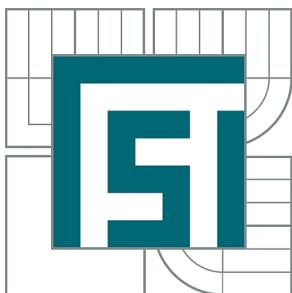


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

VÝPOČET VLASTNÍCH FREKVENCÍ PRUTOVÉ SOUSTAVY METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

CALCULATION OF NATURAL FREQUENCIES OF A BAR SYSTEM USING FINITE ELEMENT
METHOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

PETR SVOBODA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ NÁVRAT, Ph.D.

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Petr Svoboda

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočet vlastních frekvencí prutové soustavy metodou konečných prvků

v anglickém jazyce:

Calculation of natural frequencies of a bar system using finite element method

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je naprogramovat algoritmus metody konečných prvků pro výpočet vlastních frekvencí prutových soustav. Pro řešení primárně využít volně dostupné prostředky (Python, knihovny NumPy, SciPy, překladač Fortranu, apod.). Ověření funkčnosti realizovat výpočtem v programu ANSYS.

Cíle bakalářské práce:

1. Přehled používaných MKP programů se stručným popisem jejich možností.
2. Možnost využití volně dostupných prostředků pro vědecké výpočty.
3. Naprogramovat algoritmus MKP pro dynamickou úlohu.
4. Verifikovat vypočtené výsledky s výsledky získanými v programu ANSYS.

Seznam odborné literatury:

1. Zienkiewicz, O., C., Taylor, R. L.: The finite element method, 5th ed., Arnold Publishers, London, 2000
2. Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL Praha, 1979
3. Ferreira, A.J.M.: MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures, 2009

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 20.11.2014

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt

Cílem bakalářské práce bylo naprogramovat algoritmus metody konečných prvků pro výpočet vlastních frekvencí prutových soustav. Pro řešení měly být využity primárně volně dostupné prostředky (Python, knihovny NumPy, SciPy, překladač Fortranu, apod.) a tím prověřit možnosti volně dostupných prostředků pro vědecké účely v oblasti úloh mechaniky kontinua. Při ověřování funkčnosti programu využít ke srovnání program ANSYS.

Abstract

The task of the presented bachelor thesis has been to implement an algorithm of the finite element method to calculate natural frequencies of beam systems. To solve this problem a freely available SW products (Python, libraries NumPy, SciPy, Fortran compiler etc.) should have been primarily used and thereby to check possibilities of freely available SW product application in science purposes in the field of the Continuum Mechanics tasks. For a functionality verification of the program the ANSYS code is to be used.

Klíčová slova

Prutová konstrukce, Metoda konečných prvků, Vlastní frekvence, Vlastní tvary, Parametry deformace, Natočení, Posuny, Potenciální energie deformace, Kinetická energie, Hamiltonův princip.

Key words

Beam structure, Finite Element Method, Natural frequencies (Eigen frequencies), Eigenvalues, Parameters of deformations, Deflections, Displacements, Potential energy of deformation, Kinetic energy, Hamilton's principle.

Bibliografická citace

SVOBODA, P. Výpočet vlastních frekvencí prutové soustavy metodou konečných prvků. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 57s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a pramenů, jež jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Brně dne 22.5.2015

.....

Petr Svoboda

Poděkování

Rád bych zde poděkoval panu Ing. Tomáši Návratovi, Ph.D. za možnost vypracovat pod jeho vedením bakalářskou práci. Zároveň bych mu chtěl poděkovat za ochotu a vstřícnost v průběhu jejího vypracování.

Chtěl bych také poděkovat oběma rodičům a bratrovi za jejich nikdy neochabující podporu.

Obsah

1	ÚVOD A SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	1
2	ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY A VYMEZENÍ ÚLOHY	4
3	ZÁKLADNÍ VZTAHY TEORIE PRUTOVÝCH KONSTRUKCÍ	5
3.1	Definice souřadné soustavy přímého prutu konstantního průřezu.....	5
3.2	Vztah napětí a vnitřních sil (lit. [1] a [3]).....	6
3.3	Vztah vnitřních sil a deformací prutu (lit. [1] a [3]).....	7
3.4	Dopad teorie prutových konstrukcí do řešeného problému	9
4	ÚVOD DO METODY KONEČNÝCH PRVKŮ	10
4.1	Hamiltonův princip v mechanice kontinua (3D)	10
4.2	Diskretizace kontinua metodou konečných prvků – obecný úvod	11
4.3	Definice matice tuhosti, hmotnosti a zatěžovacího vektoru elementu a tělesa	12
5	ANALÝZA PRUTOVÉHO ELEMENTU	16
5.1	Základní charakteristiky prutového elementu	16
5.2	Souřadné soustavy	16
5.3	Náhradní funkce. Vyjádření posunů.	18
5.4	Potenciální energie deformace a matice tuhosti elementu	20
5.5	Kinetická energie a matice hmotnosti elementu	25
5.6	Transformace souřadnic	34
6	ANALÝZA KONSTRUKCE	44
6.1	Matice tuhosti konstrukce	44
6.2	Matice hmotnosti konstrukce	45
6.3	Okrajové podmínky	45
7	SOUSTAVA DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC	47
8	VLASTNÍ KMITÁNÍ NETLUMENÉ KONSTRUKCE	49
9	PŘEHLED POUŽÍVANÝCH MKP PROGRAMŮ	52
10	POUŽITÉ TECHNOLOGIE PROGRAMOVÁNÍ.....	54

10.1	Python	54
10.2	SciPy	54
11	TESTOVACÍ ÚLOHY PROGRAMU BEAMER	55
12	ZÁVĚR	56
13	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	57
14	PŘÍLOHY	58
Příloha A – Dokumentace programu Beamer		1
A.1	Instalace	1
A.2	Spuštění	1
A.3	Formát vstupního souboru	1
A.4	Výstup	2
Příloha B - Výsledky testovacích úloh		1

1 ÚVOD A SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Hlavní náplní bakalářské práce bylo sestavit program řešící vlastní frekvence prutových soustav pomocí metody konečných prvků. Výsledky programu potom ověřit pomocí programu ANSYS a vzájemně výsledky porovnat. Při programování se mělo použít volně dostupné prostředky (technologie) a ověřit možnosti používání těchto prostředků pro řešení úloh mechaniky kontinua.

První část práce tvoří vybrané partie z teorie prutových konstrukcí, jež jsou nutné pro následnou aplikaci metody konečných prvků. Jsou uvedeny základní předpoklady úlohy a následně z nich vyplývající vztahy teorie prutových konstrukcí, použité při řešení úlohy MKP.

Další část práce je tvořena popisem Hamiltonova principu a způsobem jeho aplikace pomocí metody konečných prvků na řešení vlastních frekvencí prutových konstrukcí. Principy a postupy MKP jsou popsány velmi podrobně, často včetně odvození některých vztahů a postupů. Byly odvozeny matice tuhosti a matice hmotnosti elementu. Důvodem k nutnosti odvodit dosti pracně uvedené matice byla hlavně skutečnost, že v literatuře se vyskytují v uzavřené podobě zřídka, a když tak často dvojrozměrně a ještě častěji špatně, popř. s jinými báзовými funkcemi než bylo potřeba. Při odvozování konzistentní matice hmotnosti bylo nutno použít matematický program pro operace s polynomy včetně integrace. Zmíněné operace nejsou obtížné, ale je jich příliš mnoho. Dále musely být odvozeny transformace souřadnic pro globální a lokální souřadné systémy.

V poslední teoretické části práce, která se týkala analýzy konstrukce, byly použity standardní postupy MKP.

Program sestavený na základě předložené teorie se jmenuje BEAMER a je naprogramován v jazyce Python. Pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic a pro řešení zobecněného problému vlastních hodnot byly použity prostředky balíku SciPy.

Pro verifikaci programu BEAMER byly použity srovnávací výpočty pomocí programu ANSYS a některé úlohy se známým analytickým řešením.

Seznam použitých symbolů

σ_i normálové napětí ve směru souřadné osy i

Normálové napětí je kladné, má-li smysl vnější normály (tj. působí-li jako tah).

τ_{ij} tečné (smykové) napětí působící na plošce, jejíž normála je ve směru souřadné osy i a napětí je rovnoběžné s osou j

Smykové napětí je kladné, působí-li ve smyslu kladné větve souřadné osy, s níž je rovnoběžné, má-li současně vnější normála plošného prvku smysl shodný s kladnou větví příslušné osy souřadnic.

$A = \int_A dA$ plocha průřezu

$S_y = \int_A z dA$ statický moment plochy průřezu k ose y

$S_z = \int_A y dA$ statický moment plochy průřezu k ose z

$I_y = \int_A z^2 dA$ moment setrvačnosti průřezu v ohybu k ose y

$I_z = \int_A y^2 dA$ moment setrvačnosti průřezu v ohybu k ose z

$I_{yz} = \int_A yz dA$...deviační moment průřezu k osám y, z

N_x normálová síla prutu (axiální síla ve směru osy x)

T_y, T_z smykové síly prutu ve směru os y, z

M_x kroutící moment prutu kolem osy x

M_y, M_z ohybové momenty prutu kolem os y, z

$[NM] = [N_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z]^T$ vektor vnitřních sil a momentů prutu

$[N] = [N_x, T_y, T_z]^T$ vektor vnitřních sil prutu

$[M] = [M_x, M_y, M_z]^T$ vektor vnitřních momentů prutu

Složky vektoru vnitřních sil a momentů jsou kladné, působí-li v kladném (pravém) průřezu ve smyslu kladných os x, y, z . Kladný průřez – vnější normála je ve směru kladné osy x .

A_0 plocha omezená střednicí uzavřeného průřezu

u posun bodů na střednici prutu ve směru osy x

v posun bodů na střednici prutu ve směru osy y

w posun bodů na střednici prutu ve směru osy z

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ pootočení průřezu kolem osy x, y, z

$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T$... vektor napětí

$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T$... vektor přetvoření

$[u] = [u, v, w]^T$ vektor posunů

$[p] = [p_x, p_y, p_z]^T$	vektor povrchového vnějšího zatížení
$[q] = [q_x, q_y, q_z]^T$	vektor objemového zatížení
$[u] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right]^T = [u, v, w]^T$	vektor rychlostí
$\rho = \rho_{(x,y,z)}$	objemová hmotnost tělesa
Γ_σ	povrch (hranice) tělesa, kde je zadáno silové zatížení
L	délka prutového prvku (elementu)
Π	celkový energetický potenciál
Π'	potenciální energie deformace
K	kinetická energie
t	čas
x, y, z	lokální souřadná soustava (ortogonální pravotočivá)
X, Y, Z	globální souřadná soustava (ortogonální pravotočivá)
$[K]$	matice tuhosti
$[M]$	matice hmotnosti
$[f]$	vektor transformovaného zatížení
Ω	objem tělesa (prutu)
$[\Delta]$	vektor parametrů deformace
$[S]_e$	transformační matice mezi parametry deformace prvku a vektorem $[a]_e$
U, V, W	posuny obecného bodu $p \in \Omega$
$[T]$	transformační matice mezi souřadnými systémy
X_B, Y_B, Z_B	souřadnice počátečního uzlu v globální souřadné soustavě
X_E, Y_E, Z_E	souřadnice koncového uzlu v globální souřadné soustavě
δ	variacie
λ	vlastní číslo
q	zobecněná souřadnice
$[I]$	jednotková matice
$[\Delta_i]$	i-tý vlastní vektor

2 ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY A VYMEZENÍ ÚLOHY

Materiál prutů – lineárně pružný (tzn. předpoklad Hookova zákona), tzn. lineární závislost napětí na přetvoření.

Obecně na celé prutové soustavě globálně hledáme 3 neznámé posuny ve směrech globálních souřadných os. Jednotlivě na každém prutu prutové soustavy hledáme také v každém bodě 3 neznámé posuny ve směrech lokálních souřadných os každého prutu. Obecně je každý z těchto 3 neznámých posunů závislý na 3 souřadnicích x , y , z . K redukci úlohy použijeme pro ohyb prutu Bernoulli – Navierovu hypotézu. Tzn., že roviny průřezů kolmé ke střednici prutu před deformací zůstávají rovinné a kolmé k přetvořené střednici prutu i po deformaci.

Dále budeme předpokládat, že průřezové rozměry prutu jsou malé ve srovnání s délkou prutu. To znamená, že budeme uvažovat pouze příčné deformace osy prutu od ohybových momentů a zanedbáme příčné deformace osy prutu od smykových sil.

Pro kroucení použijeme teorii volného kroucení, tzn., že v důsledku kroucení prutu vznikají pouze smyková napětí (není bráněno deplanaci průřezu).

Důsledky uvedených předpokladů viz následující kapitola.

Vztahy mezi deformacemi a posuny budou lineární.

Okrajové podmínky prutové soustavy budeme uvažovat opět lineární a to nejjednodušší formou. Okrajová podmínka geometrická je dána tím, že některé z hledaných funkcí posunů jsou na dané oblasti nulové. Po redukci úlohy budou některé z hledaných parametrů (posuny, natočení) nulové. Zatížení (statická úloha) bude dáno pouze pomocí osamělých sil a momentů v uzlových bodech prutové soustavy.

Hmoty budou zvažovány buď po částech konstantní (jeden konečný prvek – jedna spojitá hmotnost ve všech směrech kmitání stejná) a osamělé hmoty v uzlových bodech.

Pruty budou ocelové válcované nebo svařované nosníky vhodné pro strojní konstrukce. Profily budou tedy tenkostěnné s otevřeným nebo uzavřeným průřezem.

3 ZÁKLADNÍ VZTAHY TEORIE PRUTOVÝCH KONSTRUKCÍ

Budeme uvažovat takové prutové konstrukce, které jsou vytvořeny pomocí přímých prutů konstantního průřezu. Dále budou následovat vztahy pro přímý prut konstantního průřezu, které jsou nutné pro řešení prutových konstrukcí. Vztahy budou uvedeny s odkazy na použitou literaturu a bez odvození, neboť toto není předmětem předložené práce.

3.1 Definice souřadné soustavy přímého prutu konstantního průřezu

Osou prutu nazýváme spojnicí těžišť průřezů. Souřadná osa x je totožná s osou prutu. Souřadný systém bude tudíž centrální. Souřadný systém bude ortogonální a pravotočivý. Směr osy y , jež je kolmá k ose x , je dán tvarem průřezu prutu.

Souřadná osa z potom doplňuje souřadný systém tak, aby byl ortogonální a pravotočivý. Směr osy y je dán podmínkou, že deviační moment plochy průřezu k osám y a z je roven 0.

Souřadné osy y a z v rovině průřezu prutu budou vzhledem k průřezu prutu hlavní centrální osy setrvačnosti.

Dále nám tedy postačí nenulové průřezové charakteristiky

$$A = \int_A dA \dots\dots\dots \text{plocha průřezu}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \dots\dots\dots \text{moment setrvačnosti průřezu v ohybu k ose } z$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \dots\dots\dots \text{moment setrvačnosti průřezu v ohybu k ose } y$$

Pro úplnost uvedme, že průřezové charakteristiky

$$S_z = \int_A y dA = 0 \dots\dots\dots \text{statický moment plochy průřezu k ose } z$$

$$S_y = \int_A z dA = 0 \dots\dots\dots \text{statický moment plochy průřezu k ose } y$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0 \dots\dots\dots \text{deviační moment průřezu k osám } y \text{ a } z$$

jsou rovny 0, neboť osy y a z v rovině průřezu prutu jsou hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu.

3.2 Vztah napětí a vnitřních sil (lit. [1] a [3])

Bernoulli-Navierova hypotéza.

Roviny průřezů kolmé ke střednici prutu před deformací zůstávají rovinné a kolmé k přetvořené střednici prutu i po deformaci.

Z uvedené hypotézy plyne, že normálové napětí ve směru osy prutu v libovolném průřezu je lineárně závislé na souřadnicích y a z (průřez zachovává rovinu $\Rightarrow$ posun ve směru osy prutu je rovinný po průřezu $\Rightarrow$ deformace ve směru osy prutu je po průřezu rovinná $\Rightarrow$ normálová napjatost ve směru osy prutu je po průřezu rovinná).

Pro normálové napětí v libovolném průřezu prutu (souřadný systém průřezu prutu je totožný s hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu prutu) platí

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad 3.2.1$$

Vzhledem k tomu, že vnitřní síly a momenty jsou obecně funkcemi souřadnice x je σ_x na objemu prutu funkcí souřadnic x, y, z .

$$\sigma_{x(x,y,z)} = \frac{N_{x(x)}}{A} - \frac{M_{z(x)}}{I_z} y + \frac{M_{y(x)}}{I_y} z$$

Normálová napětí σ_y a σ_z jsou zanedbatelná a dále je budeme považovat za nulová

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

Vzhledem k zavedenému předpokladu, že průřezové rozměry prutu jsou malé ve srovnání s délkou prutu (tzv. štíhlé pruty), zanedbáme příčné deformace osy prutu od smykových sil vzhledem k příčným deformacím (průhybům) osy prutu od ohybových momentů.

Prakticky to znamená, že při odvozování matice tuhosti prvku (formulace potenciální energie deformace) nebudeme uvažovat práci smykových napětí od smykových sil na zkoseních.

A protože cílem práce není výpočet napjatosti prutové soustavy, ale výpočet deformací a vnitřních sil, nebudeme se nyní rozbořem rozložení smykových napětí od smykových sil zabývat.

Smykové napětí od volného kroucení v průřezu prutu.

Uzavřený průřez (tzv. Bredtův vzorec pro tečné napětí)

$$\tau = \frac{M_x}{2A_0 t} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_x}{2A_0 t_{min}} \quad 3.2.2$$

kde

A_0 plocha omezená střednicí průřezu

t tloušťka stěny uzavřeného průřezu v místě výpočtu napětí

Otevřený průřez (lit. [3])

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{J_K} \cdot t_{max} \quad (\text{lit. [3] vztah (10.2)}) \quad 3.2.3$$

kde

J_K moment setrvačnosti (tuhosti) otevřeného průřezu v kroucení

$$J_K = \alpha \cdot \frac{1}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 \quad (\text{lit. [3] vztah (10.3)}) \quad 3.2.4$$

kde

α experimentálně zjištěný součinitel vyjadřující tvar průřezu

b_i, t_i délky a tloušťky dílčích stěn průřezu

3.3 Vztah vnitřních sil a deformací prutu (lit. [1] a [3])

Předpoklady.

Platí klasická teorie malých posunů. Tzn. složky vektoru posunu jsou malé ve srovnání s každým rozměrem prutu a první derivace složek vektoru posunu podle souřadnic jsou malé ve srovnání s jedničkou. Druhou část uvedeného předpokladu lze vyjádřit také tak, že deformace a úhly pootočení jsou obě malé ve srovnání s jedničkou. Součiny a druhé mocniny prvních derivací složek vektoru posunu zanedbáme ve srovnání s prvními derivacemi posunů.

Posuny jsou natolik malé, že rovnice rovnováhy lze psát na nepřetvořeném prutu (teorie 1.řádu).

Platí již dříve zmíněná Bernoulli-Navierova hypotéza.

Zatížení prutu osovou silou a ohybovými momenty.

Vzhledem k celkem logickému předpokladu, který jsme zavedli v předešlém článku ($\sigma_y = \sigma_z = 0$) jsou posuny ve směru os y, z (tj. v, w) na celém objemu prutu nezávislé na souřadnicích y, z . Jsou tedy závislé pouze na souřadnici x (mění se tedy pouze po délce prutu). Označme posun bodů střednice prutu ve směru osy x a U posun libovolného bodu tělesa prutu ve směru osy x . Vzhledem k platnosti Bernoulli-Navierovy hypotézy a předpokladu o malých deformacích a pootočeních je zřejmé, že natočení průřezu prutu v deformovaném stavu je derivací příslušného průhybu (posun v, w) osy prutu.

Potom lze posun U libovolného bodu tělesa prutu napsat jako

$$U_{(x,y,z)} = u_{(x)} - y\omega_{z(x)} - z\omega_{y(x)} = u_{(x)} - y\frac{dv_{(x)}}{dx} - z\frac{dw_{(x)}}{dx} = u_{(x)} - yv'_{(x)} - zw'_{(x)} \quad 3.3.1$$

kde ω_y a ω_z je pootočení průřezu kolem osy y, z .

Pro malé úhly ω_y, ω_z platí

$$\text{tg } \omega_y \approx \omega_y = \frac{dw}{dx} = w'$$

$$\text{tg } \omega_z \approx \omega_z = \frac{dv}{dx} = v'$$

Přetvoření a normálové napětí ve směru osy x je

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2 v}{dx^2} - z \frac{d^2 w}{dx^2} = u' - yv'' - zw'' \quad 3.3.2$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E(u' - yv'' - zw'') \quad 3.3.3$$

Jsou-li y a z hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu, potom po provedení integrací napětí po ploše průřezu platí (lit. [1] vztah (2.50))

$$EAu' = N_x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{N_x}{EA}$$

$$EI_z v'' = M_z \quad \Rightarrow \quad v'' = \frac{M_z}{EI_z} \quad 3.3.4$$

$$EI_y w'' = -M_y \quad \Rightarrow \quad w'' = \frac{-M_y}{EI_y}$$

kde veličiny (u, v, w) jsou posuny osy prutu ve směrech souřadných os (x, y, z) . Posun v je také často nazýván průhybem prutu (osy prutu) ve směru souřadné osy y a obdobně je w průhybem prutu ve směru souřadné osy z . Všechny tři veličiny jsou závislé pouze na souřadnici x . Jejich derivacemi se myslí tudíž derivace dle x .

Volné kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

Je-li prut konstantního průřezu a není-li bráněno deplanaci, platí pro poměrný úhel zkroucení kolem osy x

$$\frac{d\omega_x}{dx} = \omega'_x = \frac{M_x}{GJ_K} \quad 3.3.5$$

kde

ω_x natočení průřezu kolem osy x ($\omega_x = \omega_{x(x)}$)

M_xkroutící moment

G modul pružnosti ve smyku $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

J_K moment setrvačnosti (tuhosti) otevřeného průřezu v kroucení
(lit. [3] vztah (10.1))

Pro J_K platí vztah 3.2.4.

Volné kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

Pro prut konstantního průřezu platí (lit. [1] vztah (2.64e))

$$\frac{d\omega_x}{dx} = \omega'_x = \frac{M_x}{GJ_K} \quad 3.3.6$$

kde

ω_x natočení průřezu kolem osy x ($\omega_x = \omega_{x(x)}$)

M_x kroutící moment

G modul pružnosti ve smyku $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

J_K torzní konstanta

$$J_K = 4A_0^2 / \int_s \frac{ds}{t} \quad 3.3.7$$

kde

A_0 plocha omezená střednicí uzavřeného průřezu

s střednice uzavřeného průřezu

t tloušťka stěny uzavřeného průřezu (obecně je funkcí s)

3.4 Dopad teorie prutových konstrukcí do řešeného problému

Původně jsme hledali 3 funkce posunů na tělese prutu ve směru os x , y , z . Tyto posuny byly obecně funkcemi souřadnic x , y , z . Po zavedení všech zjednodušujících předpokladů nám postačí najít funkce posunů bodů ležících na ose prutu (tedy u , v , w) a natočení ω_x průřezů kolem osy prutu. Všechny tyto funkce jsou funkcemi pouze souřadnice x . Po nalezení uvedených funkcí u , v , w lze v libovolném bodě tělesa prutu nalézt posuny ve směru všech souřadných os x , y , z . Potom lze nalézt přetvoření a napětí v libovolném bodě tělesa prutu.

Prakticky takto nepostupujeme, neboť jsme odvodili vztahy mezi funkcemi u , v , w a ω_x a vnitřními silami. Z těchto vnitřních sil se dá určit napjatost v libovolném bodě tělesa prutu.

Závěrem je třeba zdůraznit, že původně jsme hledali 3 funkce posunů ve směrech os x , y , z . Uvedené 3 funkce jsou funkcemi všech 3 souřadnic x , y , z .

Nyní po redukci úlohy hledáme sice 4 funkce (u , v , w , ω_x), ale ty jsou funkcemi pouze souřadnice x . Řešíme tedy pouze jednorozměrný problém. Navíc z derivací nalezených funkcí přímo vyplývají vnitřní síly a momenty.

4 ÚVOD DO METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

4.1 Hamiltonův princip v mechanice kontinua (3D)

Označme

$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T$ vektor napětí

$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T$ vektor přetvoření

$[u] = [u, v, w]^T$ vektor posunů

$[p] = [p_x, p_y, p_z]^T$ vektor povrchového vnějšího zatížení

$[q] = [q_x, q_y, q_z]^T$ vektor objemového zatížení

$[u\cdot] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right]^T = [u\cdot, v\cdot, w\cdot]$ vektor rychlostí

$\rho = \rho_{(x,y,z)}$ objemová hmotnost tělesa

Ω objem tělesa

Γ_σ povrch (hranice) tělesa, kde je zadáno zatížení

Nazveme-li výraz

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] d\Omega = \Pi' \quad 4.1.1$$

potenciální energii deformace,

výraz

$$\int_{\Gamma_\sigma} [p]^T [u] d\Gamma + \int_{\Omega} [q]^T [u] d\Omega = A \quad 4.1.2$$

potenciální energii vnějšího zatížení,

výraz

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho [u\cdot]^T [u\cdot] d\Omega = K \quad 4.1.3$$

kinetickou energii tělesa a označíme-li dále

$$\Pi = \Pi' - A \quad 4.1.4$$

jako celkovou potenciální energii tělesa, potom platí

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - K) dt = 0 \quad 4.1.5$$

Rovnice vyjadřuje Hamiltonův princip pro trojrozměrné kontinuum.

Při jeho použití je nutno mít na paměti, že variace posunů nejsou úplně libovolné, nýbrž v čase t_1 a t_2 jsou nulové.

Slovní znění Hamiltonova principu:

Ze všech možných historií posunutí mezi dvěma okamžiky t_1 a t_2 (historie jsou vázány tím, že posuny v koncích intervalu – v časech t_1, t_2 – jsou pevně dány) nastane ta z nich,

pro kterou je časový integrál rozdílu potenciální a kinetické energie soustavy od času t_1 do času t_2 minimální.

4.2 Diskretizace kontinua metodou konečných prvků – obecný úvod

Stav trojrozměrného kontinua je určen pomocí funkcí tří posunů

$$u = u_{(x,y,z,t)}$$

$$v = v_{(x,y,z,t)}$$

$$w = w_{(x,y,z,t)}$$

4.2.1

Tyto posuny jsou spojitými funkcemi souřadnic x, y, z a času t . My hledáme takové tři funkce posunů, které vyhovují Hamiltonově principu pro trojrozměrné kontinuum.

Jestliže je tento problém řešen numericky, je nutno provést diskretizaci kontinua, tedy diskretizaci jednotlivých složek posunů. Jednou z možností diskretizace je metoda konečných prvků. Mějme spojitou funkci závislou na souřadnicích x, y, z a času t , tedy $f = f_{(x,y,z,t)}$.

Pro diskretizaci funkcí závislých na poloze a čase lze v podstatě použít dvou přístupů.

- 1) Interpolační (bázové) funkce jsou závislé na čase, tedy funkce f je předpokládána ve tvaru

$$f_{(x,y,z,t)} = \sum_i \phi_{i(x,y,z,t)} \cdot a_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \phi_{i(x,y,z,t)}}{\partial t} \cdot a_i$$

4.2.2

kde a_i jsou hledané konstanty

- 2) Interpolační (bázové) funkce jsou na čase nezávislé, tedy funkce f je předpokládána ve tvaru

$$f_{(x,y,z,t)} = \sum_i \phi_{i(x,y,z)} \cdot a_{i(t)} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \phi_{i(x,y,z)} \cdot \frac{da_{i(t)}}{dt}$$

4.2.3

kde $a_{i(t)}$ jsou hledané funkce času t .

Zde je tedy separována závislost funkce f na souřadnicích x, y, z a čase t . Nejčastěji se užívá tento přístup.

Stručný popis obecného postupu diskretizace kontinua metodou konečných prvků.

- 1) Řešení těleso rozdělíme na jednotlivé konečné prvky, které vyplňují celý objem tělesa.
- 2) Na každém konečném prvku provedeme náhradu hledaných funkcí u, v, w pomocí bázových funkcí a neznámých funkcí času v souladu se vztahem 4.2.3. Neznámé funkce času nazýváme parametry. Náhrada hledaných funkcí musí být provedena tak, aby neznámé funkce času (parametry) $a_{i(t)}$ měly fyzikální význam (posuny a jejich derivace) na hranicích prvku. Body na hranicích prvku, ve kterých mají

parametry fyzikální význam, nazýváme uzlovými body (zkráceně uzly). Každý uzel ležící na hranici konečného prvku je společný dvěma popř. více konečných prvkům. Výjimku tvoří uzly ležící na hranici řešeného tělesa. Při dalším postupu parametry v jednom uzlu, které mají stejný fyzikální význam spolu ztotožníme. Prakticky to znamená, že mají stejná čísla (viz dále). Tímto si zajistíme, aby v uzlových bodech byly náhrady hledaných funkcí posunů spojitě včetně jejich derivací.

- 3) Analýza jednoho konečného prvku. Přesně řečeno bod 2) již patří do analýzy konečného prvku, neboť volba bazových funkcí se týká vždy pouze jednoho konečného prvku.

Veličiny, pomocí kterých provedeme řešení hledaných funkcí, jsou popsány vztahy 4.1.1 až 4.1.4. Tyto veličiny jsou skaláry a jsou to integrální veličiny přes celý objem tělesa popř. přes hranici (povrch) tělesa. Tudíž je možno tyto integrace provést jako součet integrací přes jednotlivé konečné prvky.

Analýza jednoho konečného prvku se zabývá provedením integrací přes jeden konečný prvek. Jedná se o potenciální energii deformace II' , potenciální energii zatížení A a kinetickou energii K .

Z této analýzy vyplynou pro každý konečný prvek dvě matice a jeden vektor. Je to matice tuhosti elementu, matice hmotnosti elementu a vektor zatížení elementu. Definice a výpočet zmíněných matic a vektoru viz dále.

- 4) Získané integrální veličiny na každém elementu sečteme přes celý objem řešeného tělesa a získáme veličiny II' , A a K na celém objemu řešeného tělesa. Přesněji řečeno získáme celkovou – globální matici tuhosti, hmotnosti a vektor zatížení.
- 5) Zavedeme okrajové podmínky (podrobnosti viz dále).
- 6) Následně jsme schopni pomocí uvedených matic a vektoru formulovat soustavu diferenciálních rovnic pro určení neznámých parametrů $a_i(t)$.
- 7) Po nalezení parametrů a tím i bazových funkcí jsme schopni na každém elementu určit hledané funkce posunů a následně přetvoření a napjatost.

4.3 Definice matice tuhosti, hmotnosti a zatěžovacího vektoru elementu a tělesa

Na úvod připomeňme, že všechny veličiny, pomocí nichž hledáme neznámé posuny jsou skaláry, neboť používáme integrální princip.

Jedná se o potenciální energii deformace (II'), potenciální energii zatížení (A) a kinetickou energii (K). Protože se jedná o dynamickou úlohu, tak tyto skaláry jsou funkcemi času.

Matice tuhosti elementu

Jestliže platí vztah

$$\Pi'_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] d\Omega = \frac{1}{2} [a]_e^T [K]_e [a]_e$$

4.3.1

potom matice $[K]_e$ nazýváme maticí tuhosti elementu.

Ve výrazu 4.3.1 Π'_e znamená potenciální energii deformace jednoho elementu a tímto se integrace provádí přes objem jednoho elementu. Vektor $[a]_e$ obsahuje hledané parametry na příslušném elementu.

Matice hmotnosti elementu

Jestliže platí vztah

$$K_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \rho [u]^T [u] d\Omega = \frac{1}{2} [a]_e^T [M]_e [a]_e \quad 4.3.2$$

potom matici $[M]_e$ nazýváme maticí hmotnosti elementu. Ve výrazu 4.3.2 K_e znamená kinetickou energii jednoho elementu a tímto se integrace provádí přes objem jednoho elementu.

Vektor $[a]_e$ obsahuje časové derivace hledaných parametrů na příslušném elementu.

Vektor transformovaného povrchového zatížení elementu

Jestliže platí vztah

$$A_e^p = \int_{\Gamma_{\sigma e}} [p]^T [u] d\Gamma = [a]_e^T [f^p]_e \quad 4.3.3$$

Potom vektor $[f^p]_e$ nazýváme vektorem transformovaného povrchového zatížení elementu.

Ve výrazu 4.3.3 A_e^p znamená potenciální energii povrchového zatížení jednoho elementu a tímto se integrace provádí přes silově zatížený povrch jednoho elementu (existuje-li). Vektor $[a]_e$ obsahuje hledané parametry na příslušném elementu.

Vektor transformovaného objemového zatížení elementu

Jestliže platí vztah

$$A_e^q = \int_{\Omega_e} [q]^T [u] d\Omega = [a]_e^T [f^q]_e \quad 4.3.4$$

potom vektor $[f^q]_e$ nazýváme vektorem transformovaného objemového zatížení elementu.

Ve výrazu 4.3.4 A_e^q znamená potenciální energii objemového zatížení jednoho elementu a tímto se integrace provádí přes objem jednoho elementu. Vektor $[a]_e$ obsahuje hledané parametry na příslušném elementu.

Matice tuhosti tělesa

Jestliže platí vztah

$$\Pi' = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] d\Omega = \frac{1}{2} [a]^T [K] [a]$$

4.3.5

potom matici $[K]$ nazýváme maticí tuhosti tělesa.

Ve výrazu 4.3.5 Π' znamená potenciální energii deformace celého tělesa a tímto se integrace provádí přes objem celého tělesa. Vektor $[a]$ obsahuje všechny hledané parametry na celém tělese. Potenciální energie deformace celého tělesa se získá sečtením potenciálních energií deformace jednotlivých elementů.

Matice hmotnosti tělesa

Jestliže platí vztah

$$K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho [u]^T [u] d\Omega = \frac{1}{2} [a]^T [M] [a]$$

4.3.6

potom matici $[M]$ nazýváme maticí hmotnosti tělesa.

Ve výrazu 4.3.6 K znamená kinetickou energii celého tělesa a tímto se integrace provádí přes objem celého tělesa. Vektor $[a]$ obsahuje časové derivace hledaných parametrů na celém tělese.

Kinetická energie celého tělesa se získá sečtením kinetických energií jednotlivých elementů.

Vektor transformovaného povrchového zatížení tělesa

Jestliže platí vztah

$$A^p = \int_{\Gamma_{\sigma}} [p]^T [u] d\Gamma = [a]^T [f^p]$$

4.3.7

potom vektor $[f^p]$ nazýváme vektorem transformovaného povrchového zatížení tělesa.

Ve výrazu 4.3.7 A^p znamená potenciální energii povrchového zatížení celého tělesa a tímto se integrace provádí přes silově zatížený povrch celého tělesa. Vektor $[a]$ obsahuje všechny hledané parametry na celém tělese. Potenciální energie povrchového zatížení celého tělesa se získá sečtením potenciálních energií povrchového zatížení jednotlivých elementů, které jsou zatížené.

Vektor transformovaného objemového zatížení tělesa

Jestliže platí vztah

$$A^q = \int_{\Omega} [q]^T [u] d\Omega = [a]^T [f^q]$$

4.3.8

potom vektor $[f^q]$ nazýváme vektorem transformovaného objemového zatížení tělesa.

Ve výrazu 4.3.8 A^q znamená potenciální energii objemového zatížení celého tělesa a tímto se integrace provádí přes objem celého tělesa. Vektor $[a]$ obsahuje všechny hledané parametry na celém tělese. Potenciální energie objemového zatížení celého tělesa se získá sečtením potenciálních energií objemového zatížení jednotlivých elementů.

Na závěr odstavce uvedme dvě poznámky.

Matice a vektory, které byly nadefinovány závisí na diskretizaci objemu tělesa a hledaných funkcí. Tzn. jejich velikost, velikost jejich prvků i pozice nenulových prvků.

Způsob integrace nějaké veličiny po celém objemu tělesa, jsou-li již hotové integrace po jednotlivých elementech, bude dosti podrobně uveden dále.

5 ANALÝZA PRUTOVÉHO ELEMENTU

V předešlých odstavcích byly velice stručně popsány dvě oblasti problémů. Jednak to byly základní vztahy pro prutové konstrukce, které nám umožňují redukci obecné třírozměrné úlohy na úlohu jednorozměrnou. Dále to byl stručný obecný popis řešení třírozměrné úlohy pomocí jednoho z integrálních principů.

Nyní se pokusíme tyto dvě oblasti spojit a provést řešení jisté oblasti problémů prutových konstrukcí pomocí metody konečných prvků aplikací Hamiltonova principu.

5.1 Základní charakteristiky prutového elementu

V kap. 3 byly uvedeny základní předpoklady a základní vztahy pro prutové konstrukce. Tyto nyní budeme aplikovat na prutový element (konečný prvek).

Prutový element je jednorozměrný prvek (geometrická úsečka), jehož pozice je určena dříve definovanou osou prutu. Má dva uzly, každý na jednom konci (tzv. počáteční a koncový uzel). Připomeňme, že uzel je bod na elementu, ve kterém jsou definovány deformační parametry, které hledáme a pomocí kterých jsou definovány báze funkce. Navíc v našem případě každý uzel (kromě koncových uzlů celé prutové konstrukce) je společný dvěma popř. více elementům. Prutový element (konečný prvek) má konstantní průřez po délce a materiál je homogenní. Element je zatížen (povrchové zatížení) pouze v uzlech. Objemově zatížen není. Okrajové podmínky se dávají pouze do uzlů.

Z uvedeného plyne, že uzel je nutno na prutové konstrukci vložit minimálně tam, kde na sebe navazují pruty prutové konstrukce, kde potřebujeme vložit nějakou deformační okrajovou podmínku, kde je zatížení (osamělé břemeno), kde se mění průřez a objemová hmotnost.

Jak jsme již dříve uvedli, tak původní třírozměrnou úlohu, kdy jsme hledali 3 neznámé funkce posunů závislé na souřadnicích x, y, z , jsme pomocí prutové teorie zredukovali na hledání sice 4 funkcí (3 posuny 1 natočení), ale za to všechny jsou funkcemi pouze 1 proměnné. Nyní hledáme 3 funkce posunů osy prutu ve směrech souřadných os (u, v, w) a jednu funkci natočení průřezů kolem osy prutu (ω_x).

Všechny jsou závislé pouze na souřadnici x (osa prutu).

Parametry deformace elementu viz dále volba báze funkcí (náhradních) funkcí pro hledané 4 funkce.

5.2 Souřadné soustavy

Dále budeme rozlišovat dvě souřadné soustavy. Jedna bude lokální souřadná soustava pro každý element. Druhá souřadná soustava bude globální pro celou prutovou konstrukci.

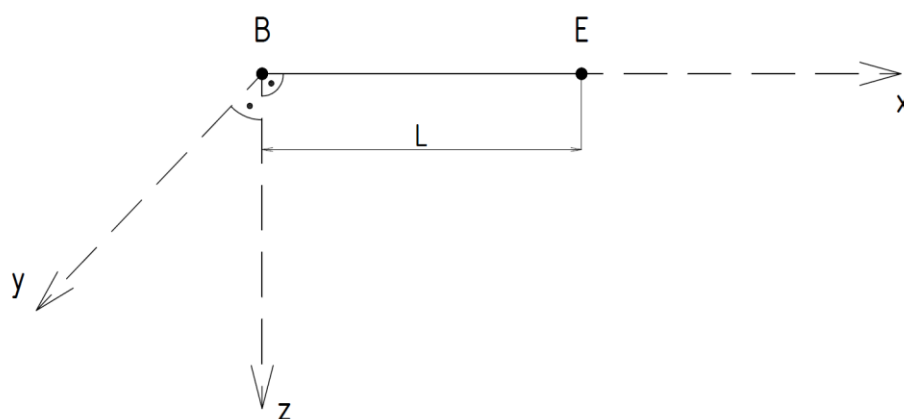
V lokální souřadné soustavě elementu budou prováděny všechny operace na elementu např. odvození matice tuhosti, hmotnosti, zatěžovacího vektoru atd. V globálním souřadném systému bude popisována celá prutová konstrukce, okrajové podmínky, zatížení atd.

Lokální souřadná soustava elementu

Lokální souřadná soustava elementu je ortogonální a pravotočivá. Budeme ji vždy značit malými písmeny x, y, z . Při popisu každého elementu se vždy uvádějí dva uzly. Ten první je vždy počáteční (B-begin) a druhý je koncový (E-end).

Osa x je osa prutu (elementu), tudíž spojuje počáteční a koncový uzlový bod. Její orientace je od počátečního bodu do koncového.

Osa y je hlavní centrální osa průřezu s větší tuhostí (tzn. že $I_y > I_z$) a osa z doplňuje systém na ortogonální a pravotočivý.



Obr. 5.2.1

Globální souřadná soustava

Globální souřadná soustava celé konstrukce je ortogonální a pravotočivá. Budeme ji vždy značit velkými písmeny X, Y, Z .

Standardně bývá osa Z svislá.

Určení pozice lokální souřadné soustavy vzhledem ke globální souřadné soustavě

Osa x (lokální) je definována dvěma body. Bodem $B = (X_B, Y_B, Z_B)$ (begin) a bodem $E = (X_E, Y_E, Z_E)$ (end). Orientace osy x je od bodu B do bodu E .

Jestliže osa x není $\parallel$ s osou Z ($X_B \neq X_E$ nebo $Y_B \neq Y_E$)

potom osa z spolu s osou x definují rovinu $\parallel$ s osou Z . Osa y doplňuje souřadnou soustavu na ortogonální a pravotočivou. Jestliže je osa Z svislá, potom osa y je vodorovná.

Jestliže je osa $x \parallel Z$ ($X_B = X_E \wedge Y_B = Y_E$) potom osa $y \parallel Y$ i včetně orientace a opět osa z doplňuje soustavu na ortogonální pravotočivou souřadnou soustavu.

Navíc souřadná soustava průřezu, tj. y, z může být pootočená o úhel α kolem osy x . Jestliže se díváme proti kladné ose x , tak úhel α se měří proti směru chodu hodinových ručiček (je kladný).

Transformace souřadných soustav budou detailně odvozeny, až se budou provádět operace s deformačními parametry.

5.3 Náhradní funkce. Vyjádření posunů.

Prutový element bude nejprve vyšetřován v lokální soustavě souřadnic. Na prutovém elementu hledáme 4 deformační funkce, které jsou závislé na souřadnici x (délka po ose prutu měřená od bodu B – počáteční uzel elementu do bodu v němž je hledaná funkce popisovaná) a na čase t .

V souladu s 4.2.3 hledané funkce předpokládáme ve tvaru:

$$\begin{aligned} u_{(x,t)} &= a_{1(t)}x + a_{7(t)} && \dots\dots\dots \text{posun ve směru osy } x \\ v_{(x,t)} &= a_{2(t)}x^3 + a_{6(t)}x^2 + a_{12(t)}x + a_{8(t)} && \dots\dots\dots \text{posun ve směru osy } y \\ w_{(x,t)} &= a_{3(t)}x^3 + a_{5(t)}x^2 + a_{11(t)}x + a_{9(t)} && \dots\dots\dots \text{posun ve směru osy } z \\ \omega_{x(x,t)} &= a_{4(t)}x + a_{10(t)} && \dots\dots\dots \text{pootočení kolem osy } x \end{aligned}$$

5.3.1

Z náhradních funkcí je vidět, že nyní místo 4 funkcí proměnných x, t hledáme 12 funkcí závislých pouze na čase t ($a_1, a_2, \dots, a_{12}$). Kdybychom řešili pouze statickou úlohu, tak veličiny $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ by byly konstanty a již bychom neměli žádné neznámé funkce. Konstatujeme pouze, že v případě statické úlohy kdy zatížení je ve formě osamělých sil koncentrováno pouze do uzlů (spojité povrchové zatížení a objemové zatížení je nulové) nám tyto náhradní funkce dávají přesné řešení hledaných funkcí. Jestliže totiž zatížení je realizováno pouze v uzlech, potom po délce elementu je normálová síla, smykové síly a kroutící moment konstantní, ohybové momenty jsou lineární. Potom vzhledem ke vztahům 3.3.4, 3.3.5 a 3.3.6 je posun ve směru osy x a natočení kolem osy x lineární a posuny (průhyby) ve směru os y, z jsou kubické.

Takže pro statickou úlohu pokud dodržíme dříve uvedená pravidla pro prvkování a zatížení je pouze v uzlech, dostáváme v rámci teorie prutových konstrukcí přesné výsledky nezávisle na velikosti elementů. Takto formulovaná statická úloha byla používána při ladění vytvořeného SW. Tímto postupem se dá separátně odladit např. matice tuhosti elementů, globální (celková) matice tuhosti, správnost transformací souřadných systémů, zavádění okrajových podmínek do matice tuhosti, čtení a zpracování vstupních údajů atd.

Po celou další dobu odvozování budeme z důvodu jednoduššího zápisu hledané funkce času $a_{i(t)}$ zapisovat ve tvaru a_i a tudíž i hledané parametry deformace (viz dále) jež jsou také funkcemi času $\Delta_{i(t)}$ budeme zapisovat ve tvaru Δ_i a budeme o nich mluvit jako o parametrech.

Nyní máme náhradu hledaných funkcí, ale ty neplní již dříve vyslovenou základní podmínku a to, že neznámé veličiny (zde a_i) mají mít fyzikální význam v uzlech, který by zajistil podmínky spojitosti hledaných funkcí a jejich derivací na styku elementů.

Za tímto účelem zavedme dvanáct lokálních parametrů deformace a zapišme je do jednoho vektoru parametrů deformace

$$[\Delta]_e' = [u_B, v_B, w_B, \varphi_{xB}, \varphi_{yB}, \varphi_{zB}, u_E, v_E, w_E, \varphi_{xE}, \varphi_{yE}, \varphi_{zE}]^T$$

5.3.2

Dolní index e bude vždy značit, že vektor nebo matice je určena pouze pro jeden element.

Dolní index B (begin) označuje veličiny týkající se počátečního uzlu elementu.

Dolní index E (end) označuje veličiny týkající se koncového uzlu elementu.

Čárkou budeme značit vektory a matice vztahující se k lokální souřadné soustavě elementu. V lokální souřadné soustavě mají posuny a natočení přesné fyzikální významy vzhledem na určení vnitřních sil. Nicméně když k sobě prostřednictvím uzlu připojíme dva elementy, tak každý může mít jinou lokální souřadnou soustavu.

Abychom mohli ztotožnit deformační parametry v uzlech a tím si zajistit spojitost hledaných funkcí posunů a jejich derivací, je nutno, aby parametry deformace byly všechny vyjádřeny pouze v jedné souřadné soustavě. Touto soustavou bude již zmíněná globální souřadná soustava celé prutové konstrukce. Transformace bude odvozena později.

u_B, v_B, w_B posuny ve směru os x, y, z počátečního uzlu elementu

$\varphi_{xB}, \varphi_{yB}, \varphi_{zB}$ pootočení kolem os x, y, z počátečního uzlu elementu

u_E, v_E, w_E posuny ve směru os x, y, z koncového uzlu elementu

$\varphi_{xE}, \varphi_{yE}, \varphi_{zE}$ pootočení kolem os x, y, z koncového uzlu elementu

Parametry deformace jsou opět funkcemi času.

Nyní definujme vektor $[a]_e$ pomocí již dříve zmíněných funkcí času

$$[a]_e = [a_1, a_2, \dots, a_{12}]^T$$

5.3.3

Podle Bernoulli-Navierovy hypotézy jsou složky pootočení průřezů kolem os y a z následující

$$\varphi_{y(x,t)} = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = -3a_3x^2 - 2a_5x - a_{11}$$

5.3.4

$$\varphi_{z(x,t)} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 3a_2x^2 + 2a_6x - a_{12}$$

Potom vztah vektoru parametrů deformace $[\Delta]_e$ a vektoru $[a]_e$ lze zapsat ve tvaru

$$[\Delta]_e' = [S]_e[a]_e \Rightarrow [a]_e = [S]_e^{-1}[\Delta]_e'$$

5.3.5

Matice $[S]_e$ má rozměr 12×12 a její prvky zjistíme snadno dosazením $X_B = 0$ a $X_E = L$ (L je délka elementu) do vztahů 5.3.1 a 5.3.4 a následným přemístěním výsledků na vhodné pozice matice $[S]_e$ v souladu s vektory $[\Delta]_e'$ a $[a]_e$.

Dále je matice $[S]_e$ rozepsána včetně její inverzní matice $[S]_e^{-1}$.

$$[S]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & L^3 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -2L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3L^2 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S]_e^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & +\frac{2}{L^3} & 0 & -\frac{1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L^3} & 0 & -\frac{1}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & +\frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & +\frac{3}{L^2} & 0 & +\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & +\frac{3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4 Potenciální energie deformace a matice tuhosti elementu

V souladu se vztahem 4.1.1 můžeme pro potenciální energii deformace elementu napsat vztah (vynecháme čárku, kterou jsme používali)

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\sigma]^T [\varepsilon] d\Omega$$

5.4.1

Potenciální energie deformace prutového elementu se v zásadě skládá ze dvou složek. Složka vyplývající z normálového napětí σ_x rovnoběžného s lokální osou x (působí v řezu kolmém k ose prutu) a příslušného přetvoření ε_x . Dále $\sigma_y = \sigma_z = 0 \Rightarrow$ nulová potenciální energie deformace. Ze smykových napětí jsme zanedbali práci posouvajících sil, takže zbývá potenciální energie deformace od smykových napětí a přetvoření od kroucení.

Pro potenciální energii deformace od normálových napětí použijeme vztahy 3.3.2 a 3.3.3.

$$\varepsilon_x = u' - yv'' - zw''$$

$$\sigma_x = E(u' - yv'' - zw'')$$

Potom můžeme psát

$$\begin{aligned}
 \Pi'_e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \sigma_x \varepsilon_x d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} E(u' - yv'' - zw'')^2 d\Omega = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} E(u'^2 + y^2 v''^2 + z^2 w''^2 - 2yu'v'' - 2zu'w'' + 2yzv''w'') d\Omega = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L Eu'^2 \left[\int_A dA \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L Ev''^2 \left[\int_A y^2 dA \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L Ew''^2 \left[\int_A z^2 dA \right] dx + \\
 &\quad - \int_0^L Eu'v'' \left[\int_A y dA \right] dx - \int_0^L Eu'w'' \left[\int_A z dA \right] dx + \int_0^L Ev''w'' \left[\int_A yz dA \right] dx
 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že osy y a z jsou hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu a tudíž platí vztahy 3.1.1 a 3.1.2, poslední tři integrály se rovnají 0.

Přidáme-li ke zbylým integrálům vztah pro potenciální energii deformace pro kroucení a nahradíme-li integrály po ploše prvku zavedenými symboly, tak dostáváme konečný výraz pro celkovou potenciální energii deformace prutového elementu

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} \int_0^L EAu'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_y w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GJ_K \omega_x'^2 dx$$

5.4.2

Zavedeme-li vektor

$$[\varepsilon^*]_e = [u', v'', w'', \omega'_x]^T$$

5.4.3

a matici

$$[D^*]_e = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_K \end{bmatrix}$$

5.4.4

potom můžeme potenciální energii deformace elementu psát ve tvaru

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon^*]_e^T [D^*]_e [\varepsilon^*]_e dx$$

5.4.5

Derivace funkcí posunů a natočení jsou

$$u' = a_1$$

$$v'' = 6a_2 x + 2a_6$$

5.4.6

$$w'' = 6a_3x + 2a_5$$

$$\omega'_x = a_4$$

Zapsáno maticově

$$[\varepsilon^*]_e = [B]_e [a]_e$$

5.4.7

kde

$$[B]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6x & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6x & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.8

Potom se dá potenciální energie deformace zapsat ve tvaru

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} \int_0^L [a]_e^T [B]_e^T [D^*]_e [B]_e [a]_e dx$$

5.4.9

A po zavedení parametrů deformace

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} \int_0^L [\Delta]_e^T [S]_e^{-1T} [B]_e^T [D^*]_e [B]_e [S]_e^{-1} [\Delta]_e dx$$

5.4.10

Součiny matic $[B]_e[S]_e^{-1}$ a $[D^*]_e[B]_e[S]_e^{-1}$ mají tvar

$$[B]_e[S]_e^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} & 0 & -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.11

$$[D^*]_e[B]_e[S]_e^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}) & 0 & 0 & 0 & EI_z(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}) & 0 & EI_z(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}) & 0 & 0 & 0 & EI_z(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}) \\ 0 & 0 & EI_y(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}) & 0 & EI_y(-\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L}) & 0 & 0 & 0 & EI_y(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}) & 0 & EI_y(-\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_K}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_K}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.12

Součin matic $[S]_e^{-1T} [B]_e^T [D^*]_e [B]_e [S]_e^{-1}$ má tvar

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z P & 0 & 0 & 0 & EI_z B & 0 & -EI_z P & 0 & 0 & 0 & EI_z C \\ 0 & 0 & EI_y P & 0 & -EI_y B & 0 & 0 & 0 & -EI_y P & 0 & -EI_y C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_K}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_K}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_y B & 0 & EI_y H & 0 & 0 & 0 & EI_y B & 0 & EI_y H & 0 \\ 0 & EI_z B & 0 & 0 & 0 & EI_z D & 0 & -EI_z B & 0 & 0 & 0 & EI_z H \\ -\frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EI_z P & 0 & 0 & 0 & -EI_z B & 0 & -EI_z P & 0 & 0 & 0 & -EI_z C \\ 0 & 0 & -EI_y P & 0 & EI_y B & 0 & 0 & 0 & EI_y P & 0 & EI_y C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_K}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_K}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_y C & 0 & EI_y H & 0 & 0 & 0 & EI_y C & 0 & EI_y N & 0 \\ 0 & EI_z C & 0 & 0 & 0 & EI_z H & 0 & -EI_z C & 0 & 0 & 0 & EI_z N \end{bmatrix} \quad 5.4.13$$

kde

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right)^2 = \frac{144x^2}{L^6} - \frac{144x}{L^5} + \frac{36}{L^4} & \Rightarrow \int_0^L P dx &= \frac{12}{L^3} \\ B &= \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) = \frac{72x^2}{L^5} - \frac{84x}{L^4} + \frac{24}{L^3} & \Rightarrow \int_0^L B dx &= \frac{6}{L^2} \\ C &= \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) = \frac{72x^2}{L^5} - \frac{60x}{L^4} + \frac{12}{L^3} & \Rightarrow \int_0^L C dx &= \frac{6}{L^2} \\ D &= \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \right)^2 = \frac{36x^2}{L^4} - \frac{48x}{L^3} + \frac{16}{L^2} & \Rightarrow \int_0^L D dx &= \frac{4}{L} \\ H &= \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \right) = \frac{36x^2}{L^4} - \frac{36x}{L^3} + \frac{8}{L^2} & \Rightarrow \int_0^L H dx &= \frac{2}{L} \\ N &= \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \right)^2 = \frac{36x^2}{L^4} - \frac{24x}{L^3} + \frac{4}{L^2} & \Rightarrow \int_0^L N dx &= \frac{4}{L} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že parametry deformace jsou pouze časové funkce, lze vztah 5.4.10 upravit takto

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} [\Delta]_e'^T \left[\int_0^L [S]_e^{-1T} [B]_e^T [D^*]_e [B]_e [S]_e^{-1} dx \right] [\Delta]_e' \quad 5.4.14$$

a provést integraci.

Jestliže platí

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} [\Delta]_e'^T [K]_e' [\Delta]_e' \quad 5.4.15$$

potom matice

$$[K]_e' = \int_0^L [S]_e^{-1T} [B]_e^T [D^*]_e [B]_e [S]_e^{-1} dx$$

5.4.16

je matice tuhosti prutového elementu v lokální souřadné soustavě elementu a je rovna

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ \frac{GJ_K}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_K}{L} & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ \frac{GJ_K}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sym.

5.4.17

5.5 Kinetická energie a matice hmotnosti elementu

V souladu se vztahem 4.1.3 můžeme pro kinetickou energii elementu napsat vztah

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho [U \cdot]_e^T [U \cdot]_e d\Omega$$

5.5.1

Dále budeme posuny libovolného bodu tělesa prutového elementu označovat velkými písmeny

$U(x, y, z, t)$ posun libovolného bodu tělesa prutového elementu ve směru osy x

$V(x, y, z, t)$ posun libovolného bodu tělesa prutového elementu ve směru osy y

$W(x, y, z, t)$ posun libovolného bodu tělesa prutového elementu ve směru osy z

a posuny bodů osy prutu budeme i nadále označovat malými písmeny.

Oba typy posunů budou seřazeny do vektorů.

$$[U]_e = [U_{(x,y,z,t)}, V_{(x,y,z,t)}, W_{(x,y,z,t)}]^T \quad 5.5.2$$

$$[u]_e = [u_{(x,t)}, v_{(x,t)}, w_{(x,t)}]^T$$

Taktéž do vektorů budou seřazeny rychlosti

$$[U\cdot]_e = \left[\frac{\partial U_{(x,y,z,t)}}{\partial t}, \frac{\partial V_{(x,y,z,t)}}{\partial t}, \frac{\partial W_{(x,y,z,t)}}{\partial t} \right]^T = [U\cdot, V\cdot, W\cdot]^T \quad 5.5.3$$

$$[u\cdot]_e = \left[\frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial t}, \frac{\partial v_{(x,t)}}{\partial t}, \frac{\partial w_{(x,t)}}{\partial t} \right]^T = [u\cdot, v\cdot, w\cdot]^T$$

Náhradní funkce pro posuny u , v , w a natočení ω_x budou uvažovány stejně jako při odvození matice tuhosti.

$$\begin{aligned} u_{(x,t)} &= a_{1(t)} \cdot x + a_{7(t)} \\ v_{(x,t)} &= a_{2(t)} \cdot x^3 + a_{6(t)} x^2 + a_{12(t)} \cdot x + a_{8(t)} \\ w_{(x,t)} &= a_{3(t)} \cdot x^3 + a_{5(t)} x^2 + a_{11(t)} \cdot x + a_{9(t)} \\ \omega_{x(x,t)} &= a_{4(t)} \cdot x + a_{10(t)} \end{aligned} \quad 5.5.4$$

Podle Bernoulli-Navierovy hypotézy je potom natočení průřezu

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{(x,t)}}{\partial x} &= v'_{(x,t)} = 3a_{2(t)} x^2 + 2a_{6(t)} x + a_{12(t)} \\ \frac{\partial w_{(x,t)}}{\partial x} &= w'_{(x,t)} = 3a_{3(t)} \cdot x^2 + 2a_{5(t)} x + a_{11(t)} \end{aligned} \quad 5.5.5$$

Z průběhu funkcí u , v , w , ω_x lze určit průběh funkcí U , V , W v libovolném bodě (x, y, z) těles prutového elementu.

$$U_{(x,y,z,t)} = u_{(x,t)} - y \frac{\partial v_{(x,t)}}{\partial x} - z \frac{\partial w_{(x,t)}}{\partial x} = u_{(x,t)} - y v'_{(x,t)} - z w'_{(x,t)} \quad 5.5.6$$

$$V_{(x,y,z,t)} = v_{(x,t)} - z \cdot \omega_{x(x,t)}$$

$$W_{(x,y,z,t)} = w_{(x,t)} + y \cdot \omega_{x(x,t)}$$

Po dosazení vztahů 5.5.4 a 5.5.5 do 5.5.6 dostáváme (opět pro přehlednost budeme zapisovat $a_i = a_{i(t)}$, popř. $U_{(x,y,z,t)} = U$ atd.

$$U = a_1 \cdot x + a_7 - 3a_2 \cdot x^2 y - 2a_6 xy - a_{12} y - 3a_3 \cdot x^2 z - 2a_5 xz - a_{11} z$$

$$V = a_2 x^3 + a_6 x^2 + a_{12} x + a_8 - a_4 xz - a_{10} z$$

$$W = a_3 x^3 + a_5 x^2 + a_{11} x + a_9 + a_4 xy - a_{10} y$$

5.5.7

Pokud nadefinujeme matici $[B]_e$ vztahem

$$[U]_e = [B]_e [a]_e$$

5.5.8

Tak matice $[B]_e$ má tvar

$$[B]_e = \begin{bmatrix} x & -3x^2 y & -3x^2 z & 0 & -2xz & -2xy & 1 & 0 & 0 & 0 & -z & -y \\ 0 & x^3 & 0 & -xz & 0 & x^2 & 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & x^3 & xy & x^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & x & 0 \end{bmatrix}$$

5.5.9

Protože pro rychlosti platí

$$[U \cdot]_e = [B]_e [a \cdot]_e$$

5.5.10

kde

$$[a \cdot]_e = \left[\frac{da_{1(t)}}{dt}, \frac{da_{2(t)}}{dt}, \dots, \frac{da_{12(t)}}{dt} \right]_e = [a_{1(t)}, a_{2(t)}, \dots, a_{12(t)}]^T$$

5.5.11

a vzhledem ke vztahu 5.3.5, z něhož vyplývá vztah

$$[a \cdot]_e = [S]_e^{-1} [\Delta \cdot]'_e$$

kde

$$[\Delta \cdot]'_e = \left[\frac{d\Delta_{1(t)}}{dt}, \frac{d\Delta_{2(t)}}{dt}, \dots, \frac{d\Delta_{12(t)}}{dt} \right]_e'^T = [\Delta_{1(t)}, \Delta_{2(t)}, \dots, \Delta_{12(t)}]^T$$

5.5.12

můžeme pro kinetickou energii prutového prvku psát

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho [U \cdot]^T [U \cdot] d\Omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega_e} [a \cdot]^T [B]_e^T [B]_e [a \cdot]_e d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho [\Delta \cdot]'_e^T [S]_e^{-1T} [B]_e^T [B]_e [S]_e^{-1} [\Delta \cdot]'_e d\Omega \end{aligned}$$

5.5.13

Vzhledem k tomu, že jsme předpokládali, že ρ je po objemu prutového elementu konstantní a vektor $[\Delta']_e'$ je vektor rychlostí parametrů deformace, které jsou závislé pouze na čase, můžeme psát

$$K_e = \frac{1}{2} \rho [\Delta']_e'^T \int_{\Omega_e} [S]_e^{-1T} [B]_e^T [B]_e [S]_e^{-1} d\Omega [\Delta']_e' = \frac{1}{2} [\Delta']_e'^T [M]_e' [\Delta']_e' \quad 5.5.14$$

kde $[M]_e'$ je konsistentní matice hmotnosti.

Horní index čárka u matic $[M]_e'$ a vektoru $[\Delta']_e'$ znamená, že se vztahují k lokálnímu souřadnému systému prutového elementu. Matice $[B]_e [S]_e^{-1}$ má tvar

$$[B]_e [S]_e^{-1} = \begin{bmatrix} -A & -Cy & -Cz & 0 & Ez & -Ey & B & Cy & Cz & 0 & Kz & -Ky \\ 0 & D & 0 & Az & 0 & F & 0 & -G & 0 & -Bz & 0 & H \\ 0 & 0 & D & -Ay & -F & 0 & 0 & 0 & -G & By & -H & 0 \end{bmatrix} \quad 5.5.15$$

kde

$$A = \frac{x}{L} - 1$$

$$B = \frac{x}{L}$$

$$C = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2}$$

$$D = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1$$

$$E = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1$$

$$F = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x$$

$$G = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2}$$

$$H = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

$$K = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Po vynásobení matice $([B]_e [S]_e^{-1})$ zleva její maticí transponovanou dostáváme matici rozměru 12x12, kterou pracovně označíme $[A]$. Matice je samozřejmě symetrická a proto uvedeme pouze její diagonálu a naddiagonální část. Jednotlivé prvky matice jsou polynomy, a proto vždy jeden prvek uvedeme na jeden řádek.

$$A_{1,1} = \frac{x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} + 1$$

$$A_{1,2} = \frac{6x^3y}{L^4} - \frac{12x^2y}{L^3} + \frac{6xy}{L^2}$$

$$A_{1,3} = \frac{6x^3z}{L^4} - \frac{12x^2z}{L^3} + \frac{6xz}{L^2}$$

$$A_{1,4} = 0$$

$$A_{1,5} = -\frac{3x^3z}{L^3} + \frac{7x^2z}{L^2} - \frac{5xz}{L} + z$$

$$A_{1,6} = \frac{3x^3y}{L^3} - \frac{7x^2y}{L^2} + \frac{5xy}{L} - y$$

$$A_{1,7} = \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}$$

$$A_{1,8} = -\frac{6x^3y}{L^4} + \frac{12x^2y}{L^3} - \frac{6xy}{L^2}$$

$$A_{1,9} = -\frac{6x^3z}{L^4} + \frac{12x^2z}{L^3} - \frac{6xz}{L^2}$$

$$A_{1,10} = 0$$

$$A_{1,11} = -\frac{3x^3z}{L^3} + \frac{5x^2z}{L^2} - \frac{2xz}{L}$$

$$A_{1,12} = \frac{3x^3y}{L^3} - \frac{5x^2y}{L^2} + \frac{2xy}{L}$$

$$A_{2,2} = 1 - \frac{6x^2}{L^2} + \frac{4x^3}{L^3} + \frac{9x^4}{L^4} - \frac{12x^5}{L^5} + \frac{4x^6}{L^6} + \frac{36x^2y^2}{L^4} - \frac{72x^3y^2}{L^5} + \frac{36x^4y^2}{L^6}$$

$$A_{2,3} = \frac{36x^2yz}{L^4} - \frac{72x^3yz}{L^5} + \frac{36x^4yz}{L^6}$$

$$A_{2,4} = -z + \frac{xz}{L} + \frac{3x^2z}{L^2} - \frac{5x^3z}{L^3} + \frac{2x^4z}{L^4}$$

$$A_{2,5} = \frac{6xyz}{L^2} - \frac{30x^2yz}{L^3} + \frac{42x^3yz}{L^4} - \frac{18x^4yz}{L^5}$$

$$A_{2,6} = x - \frac{2x^2}{L} - \frac{2x^3}{L^2} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{7x^5}{L^4} + \frac{2x^6}{L^5} - \frac{6xy^2}{L^2} + \frac{30x^2y^2}{L^3} - \frac{42x^3y^2}{L^4} + \frac{18x^4y^2}{L^5}$$

$$A_{2,7} = \frac{6x^2y}{L^3} - \frac{6x^3y}{L^4}$$

$$A_{2,8} = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} - \frac{9x^4}{L^4} + \frac{12x^5}{L^5} - \frac{4x^6}{L^6} - \frac{36x^2y^2}{L^4} + \frac{72x^3y^2}{L^5} - \frac{36x^4y^2}{L^6}$$

$$A_{2,9} = -\frac{36x^2yz}{L^4} + \frac{72x^3yz}{L^5} - \frac{36x^4yz}{L^6}$$

$$A_{2,10} = -\frac{xz}{L} + \frac{3x^3z}{L^3} - \frac{2x^4z}{L^4}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,11} &= -\frac{12x^2yz}{L^3} + \frac{30x^3yz}{L^4} - \frac{18x^4yz}{L^5} \\
A_{2,12} &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} + \frac{3x^4}{L^3} - \frac{5x^5}{L^4} + \frac{2x^6}{L^5} + \frac{12x^2y^2}{L^3} - \frac{30x^3y^2}{L^4} + \frac{18x^4y^2}{L^5} \\
A_{3,3} &= 1 - \frac{6x^2}{L^2} + \frac{4x^3}{L^3} + \frac{9x^4}{L^4} - \frac{12x^5}{L^5} + \frac{4x^6}{L^6} + \frac{36x^2z^2}{L^4} - \frac{72x^3z^2}{L^5} + \frac{36x^4z^2}{L^6} \\
A_{3,4} &= y - \frac{xy}{L} - \frac{3x^2y}{L^2} + \frac{5x^3y}{L^3} - \frac{2x^4y}{L^4} \\
A_{3,5} &= -x + \frac{2x^2}{L} + \frac{2x^3}{L^2} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{7x^5}{L^4} - \frac{2x^6}{L^5} + \frac{6xz^2}{L^2} - \frac{30x^2z^2}{L^3} + \frac{42x^3z^2}{L^4} - \frac{18x^4z^2}{L^5} \\
A_{3,6} &= -\frac{6xyz}{L^2} + \frac{30x^2yz}{L^3} - \frac{42x^3yz}{L^4} + \frac{18x^4yz}{L^5} \\
A_{3,7} &= \frac{6x^2z}{L^3} - \frac{6x^3z}{L^4} \\
A_{3,8} &= -\frac{36x^2yz}{L^4} + \frac{72x^3yz}{L^5} - \frac{36x^4yz}{L^6} \\
A_{3,9} &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} - \frac{9x^4}{L^4} + \frac{12x^5}{L^5} - \frac{4x^6}{L^6} - \frac{36x^2z^2}{L^4} + \frac{72x^3z^2}{L^5} - \frac{36x^4z^2}{L^6} \\
A_{3,10} &= \frac{xy}{L} - \frac{3x^3y}{L^3} + \frac{2x^4y}{L^4} \\
A_{3,11} &= \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} - \frac{3x^4}{L^3} + \frac{5x^5}{L^4} - \frac{2x^6}{L^5} - \frac{12x^2z^2}{L^3} + \frac{30x^3z^2}{L^4} - \frac{18x^4z^2}{L^5} \\
A_{3,12} &= \frac{12x^2yz}{L^3} - \frac{30x^3yz}{L^4} + \frac{18x^4yz}{L^5} \\
A_{4,4} &= y^2 - \frac{2xy^2}{L} + \frac{x^2y^2}{L^2} + z^2 - \frac{2xz^2}{L} + \frac{x^2z^2}{L^2} \\
A_{4,5} &= -xy + \frac{3x^2y}{L} - \frac{3x^3y}{L^2} + \frac{x^4y}{L^3} \\
A_{4,6} &= -xz + \frac{3x^2z}{L} - \frac{3x^3z}{L^2} + \frac{x^4z}{L^3} \\
A_{4,7} &= 0 \\
A_{4,8} &= -\frac{3x^2z}{L^2} + \frac{5x^3z}{L^3} - \frac{2x^4z}{L^4} \\
A_{4,9} &= \frac{3x^2y}{L^2} - \frac{5x^3y}{L^3} + \frac{2x^4y}{L^4} \\
A_{4,10} &= \frac{xy^2}{L} - \frac{x^2y^2}{L^2} + \frac{xz^2}{L} - \frac{x^2z^2}{L^2}
\end{aligned}$$

$$A_{4,11} = \frac{x^2y}{L} - \frac{2x^3y}{L^2} + \frac{x^4y}{L^3}$$

$$A_{4,12} = \frac{x^2z}{L} - \frac{2x^3z}{L^2} + \frac{x^4z}{L^3}$$

$$A_{5,5} = x^2 - \frac{4x^3}{L} + \frac{6x^4}{L^2} - \frac{4x^5}{L^3} + \frac{x^6}{L^4} + z^2 - \frac{8xz^2}{L} + \frac{22x^2z^2}{L^2} - \frac{24x^3z^2}{L^3} + \frac{9x^4z^2}{L^4}$$

$$A_{5,6} = -yz + \frac{8xyz}{L} - \frac{22x^2yz}{L^2} + \frac{24x^3yz}{L^3} - \frac{9x^4yz}{L^4}$$

$$A_{5,7} = \frac{xz}{L} - \frac{4x^2z}{L^2} + \frac{3x^3z}{L^3}$$

$$A_{5,8} = -\frac{6xyz}{L^2} + \frac{30x^2yz}{L^3} - \frac{42x^3yz}{L^4} + \frac{18x^4yz}{L^5}$$

$$A_{5,9} = -\frac{3x^3}{L^2} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{7x^5}{L^4} + \frac{2x^6}{L^5} - \frac{6xz^2}{L^2} + \frac{30x^2z^2}{L^3} - \frac{42x^3z^2}{L^4} + \frac{18x^4z^2}{L^5}$$

$$A_{5,10} = -\frac{x^2y}{L} + \frac{2x^3y}{L^2} - \frac{x^4y}{L^3}$$

$$A_{5,11} = -\frac{x^3}{L} + \frac{3x^4}{L^2} - \frac{3x^5}{L^3} + \frac{x^6}{L^4} - \frac{2xz^2}{L} + \frac{11x^2z^2}{L^2} - \frac{18x^3z^2}{L^3} + \frac{9x^4z^2}{L^4}$$

$$A_{5,12} = \frac{2xyz}{L} - \frac{11x^2yz}{L^2} + \frac{18x^3yz}{L^3} - \frac{9x^4yz}{L^4}$$

$$A_{6,6} = x^2 - \frac{4x^3}{L} + \frac{6x^4}{L^2} - \frac{4x^5}{L^3} + \frac{x^6}{L^4} + y^2 - \frac{8xy^2}{L} + \frac{22x^2y^2}{L^2} - \frac{24x^3y^2}{L^3} + \frac{9x^4y^2}{L^4}$$

$$A_{6,7} = -\frac{xy}{L} + \frac{4x^2y}{L^2} - \frac{3x^3y}{L^3}$$

$$A_{6,8} = \frac{3x^3}{L^2} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{7x^5}{L^4} - \frac{2x^6}{L^5} + \frac{6xy^2}{L^2} - \frac{30x^2y^2}{L^3} + \frac{42x^3y^2}{L^4} - \frac{18x^4y^2}{L^5}$$

$$A_{6,9} = \frac{6xyz}{L^2} - \frac{30x^2yz}{L^3} + \frac{42x^3yz}{L^4} - \frac{18x^4yz}{L^5}$$

$$A_{6,10} = -\frac{x^2z}{L} + \frac{2x^3z}{L^2} - \frac{x^4z}{L^3}$$

$$A_{6,11} = \frac{2xyz}{L} - \frac{11x^2yz}{L^2} + \frac{18x^3yz}{L^3} - \frac{9x^4yz}{L^4}$$

$$A_{6,12} = -\frac{x^3}{L} + \frac{3x^4}{L^2} - \frac{3x^5}{L^3} + \frac{x^6}{L^4} - \frac{2xy^2}{L} + \frac{11x^2y^2}{L^2} - \frac{18x^3y^2}{L^3} + \frac{9x^4y^2}{L^4}$$

$$A_{7,7} = \frac{x^2}{L^2}$$

$$A_{7,8} = -\frac{6x^2y}{L^3} + \frac{6x^3y}{L^4}$$

$$A_{7,9} = -\frac{6x^2z}{L^3} + \frac{6x^3z}{L^4}$$

$$A_{7,10} = 0$$

$$A_{7,11} = -\frac{2x^2z}{L^2} + \frac{3x^3z}{L^3}$$

$$A_{7,12} = \frac{2x^2y}{L^2} - \frac{3x^3y}{L^3}$$

$$A_{8,8} = \frac{9x^4}{L^4} - \frac{12x^5}{L^5} + \frac{4x^6}{L^6} + \frac{36x^2y^2}{L^4} - \frac{72x^3y^2}{L^5} + \frac{36x^4y^2}{L^6}$$

$$A_{8,9} = \frac{36x^2yz}{L^4} - \frac{72x^3yz}{L^5} + \frac{36x^4yz}{L^6}$$

$$A_{8,10} = -\frac{3x^3z}{L^3} + \frac{2x^4z}{L^4}$$

$$A_{8,11} = \frac{12x^2yz}{L^3} - \frac{30x^3yz}{L^4} + \frac{18x^4yz}{L^5}$$

$$A_{8,12} = -\frac{3x^4}{L^3} + \frac{5x^5}{L^4} - \frac{2x^6}{L^5} - \frac{12x^2y^2}{L^3} + \frac{30x^3y^2}{L^4} - \frac{18x^4y^2}{L^5}$$

$$A_{9,9} = \frac{9x^4}{L^4} - \frac{12x^5}{L^5} + \frac{4x^6}{L^6} + \frac{36x^2z^2}{L^4} - \frac{72x^3z^2}{L^5} + \frac{36x^4z^2}{L^6}$$

$$A_{9,10} = \frac{3x^3y}{L^3} - \frac{2x^4y}{L^4}$$

$$A_{9,11} = \frac{3x^4}{L^3} - \frac{5x^5}{L^4} + \frac{2x^6}{L^5} + \frac{12x^2z^2}{L^3} - \frac{30x^3z^2}{L^4} + \frac{18x^4z^2}{L^5}$$

$$A_{9,12} = -\frac{12x^2yz}{L^3} + \frac{30x^3yz}{L^4} - \frac{18x^4yz}{L^5}$$

$$A_{10,10} = \frac{x^2y^2}{L^2} + \frac{x^2z^2}{L^2}$$

$$A_{10,11} = \frac{x^3y}{L^2} - \frac{x^4y}{L^3}$$

$$A_{10,12} = \frac{x^3z}{L^2} - \frac{x^4z}{L^3}$$

$$A_{11,11} = \frac{x^4}{L^2} - \frac{2x^5}{L^3} + \frac{x^6}{L^4} + \frac{4x^2z^2}{L^2} - \frac{12x^3z^2}{L^3} + \frac{9x^4z^2}{L^4}$$

$$A_{11,12} = -\frac{4x^2yz}{L^2} + \frac{12x^3yz}{L^3} - \frac{9x^4yz}{L^4}$$

$$A_{12,12} = \frac{x^4}{L^2} - \frac{2x^5}{L^3} + \frac{x^6}{L^4} + \frac{4x^2y^2}{L^2} - \frac{12x^3y^2}{L^3} + \frac{9x^4y^2}{L^4}$$

Konzistentní matici hmotnosti potom dostaneme integrací matice $[A]$

$$[M]_e' = \rho \int_{\Omega_e} [S]_e^{-1T} [B]_e^T [B]_e [S]_e^{-1} d\Omega = \rho \int_{\Omega_e} [A] d\Omega = \rho \int_0^L \int_A [A] dA dx$$

5.5.17

Vzhledem ke skutečnosti, že v průřezu prutového elementu jsou hlavní centrální osy setrvačnosti totožné se souřadným systémem (lokální osy y, z), pro integrály po ploše průřezu platí

$$\int_A y dA = \int_A z dA = \int_A yz dA = 0$$

Pro přehlednost je matice hmotnosti uvedena jako součet dvou matic

$$[M]_e' = [MT]_e' + [MR]_e'$$

5.5.18

Matice $[MT]_e'$ zahrnuje vliv posunů osy prutového elementu ve směru os x, y, z a dále zahrnuje rotace kolem osy x – osa elementu (kroucení). Matice $[MR]_e'$ zahrnuje vliv rotací kolem os y, z (rotace od ohybu).

V maticích symboly znamenají:

ρ objemová hmotnost elementu

L délka elementu

$A = \int_A dA$ průřezová plocha elementu

$I_y = \int_A z^2 dA$ kvadratický moment setrvačnosti k ose y

$I_z = \int_A y^2 dA$ kvadratický moment setrvačnosti k ose z

$I_p = I_y + I_z$ polární moment setrvačnosti

V literatuře bývá většinou uváděna pouze matice $[MT]_e'$.

Dále bylo také pracováno (pro porovnání) s tzv. maticí soustředěných hmotností, která má nenulové členy pouze na diagonále.

Diagonální členy matice soustředěných hmotností odpovídající posunům tedy pozice (1,1), (2,2), (3,3), (7,7), (8,8), (9,9) mají velikost poloviny hmotnosti elementu ($0,5\rho AL$). Ostatní byly doplněny z diagonálních členů konzistentní matice hmotnosti $[M]_e'$, aby byla matice pozitivně definitní.

$$[MT]_e' = \frac{\rho AL}{420} \cdot \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140 \frac{I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \frac{I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 \frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

5.5.19

$$[MR]_e' = \frac{\rho}{30L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36I_z & 0 & 0 & 0 & 3LI_z & 0 & -3LI_z & 0 & 0 & 0 & 3LI_z \\ 0 & 0 & 36I_y & 0 & -3LI_y & 0 & 0 & 0 & -36I_y & 0 & -3LI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3LI_y & 0 & 4L^2I_y & 0 & 0 & 0 & 3LI_y & 0 & -L^2I_y & 0 \\ 0 & 3LI_z & 0 & 0 & 0 & 4L^2I_z & 0 & -3LI_z & 0 & 0 & 0 & -L^2I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36I_z & 0 & 0 & 0 & -3LI_z & 0 & 36I_z & 0 & 0 & 0 & -3LI_z \\ 0 & 0 & -36I_y & 0 & 3LI_y & 0 & 0 & 0 & 36I_y & 0 & 3LI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3LI_y & 0 & -L^2I_y & 0 & 0 & 0 & 3LI_y & 0 & 4L^2I_y & 0 \\ 0 & 3LI_z & 0 & 0 & 0 & -L^2I_z & 0 & -3LI_z & 0 & 0 & 0 & 4L^2I_z \end{bmatrix}$$

5.5.20

5.6 Transformace souřadnic

5.6.1 Transformace souřadnic obecně

Mějme 3 ortogonální pravotočivé souřadné soustavy.

Označení souřadných os v jednotlivých souřadných soustavách je následující:

1. souřadná soustava osy x, y, z
2. souřadná soustava osy $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
3. souřadná soustava osy X, Y, Z

5.6.1.1

Dále mějme vektor.

Tento necht' má v jednotlivých souřadných soustavách následující složky:

1. souřadná soustava $[a] = [a_x, a_y, a_z]^T$
2. souřadná soustava $[\bar{a}] = [\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z]^T$
3. souřadná soustava $[A] = [A_x, A_y, A_z]^T$

5.6.1.2

Vzájemná pozice souřadných soustav je dána dvěma vztahy.

- a) pozice 1. souřadné soustavy vzhledem ke 2. souřadné soustavě

osa x vzhledem k osám $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - $\cos x\bar{x}, \cos x\bar{y}, \cos x\bar{z}$

osa y vzhledem k osám $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - $\cos y\bar{x}, \cos y\bar{y}, \cos y\bar{z}$

osa z vzhledem k osám $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - $\cos z\bar{x}, \cos z\bar{y}, \cos z\bar{z}$

- b) pozice 2. souřadné soustavy vzhledem k 3. souřadné soustavě

osa $\bar{x}$ vzhledem k osám X, Y, Z - $\cos \bar{x}X, \cos \bar{x}Y, \cos \bar{x}Z$

osa $\bar{y}$ vzhledem k osám X, Y, Z - $\cos \bar{y}X, \cos \bar{y}Y, \cos \bar{y}Z$

osa $\bar{z}$ vzhledem k osám X, Y, Z - $\cos \bar{z}X, \cos \bar{z}Y, \cos \bar{z}Z$

Potom vztah složek jednoho vektoru (viz označení 5.6.1.2) v souřadných soustavách 5.6.1.1 je následující

$$a_x = \bar{a}_x \cos x\bar{x} + \bar{a}_y \cos x\bar{y} + \bar{a}_z \cos x\bar{z}$$

$$a_y = \bar{a}_x \cos y\bar{x} + \bar{a}_y \cos y\bar{y} + \bar{a}_z \cos y\bar{z}$$

$$a_z = \bar{a}_x \cos z\bar{x} + \bar{a}_y \cos z\bar{y} + \bar{a}_z \cos z\bar{z}$$

5.6.1.3

Zapsáno maticově

$$[a] = [T1][\bar{a}]$$

5.6.1.4

kde

$$[T1] = \begin{bmatrix} \cos x\bar{x} & \cos x\bar{y} & \cos x\bar{z} \\ \cos y\bar{x} & \cos y\bar{y} & \cos y\bar{z} \\ \cos z\bar{x} & \cos z\bar{y} & \cos z\bar{z} \end{bmatrix}$$

5.6.1.5

a dále

$$\bar{a}_x = A_x \cos \bar{x}X + A_y \cos \bar{x}Y + A_z \cos \bar{x}Z$$

$$\bar{a}_y = A_x \cos \bar{y}X + A_y \cos \bar{y}Y + A_z \cos \bar{y}Z$$

$$\bar{a}_z = A_x \cos \bar{z}X + A_y \cos \bar{z}Y + A_z \cos \bar{z}Z$$

5.6.1.6

Zapsáno maticově

$$[\bar{a}] = [T2][A]$$

5.6.1.7

kde

$$[T2] = \begin{bmatrix} \cos \bar{x}X & \cos \bar{x}Y & \cos \bar{x}Z \\ \cos \bar{y}X & \cos \bar{y}Y & \cos \bar{y}Z \\ \cos \bar{z}X & \cos \bar{z}Y & \cos \bar{z}Z \end{bmatrix}$$

5.6.1.8

Vztah mezi $[a]$ a $[A]$ je následující

$$[a] = [T1][\bar{a}] = [T1][T2][A]$$

5.6.1.9

5.6.2 Transformace souřadnic pro prutový element

V odst. 5.2 je popsána lokální souřadná soustava prutového elementu a její definice v globální souřadné soustavě celé prutové konstrukce. Označme osy globální souřadné soustavy X, Y, Z a osy lokální souřadné soustavy prutového elementu x, y, z (konečná souř. soustava po natočení). Z odst. 5.2 plyne, že definicí počátečního a koncového bodu prutového elementu definujeme v souladu s pravidly v odst. 5.2 souřadnou soustavu prutového elementu, ale ta ještě nemusí být definitivní. Dále ještě může dojít k pootočení os y a z kolem osy prutu (osa x) a potom teprve máme definovanou lokální souřadnou soustavu prutového elementu x, y, z . Označme osy souřadné soustavy získané v prvním kroku, tedy definované počátečním a koncovým bodem prutového elementu jako $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Známe tedy globální souřadnou soustavu X, Y, Z (velká písmena) v ní nadefinujeme polohu počátečního a koncového bodu prutového elementu a pomocí pravidel odst. 5.2 získáme souř. soustavu $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (malá písmena s pruhem). Dále po event. natočení prutového prvku kolem osy prutu získáme konečnou lokální souřadnou soustavu prutového elementu x, y, z (malá písmena).

Pozice souřadné soustavy $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ vzhledem k souřadné soustavě X, Y, Z

X_B, Y_B, Z_B – souřadnice počátečního uzlu prutového elementu v globální souřadné soustavě X, Y, Z (begin)

X_E, Y_E, Z_E – souřadnice koncového uzlu prutového elementu v globální souřadné soustavě X, Y, Z (end)

Tímto je definována osa $\bar{x}$ (osa prutu) a zároveň osa x neboť eventuálním pootočením prutu kolem své osy se pozice prutu nemění.

Orientace osy $\bar{x}$ je od počátečního do koncového uzlu.

Vzdálenost uzlů (délka prutového elementu)

$$L_{BE} = \sqrt{(X_E - X_B)^2 + (Y_E - Y_B)^2 + (Z_E - Z_B)^2}$$

5.6.2.1

Směrové kosiny osy $\bar{x}$ vzhledem k souřadné soustavě X, Y, Z

$$\cos \bar{x}X = \frac{X_E - X_B}{L_{BE}}$$

$$\cos \bar{x}Y = \frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}}$$

$$\cos \bar{x}Z = \frac{Z_E - Z_B}{L_{BE}}$$

5.6.2.2

Platí-li $X_B \neq X_E$ nebo $Y_B \neq Y_E$ (tzn. osa $\bar{x}$ není rovnoběžná s osou Z), potom hledaná osa $\bar{z}$ leží v rovině definované osou $\bar{x}$ a osou Z (globální) a to tak, že svírá s osou Z ostrý úhel.

Pro vektory os souřadné soustavy platí

$$[\bar{z}] \times [\bar{x}] = [\bar{y}] \quad ([\bar{x}] \times [\bar{z}] = [-\bar{y}]) \quad 5.6.2.3$$

kde

$[\bar{x}], [\bar{y}], [\bar{z}] \dots\dots$ jednotkové vektory souřadných os $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ definované v souřadné soustavě X, Y, Z

Tyto vektory mohou být samozřejmě definovány v jakékoliv souřadné soustavě a vztah 5.6.2.2 by vždy platil, ale my hledáme jejich pozice vzhledem ke globální souřadné soustavě X, Y, Z .

Vztah 5.6.2.3 znamená vektorový součin vektorů $[\bar{z}]$ a $[\bar{x}]$, jehož výsledkem musí být třetí souřadný vektor $[\bar{y}]$.

Nyní známe ale pouze vektor $[\bar{x}]$.

Vzhledem k tomu, že globální osa Z leží v rovině definované osou $\bar{x}$ a $\bar{z}$, můžeme psát

$$[Z] \times [\bar{x}] = [\bar{y}] \cdot |[Z] \times [\bar{x}]| \quad 5.6.2.4$$

kde

$|[Z] \times [\bar{x}]| \dots\dots\dots$ velikost vektoru $[Z] \times [\bar{x}]$

Výsledkem vektorového součinu dle vztahu 5.6.2.4 bude vektor, který je rovnoběžný s vektorem $[\bar{y}]$, ale nebude jednotkový, tak jako má být hledaný vektor $[\bar{y}]$. Vektory $[Z]$ a $[\bar{x}]$ jsou sice jednotkové, ale nesvírají obecně pravý úhel. Tudíž velikost vektoru $[Z] \times [\bar{x}]$ je $\sin \beta$ kde, úhel β je úhel, který svírá osa $\bar{x}$ s globální osou Z .

Jednotkový vektor se potom určí ze vztahu

$$[\bar{y}] = ([Z] \times [\bar{x}]) / |[Z] \times [\bar{x}]| \quad 5.6.2.5$$

Pro vektorový součin vektorů $[A]$ a $[B]$ platí

$$[A] \times [B] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y \cdot B_z - B_y \cdot A_z) \vec{i} + (A_z \cdot B_x - B_z \cdot A_x) \vec{j} + (A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y) \vec{k} \quad 5.6.2.6$$

kde

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory souřadných os souřadné soustavy, v níž jsou vektory $[A]$ a $[B]$ definovány.

Nyní $[A] = [Z]$ a $[B] = [\bar{x}]$

$$\Rightarrow A_x = Z_x = 0, A_y = Z_y = 0, A_z = Z_z = 1$$

neboť vektor osy Z ve své vlastní souřadné soustavě musí mít souřadnice (0,0,1).

$$B_x = \cos \bar{x} X = \frac{X_E - X_B}{L_{BE}}$$

$$B_y = \cos \bar{x} Y = \frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}}$$

$$B_z = \cos \bar{x} Z = \frac{Z_E - Z_B}{L_{BE}}$$

potom

$$[Z] \times [\bar{x}] = -\frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}} \cdot 1 \cdot \vec{i} + \frac{X_E - X_B}{L_{BE}} \cdot 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

5.6.2.7

a velikost vektoru je

$$|[Z] \times [\bar{x}]| = \sqrt{\frac{(Y_E - Y_B)^2 + (X_E - X_B)^2}{L_{BE}^2}} = \frac{L_{BE}^{xy}}{L_{BE}}$$

5.6.2.8

kde

$$L_{BE}^{xy} = \sqrt{(Y_E - Y_B)^2 + (X_E - X_B)^2}$$

Pro hledaný vektor $[\bar{y}]$ potom platí

$$\begin{aligned} [\bar{y}] &= \frac{[Z] \times [\bar{x}]}{|[Z] \times [\bar{x}]|} = -\frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}} \cdot \frac{L_{BE}}{L_{BE}^{xy}} \vec{i} + \frac{X_E - X_B}{L_{BE}} \cdot \frac{L_{BE}}{L_{BE}^{xy}} \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ &= -\frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}^{xy}} \vec{i} + \frac{X_E - X_B}{L_{BE}^{xy}} \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

5.6.2.9

Nyní zbývá určit směrové kosíny (souřadnice) osy $\bar{z}$ vzhledem ke globální souřadné soustavě X, Y, Z.

Zcela jistě platí

$$[\bar{z}] = [\bar{x}] \cdot [\bar{y}]$$

5.6.2.10

Provedeme-li vektorový součin (viz vztah 5.6.2.6), dostáváme pro směrové kosíny (souřadnice) vektoru $[\bar{z}]$ následující vztahy

$$\cos \bar{z}X = \cos \bar{x}Y \cdot \cos \bar{y}Z - \cos \bar{y}Y \cdot \cos \bar{x}Z$$

$$\cos \bar{z}Y = \cos \bar{x}Z \cdot \cos \bar{y}X - \cos \bar{y}Z \cdot \cos \bar{x}X$$

$$\cos \bar{z}Z = \cos \bar{x}X \cdot \cos \bar{y}Y - \cos \bar{y}X \cdot \cos \bar{x}Y$$

5.6.2.11

Po dosazení pomocí již dříve odvozených směrových kosínů vektoru $[\bar{x}]$ (viz vztahy 5.6.2.2) a vektoru $[\bar{y}]$ (viz vztahy 5.6.2.9) dostáváme

$$\cos \bar{z}X = \frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}} \cdot 0 - \frac{X_E - X_B}{L_{BE}^{xy}} \cdot \frac{Z_E - Z_B}{L_{BE}}$$

$$\cos \bar{z}Y = \frac{Z_E - Z_B}{L_{BE}} \cdot \left(-\frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}^{xy}} \right) - 0 \cdot \frac{X_E - X_B}{L_{BE}}$$

$$\cos \bar{z}Z = \frac{X_E - X_B}{L_{BE}} \cdot \frac{X_E - X_B}{L_{BE}^{xy}} - \left(-\frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}^{xy}} \right) \cdot \frac{Y_E - Y_B}{L_{BE}}$$

po úpravě dostáváme

$$\cos \bar{z}X = -\frac{(X_E - X_B) \cdot (Z_E - Z_B)}{L_{BE}^{xy} L_{BE}}$$

$$\cos \bar{z}Y = -\frac{(Z_E - Z_B) \cdot (Y_E - Y_B)}{L_{BE}^{xy} L_{BE}}$$

$$\cos \bar{z}Z = \frac{(X_E - X_B)^2 + (Y_E - Y_B)^2}{L_{BE}^{xy} L_{BE}} = \frac{L_{BE}^{xy}}{L_{BE}}$$

5.6.2.12

Je snadné si ověřit, že platí např.

$$(\cos \bar{z}X)^2 + (\cos \bar{z}Y)^2 + (\cos \bar{z}Z)^2 = 1$$

Jestliže je osa $\bar{x}$ rovnoběžná s osou Z (musí platit $X_B = X_E \wedge Y_B = Y_E$) bez ohledu na orientaci, potom osa $\bar{y}$ je rovnoběžná s osou Y a má stejnou orientaci.

Jestliže platí $\bar{x} = Z$ ($Z_E - Z_B > 0$) potom $\bar{y} = Y, \bar{z} = -X$

Jestliže platí $\bar{x} = -Z$ ($Z_E - Z_B < 0$) potom $\bar{y} = Y, \bar{z} = X$

$\Rightarrow \bar{x} = Z, \bar{y} = Y, \bar{z} = -X$

$$\begin{array}{lll} \cos \bar{x}X = 0 & \cos \bar{y}X = 0 & \cos \bar{z}X = -1 \\ \cos \bar{x}Y = 0 & \cos \bar{y}Y = 1 & \cos \bar{z}Y = 0 \\ \cos \bar{x}Z = 1 & \cos \bar{y}Z = 0 & \cos \bar{z}Z = 0 \end{array}$$

5.6.2.13

$$\Rightarrow \bar{x} = -Z, \bar{y} = Y, \bar{z} = X$$

$$\begin{array}{lll} \cos \bar{x}X = 0 & \cos \bar{y}X = 0 & \cos \bar{z}X = 1 \\ \cos \bar{x}Y = 0 & \cos \bar{y}Y = 1 & \cos \bar{z}Y = 0 \\ \cos \bar{x}Z = -1 & \cos \bar{y}Z = 0 & \cos \bar{z}Z = 0 \end{array}$$

5.6.2.14

Nyní provedeme potočení průřezu (celého prutového elementu) o úhel α kolem osy $\bar{x}$. Jestliže se díváme proti kladné ose $\bar{x}$, tak úhel α se měří proti směru chodu hodinových ručiček (je kladný).

Novou souřadnou soustavu označíme x, y, z (lokální souřadná soustava prutového elementu) a hledejme její směrové kosiny vzhledem k souřadné soustavě $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

$$\text{osa } \bar{x} = x \Rightarrow \cos x\bar{x} = 1 \quad \cos x\bar{y} = 0 \quad \cos x\bar{z} = 0$$

5.6.2.15

osa y (pootočení o úhel α proti směru chodu hodinových ručiček, díváme-li se proti kladné ose $\bar{x} = x$)

$$\cos y\bar{x} = 0$$

$$\cos y\bar{y} = \cos \alpha$$

$$\cos y\bar{z} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

5.6.2.16

osa z (pootočení o úhel α proti směru chodu hodinových ručiček, díváme-li se proti kladné ose $\bar{x} = x$)

$$\cos z\bar{x} = 0$$

$$\cos z\bar{y} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\cos z\bar{z} = \cos \alpha$$

5.6.2.17

Rekapitulace odst. 5.6.2

Mějme libovolný vektor definovaný ve dvou ortogonálních pravotočivých souřadných soustavách.

souřadná soustava (x, y, z) – vektor $[a] = [a_x, a_y, a_z]^T$ – lokální souřadná soustava elementu

souřadná soustava (X, Y, Z) – vektor $[A] = [A_x, A_y, A_z]^T$ – globální souřadná soustava

Na základě dříve odvozených vztahů platí

$$[a] = [T1][T2][A]$$

5.6.2.18

kde (viz vztahy 5.6.1.5, 5.6.1.8 a následně odstavec 5.6.2)

$$[T1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

5.6.2.19

$X_B \neq X_E$ nebo $Y_B \neq Y_E \Rightarrow x \nparallel Z$ potom

$$[T2] = \begin{bmatrix} L_x/L_{xyz} & L_y/L_{xyz} & L_z/L_{xyz} \\ -L_y/L_{xy} & L_x/L_{xy} & 0 \\ -L_x L_z/(L_{xy} L_{xyz}) & -L_z L_y/(L_{xy} L_{xyz}) & L_{xy}/L_{xyz} \end{bmatrix}$$

5.6.2.20

$X_E = X_B \wedge Y_E = Y_B \wedge Z_E - Z_B > 0 \Rightarrow x = Z$

potom

$$[T2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.6.2.21

$X_E = X_B \wedge X_E = Y_B \wedge Z_E - Z_B < 0 \Rightarrow x = -Z$

potom

$$[T2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.6.2.22

Dále budeme značit

$$[T12] = [T1][T2] \Rightarrow [a] = [T12][A]$$

5.6.2.23

kde

α – úhel natočení průřezu prutového elementu kolem osy x (osa prutu) oproti svislé rovině procházející osou x . Kladný úhel se měří proti směru chodu hodinových ručiček díváme-li se proti kladné ose x .

X_B, Y_B, Z_B – souřadnice počátečního uzlu (begin) prutového elementu v globální souřadné soustavě

X_E, Y_E, Z_E – souřadnice koncového uzlu (end) prutového elementu v globální souřadné soustavě

$$L_{i,j,k} = \sqrt{(I_E - I_B)^2 + (J_E - J_B)^2 + (K_E - K_B)^2}$$

$I(J)(K)$ může být $X, Y, Z, 0$.

0 se v indexu nepíše.

Např.

$$L_x = \sqrt{(X_E - X_B)^2} = (X_E - X_B) - \text{délka průmětu prutového elementu do osy } X$$

$$L_{xy} = \sqrt{(X_E - X_B)^2 + (Y_E - Y_B)^2} - \text{délka průmětu prutového elementu do roviny } XY$$

$$L_{xyz} = \sqrt{(X_E - X_B)^2 + (Y_E - Y_B)^2 + (Z_E - Z_B)^2} - \text{délka prutového elementu}$$

5.6.3 Transformace parametrů deformace

Mějme v lokálním souřadném systému elementu definován vektor parametrů deformace pro jeden element vztahem 5.3.2.

V souladu s teorií uvedenou v odst. 5.6.2 platí

$$[\Delta]_e' = [T]_e [\Delta]_e \quad 5.6.3.1$$

kde

$$[\Delta]_e' = [u_B', v_B', w_B', \varphi_{xB}', \varphi_{yB}', \varphi_{zB}', u_E', v_E', w_E', \varphi_{xE}', \varphi_{yE}', \varphi_{zE}']^T$$

vektor parametrů deformace elementu v lokálním souřadném systému elementu (viz vztah 5.3.2) (rozměr 12x1)

$$[\Delta]_e = [u_B, v_B, w_B, \varphi_{xB}, \varphi_{yB}, \varphi_{zB}, u_E, v_E, w_E, \varphi_{xE}, \varphi_{yE}, \varphi_{zE}]^T$$

vektor parametrů deformace elementu v globálním souřadném systému (rozměr 12x1)

$$[T]_e = \begin{bmatrix} [T12] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T12] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T12] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T12] \end{bmatrix} \quad 5.6.3.2$$

Matice $[T12]$ (rozměr 12x12) viz vztah 5.6.2.23.

Pro vektory rychlostí popř. zrychlení parametrů deformace platí stejný transformační vztah.

$$[\Delta \cdot]_e' = [T]_e [\Delta \cdot]_e \quad 5.6.3.3$$

$$[\Delta \ddot{\cdot}]_e' = [T]_e [\Delta \ddot{\cdot}]_e \quad 5.6.3.4$$

5.6.4 Transformace matice tuhosti a matice hmotnosti

Z důvodů, které budou vysvětleny v následující kapitole, je nutné, aby byla nalezena matice tuhosti elementu v takovém tvaru, který vyhovuje následujícímu vztahu.

$$\Pi_e' = \frac{1}{2} [\Delta]_e'^T [K]_e [\Delta]_e$$

5.6.4.1

kde

$[\Delta]_e$ je vektor parametrů deformace elementu v globálním souřadném systému.

Vzhledem k tomu, že potenciální energie deformace je skalár, který je nezávislý na souřadné soustavě, musí nutně platit

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} [\Delta]_e'^T [K]_e' [\Delta]_e' = \frac{1}{2} [\Delta]_e^T [K]_e [\Delta]_e$$

5.6.4.2

Při aplikaci transformačního vztahu 5.6.3.1 dostáváme

$$\Pi'_e = \frac{1}{2} [\Delta]_e^T [T]_e^T [K]_e' [T]_e [\Delta]_e = \frac{1}{2} [\Delta]_e^T [K]_e [\Delta]_e$$

5.6.4.3

a následně dostáváme i matici tuhosti v globálním souřadné soustavě

$$[K]_e = [T]_e^T [K]_e' [T]_e$$

5.6.4.4

Transformační matice $[T]_e$ je definovaná vztahem 5.6.3.2

Vzhledem k definici kinetické energie elementu a s ohledem na vztah 5.6.3.3, lze matici hmotnosti elementu v globální souřadné soustavě obdržet také ve formě

$$[M]_e = [T]_e^T [M]_e' [T]_e$$

5.6.4.5

a kinetická energie elementu potom je

$$K_e = \frac{1}{2} [\dot{\Delta}]_e^T [M]_e [\dot{\Delta}]_e$$

5.6.4.6

6 ANALÝZA KONSTRUKCE

6.1 Matice tuhosti konstrukce

Vztah 5.4.1 definuje potenciální energii deformace jednoho elementu. Odvozený vztah 5.4.14 vyjadřuje aproximaci potenciální energie deformace jednoho elementu při použití náhradních funkcí 5.3.1. Následně vztah 5.4.15 popisuje vztah potenciální energie deformace jednoho elementu a matice tuhosti jednoho elementu. Vztah 5.4.16 popisuje výpočet matice tuhosti elementu a vztah 5.4.17 již popisuje matici tuhosti elementu. To vše v lokální souřadné soustavě prutového elementu. Vztah 5.6.4.4 popisuje matici tuhosti elementu v globální souřadné soustavě. V odstavci 4.2 jsme velmi stručně nastínili postup diskretizace kontinua pomocí metody konečných prvků.

Jedním z kroků analýzy konstrukce je získat (sestavit) matici tuhosti celé konstrukce.

Tato je definována vztahem

$$\Pi' = \frac{1}{2} [\Delta]^T [K] [\Delta]$$

6.1.1

kde

Π' potenciální energie deformace celé konstrukce

$[\Delta]$ vektor parametrů deformace celé konstrukce v globálním souřadném systému

$[K]$ matice tuhosti celé konstrukce v globálním souřadném systému

Jestliže je konstrukce aproximována souborem n elementů a to tak, aby byl souvisle vyplněn požadovaný model konstrukce, lze potenciální energii deformace celé konstrukce získat jako součet energií všech elementů.

$$\Pi' = \sum_{e=1}^n \Pi'_e = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} [\Delta]_e^T [K_e] [\Delta]_e$$

6.1.2

neboť potenciální energie deformace je skalár, který vzniká integrací po objemu.

Jak již bylo několikrát zmíněno, hledáme 3 funkce posunů (u, v, w) os prutů a funkci natočení (w_x) kolem os prutů. Náhrada těchto 4 funkcí v jednom elementu je popsána v odstavci 5.3. Zvolené náhrady plní podmínky, které pro řešení úlohy potřebujeme. Navíc potřebujeme u všech hledaných funkcí splnit podmínku spojitosti ve všech uzlových bodech, kde se stýkají 2 popřípadě více elementů. Dále potřebujeme splnit podmínku spojitosti prvních derivací posunů kolmých k osám prutů (posuny v, w). V každém uzlovém bodě, který je společný pro několik elementů musíme tedy splnit 6 deformačních podmínek a to, že všechny elementy obsahující společný uzel musí v tomto uzlu mít stejné posuny ve směru souřadných os a stejná natočení kolem souřadných os. Souřadný systém je libovolný, ale my volíme globální souřadný systém konstrukce. Zmíněné deformační podmínky budou automaticky splněny, jestliže v každém uzlu je

pouze 6 hledaných parametrů deformace a tyto jsou společné pro všechny elementy, které daný uzel obsahuje. To byl také důvod, proč byla provedena transformace parametrů deformace z lokálních souřadných systémů elementů do jednoho globálního souřadného systému. Všechny hledané globální parametry deformace jsou očíslovány pomocí čísel $1, 2, \dots, k$, (kde k je počet neznámých globálních parametrů deformace) a to tak, že ke každému parametru je přiřazeno právě jedno číslo a naopak ke každému číslu je přiřazen právě jeden parametr.

Ve výrazu 6.1.2 je každý člen každé matice tuhosti elementu násoben dvojicí parametrů. U diagonálních členů to jsou dvojice stejných parametrů, pro mimodiagonální členy jsou to dva různé parametry. Jestliže všechny členy všech matic tuhostí elementů rozešleme vhodným způsobem adicí do globální matice tuhosti konstrukce, potom se výsledky vztahů 6.1.1 a 6.1.2 sobě rovnají. Rovnice libovolného členu libovolné matice tuhosti elementu v globální matici tuhosti konstrukce je jednoznačně dána čísly parametrů deformace, kterými jsou ve vztahu 6.1.2 násobeny. Prakticky se operace provádí tak, že se pro každý element sestaví tzv. kódové číslo, což je dvanáct čísel, které jsou totožné s čísly globálních parametrů deformace patřících k danému elementu. Pořadí těchto 12 čísel je stejné, jaké je pořadí globálních parametrů deformace v příslušném vektoru parametrů deformace $[\Delta]_e$ pro daný element. Pomocí tohoto kódového čísla očíslovujeme ve stejném pořadí řádky i sloupce každé matice tuhosti elementu. Tímto je pro libovolný člen libovolné matice tuhosti elementu dána jeho pozice v globální matici tuhosti konstrukce.

6.2 Matice hmotnosti konstrukce

Kinetická energie a tím i matice hmotnosti elementu i celé konstrukce, jsou definovány pomocí obdobných kvadratických forem jako potenciální energie deformace a matice tuhosti. Z toho plyne, že všechny závěry a postupy uvedené v odstavci 6.1 jsou platné i pro matici hmotnosti konstrukce včetně jejího sestavení.

Platí tedy:

$$K = \frac{1}{2} [\Delta]^T [M] [\Delta] \quad 6.2.1$$

$$K = \sum_{e=1}^n K_e = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} [\Delta]_e^T [M]_e [\Delta]_e \quad 6.2.2$$

kde

K (K_e) = kinetická energie celé konstrukce (elementu)

$[\Delta]$ ($[\Delta]_e$) = vektor rychlostí parametrů deformace konstrukce (elementu)

$[M]$ ($[M]_e$) = matice hmotnosti konstrukce (elementu)

6.3 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky budou uvažovány v nejjednodušší formě, a to, že daný posun nebo natočení konstrukce je nulové. Okrajové podmínky se budou zadávat pouze v uzlech, tzn.,

že při prvkování konstrukce se na tuto skutečnost již musí myslet. Vzhledem k tomu, že parametry deformace v uzlech jsou posuny a natočení, tak se problém okrajových podmínek zjednodušuje. Okrajové podmínky se zadávají v globální souřadné soustavě.

Potenciální energie deformace a kinetická energie konstrukce se počítají ze vztahu (n je rozměr matice tuhosti a hmotnosti)

$$\Pi' = \frac{1}{2} [\Delta]^T [K] [\Delta] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_i k_{ij} \Delta_j$$

$$K = \frac{1}{2} [\dot{\Delta}]^T [M] [\dot{\Delta}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\Delta}_i m_{ij} \dot{\Delta}_j$$

6.3.1

Platí-li pro l -tý parametr deformace $\Delta_l = 0 \Rightarrow \dot{\Delta}_l = 0$, potom každý člen sumace ve vztahu 6.3.1, jež obsahuje alespoň jeden l -tý parametr deformace (rychlosti deformace), je roven 0.

$$\begin{array}{ll} \Delta_l k_{lj} \Delta_j = 0 & j=1,2,\dots,n \\ \Delta_i k_{il} \Delta_l = 0 & i=1,2,\dots,n \\ \dot{\Delta}_i m_{lj} \dot{\Delta}_j = 0 & j=1,2,\dots,n \\ \dot{\Delta}_i m_{il} \dot{\Delta}_l = 0 & i=1,2,\dots,n \end{array}$$

6.3.2

Stručně řečeno všechny prvky matice tuhosti a hmotnosti, jež mají alespoň jeden index roven l , tedy k_{li} , k_{il} , m_{li} , m_{il} ($i=1,2,\dots,n$) se při výpočtu potenciální energie deformace a kinetické energie neuplatní. To znamená, že je nepotřebujeme a můžeme je z matic tuhosti a hmotnosti vyškrtnout. Prakticky to znamená, že z globální matice tuhosti a hmotnosti vyškrtneme l -tý řádek a l -tý sloupec a zredukujeme počet hledaných parametrů deformace.

Prakticky se to tak ovšem neprovádí. Standardně se nulovému parametru deformace při číslování parametrů přiřadí číslo 0. Rozměr matice tuhosti a hmotnosti se rovná počtu hledaných parametrů deformace (nejvyšší číslo parametru), tzn., že matice tuhosti i hmotnosti je již redukována o nulové (nehledané) parametry. Při tvorbě kódových čísel pro každý element se každému lokálnímu parametru přiřadí jeho globální číslo, tzn., že nulovým parametrům se přiřadí 0. Ty prvky matic tuhostí a hmotností elementů, které obsahují v popisu jejich pozice v globální matici tuhosti nebo hmotnosti alespoň jednu 0, se vůbec nerozesílají (není ani kam) a tímto krokem se neuplatní při výpočtu potenciální energie deformace a kinetické energie konstrukce.

7 SOUSTAVA DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

V předešlých odstavcích byl vysloven Hamiltonův princip a dále byla stručně popsána diskretizace hledaných polí posunů pomocí metody konečných prvků.

Hamiltonův princip po provedení diskretizace hledaných polí posunů lze psát ve tvaru

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (\Pi' - K) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} [\Delta]^T [K] [\Delta] - \Delta^T [f] - \frac{1}{2} [\Delta]^T [M] [\Delta] \right) dt = 0 \quad 7.1$$

Výraz lze upravit následujícím způsobem

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} [\Delta]^T [K] [\Delta] - \Delta^T [f] - \frac{1}{2} [\Delta]^T [M] [\Delta] \right) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} ([\delta\Delta]^T [K] [\Delta] - [\delta\Delta]^T [f] - [\delta\Delta]^T [M] [\Delta]) dt = \\ & = \left([\delta\Delta]^T [K] [\Delta] - [\delta\Delta]^T [f] - \frac{d}{dt} ([\delta\Delta]^T [M] [\Delta]) + [\delta\Delta]^T \frac{d}{dt} ([M] [\Delta]) \right) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [\delta\Delta]^T \left([K] [\Delta] - [f] + \frac{d}{dt} ([M] [\Delta]) \right) dt - ([\delta\Delta]^T [M] [\Delta])_{t_1}^{t_2} = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [\delta\Delta]^T ([M] [\Delta] + [K] [\Delta] - [f]) dt = 0 \end{aligned} \quad 7.2$$

Jestliže platí

$$[\delta\Delta] ([M] [\Delta] + [K] [\Delta] - [f]) = 0 \quad 7.3$$

pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, potom platí vztah 7.2.

Jestliže vektor $[\delta\Delta]$ zobrazuje vektor virtuálních změn parametrů deformace konstrukce, potom musí platit

$$[M] [\Delta] + [K] [\Delta] = [f] \quad 7.4$$

V našem případě pouze

$$[M] [\Delta] + [K] [\Delta] = 0 \quad 7.5$$

neboť řešíme problém vlastního netlumeného kmitání.

Dostáváme soustavu simultánních lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu v tomto případě homogenních.

Poznámka.

Při úpravách ve vztahu 7.2 byl použit vztah pro derivaci součinu funkcí $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}([\delta\Delta]^T[M][\Delta]) &= [\delta\Delta]^T[M][\Delta] + [\delta\Delta]^T \frac{d}{dt}([M][\Delta]) \\ \Rightarrow [\delta\Delta]^T[M][\Delta] &= \frac{d}{dt}([\delta\Delta]^T[M][\Delta]) - [\delta\Delta]^T \frac{d}{dt}([M][\Delta]) \end{aligned}$$

7.6

Tento vztah se potom dosadí do vztahu 7.2. Jedná se o časový integrál, takže první část vztahu 7.6 lze ihned integrovat a protože matice hmotnosti $[M]$ je nezávislá na čase, tak v druhé části vztahu 7.6 se již objevuje zrychlení parametrů deformace.

Dále ve vztahu 7.2 byl uplatněn vztah

$$([\delta\Delta]^T[M][\Delta])_{t_1}^{t_2} = 0$$

7.7

který vyplývá z definice Hamiltonova principu (viz odst. 4.1.).

8 VLASTNÍ KMITÁNÍ NETLUMENÉ KONSTRUKCE

Pro matice $[K]$ a $[M]$ je definován zobecněný problém vlastních hodnot vztahem

$$[K][\Delta_i] = \lambda_i[M][\Delta_i] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 8.1$$

kde

$[\Delta_i]$ – i -tý vlastní vektor

λ_i – i -té vlastní číslo

n – počet stupňů volnosti konstrukce

Jestliže matice $[K]$ a $[M]$ jsou pozitivně definitivní, potom všechna vlastní čísla $\lambda_i > 0$.

Vlastní vektory mají jednu velmi důležitou vlastnost a tou je jejich ortogonalita (důkaz viz např. lit. [7]).

$$[\Delta_i]^T[M][\Delta_j] = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

$$[\Delta_i]^T[K][\Delta_j] = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

8.2

Jestliže jsou vlastní vektory normované na matici hmotnosti, to znamená, že

$$[\Delta_i] = \frac{[\Delta'_i]}{([\Delta'_i]^T[M][\Delta'_i])^{\frac{1}{2}}} \quad 8.3$$

kde

$[\Delta'_i]$ - vlastní vektor nenormovaný

potom platí

$$[\Delta_i]^T[M][\Delta_j] = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$[\Delta_i]^T[K][\Delta_j] = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

8.4

kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol.

Seřadíme-li vlastní vektory do matice $[\nabla]$ a to tak, že i -tý vlastní vektor tvoří i -tý sloupec matice $[\nabla]$, potom platí

$$[\nabla]^T[M][\nabla] = [I]$$

$$[\nabla]^T[K][\nabla] = [\lambda]$$

8.5

kde

$[I]$ – jednotková matice

$[\lambda]$ - diagonální matice, která má v i -té pozici na diagonále umístěno i -té vlastní číslo λ_i

Vlastní kmitání netlumené konstrukce je popsáno rovnicí

$$[M][\ddot{\Delta}] + [K][\Delta] = [0] \quad 8.6$$

Vektor parametrů deformace lze předpokládat ve tvaru

$$[\Delta_{(t)}] = \sum_{i=1}^n q_{i(t)} [\Delta_i] = [\nabla][q] \quad 8.7$$

kde

$$[q] = [q_{1(t)}, q_{2(t)}, \dots, q_{n(t)}]^T$$

Po dosazení do rovnice 8.6 dostáváme

$$\sum_{i=1}^n (q_{i(t)}'' [M] + q_{i(t)} [K]) [\Delta_i] = [0] \quad 8.8$$

nebo zapsáno maticově

$$[M][\nabla][q''] + [K][\nabla][q] = [0] \quad 8.9$$

Nyní vynásobíme rovnici 8.9 zleva transponovanou maticí vlastních vektorů $[\Delta]^T$.

$$[\nabla]^T [M][\nabla][q''] + [\nabla]^T [K][\nabla][q] = [0] \quad 8.10$$

Po aplikaci vztahů 8.5 dostáváme

$$[I][q''] + [\lambda][q] = [0] \quad 8.11$$

Dostáváme soustavu separovaných obyčejných homogenních lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $q_{i(t)}$.

Např. i -tá rovnice

$$q_{i(t)}'' + \lambda_i q_{i(t)} = 0 \quad 8.12$$

Zavedeme-li označení

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \quad 8.13$$

potom řešením rovnice 8.12 je funkce

$$q_{i(t)} = q_i^I \sin \omega_i t + q_i^{II} \cos \omega_i t = q_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad 8.14$$

Integrační konstanty $q_i^I, q_i^{II}, q, \varphi$ jsou navzájem vázány vztahy

$$q_i^I = q \cdot \cos \varphi_i \quad q_i^{II} = q \cdot \sin \varphi_i$$

Z uvedeného vyplývá, že parametry ω_i , kterých je právě n , mají význam vlastních úhlových frekvencí netlumené soustavy.

Jestliže jsou matice $[K]$ a $[M]$ pozitivně definitní, potom všechna vlastní čísla λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou kladná, tudíž můžeme získat n vlastních úhlových frekvencí.

Vlastní úhlové frekvence standardně řadíme (značíme) vzestupně

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n$$
8.15

Odpovídající doby cyklu (periody) a vlastní kmitočty se stanoví

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad f_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_i}{2\pi}$$
8.20

Vlastní vektory $[\Delta_i]$ se nazývají vlastní tvary.

9 PŘEHLED POUŽÍVANÝCH MKP PROGRAMŮ

K řešení problematiky prutových konstrukcí pomocí MKP lze použít celou řadu programů, neboť prut jako konstrukční prvek je jedním z nejužívanějších. Z běžně užívaných SW můžeme zmínit např. ANSYS, SYSTUS, COSMOS, ABAQUS, SCIA ENGINEER, NEXIS, FEAT, NASTRAN, RSTAB, RFEM, DYNA.

Každý z uvedených programů poskytuje uživateli relativně velmi silné prostředky k řešení prutových konstrukcí. Nemá smysl se detailně zabývat jednotlivými programy ohledně jejich možností, neboť se dá říci, že většinou mají víc znaků a možností společných, než odlišných. Nicméně lze uvedené programy rozdělit do dvou hlavních skupin.

- 1) Programy spíše obecnějšího charakteru s širokou možností použití, ale bez speciálních nástrojů ke zjednodušení a zkvalitnění práce v oblasti prutových konstrukcí.
- 2) Speciální programy pro prutové konstrukce nabízející speciální nástroje pro prutové konstrukce.

Zatímco u první skupiny programů je vidět, že prut je prostě jedním z mnoha prvků, tak u druhé skupiny programů je vidět, že všechno co není prut, je tam dodáno navíc a není řešeno do stejných detailů jako prutové prvky i když mohou být výjimky.

Do první skupiny programů patří ANSYS, SYSTUS, COSMOS, ABAQUS, DYNA.

Stručně se zmíníme o ANSYS u jako pravděpodobně nejrozšířenějšímu MKP programu tohoto typu.

ANSYS

Program ANSYS je univerzální výpočtový program schopný řešit statické a dynamické úlohy v rovině i prostoru s prutovými, skořepinovými a objemovými konečnými prvky.

Program umožňuje aplikovat zatížení jak osamělými silami a momenty, tak spojitá zatížení povrchová a objemová. Dále je možno považovat obecná dynamická zatížení (časová historie) tak speciální dynamická zatížení jako např. seizmická zatížení, harmonické zatížení atd. Dále je možno uvažovat teplotní zatížení na prvcích i v uzlech včetně gradientů teploty a předpětí.

Prutový prvek je uvažován se smykem od smykových sil. Matice hmotnosti může být ve variantě soustředěných hmotností nebo konzistentní matice hmotnosti včetně rotací a průhybů od smyku. Lze uvažovat osamělé hmoty i hmotné momenty setrvačnosti.

Analýzy potom mohou být prováděny lineární nebo nelineární jak geometricky, tak materiálově. Do nelinearity také patří nelineární okrajové podmínky.

V oblasti dynamické analýzy se provádí lineární analýzy. Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů konstrukce. Zde je zařazena také lineární stabilita. Je možno provádět výpočet odezvy pomocí rozvoje do vlastních tvarů. Také lze provádět přímou integraci pohybových rovnic bez rozvoje do vlastních tvarů. Kromě silového dynamického zatížení je možno uvažovat deformační dynamické zatížení (např. posun základové spáry v závislosti na čase popř. zrychlení základové spáry – akcelorogram). Je možné řešení odezvy konstrukce na seizmická zatížení pomocí spekter odezvy. Dále je samozřejmě možná dynamická nelineární analýza.

Program automaticky počítá celkovou hmotnost konstrukce, těžiště konstrukce a hmotný moment setrvačnosti. Také výslednice zatížení ve směrech souř. os a momenty zatížení k souř. osám.

Nicméně napětí se počítají pouze normálová od ohybu a od normálové síly. Napětí se počítají pouze maximální.

Do druhé skupiny programů patří např. SCIA ENGINEER, NEXIS, FEAT, RFEM, RSTAB atd. Typickým představitelem této skupiny programů je SCIA ENGINEER.

SCIA ENGINEER

Dá se říci, že v oblasti prutových konstrukcí program obsahuje vše co má ANSYS (nebudeme již znovu popisovat) a něco navíc. Program je určen také pro konstruktéry a projektanty, proto nepracuje přímo s konečnými prvky ale s konstrukčními prvky – pruty. Teprve před výpočtem je generována síť konečných prvků.

Oproti ANSYSu má program rozsáhlé databáze materiálů, válcovaných a svařovaných profilů (průřezové charakteristiky). Průřez je také možno zapsat pomocí průřezových charakteristik. Jinak je možné zadat obecný průřez jeho obrysem.

Program provádí nejen výpočet odezvy až do úrovně vnitřních sil a momentů, ale také hodnocení dle norem včetně EC3 (Eurocode pro ocelové konstrukce). Ohyb s tlakem i tahem je hodnocen nelineárně i pro malé deformace v souladu s EC3. U každého prutu je uvedeno jeho vytížení i typ limitujícího kritéria.

Je třeba si dát pozor při sestavování vstupních údajů. Jestliže totiž některé nejsou zadány, potom je má program nějak nastaveny a s těmi počítá.

Dále program provádí posudek řešené konstrukce a tisk posudku, a to jak ve stručné podobě, tak v plné verzi.

Kromě modulů pro výpočty ocelových konstrukcí provádí program také výpočty a posudky železobetonových prutových konstrukcí.

Dále existuje celá řada programů, které sice používají prutové prvky, ale pouze jako přívěšek k jiné problematice. Např. se jedná o programy na výpočty potrubí. Např. CAESAR II, SYSPIPE, AUTOPIPE atd.

10 POUŽITÉ TECHNOLOGIE PROGRAMOVÁNÍ

Praktická část práce byla zpracována prostřednictvím jazyka Python [lit. 4]. Ten jsme zvolili vzhledem k jednoduchosti a expresivitě syntaxe, popularitě ve vědecké komunitě a množství relevantních knihoven.

10.1 Python

Coby vysokoúrovňový obecný programovací jazyk je Python široce populární v mnoha aplikačních oblastech. Oproti jazykům nižší úrovně má totiž podstatně větší čitelnost a vyjadřovací schopnost (tj. stejná funkcionality daná méně řádky kódu). Mezi jeho charakteristické vlastnosti patří především: dynamický typový systém (typ proměnné je kontrolován až za běhu), podpora několika programovacích paradigmat (objektové, funkcionální, procedurální), automatická správa paměti a obsáhlá standardní knihovna.

Existuje řada implementací obou verzí Pythonu (2.7.9 a 3.4.3 v okamžiku psaní této práce) pro všechny významné desktopové platformy. Některé distribuce (např. Enthought Canopy nebo Anaconda) navíc kromě samotného prostředí Pythonu obsahují správce rozšíření, prostřednictvím kterého lze snadno instalovat dodatečné knihovny.

10.2 SciPy

Přestože standardní knihovna šířená jako součást Pythonu obsahuje množství funkcí, speciálně pro potřeby vědecké komunity je určen dodatečný balík rozšíření SciPy [lit. 5]. Přidává například moduly pro lineární algebru, integraci, řešení diferenciálních rovnic, optimalizaci, zpracování signálu či vizualizaci dat.

Konkrétně program vyvinutý jako součást práce používá především modul *SciPy.linalg*, a to jednak funkci *solve* k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic a dále funkci *eigh* k výpočtu vlastních hodnot (vlastních čísel a vlastních vektorů) matic prostřednictvím *dqds* algoritmu [lit. 6].

11 TESTOVACÍ ÚLOHY PROGRAMU BEAMER

Program BEAMER byl odladěn ve dvou základních krocích.

V prvním kroku byl odladěn na statickou úlohu, která byla omezena silovým zatížením osamělými silami v uzlech. Výstupem, který byl ověřován, byl vždy vektor parametrů deformace a vnitřní síly. Úlohy se prováděly pro různé pozice konstrukcí v globální souřadné soustavě. Tím se ladily matice tuhosti elementů, celková matice tuhosti, transformace souřadných soustav a zavádění okrajových podmínek. Tyto úlohy nebyly předmětem bakalářské práce a tudíž nejsou přiloženy.

V druhém kroku se již řešily vlastní frekvence a vlastní tvary prutové konstrukce, které se porovnávaly s výsledky z ANSYSu a kde to bylo možné, tak s výsledky analytických výpočtů. Tím se odladily matice hmotnosti elementů, matice hmotnosti konstrukce, jejich transformace a zavádění okrajových podmínek do matice hmotnosti konstrukce.

Testovací úlohy jsou uvedeny v příloze B bakalářské práce. Některá jejich zadání jsou uvedena na CD spolu s dokumentací k programu.

V příloze B je uvedeno 5 úloh.

- 1) Prostý nosník, rozpětí 8 m, I č. 100, pouze vlastní hmotnost nosníku. Prvkování 4,8,16 prvků.
- 2) Prostý nosník, rozpětí 8 m, I č. 100, spojitá hmotnost nosníku zanedbatelná. Soustředěná hmotnost uprostřed rozpětí.
- 3) Konzola 8 m dlouhá, I č. 100, pouze vlastní hmotnost konzoly. Prvkování 4,8,16 prvků.
- 4) Konzola 8 m dlouhá, I č. 100, spojitá hmotnost konzoly zanedbatelná, na konci je osamělá hmota. Prvkování 4,8,16 prvků.
- 5) Jednoduchý rám, I č. 100, pouze vlastní hmotnost rámu. Počet prvků 3,6,12.

Výsledky byly porovnány se stejnými úlohami řešenými programem ANSYS vč. stejného prvkování. V ANSYSu je navíc vždy řešena úloha s prvkováním 160 prvků.

Úlohy 1 a 3 byly řešeny zároveň analyticky.

U úloh 2 a 4 byly řešeny analyticky první 2 frekvence.

Úloha 5 nebyla řešena analyticky.

Výsledky programu BEAMER jsou uvedeny pro konzistentní matici hmotnosti i pro matici soustředěných hmotností.

Z výsledků uvedených v příloze B lze konstatovat dvě skutečnosti:

- 1) ANSYS i BEAMER konvergují z hlediska vlastních frekvencí k stejným hodnotám.
- 2) Program BEAMER konverguje ke správným hodnotám vlastních frekvencí přibližně stejně rychle jako ANSYS při vhodné volbě prutového prvku.

12 ZÁVĚR

Bakalářská práce se skládá z teoretické části, programování převzaté nebo odvozené teorie a verifikace vytvořeného programu. Program, který řeší vlastní frekvence a vlastní tvary prostorových prutových konstrukcí metodou konečných prvků, se jmenuje BEAMER. V kap. 2 jsou uvedeny základní předpoklady a tím i omezení úlohy z hlediska teorie prutových konstrukcí. Od kap. 5 jsou detailně uvedeny všechny postupy MKP pro daný problém. Skutečnosti nebo operace MKP, jež nebyly nalezeny v literatuře nebo byly v literatuře nalezeny rozporným způsobem, byly odvozeny a uvedeny v teoretické části práce. V kap. 10 je stručný popis použité technologie programování (programovací jazyk Python) a dodatečného balíku rozšíření SciPy použitého pro řešení některých úloh navazujících na MKP. V kap. 11 jsou potom uvedeny testovací úlohy. Výsledky testovacích úloh jsou uvedeny v příloze B. V příloze A je uvedena stručná dokumentace k programu BEAMER. Program BEAMER je vypálen na CD spolu se všemi prostředky nutnými k jeho spuštění a práci. Na stejném CD jsou uvedeny i příklady vstupních souborů některých úloh.

Prvním cílem bakalářské práce bylo sestavení a odladění programu řešícího vlastní frekvence a vlastní tvary prutových konstrukcí. Tento cíl programu BEAMER plní spolu s teoretickou částí práce, která detailně popisuje všechny postupové kroky MKP a konkretizuje ji pro program BEAMER.

Druhým cílem bakalářské práce bylo prověření možnosti efektivního využití prostředků, které nabízí programovací jazyk Python popř. dodatečný balík rozšíření SciPy, pro řešení problémů mechaniky kontinua speciálně při použití MKP. Tím, že byl program BEAMER sestaven v relativně krátké době, je funkční a uspěl ve verifikaci pomocí programu ANSYS, bylo prověřeno, že alespoň ty prostředky, jež byly použity, jsou vhodné pro efektivní řešení úloh mechaniky kontinua MKP.

Posledním cílem bakalářské práce byla verifikace výsledků získaných programem BEAMER pomocí programu ANSYS. Několik testovacích úloh je uvedeno v kap. 11 a jejich výsledky jsou uvedeny v příloze B práce. Jsou uvedeny pouze výsledky testovacích úloh pro dynamickou úlohu. Testování na statické úlohy uvedeno není, protože toto testování bylo použito při vývoji programu pouze jako mezikrok na prověření správnosti tuhostních a napjatostních charakteristik prutové konstrukce. Navíc byla každá úloha řešena pomocí ANSYSu s větším počtem prvků než srovnávací úlohy. Některé úlohy byly řešeny pro porovnání i analyticky.

Z výsledků uvedených v příloze B vyplývají dvě skutečnosti:

- 1) ANSYS a BEAMER konvergují z hlediska vlastních frekvencí ke stejným hodnotám.
- 2) Program BEAMER konverguje ke správným hodnotám vlastních frekvencí přibližně stejně rychle jako ANSYS při vhodné volbě prutového prvku.

13 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Servít R., Doležalová E., Crha M.: *Teorie pružnosti a plasticity I.*, SNTL, Praha 1981.
- [2] Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A.: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, SNTL, Praha 1979.
- [3] Kolektiv autorů: *Prvky kovových konstrukcí*, SNTL, Praha 1972.
- [4] LUTZ, Mark. *Learning Python*. 4th ed. Beijing: O'Reilly, 2009, Xlix, 1160 s. ISBN 978-0-596-15806-4.
- [5] BRESSERT, Eli. *SCIPY AND NUMPY: AN OVERVIEW FOR DEVELOPERS*. SciPy and NumPy: [optimizing. Sebastopol, CA: O'Reilly, 2012, 57 p. ISBN 14-493-0546-6.
- [6] PARLERR, Beresford N. a Osni A. MARQUES. *An implementation of the dqds algorithm (positive case)*. Linear Algebra and its Applicatione [online]. 2000, 309 (1-3):217-259 [cit.2015-05-24]. DOI: 10.1016/s 0024-3795 (00)00010-0.
- [7] Bittnar Z., Řeřicha P.: *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*, SNTL, Praha 1981.
- [8] Janíček P., Ondráček E., Vrbka J.: *Mechanika těles. Pružnost a pevnost I*. VUT v Brně, 1992.
- [9] Petruška J.: *Počítačové metody mechaniky I a II, Metoda konečných prvků*, VUT FSI v Brně, listopad 2003.
- [10] Ravinger J.: *PROGRAMY, Statika, stabilita a dynamika stavebních konstrukcí*, alfa 1990.
- [11] *Wolfram Mathematica* [online]. [cit. 2015-05-15]. Dostupné z: <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [12] Kolář V., Němec I., Kanický V.: *FEM, Principy a praxe metody konečných prvků*, Computer Press, 1997.

14 PŘÍLOHY

Příloha A - Dokumentace programu BEAMER

Příloha B – Výsledky testovacích úloh

Příloha A – Dokumentace programu Beamer

Příloha A obsahuje informace k instalaci a použití praktické části práce, programu Beamer.

A.1 Instalace

Příložená distribuce Beamer nevyžaduje žádnou instalaci, nicméně ke svému běhu potřebuje nainstalované prostředí Pythonu 2.7.9 a knihovny SciPy. Uživatelé systému MS Windows mohou obojí snadno získat například prostřednictvím balíku Enthought Canopy¹.

A.2 Spuštění

Adresář **Beamer** obsahuje soubor **beamer.py**, který lze z příkazové řádky spustit s parametry popisujícími cestu k vstupnímu souboru a mód výpočtu příkazem:

```
python beamer.py cesta_k_vstupnímu_souboru mód
```

Výpočet Beameru může proběhnout ve třech módech: určení vnitřních sil a deformací zatížené prutové soustavy – lineární statika (mód **none**), určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů prutové soustavy pomocí matice soustředěných hmotností (mód **lumped**) nebo určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů prutové soustavy pomocí konzistentní matice hmotnosti (mód **consistent**).

Příklad spouštěcího příkazu:

```
python beamer.py test_inputs/beam16elements.txt consistent
```

A.3 Formát vstupního souboru

Validní vstupní soubor musí obsahovat matice:

- **nodes** (udávající souřadnice uzlů v globální souřadné soustavě),
- **links** (udávající počáteční a koncové body prvků, jejich materiálové a průřezové charakteristiky a úhel alfa, určující otočení každého prvku kolem vlastní osy),
- matice popisující jednotlivé materiály², jejichž jména se musí shodovat s identifikátory použitými v matici **links**,
- obdobně matice popisující průřezy³,
- **boundary_conditions** (určující okrajové podmínky uzlů).

¹ <https://www.enthought.com/products/canopy/>

² Materiál je popsán modulem pružnosti, Poissonovou konstantou, mezí kluzu, mezí pevnosti a hustotou

³ Průřez je definován průřezovou plochou, momenty setrvačnosti v ohybu k osám y a z (hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu) a momentem setrvačnosti v kroucení pro určení vztahu mezi kroutícím momentem a poměrným zkroucením

Kromě výše uvedených matic, může (nebo musí v případě módu **none**) vstupní soubor dále v závislosti na módu obsahovat:

- **loads** obsahující zatížení uzlů osamělými silami (mód **none**),
- **weights** popisující přidanou hmotnost jednotlivých uzlů (módy **lumped** a **consistent**),

Zadávaní vstupních matic má svá pravidla a ta nesmí být porušena. Nezáleží na pořadí ve kterém jsou matice zadány, program je rozezná podle jejich názvu. Každá matice začíná slovem *matrix* na začátku řádku, po něm následuje název matice, dalším parametrem je počet řádků (například v případě matice **nodes** a **boundary_conditions** je roven počtu uzlů, v případě matice **links** zase počtu prvků), následuje počet sloupců (ten je roven počtu parametrů uvedených v závorkách v příkladech vstupních souborů, jejich pořadí musí být dodrženo). Matice není nutné zadávat celé, pokud je za počtem sloupců napsáno *-default*, tak se všechny parametry všech nezadaných řádků zaplní hodnotou uvedenou jako další parametr po *-default*.

Příklady vstupních souborů jsou uvedeny na přiloženém CD.

A.4 Výstup

Výstupem programu je podle módu buď vektor vnitřních sil (mód **none**) nebo vektor vlastních frekvencí a matice vlastních tvarů (módy **lumped** a **consistent**). Výsledek každého výpočtu je zapsán do souboru **output.txt** v kořenovém adresáři programu BEAMER.

Příloha B - Výsledky testovacích úloh

Popis SW ANSYS se zaměřením na prutové konstrukce

Program ANSYS je univerzální výpočtový program schopný řešit statické i dynamické úlohy v rovině i prostoru s prutovými, skořepinovými a objemovými konečnými prvky. není přímo zaměřen na prutové prvky a konstrukce, obsahuje pouze univerzální nástroje pro práci s konečnými prvky včetně prutových.

Použitý element byl dvouuzlový prutový konečný prvek BEAM188. Prvek má v každém uzlu šest stupňů volnosti a je založen na prutové teorii Timošenka (zahrnuje vlivy smykové deformace). Prvek byl zadán tak, aby měl bez ohledu na průřezové charakteristiky vysokou smykovou tuhost v obou směrech kolmých na osu prutu. Tím byly vyloučeny vlivy smykových deformací. Matice hmotnosti byla formulována jako konzistentní. Geometrie, okrajové podmínky, vlastnosti materiálu, počet prvků, orientace konečných prvků a geometrie průřezu jsou uvedeny u každého jednotlivého výpočtu. Průřezové charakteristiky byly zadány přímo, odpovídají vlastnostem otevřeného válcovaného profilu I100.

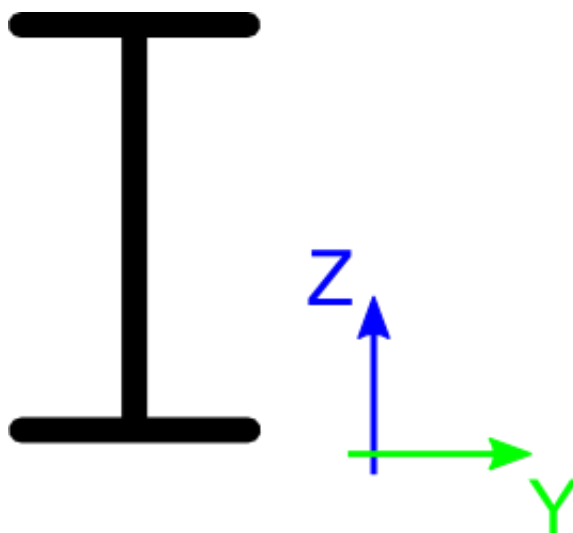
Pro řešení vlastních tvarů byl použit řešič Block Lanczos, výpočet byl proveden pro prvních 36 vlastních tvarů bez horního nebo spodního omezení frekvence. Vlastní tvary byly normovány k matici hmotnosti.

Kromě srovnávacích úloh byla vždy řešena i úloha s velmi hustou sítí konečných prvků, jako srovnávací úloha, k níž by měly ostatní úlohy konvergovat.

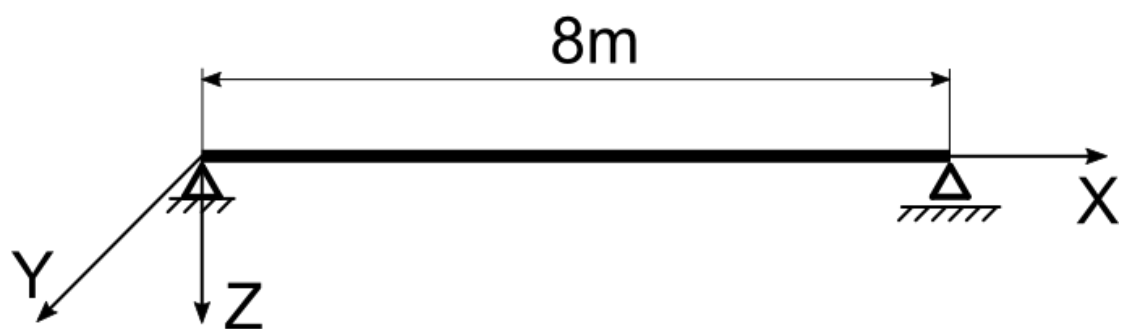
Příklad č. 1:

Vlastní tvary prutu se spojitě rozloženou hmotou

$S = 0,00106$	plocha příčného průřezu prutu/profilu [m^2]
$L = 8$	délka nosníku [m]
$J_y = 1,71\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Y [m^4]
$J_z = 0,122\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Z [m^4]
$J = 0,128\text{e-}7$	torzní konstanta (moment setrvačnosti) v krutu [m^4]
$E = 2,1\text{e}11$	Youngův modul pružnosti [Pa]
$\mu_i = 0,33$	Poissonova konstanta [-]
$\rho = 7850$	hustota materiálu nosníku [kg/m^3]
$pp = 4/8/16/160$	počet prvků po délce prutu [-]
$prut = 188$	typ prutu [-]
$tvaru = 36$	počet tvarů [-]



Obr.1.1 Souřadný systém I profilu



Obr.1.2 Okrajové podmínky prutu

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										
		4			8			16			160	anlt.
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	1,47	1,36	1,35	1,39	1,36	1,36	1,37	1,36	1,36	1,36	1,36
	směr Z	5,52	5,10	5,07	5,20	5,10	5,09	5,12	5,10	5,10	5,10	5,10
2	směr Y	7,65	5,47	5,29	5,89	5,45	5,41	5,55	5,45	5,44	5,45	5,45
	směr Z	28,61	20,47	19,82	22,06	20,39	20,27	20,78	20,39	20,36	20,39	20,40
3	směr Y	30,00	12,36	11,17	14,71	12,27	12,08	12,81	12,26	12,22	12,26	12,26
	směr Z	111,81	46,67	42,55	55,01	45,90	44,68	47,89	45,84	45,72	45,86	45,89
4	směr Y	-	24,18	31,99	30,59	21,87	21,18	23,58	21,79	21,66	21,80	21,79
	směr Z	-	91,03	63,68	114,17	81,74	79,25	88,08	81,44	81,04	81,48	81,58
5	směr Y	-	38,43	37,39	59,84	34,36	32,33	38,57	34,06	33,71	34,08	34,05
	směr Z	-	226,52	172,57	222,54	128,25	134,39	143,89	127,15	129,31	127,23	127,47

Tab.1.1 Prut bez přidané hmoty $L=8m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový lineární prvek

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										
		4			8			16			160	anlt.
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	1,36	1,36	1,35	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
	směr Z	5,10	5,10	5,07	5,10	5,10	5,09	5,10	5,10	5,10	5,10	5,10
2	směr Y	5,45	5,47	5,29	5,45	5,45	5,41	5,45	5,45	5,44	5,45	5,45
	směr Z	20,39	20,47	19,82	20,38	20,39	20,27	20,38	20,39	20,36	20,39	20,40
3	směr Y	12,28	12,36	11,17	12,26	12,27	12,08	12,26	12,26	12,22	12,26	12,26
	směr Z	45,93	46,67	42,55	45,84	45,90	44,68	45,84	45,84	45,72	45,83	45,89
4	směr Y	-	24,18	31,99	21,79	21,87	21,18	21,79	21,79	21,66	21,79	21,79
	směr Z	-	91,03	63,68	81,43	81,74	79,25	81,42	81,44	81,04	81,42	81,58
5	směr Y	-	38,43	37,39	34,07	34,36	32,33	34,04	34,06	33,71	34,04	34,05
	směr Z	-	226,52	172,57	127,17	128,25	134,39	127,08	127,15	129,31	127,08	127,47

Tab.1.2 Prut bez přidané hmoty $L=8m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový kubický prvek

ANSYS - výsledky výpočtu programem ANSYS, konzistentní matice hmotnosti

Consist. - výsledky výpočtu programem BEAMER, konzistentní matice hmotnosti

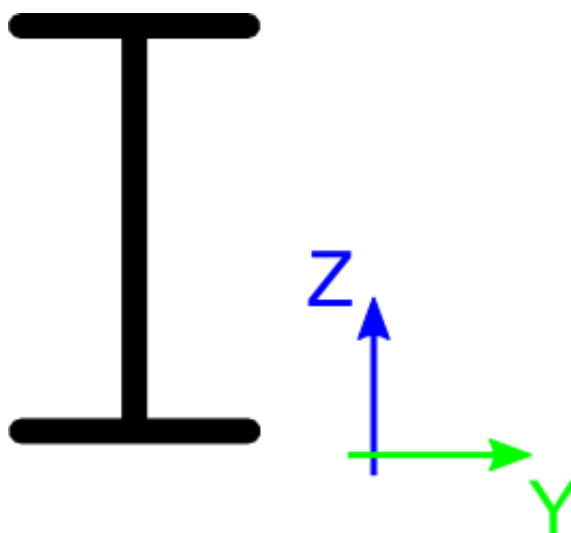
L.M. - výsledky výpočtu programem BEAMER, soustředěná matice hmotnosti

anlt. - analytický výpočet

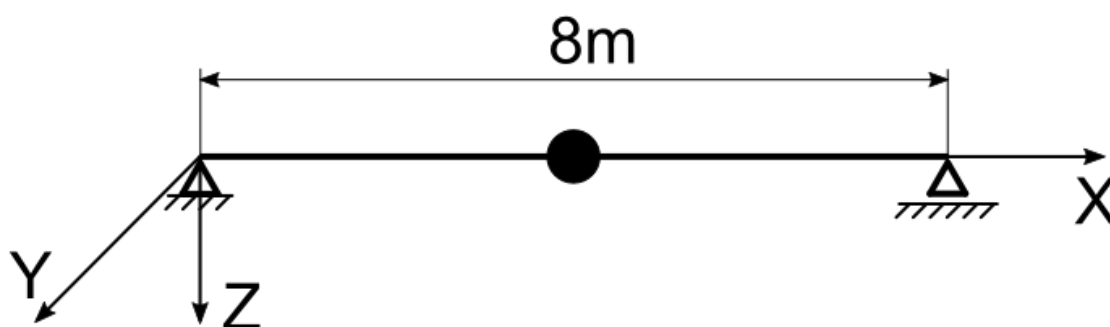
Příklad č. 2:

Vlastní tvary prutu se soustředěnou hmotou

$S = 0,00106$	plocha příčného průřezu prutu/profilu [m^2]
$L = 8$	délka nosníku [m]
$J_y = 1,71\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Y [m^4]
$J_z = 0,122\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Z [m^4]
$J = 0,128\text{e-}7$	torzní konstanta (moment setrvačnosti) v krutu [m^4]
$E = 2,1\text{e}11$	Youngův modul pružnosti [Pa]
$\mu_i = 0,33$	Poissonova konstanta [-]
$\rho = 1$	hustota materiálu nosníku [kg/m^3]
$pp = 4/8/16/160$	počet prvků po délce prutu [-]
$prut = 188$	typ prutu [-]
$tvaru = 36$	počet tvarů [-]
$amas = 130$	hmota soustředěná do těžiště [kg]



Obr.2.1 Souřadný systém I profilu



Obr.2.2 Okrajové podmínky prutu

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										anlt.
		4			8			16			160	
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	0,71	0,68	0,68	0,69	0,68	0,68	0,69	0,68	0,68	0,68	0,68
	směr Z	2,65	2,56	2,56	2,58	2,56	2,56	2,57	2,56	2,56	2,56	2,56
2	směr Y	677,58	484,54	469,06	522,24	482,76	479,70	492,08	482,65	481,93	482,73	-
	směr Z	2534,87	1813,22	1755,91	1954,19	1806,56	1795,72	1841,41	1806,12	1804,0	1806,4	-
3	směr Y	1515,05	760,95	712,76	865,71	754,45	748,19	779,38	754,00	752,67	754,22	-
	směr Z	5663,61	2855,77	3265,22	3239,01	2823,03	2800,71	2916,25	2821,36	2817,5	2822,1	-
4	směr Y	-	2142,52	2668,24	2709,86	1937,96	1876,21	2088,72	1930,85	1918,7	1931,8	-
	směr Z	-	8006,29	5642,46	10115,0	7242,07	7021,14	7803,80	7215,47	7180,0	7219,1	-
5	směr Y	-	2847,33	15289,9	3971,65	2458,31	2351,02	2716,38	2444,08	2426,6	2445,5	-
	směr Z	-	20069,8	15289,9	14809,7	9783,14	11329,6	10146,3	9131,96	9144,7	9137,4	-

Tab.2.1 prut $L=8\text{m}$, soustředěná hmota 130kg (195%), charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový lineární prvek

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										anlt.
		4			8			16			160	
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68
	směr Z	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56
2	směr Y	482,74	484,54	469,06	482,64	482,76	479,70	482,64	482,65	481,93	482,64	-
	směr Z	1806,46	1813,22	1755,91	1806,09	1806,56	1795,72	1806,09	1806,12	1804,0	1806,09	-
3	směr Y	754,37	760,95	712,76	753,98	754,45	748,19	753,97	754,00	752,67	753,97	-
	směr Z	1955,84	2855,77	3265,22	2821,27	2823,03	2800,71	2821,24	2821,36	2817,5	2821,24	-
4	směr Y	-	2142,52	2668,24	1930,74	1937,96	1876,21	1930,35	1930,85	1918,7	1930,34	-
	směr Z	-	8006,29	5642,46	7215,06	7242,07	7021,14	7213,61	7215,47	7180,0	7213,58	-
5	směr Y	-	2847,33	15289,9	2443,9	2458,31	2351,02	2443,08	2444,08	2426,6	2443,07	-
	směr Z	-	20069,8	15289,9	9131,24	9783,14	11329,6	9128,19	9131,96	9144,7	9128,13	-

Tab.2.2 prut $L=8m$, soustředěná hmota 130kg (195%), charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový kubický prvek

ANSYS - výsledky výpočtu programem ANSYS, konzistentní matice hmotnosti

Consist. - výsledky výpočtu programem BEAMER, konzistentní matice hmotnosti

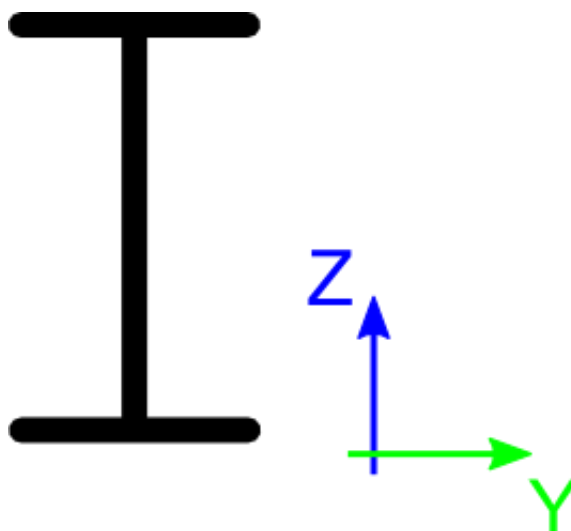
L.M. - výsledky výpočtu programem BEAMER, soustředěná matice hmotnosti

anlt. - analytický výpočet

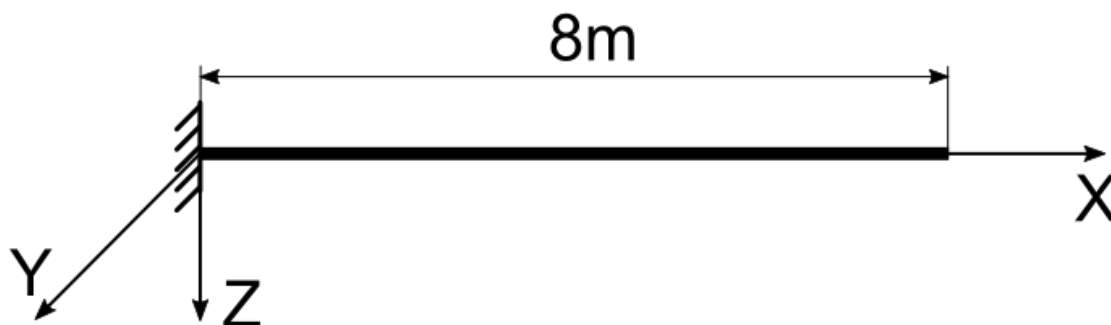
Příklad č. 3:

Vlastní tvary, konzola se spojitě rozloženou hmotou.

$S = 0,00106$	plocha příčného průřezu prutu/profilu [m^2]
$L = 8$	délka nosníku [m]
$J_y = 1,71\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Y [m^4]
$J_z = 0,122\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Z [m^4]
$J = 0,128\text{e-}7$	torzní konstanta (moment setrvačnosti) v krutu [m^4]
$E = 2,1\text{e}11$	Youngův modul pružnosti [Pa]
$\mu_i = 0,33$	Poissonova konstanta [-]
$\rho = 7850$	hustota materiálu nosníku [kg/m^3]
$pp = 4/8/16/160$	počet prvků po délce konzoly [-]
$prut = 188$	typ prutu [-]
$tvaru = 36$	počet tvarů [-]



Obr.3.1 Souřadný systém I profilu



Obr.3.2 Okrajové podmínky konzoly

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										anlt.
		4			8			16			160	
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	0,49	0,49	0,47	0,49	0,49	0,48	0,49	0,49	0,48	0,49	0,49
	směr Z	1,83	1,82	1,76	1,82	1,82	1,80	1,82	1,82	1,81	1,82	1,82
2	směr Y	3,55	3,04	2,73	3,16	3,04	2,95	3,07	3,04	3,02	3,04	3,04
	směr Z	13,27	11,39	10,22	11,82	11,38	11,06	11,49	11,38	11,30	11,38	11,38
3	směr Y	13,61	8,58	7,15	9,52	8,52	8,10	8,75	8,51	8,40	8,52	8,51
	směr Z	50,87	32,09	33,49	35,60	31,86	30,30	32,73	31,84	31,45	31,85	31,87
4	směr Y	-	16,92	14,92	21,02	16,72	15,49	17,64	16,68	16,36	16,69	16,68
	směr Z	-	80,11	55,31	78,51	62,49	57,99	65,93	62,36	61,23	62,38	62,46
5	směr Y	-	31,47	26,76	41,28	27,73	24,96	30,32	27,58	26,85	27,60	27,58
	směr Z	-	162,67	155,64	153,81	109,53	118,41	113,15	103,00	103,21	103,0	103,2

Tab.3.1 konzola $L=8m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový lineární prvek

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										
		4			8			16			160	anlt.
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	0,49	0,49	0,47	0,49	0,49	0,48	0,49	0,49	0,48	0,49	0,49
	směr Z	1,82	1,82	1,76	1,82	1,82	1,80	1,82	1,82	1,81	1,82	1,82
2	směr Y	3,04	3,04	2,73	3,04	3,04	2,95	3,04	3,04	3,02	3,04	3,04
	směr Z	11,38	11,39	10,22	11,38	11,38	11,06	11,38	11,38	11,30	11,38	11,38
3	směr Y	8,52	8,58	7,15	8,51	8,52	8,10	8,51	8,51	8,40	8,51	8,51
	směr Z	31,86	32,09	33,49	31,84	31,86	30,30	31,84	31,84	31,45	31,84	31,87
4	směr Y	16,75	16,92	14,92	16,68	16,72	15,49	16,68	16,68	16,36	16,68	16,68
	směr Z	62,59	80,11	55,31	62,35	62,49	57,99	62,35	62,36	61,23	62,35	62,46
5	směr Y	-	31,47	26,76	27,58	27,73	24,96	27,57	27,58	26,85	27,57	27,58
	směr Z	-	162,67	155,64	102,99	109,53	118,41	102,95	103,00	103,21	102,95	103,2

Tab.3.2 konzola $L=8m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový kubický prvek

ANSYS - výsledky výpočtu programem ANSYS, konzistentní matice hmotnosti

Consist. - výsledky výpočtu programem BEAMER, konzistentní matice hmotnosti

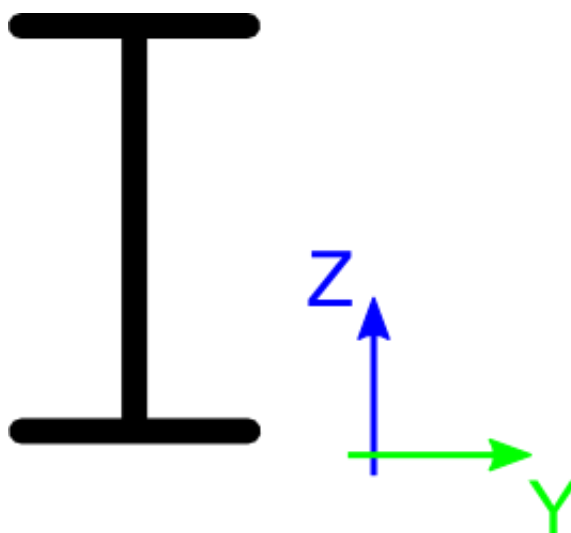
L.M. - výsledky výpočtu programem BEAMER, soustředěná matice hmotnosti

anlt. - analytický výpočet

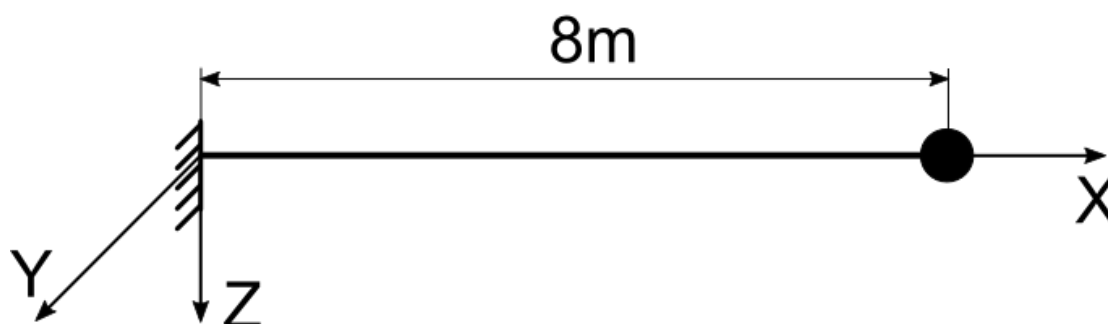
Příklad č. 4:

Vlastní tvary, konzola se soustředěnou hmotou.

$S = 0,00106$	plocha příčného průřezu prutu/profilu [m^2]
$L = 8$	délka nosníku [m]
$J_y = 1,71\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Y [m^4]
$J_z = 0,122\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Z [m^4]
$J = 0,128\text{e-}7$	torzní konstanta (moment setrvačnosti) v krutu [m^4]
$E = 2,1\text{e}11$	Youngův modul pružnosti [Pa]
$\mu_i = 0,33$	Poissonova konstanta [-]
$\rho = 1$	hustota materiálu nosníku [kg/m^3]
$pp = 4/8/16/160$	počet prvků po délce konzoly [-]
$prut = 188$	typ prutu [-]
$tvaru = 36$	počet tvarů [-]
$amas = 100$	hmota soustředěná na konec konzoly [kg]



Obr.4.1 Souřadný systém I profilu



Obr.4.2 Okrajové podmínky konzoly

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										anlt.
		4			8			16			160	
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
	směr Z	0,74	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73
2	směr Y	216,44	188,62	187,05	194,85	188,51	188,17	190,05	188,50	188,42	188,51	-
	směr Z	810,17	706,06	700,25	729,39	705,64	704,45	711,43	705,61	705,39	705,67	-
3	směr Y	993,14	614,65	587,77	679,19	611,09	606,67	626,79	610,85	609,86	610,99	-
	směr Z	3714,4	2446,9	2967,1	2541,3	2286,6	2271,0	2345,3	2285,7	2282,9	2286,3	-
4	směr Y	-	1303,1	1323,9	1598,6	1276,6	1330,3	1344,4	1274,4	1331,9	1275,0	-
	směr Z	-	6274,6	4417,7	5976,1	4809,1	4692,6	5027,4	4766,4	4752,8	4768,4	-
5	směr Y	-	2299,9	2200,2	3272,6	2190,0	2109,0	2388,8	2179,8	2165,3	2181,1	-
	směr Z	-	9217,9	11080,	12210,	8218,6	8610,1	8924,1	8145,4	8102,5	8149,9	-

Tab.4.1 konzola $L=8m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový lineární prvek

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										
		4			8			16			160	anlt.
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	směr Y	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
	směr Z	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73
2	směr Y	188,5	188,62	187,05	188,5	188,51	188,17	188,50	188,50	188,42	188,50	-
	směr Z	705,62	706,06	700,25	705,62	705,64	704,45	705,62	705,61	705,39	705,62	-
3	směr Y	611,05	614,65	587,77	610,84	611,09	606,67	610,84	610,85	609,86	610,84	-
	směr Z	2320,5	2446,9	2967,1	2285,8	2286,6	2271,0	2285,7	2285,7	2282,9	2285,7	-
4	směr Y	-	1303,1	1323,9	1274,5	1276,6	1330,3	1274,4	1274,4	1331,9	1274,4	-
	směr Z	-	6274,6	4417,7	4766,2	4809,1	4692,6	4765,9	4766,4	4752,8	4765,9	-
5	směr Y	-	2299,9	2200,2	2179,8	2190,0	2109,0	2179,2	2179,8	2165,3	2179,2	-
	směr Z	-	9217,9	11080,	8144,9	8218,6	8610,1	8142,8	8145,4	8102,5	8142,7	-

Tab.4.2 konzola $L=8m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový kubický prvek

ANSYS - výsledky výpočtu programem ANSYS, konzistentní matice hmotnosti

Consist. - výsledky výpočtu programem BEAMER, konzistentní matice hmotnosti

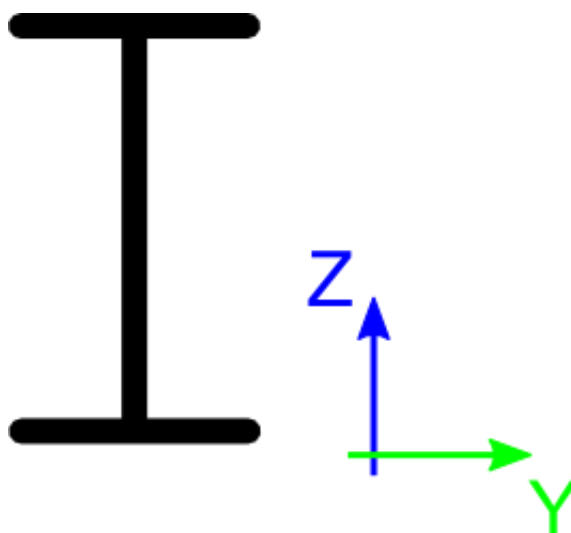
L.M. - výsledky výpočtu programem BEAMER, soustředěná matice hmotnosti

anlt. - analytický výpočet

Příklad č. 5:

Vlastní tvary, rám.

$S = 0,00106$	plocha příčného průřezu prutu/profilu [m ²]
$a = 5$	délka rámu [m]
$b = 3$	výška rámu [m]
$J_y = 1,71e-6$	moment setrvačnosti k ose Y [m ⁴]
$J_z = 0,122e-6$	moment setrvačnosti k ose Z [m ⁴]
$J = 0,128e-7$	torzní konstanta (moment setrvačnosti) v krutu [m ⁴]
$E = 2,1e11$	Youngův modul pružnosti [Pa]
$\mu_i = 0.33$	Poissonova konstanta [-]
$\rho = 7850$	hustota materiálu nosníku [kg/m ³]
$pp = 1/2/3/160$	počet prvků po délce prutu [-]
$prut = 188$	typ prutu [-]
$tvaru = 36$	počet tvarů [-]



Obr.5.1 Souřadný systém I profilu



Obr.5.2 Okrajové podmínky rámu

vlastní tvar č.		vl. frekvence pro počet konečných prvků										
		3			6			12			160	anlt.
		program	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	
1	v rovině	254,03	2,48	2,26	2,85	2,48	2,44	2,55	2,48	2,47	2,48	-
	příčné	6,8	7,60	5,51	6,10	5,74	5,72	5,83	5,73	5,73	5,74	-
2	v rovině	270,13	5,80	5,38	10,56	5,63	5,22	6,37	5,58	5,54	5,58	-
	příčné	9,59	8,86	9,66	9,23	8,85	7,49	9,04	8,84	8,43	8,96	-
3	v rovině	381,63	19,43	11,83	45,47	15,88	11,73	18,92	14,88	14,43	14,84	-
	příčné	284 35	70,46	30,96	29,31	22,60	15,84	24,32	22,55	20,32	22,67	-
4	v rovině	384,51	25,47	17,41	333,81	18,56	11,78	22,56	18,35	18,18	18,33	-
	příčné	396 40	-	-	90,86	63,52	43,26	67,93	54,49	46,32	54,52	-
5	v rovině	8892,1	-	-	343,21	25,99	16,31	34,72	23,04	22,29	22,94	-
	příčné	526 818	-	-	125,82	72,14	56,38	76,95	67,58	51,42	66,97	-

Tab.5.1 rám délky $a=5\text{m}$, výšky $b=3\text{m}$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový lineární prvek

vlastní tvar č.	program	vl. frekvence pro počet konečných prvků										anlt.
		3			6			12			160	
		ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	Consist.	L.M.	ANSYS	
1	v rovině	2,48	2,48	2,26	2,48	2,48	2,44	2,48	2,48	2,47	2,48	-
	příčně	5,74	7,60	5,51	5,74	5,74	5,72	5,73	5,73	5,73	5,74	-
2	v rovině	5,78	5,80	5,38	5,58	5,63	5,22	5,57	5,58	5,54	5,57	-
	příčně	8,97	8,86	9,66	8,95	8,85	7,49	8,95	8,84	8,43	8,95	-
3	v rovině	17,11	19,43	11,83	14,98	15,88	11,73	14,84	14,88	14,43	14,83	-
	příčně	61,27	70,46	30,96	22,68	22,60	15,84	22,67	22,55	20,32	22,67	-
4	v rovině	23,53	25,47	17,41	18,35	18,56	11,78	18,33	18,35	18,18	18,32	-
	příčně	73,06	-	-	54,92	63,52	43,26	54,52	54,49	46,32	54,51	-
5	v rovině	36,84	-	-	23,27	25,99	16,31	22,94	23,04	22,29	22,94	-
	příčně	85,94	-	-	67,15	72,14	56,38	66,96	67,58	51,42	66,96	-

Tab.5.2 rám délky $a=5m$, výšky $b=3m$, charakteristiky průřezu I100, vysoká smyková tuhost průřezu (na úrovni Youngova modulu pružnosti v tahu), dvouuzlový kubický prvek

ANSYS - výsledky výpočtu programem ANSYS, konzistentní matice hmotnosti

Consist. - výsledky výpočtu programem BEAMER, konzistentní matice hmotnosti

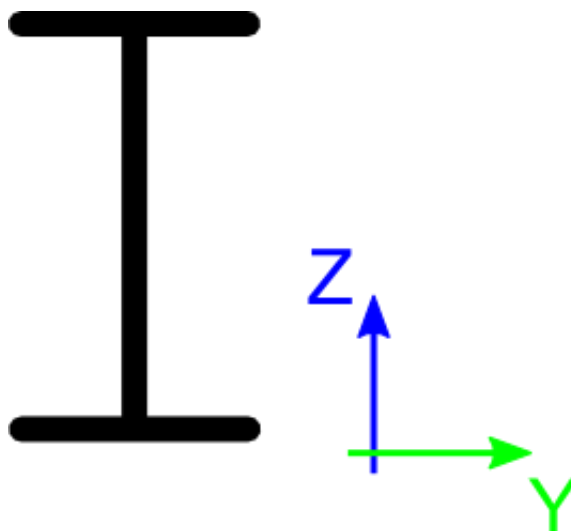
L.M. - výsledky výpočtu programem BEAMER, soustředěná matice hmotnosti

anlt. - analytický výpočet

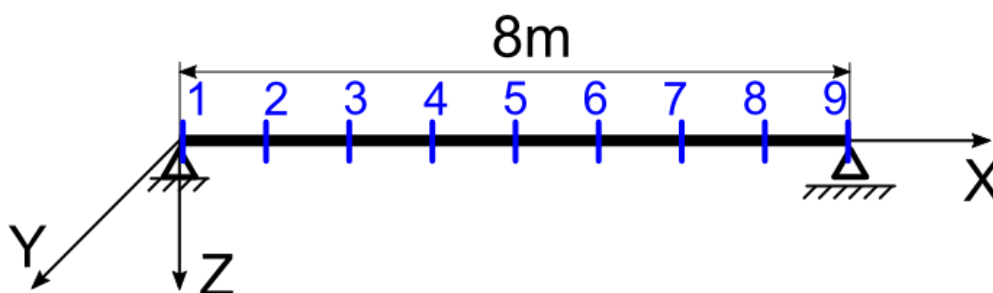
Příklad č. 6:

Srovnání posuvů pro první a druhý tvar prostého podepřeného prutu.

$S = 0,00106$	plocha příčného průřezu prutu/profilu [m^2]
$L = 8$	délka nosníku [m]
$J_y = 1,71\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Y [m^4]
$J_z = 0,122\text{e-}6$	moment setrvačnosti k ose Z [m^4]
$J = 0,128\text{e-}7$	torzní konstanta (moment setrvačnosti) v krutu [m^4]
$E = 2,1\text{e}11$	Youngův modul pružnosti [Pa]
$\mu_i = 0,33$	Poissonova konstanta [-]
$\rho = 7850$	hustota materiálu nosníku [kg/m^3]
$pp = 8$	počet prvků po délce prutu [-]
$prut = 188$	typ prutu [-]
$tvaru = 36$	počet tvarů [-]



Obr.6.1 Souřadný systém I profilu



Obr.6.2 Okrajové podmínky prutu

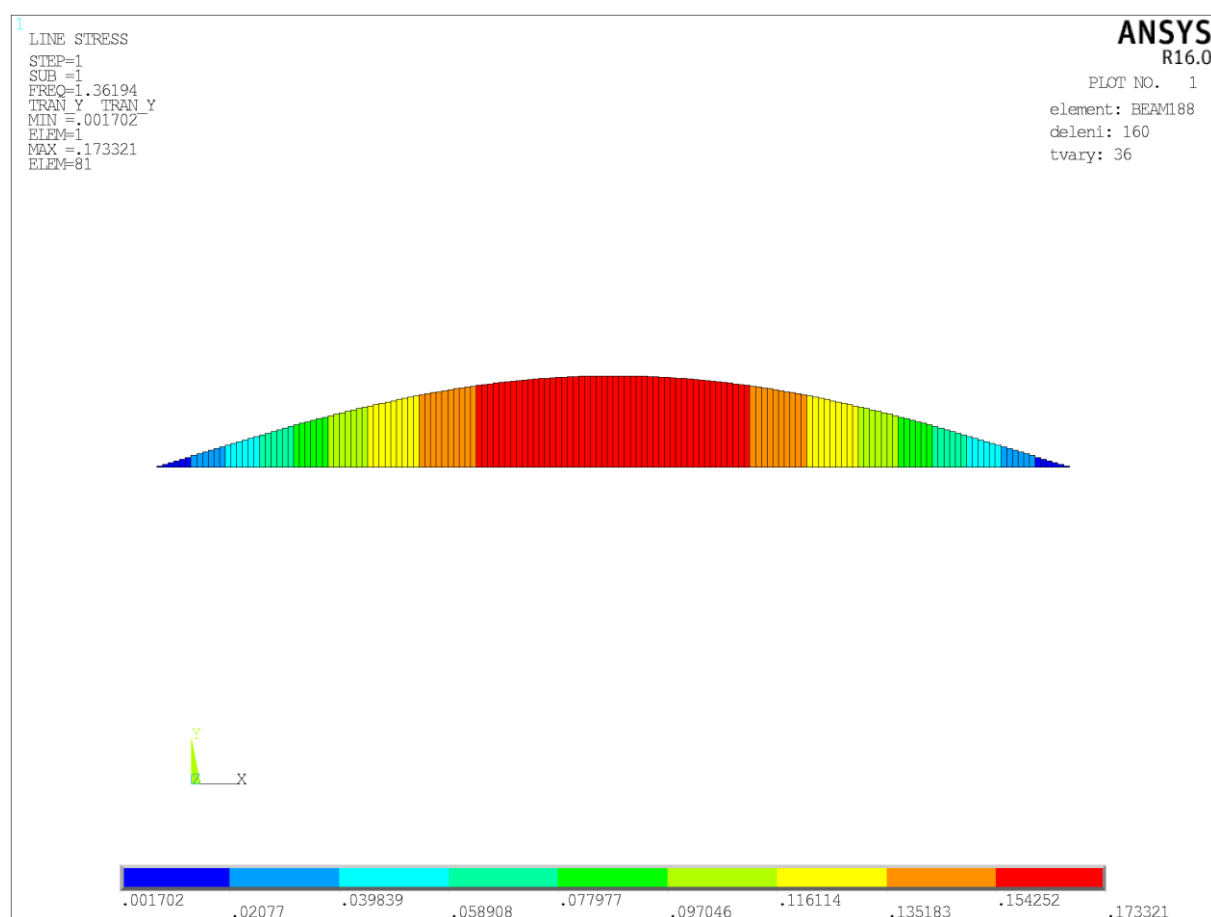
posuvy ve směru osy Y										
č. uzlu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zdroj
1. vlastní tvar	0	0,3827	0,7071	0,9239	1,0	0,9239	0,7071	0,3827	0	Beamer
	0	0,3827	0,7067	0,9237	1,0	0,9237	0,7067	0,3827	0	ANSYS
	0	0,3827	0,7072	0,9239	1,0	0,9239	0,7072	0,3827	0	anlt.
2. vlastní tvar	0	0,7071	1,0	0,7071	0	-0,7071	1,0	-0,7071	0	Beamer
	0	0,7068	1,0	0,7068	0	-0,7068	1,0	-0,7068	0	ANSYS
	0	0,7072	1,0	0,7072	0	-0,7072	1,0	-0,7072	0	anlt.

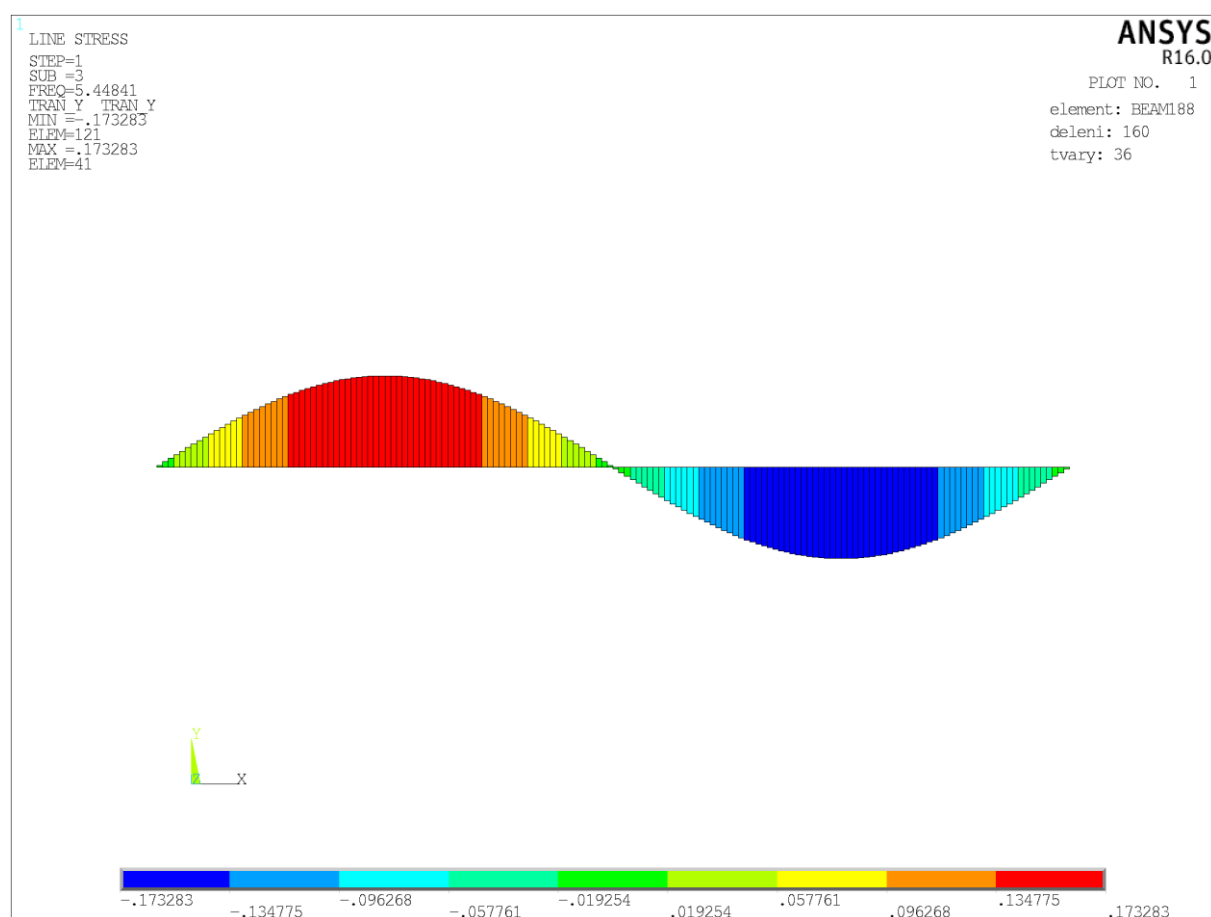
Tab.6.1 Tabulka srovnání posuvů pro první a druhý vlastní tvar prostého podepřeného prutu

Beamer - výsledky výpočtu programem BEAMER

ANSYS - výsledky výpočtu programem ANSYS

anlt - výsledky analytického výpočtu

Obr.6.3 První vlastní tvar v ose Y, $f=1,362\text{Hz}$

Obr.6.4 Druhý vlastní tvar v ose Y, $f=5,448\text{Hz}$