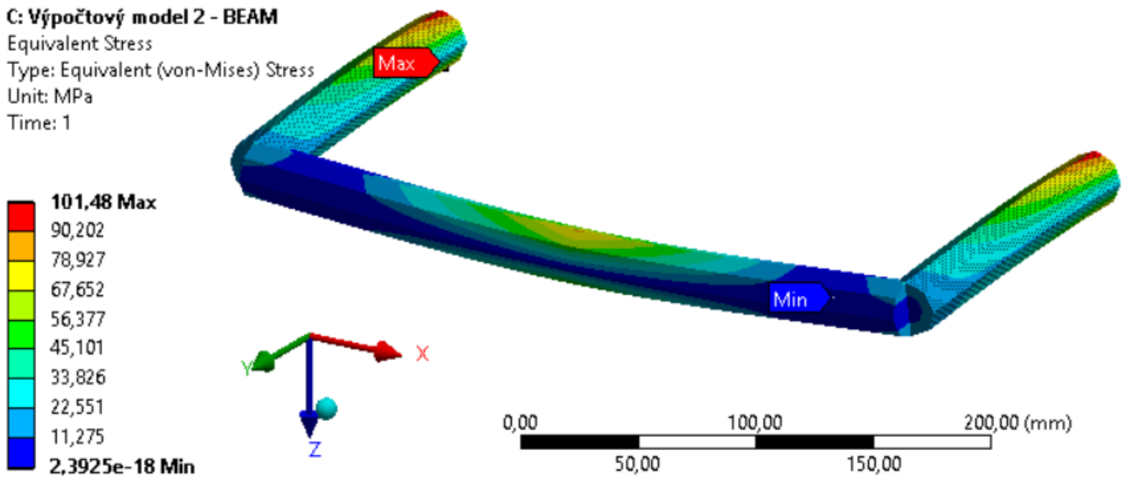


obr. 48: Znázornění deformace

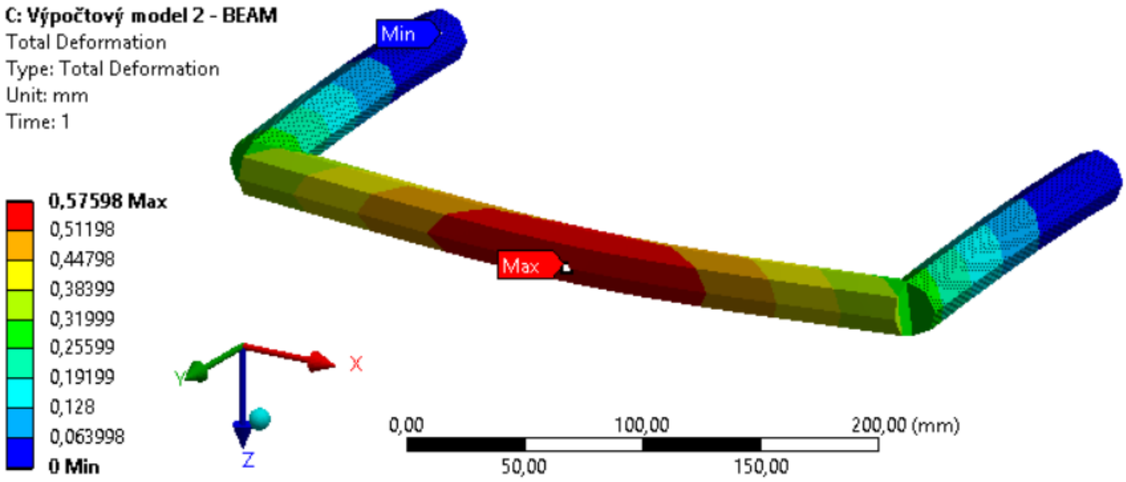
Výpočtový model 2



obr. 49: Okrajové podmínky druhého výpočtového modelu
A, B – vetknutí (zamezení rotací a posuvů ve všech směrech)
C – zatěžující síla

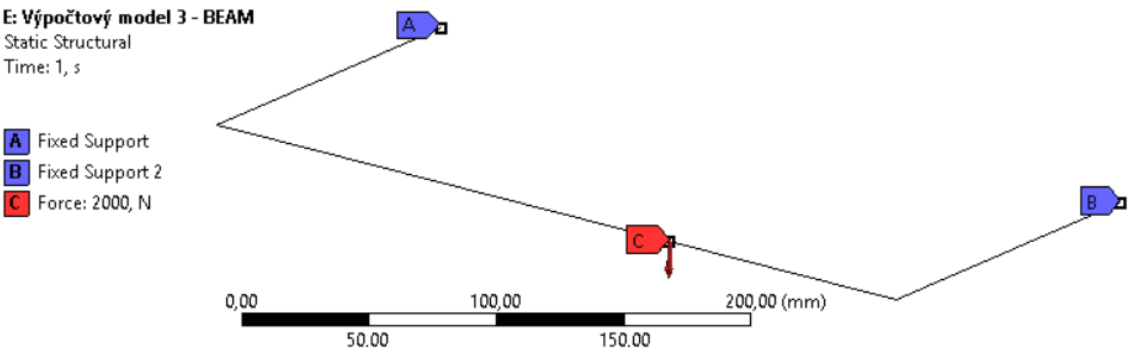


obr. 50: Průběh redukovaného napětí

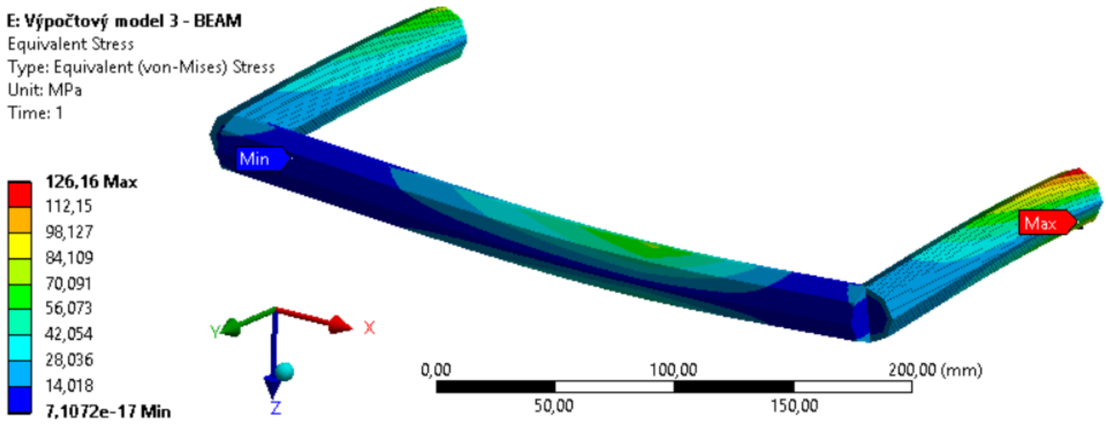


obr. 51: Znázornění deformace

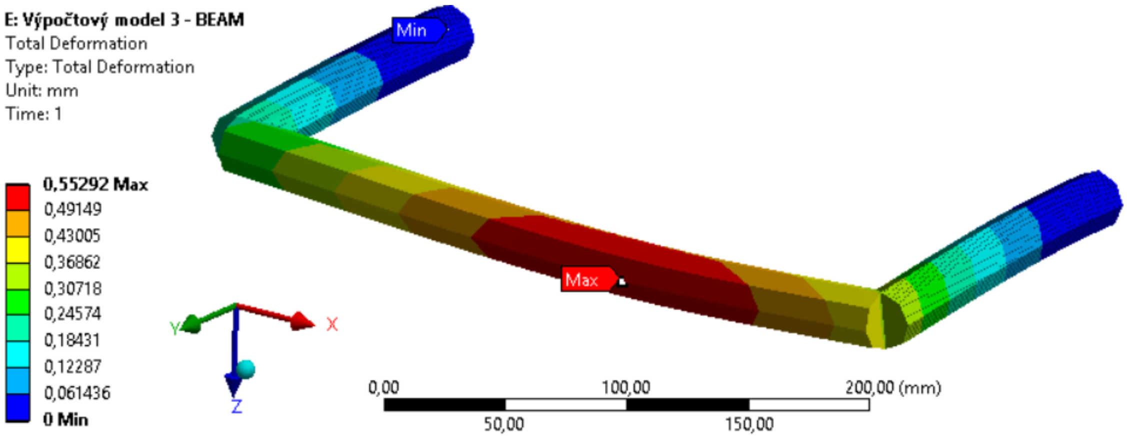
Výpočtový model 3



obr. 52: Okrajové podmínky
A, B – vetknutí (zamezení rotací a posuvů ve všech směrech)
C– zatěžující síla



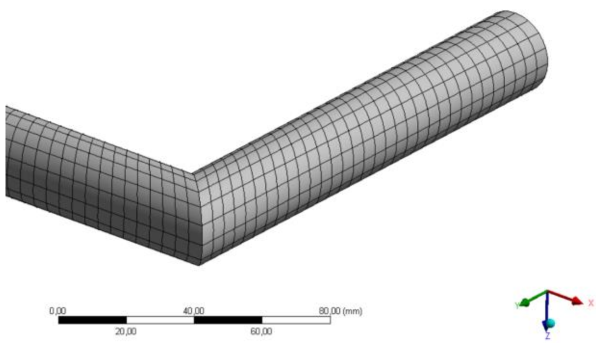
obr. 53: Průběh redukovaného napětí



obr. 54: Simulace deformace

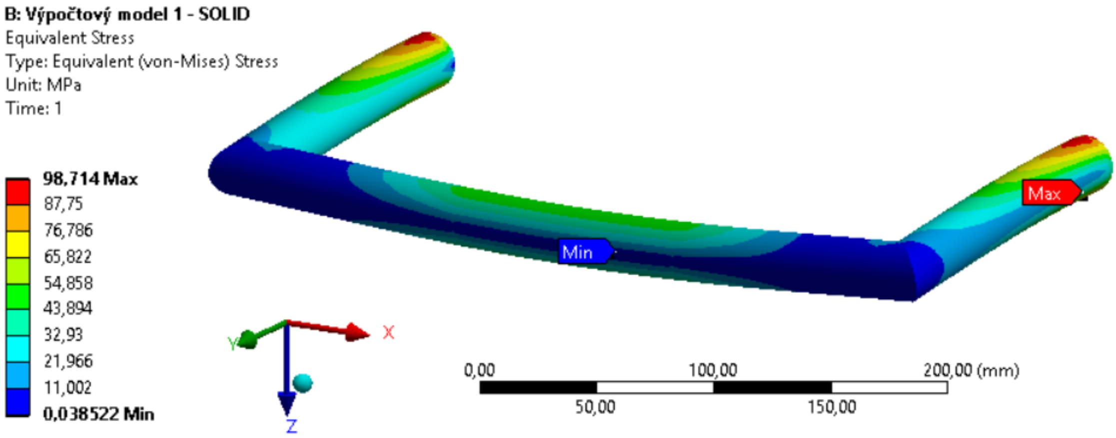
3.2.2 Řešení pomocí prvku SOLID186

Stejně jako u předchozího prvku, byl pro vytvoření výpočtového modelu použit modeler programu ANSYS. Pomocí funkce Sweep byl přiřazen geometrii cesty daný průřez. Pro vytvoření sítě byla použita funkce Body Sizing, přičemž počet jednotlivých elementů byl 4658.



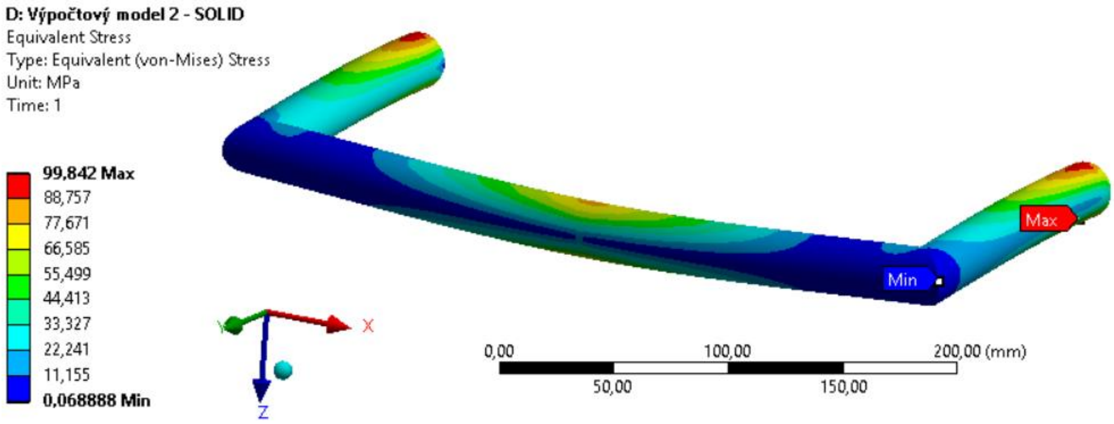
obr. 55: Síť pro prvek SOLID186

Výpočtový model 1



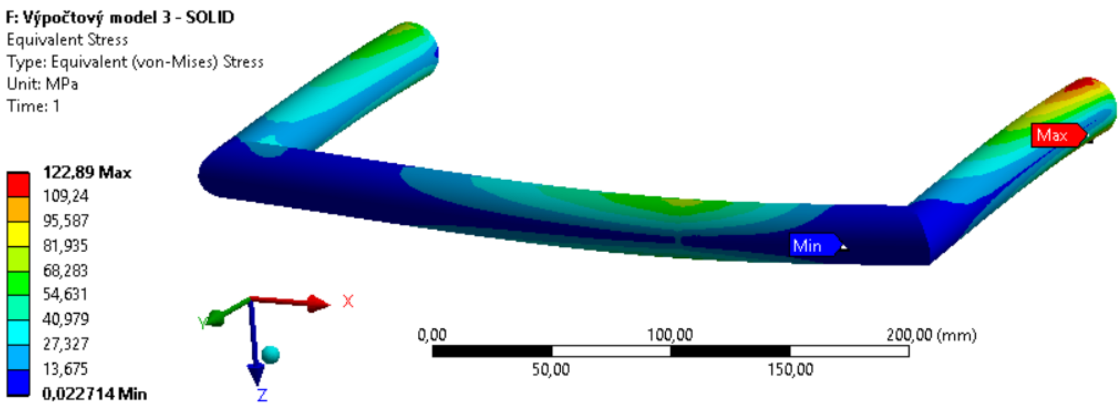
obr. 56: Redukované napětí prvního výpočtového modelu prvku SOLID186

Výpočtový model 2



obr. 57: Redukované napětí druhého výpočtového modelu prvku SOLID186

4.2.3 Výpočtový model 3



obr. 58: Redukované napětí třetího výpočtového modelu pomocí prvku SOLID186

4 DISKUZE K VÝSLEDKŮM

Cílem této bakalářské práce bylo dosažení napětí a posuvů. Právě tato kapitola se zabývá srovnáním těchto dosažených výsledků, a to z analytického přístupu (kapitola 3) a numerického řešení (kapitola 4).

Srovnání redukovaného napětí

Při řešení analytického přístupu bylo zjištěno místo, které je nejvíce namáháno ohybovým a smykovým napětím současně. V každém z výpočtových modelů se jednalo o místo vetknutí a pro toto místo bylo určeno redukované napětí.

Toto redukované napětí bylo stejně tak zjištěno pomocí numerické analýzy v programu ANSYS Workbench 18 a to pomocí prvků BEAM a SOLID.

Pro demonstraci jsou v tab. 10 vypsána redukovaná napětí jednotlivých výpočtových modelů, a to pro analytické $-\sigma_{red21}$, numerické řešení (BEAM188) $-\sigma_{red22}$ a pro numerické řešení (SOLID186) $-\sigma_{red1}$. Pro tyto hodnoty napětí jsou vypočítány odchylky Δ (110), od hodnot redukovaného napětí zjištěných pomocí prvku SOLID v program ANSYS.

$$\Delta = \frac{|\sigma_{red1} - \sigma_{red2i}|}{\sigma_{red1}} \cdot 100\ [\%] \qquad (110)$$

tab. 10: Hodnoty výsledných redukovaných napětí a jejich odchylky

	Numerický přístup (SOLID) – redukované napětí $-\sigma_{red1}$ [MPa]	Numerický přístup (BEAM) – redukované napětí $-\sigma_{red21}$ [MPa]	Odchylka – Δ [%]	Analytický přístup– redukované napětí $-\sigma_{red21}$ [MPa]	Odchylka – Δ [%]
Model 1	98,7	101,0	2,3	100,8	2,1
Model 2	99,8	101,5	1,7	101,3	1,5
Model 3	122,9	126,2	2,7	126,0	2,5

Největší hodnota odchylky Δ je 2,7 %, ale i tato hodnota je velice malá, takže ji můžeme zanedbat. Dá se tedy říci, že všechny výpočty redukovaného napětí podle podmínky HMH se téměř neliší od prvku SOLID a můžou být považovány za správné.

Největší hodnota napětí byla zjištěna pro třetí výpočtový model. Pro tento model je určen součinitel bezpečnosti, který udává minimální bezpečnost z hlediska mezního stavu plasticity.

$$k_k = \frac{R_e}{\sigma_{red}} = \frac{325}{126,2} = 2,58 \qquad (111)$$

Jelikož se bezpečnost zdaleka neblíží hodnotě 1, tím pádem nenastane mezní stav pružnosti.

Srovnání posuvů

V této bakalářské práci bylo závěrem provedeno vyhodnocení deformace tělesa analytického přístupu a numerického přístupu (BEAM prvek) vůči deformacím z numerického přístupu (SOLID prvek).

V analytickém přístupu byly ve vybraných bodech určeny velikosti posuvů. Tyto posuvy byly také určeny ve stejných bodech u numerických výpočtů provedených v programu *ANSYS Workbench 18* a to pomocí funkce Path. Odchylky posuvů od prvku SOLID v jednotlivých bodech jsou shrnuty v následujících tabulkách tab. 11, tab. 12,obr. 13.

$$\Delta = \frac{|u_{SOLID} - u|}{u_{SOLID}} \cdot 100\ [\%] \qquad (112)$$

tab. 11: Přesnost analytického výpočtu vůči numerickému pro posuvy prvního modelu

Posuv	Numerický přístup (SOLID) [mm]	Numerický přístup (BEAM) [mm]	Odchylka – Δ [%]	Analytický přístup [mm]	Odchylka – Δ [%]
u_1	0,53	0,53	0	0,49	7,6
u_2	0,46	0,51	10,9	0,47	2,2
u_3	0,29	0,26	10,3	0,29	0

tab. 12: Přesnost analytického výpočtu vůči numerickému pro posuvy druhého modelu

Posuv	Numerický přístup (SOLID) [mm]	Numerický přístup (BEAM) [mm]	Odchylka – Δ [%]	Analytický přístup [mm]	Odchylka – Δ [%]
u_1	0,57	0,58	1,8	0,53	7,0
u_2	0,45	0,49	8,9	0,45	0
u_3	0,29	0,26	10,3	0,29	0

tab. 13: Přesnost analytického výpočtu vůči numerickému pro posuvy třetího modelu

Posuv	Numerický přístup (SOLID) [mm]	Numerický přístup (BEAM) [mm]	Odchylka – Δ [%]	Analytický přístup [mm]	Odchylka – Δ [%]
u_1	0,24	0,20	16,7	0,23	4,2
u_2	0,44	0,46	4,5	0,46	4,5
u_3	0,58	0,55	5,2	0,61	5,2
u_4	0,37	0,32	13,5	0,36	2,7

Největší odchylky bylo dosaženo ve třetím výpočtovém modelu a to 16,7 %.

5 ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se zabývá deformačně napěťovou analýzou vybrané lezecké příčky. Zpočátku byla sepsána rešerše týkající se problematiky pružnosti a pevnosti, a to zejména teorie prutů, která byla využita v analytickém řešením této práce. Dále byla sepsána teorie ohledně metody konečných prvků, které je naopak využito v numerickém řešení, a to konkrétně pomocí programu *ANSYS Workbench 18*.

Ve výpočtové části byly řešeny idealizované modely lezecké příčky, které byly zatíženy několika způsoby. V rámci analytického výpočtu byly určeny velikosti sil a momentů ve vazbách a na osách osové symetrie. Na základě zatížení a vlastnostech materiálu byla nalezena nejvíce namáhaná místa, ve kterých bylo určeno redukované napětí podle podmínky HMH. Následně byly stanoveny velikosti deformací v daných bodech příčky. Při zatížení těchto příček nebylo uvažováno liniové zatížení, a to z toho důvodu, že osamělá síla vyvolá větší ohybový moment, což znamená, že je nebezpečnější.

Stejné výpočtové modely jako v analytickém přístupu byly použity při numerickém řešení. Bylo zde využito prvků BEAM188 a SOLID186. Výsledky deformací a napětí z těchto výpočtových přístupů byly mezi sebou porovnány.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

[1] Gerd Schillings GmbH & Co: Výrobce energetických zařízení a vybavení [online]. [cit. 2017-05-26].
Dostupné z: https://www.schillings-arbeitsschutz.de/shop/index.php/personliche-schutzausrustungen/steigeisen/steigeisen-fur-holzmaste.html

[2] WANNER, Jan. *Sbírka vyřešených úloh z technické mechaniky I. Statika, tření a jednoduché stroje*. 3. vyd. Praha: SNTL, 1953, 274 s.

[3] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VBRKA a Jiří Burša. *Mechanika těles: pružnost a pevnost,* 3. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN: 80-214-2592-X

[4] VRBKA, Jan, PRUŽNOST A PEVNOST I: Učební text, 280 s. [online]. [2012] [cit. 2017-05-26]. Dostupné (po přihlášení) z: https://moodle.vutbr.cz/mod/resource/view.php?id=75738

[5] *Metoda konečných prvků – Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-04-22].
Dostupné z:
https://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_kone%C4%8Dn%C3%BDch_prvk%C5%AF

[6] ANSYS, Inc., Ansys 18 Help

[7] Šachtové stupadlo SAKS - KASI. *KASI – Největší český výrobce kanalizační litiny* [online]. [cit. 02-05-2017] Dostupné z:

http://www.kasi.cz/produkty/sachtova-stupadla/typ-sa**/sachtove-stupadlo-saks

[8] ČSN 41 2050. *Ocel 12 050*. Praha: Úřad pro normalizaci a měření, 1978. 16 s. Třídící znak 412050.

[9] ČSN EN 13101. *Stupadla pro podzemní vstupní šachty*. Praha: Český normalizační institut, 2003. 36 s.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

Symbol / Veličina	Jednotka	Popis
3D		Třídimenzionální prostor
HMH		Podmínka plasticity Hübner – Misses – Henckey
MKP		Metoda konečných prvků
PP		Pružnost a pevnost
VVÚ		Výsledné vnitřní účinky
ω		Uvolňovací řez
μ	[-]	Poissonovo číslo
A	[J]	Vykonaná práce
D	[mm]	Průměr
E	[MPa]	Modul pružnosti
f	[-]	Součinitel smykového tření
F	[N]	Působí síla od osoby
F_i	[N]	Složka síly v ose
g	[$m \cdot s^{-2}$]	Tíhové zrychlení
G	[MPa]	Modul pružnosti ve smyku
J_p	[mm^4]	Polární kvadratický moment
J_y	[mm^4]	Osový kvadratický moment
L	[mm]	Délka
l	[mm]	Délka
m	[kg]	Hmotnost osoby
M	[N·mm]	Silová dvojice
M_k	[N·mm]	Kroutící moment
M_o	[N·mm]	Ohybový moment
n	[-]	Nositelka síly
N	[N]	Normálová síla
R	[mm]	Poloměr
Re	[MPa]	Mez kluzu
S	[mm^2]	Obsah
T	[N]	Posouvající síla

u_i	[mm]	Posuv
x_i	[mm]	Délkový parametr
γ	[-]	Střednice
Δ	[%]	odchylka
Π	[-]	Silová soustava
σ_{HMH}	[MPa]	Redukované napětí dle podmínky HMH
σ_o	[MPa]	Ohybové napětí
τ_k	[MPa]	Smykové napětí od krouticího momentu
τ_T	[MPa]	Smykové napětí od posouvající síly
φ	[◦]	Úhel sklonu
$\varphi_{(x)}$	[rad]	Natočení střednice
ψ	[-]	Příčný průřez

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM PŘÍLOH

CD: Bakalářská práce 2017, Jiří Hložek

- Fotodokumentace příček
- Výpočty v programu MAPLE 2015
- Dokumenty programu ANSYS Workbench 18
- Deformačně napěťová analýza vybrané lezecké příčky – formát PDF