



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

VYUŽITÍ OBVODOVÝCH PRVKŮ S FRAKTÁLNÍ DYNAMIKOU V ANALOGOVÝCH POSOUVAČÍCH FÁZE

UTILIZATION OF CIRCUIT ELEMENTS DESCRIBED BY FRACTIONAL-ORDER DYNAMICS IN ANALOG
PHASE SHIFTERS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Radim Zedka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Petržela, Ph.D.

BRNO 2016



Bakalářská práce

bakalářský studijní obor **Elektronika a sdělovací technika**

Ústav radioelektroniky

Student: Radim Zedka

ID: 164441

Ročník: 3

Akademický rok: 2015/16

NÁZEV TÉMATU:

Využití obvodových prvků s fraktální dynamikou v analogových posouvačích fáze

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Detailně se seznámte s vlastnostmi a syntézou obvodových prvků, které jsou popsány derivacemi necelistvých řádů. Soustředte se především na pasivní realizace a vyberte si nejvhodnější strukturu. Pro tento případ vypočítejte hodnoty součástek a realizujte tyto prvky, a to v intervalu necelistvého řádu od nuly do jedné. Rovněž realizujte fázově přesný fraktální dvojpól pro audio aplikace.

Zkonstruované fraktální dvojpóly implementujte do analogových filtračních struktur tak, aby tyto posouvaly fázi beze změny (nebo s redukovanou změnou) modulové kmitočtové charakteristiky. Tento fázový posuv může začínat i končit na libovolné asymptotické nebo uživatelem definované hodnotě kmitočtu. Všechna objevená zapojení ověřte laboratorním měřením a posuďte správnou činnost fázovačů signálu.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] HILFER, R. Application of fractional calculus in physics, World Scientific Publishing, 2000.

[2] PETRZELA, J., SLEZAK, J. Aproximace fraktálních dvojpólů v kmitočtové oblasti, Elektrotechnika, vol. 5, pp. 1–9, 2011.

Termín zadání: 8.2.2016

Termín odevzdání: 26.5.2016

Vedoucí práce: doc. Ing. Jiří Petrzela, Ph.D.

Konzultant bakalářské práce:

doc. Ing. Tomáš Kratochvíl, Ph.D., předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Práce se zabývá matematickým popisem, metodami návrhu a využitím fraktálních pasivních RC struktur - dvojpólů - v určité kmitočtové oblasti. Jsou zde uvedeny dvě metody pro návrh těchto struktur a jedna z nich je využita pro návrh a konstrukci tří fraktálních dvojpólů. Ty jsou podrobně změřeny a zhodnoceny. Jsou zde teoreticky rozebrány analogové posouvače fáze využívající tento fraktální prvek a následně jsou prakticky realizovány a změřeny. Závěrem se práce stručně věnuje metodě návrhu fraktálních dvojbranů pomocí obecných bikvadrurních filtrů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dvojpól, dvojbran, fraktální imitance, napět'ový přenos, fraktální počet, CPE, posouvač fáze, kmitočtový filtr, VFČ, pásmová propust, pásmová zadrž.

ABSTRACT

This document deals with fractional passive dipole structures, their mathematical description, design methods and practical use with respect to limited frequency range. Two fractional dipole design methods are being described while one of them is used for practical realization of three fractional dipole samples. All of them are well measured and documented. Analog phase shifters implementing this fractional-order dipole are being discussed theoretically and they are practically constructed and measured. Concisely the fractional-order two-port design method implementing biquadratic filters is described.

KEYWORDS

Dipole, two-port, fractional immittance, voltage transfer function, fractional calculus, CPE, phase shifter, frequency filter, allpass filter, band pass, band reject.

ZEDKA, R. *Využití obvodových prvků s fraktální dynamikou v analogových posouvačích fáze*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2016. 45 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jiří Petržela, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma *Využití obvodových prvků s fraktální dynamikou v analogových posouvačích fáze* jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne

.....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce panu docentu Jiřímu Petrželovi za jeho ochotu a obětavost při konzultacích.

Obsah

Seznam obrázků	viii
Seznam tabulek	x
Úvod	1
1 Teorie fraktálních dvojpolů	2
1.1 Popis ideálního CPE	2
1.2 Kmitočtově omezený model CPE	2
1.3 Časová analýza vlastností CPE.....	8
2 Metody návrhu CPE	11
2.1 Metoda návrhu CPE řešením soustavy lineárních rovnic.....	11
2.2 Metoda návrhu CPE na bázi geometrické řady	16
2.2.1 Příklad.....	20
3 Analogové posouvače fáze	23
3.1 Asymptotické fázovače signálů	23
3.2 Posouvače s omezeným pracovním pásmem.....	27
3.2.1 Libovolné proložení ve tvaru funkce arc-tangens	27
3.2.2 Proložení s inflexním bodem uprostřed pásma.....	28
4 Vlastní realizace CPE	30
4.1 Měření kmitočtových charakteristik CPE.....	30
5 Realizace posouvačů fáze s CPE	35
5.1 Fraktální dolní propust – DP	35
5.2 Fraktální dolní propust – IP	36
5.3 Fraktální integrátor	37
6 Návrh fraktálních dvojbranů pomocí kaskády pásmových propustí a zádrží	39
6.1 Ideální konstelace nul a pólů	40
6.2 Příklad návrhu fraktálního dvojbranu.....	42
7 Závěr	45

Literatura	46
Seznam symbolů, veličin a zkratk	47

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1.1	Elementární obvodové struktury pro R a C.	3
Obrázek 1.2	Kmitočtová závislost modulu impedance v dB pro strukturu A - program Matlab.	3
Obrázek 1.3	Kmitočtová závislost argumentu impedance pro strukturu A - program Matlab.	3
Obrázek 1.4	Kmitočtová závislost modulu admitance pro strukturu B - program Matlab.	4
Obrázek 1.5	Kmitočtová závislost argumentu admitance pro strukturu B - program Matlab.	4
Obrázek 1.6	Ideální a reálný kmitočtový průběh modulu admitance – program Matlab. .	6
Obrázek 1.7	Výsledek simulace fázové charakteristiky (PSpice) struktury B pro $n = 8$...	6
Obrázek 1.8	Výsledek simulace fázové charakteristiky (PSpice) struktury B pro $n = 16$.	7
Obrázek 1.9	Proudová odezva na harmonické napěťové buzení (PSpice) – řád $\frac{3}{4}$	9
Obrázek 1.10	Proudová odezva na napěťové buzení trojúhelníkovým signálem – řád $\frac{3}{4}$.	10
Obrázek 1.11	Proudová odezva na napěťové buzení trojúhelníkovým signálem - řád $\frac{1}{2}$.	10
Obrázek 1.12	Proudová odezva na napěťové buzení trojúhelníkovým signálem - řád $\frac{1}{4}$.	10
Obrázek 2.1	Ekvidistantní rozložení nul a pólů v logaritmickém měřítku - Matlab.	11
Obrázek 2.2	Průběh argumentu admitance s příslušnými polohami nul a pólů – Matlab.	11
Obrázek 2.3	Výčet hodnot R a C.	21
Obrázek 3.1	Allpass filtr (VFČ) - nahrazení kondenzátoru CPE.	23
Obrázek 3.2	Zobrazení nul a pólů obyčejného VFČ s CPE.	24
Obrázek 3.3	Zobrazení nul a pólů ideálního fraktálního VFČ.	25
Obrázek 3.4	Aktivní fraktální dolní propust.	25
Obrázek 4.1	Deska plošných spojů CPE.	30
Obrázek 4.2	Měření CPE pomocí AD844AN - zapojení č. 1.	31
Obrázek 4.3	Měření CPE pomocí AD844AN - zapojení č. 2.	31
Obrázek 5.1	Schéma a komplexní kmit. rovina fraktálního posouvače fáze typu DP.	35
Obrázek 5.2	Kmitočtová char. a polární graf fraktální dolní propusti typu DP (měřeno).	35
Obrázek 5.3	Schéma a komplexní kmit. rovina fraktálního posouvače fáze typu IP.	36
Obrázek 5.4	Kmitočtová char. a polární graf fraktální dolní propusti typu IP (měřeno).	37
Obrázek 5.5	Modulová a fázová charakteristika fraktálního integrátoru (měřeno).	37

Obrázek 5.6	Polární grafy měřených charakteristik pro řád $\frac{1}{4}$ (vlevo) a $\frac{1}{2}$ (vpravo).	37
Obrázek 5.7	Schéma a komplexní kmitočtová rovina fraktálního integrátoru.	38
Obrázek 6.1	Modulová a fázová charakteristika obvodu BP (Matlab).	39
Obrázek 6.2	Modulová a fázová charakteristika obvodu BR (Matlab).	39
Obrázek 6.3	Přiřazení nul a pólů obvodům BP a BR.	40
Obrázek 6.4	Příklad migračních funkcí nul (modrá) a pólů (zelená) - program Matlab.	41
Obrázek 6.5	Fázová charakteristika před (vlevo) a po migraci (vpravo) – program Matlab.	41
Obrázek 6.6	Schéma kaskády obvodů BP a BR – PSpice.	43
Obrázek 6.7	Modulová a fázová charakteristika výsledné kaskády BP a BR - PSpice... ..	44
Obrázek 6.8	Detail fázové charakteristiky obvodu - PSpice.	44

SEZNAM TABULEK

Tabulka 4.1	Přehled zadaných a reálných parametrů CPE.....	34
Tabulka 6.1	Výsledky optimalizovaných migračních koeficientů.	42
Tabulka 6.2	Přehled kmitočtů pólů a nul po migraci.....	43
Tabulka 6.3	Vypočtené parametry obvodů BP a BR.....	43

ÚVOD

Je známo, že existují tři druhy pasivních obvodových prvků, a to rezistor, kondenzátor a induktor. Uvažujeme-li ideální prvky (bez parazitních vlastností), lze přesně popsat jejich chování v obvodu matematicky. Rezistor je prvek ztrátový a vztah mezi proudem a napětím na jeho svorkách je dán ohmovým zákonem. Induktor a kondenzátor jsou akumulačními prvky, čili jsou schopny pojmout množství energie a poté ji vrátit zpět do obvodu. K jejich popisu je již nutné použít diferenciálního počtu, jelikož vztah mezi napětím a proudem je vyjádřen derivací, resp. integrací prvního řádu.

$$i_R = \frac{U_R}{R}, \quad i_C = C \frac{dU_C}{dt}, \quad i_L = \frac{1}{L} \int U_C dt + I_0$$

Ať už jsou tyto prvky uspořádané do jakýchkoli struktur, je k jejich popisu potřeba pouze lineárních diferenciálních rovnic celistvých řádů. Trendem poslední doby je návrh a sestavení pasivní struktury rezistorů a akumulačních prvků tak, že svým chováním v omezeném kmitočtovém pásmu aproximují (s konečnou přesností, tedy předem definovanou povolenou odchylkou fáze) prvek popsateľný derivacemi, resp. integracemi necelistvých řádů [1,2].

Takto navržený dvojpól vykazuje v uživatelsky definovaném kmitočtovém pásmu konstantní fázový posuv a je často označován zkratkou CPE – constant phase element [7,8]. CPE může být zapojen prakticky do všech standardních analogových obvodů na místo klasických setrvačných prvků, nejlépe však do aktivních struktur s operačními zesilovači, trans-admitančními zesilovači, proudovými konvejory nebo jinými aktivními prvky [3-6]. Zde lze očekávat, že se naplno uplatní jeho unikátní vlastnosti. Je možné navrhnout fraktální integrátor, derivátor, $PI^\alpha D^\beta$ regulátory pro precizní řízení složitých systémů [9], složité zpětnovazební smyčky a filtrační obvody. Velký potenciál mají CPE také při modelování dynamických systémů popisujících reálné děje v různých vědních oborech.

Je tedy nezbytné najít, co možná nejjednodušší realizaci CPE, která splní požadavky uživatele v celém zadaném kmitočtovém pásmu a bude cenově a technologicky dostupná. Těmto požadavkům vyhovuje pasivní realizace pomocí rezistorů a kondenzátorů, jejímž návrhem se zabývá značná část této práce.

1 TEORIE FRAKTÁLNÍCH DVOJPÓLŮ

Následující text se zabývá matematickým popisem ideálního CPE a jeho aproximací v kmitočtové oblasti, tedy návrhem kmitočtově omezeného CPE.

1.1 Popis ideálního CPE

Pojmem ideální CPE je označen dvojpól, jehož imitance je komplexní a jejíž argument je nezávislý na kmitočtu [2,8]. To znamená, že logaritmus modulu imitance v semilogaritmickém zobrazení klesá/roste s konstantní směrnici a argument je roven konstantě. V Laplaceově transformaci lze psát impedanci dvojpólu jako:

$$Z(s) = Ds^\alpha. \quad (1.1.1)$$

Po provedení substituce $s = j\omega$ se vztah změní na:

$$\vec{Z}(\omega) = D\omega^\alpha j^\alpha = D\omega^\alpha e^{j\varphi}. \quad (1.1.2)$$

Dále platí pro modul impedance:

$$|\vec{Z}(\omega)| = D \cdot \omega^\alpha. \quad (1.1.3)$$

A pro argument platí:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha. \quad (1.1.4)$$

Fraktální řád $\alpha \in \langle -1, 1 \rangle$, přičemž pro $\alpha = -1$ jde o kondenzátor s kapacitou $C = 1/D$ a pro $\alpha = 1$ jde o induktor o indukčnosti $L = D$.

Pro modul impedance v decibelech platí:

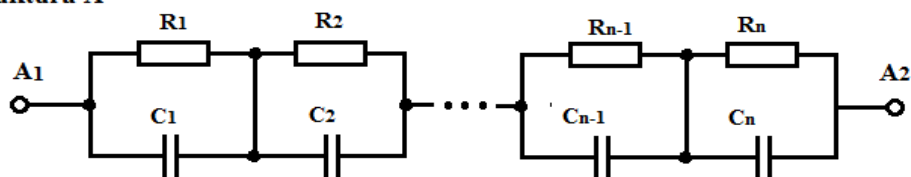
$$Z_{dB} = 20 \cdot \log|\vec{Z}(\omega)| = 20 \cdot \log D + \alpha \cdot 20 \log \omega. \quad (1.1.5)$$

To je v semilogaritmickém zobrazení přímka se sklonem $\alpha \cdot 20$ a offsetem na jednotkovém kmitočtu $20 \cdot \log D$.

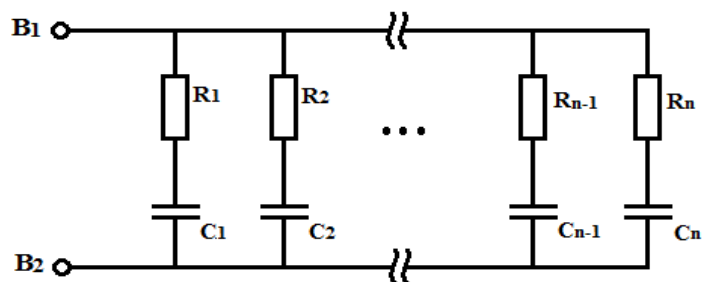
1.2 Kmitočtově omezený model CPE

Z praktického hlediska je vhodné zavést modely, které zohledňují vlastnosti použitých topologií. Jsou zde uvažovány dvě elementární topologie (z mnoha dalších) pro struktury využívající rezistory a kondenzátory. První z nich je sériovým spojením paralelních RC článků, zatímco druhá je paralelním spojením sériových RC článků. Obě tyto obvodové realizace jsou uvedeny na obrázku 1.1. Při použití CPE ve strukturách s aktivními prvky je užitečné a často i nutné znát jejich chování i mimo pracovní pásmo ohraničené mezními kmitočty.

Struktura A

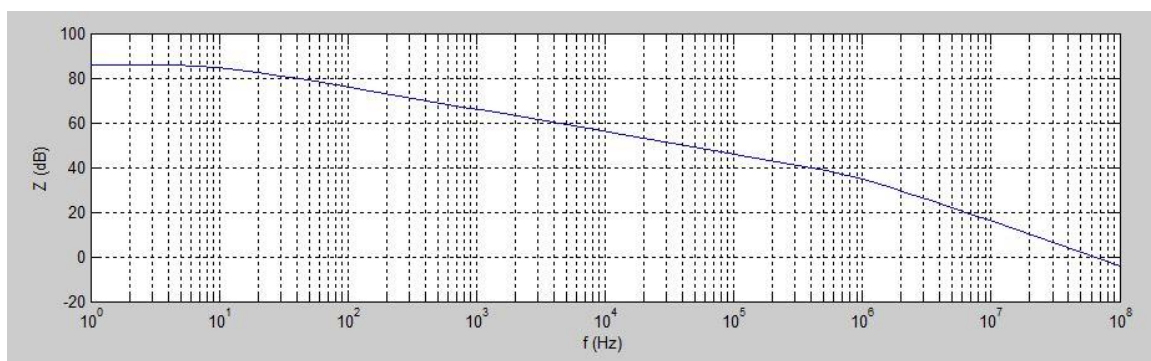


Struktura B

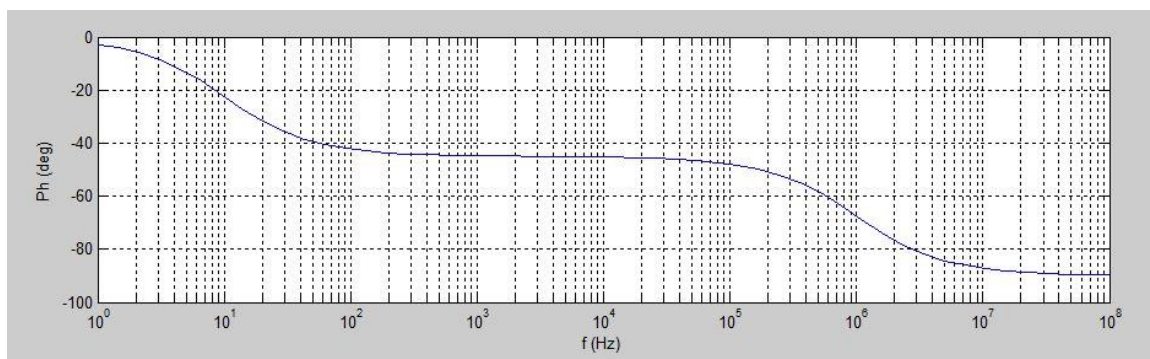


Obrázek 1.1 Elementární obvodové struktury pro R a C.

Impedanci **struktury A** v závislosti na kmitočtu podle vztahu (1.2.1) ilustrují obrázky 1.2 a 1.3.



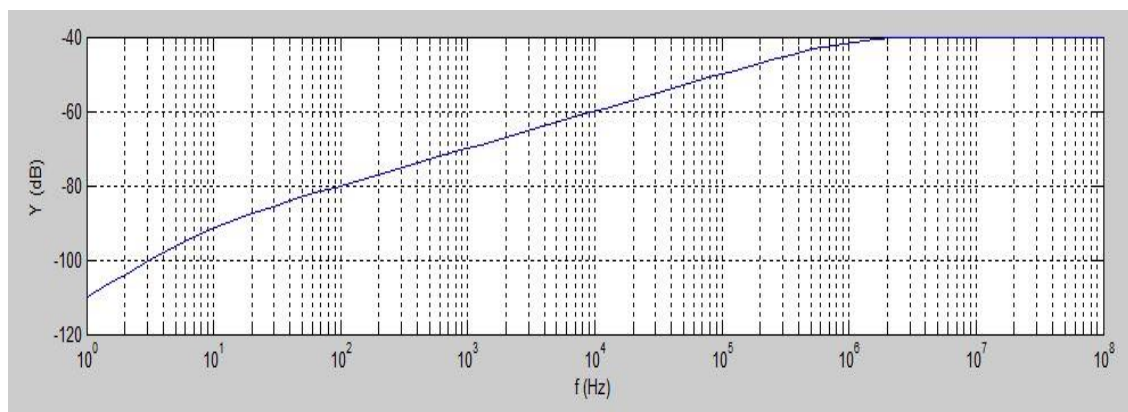
Obrázek 1.2 Kmitočtová závislost modulu impedance v dB pro strukturu A - program Matlab.



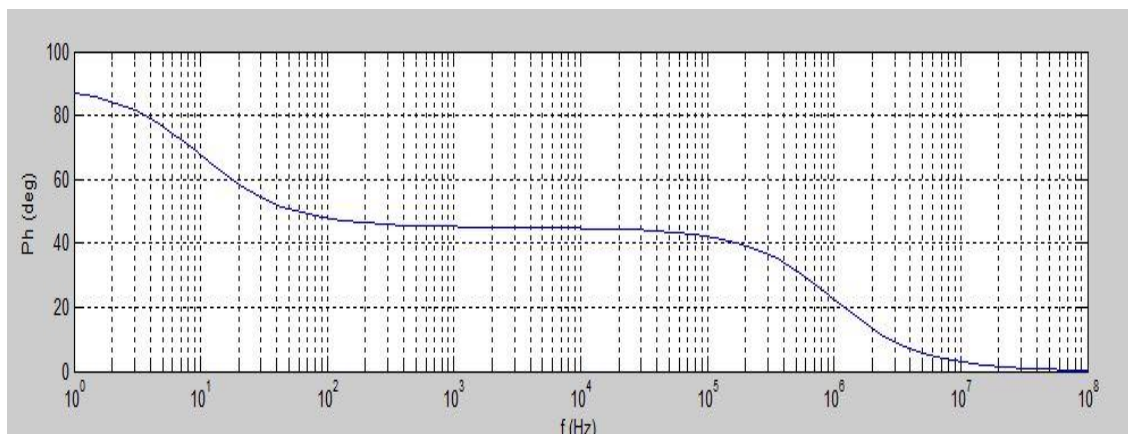
Obrázek 1.3 Kmitočtová závislost argumentu impedance pro strukturu A - program Matlab.

Při rostoucím kmitočtu se impedance nejprve rovná součtu všech stejnosměrných odporů, čili je kmitočtově nezávislá. Poté následuje pásmo fraktální impedance, která v případě struktury A klesá se sklonem $-\alpha \cdot 20 \text{ dB/dek}$ a argument nabývá konstantní hodnoty $-\alpha \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Po dosažení horního mezního kmitočtu je sklon impedance roven -20 decibelů na dekádu a argument klesá k $-\frac{\pi}{2}$ radiánům.

Charakter **struktury B** je vyjádřen kmitočtově závislou admitancí, jelikož se jedná o paralelní spojení jednotlivých sekcí. Obrázky 1.4 a 1.5 zobrazují průběhy vztahu (1.2.5).



Obrázek 1.4 Kmitočtová závislost modulu admitance pro strukturu B - program Matlab.



Obrázek 1.5 Kmitočtová závislost argumentu admitance pro strukturu B - program Matlab.

Zde, jak vyplývá obvodové realizace, se nejprve projevuje kapacitní charakter. Sklon admitance je $+20 \text{ dB/dek}$ a argument je $+\frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Po překročení dolního mezního kmitočtu nastává oblast fraktálního charakteru, kdy admitance roste se sklonem $\alpha \cdot 20 \text{ dB/dek}$, a argument zůstává konstantní na hodnotě $\alpha \frac{\pi}{2}$. Teprve za horním mezním kmitočtem zůstává modul admitance konstantní - roven součtu všech paralelních vodivostí - a argument klesá k 0° (rezistivní charakter).

Pro matematický popis předchozích kmitočtových závislostí byly odvozeny vztahy uvedené dále v textu.

Struktura A má impedanci v Laplaceově transformaci:

$$Z(s) = \frac{Z(0)\omega_d^\alpha \omega_h^{1-\alpha}}{(s+\omega_d)^\alpha (s+\omega_h)^{1-\alpha}} \quad (1.2.1)$$

Zde je s komplexní úhlový kmitočet, ω_d je dolní mezní kmitočet, ω_h je horní mezní kmitočet, $Z(0) = \sum R$, což je algebraický součet všech rezistancí a α je fraktální řád. Tuto obvodovou funkci lze zjednodušeně chápat jako kaskádní řazení tří dílčích přenosových funkcí, a sice s konstantním přenosem a dvou „dolních propustí“ fraktálního řádu α a $1 - \alpha$. Pro modul impedance platí:

$$|\overrightarrow{Z(\omega)}| = \frac{Z(0)\omega_d^\alpha \omega_h^{1-\alpha}}{(\sqrt{\omega^2 + \omega_d^2})^\alpha (\sqrt{\omega^2 + \omega_h^2})^{1-\alpha}}. \quad (1.2.2)$$

Pro argument platí:

$$\varphi(\omega) = -\alpha \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) + (\alpha - 1) \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_h}\right). \quad (1.2.3)$$

Obecně platí vztah:

$$\overrightarrow{Z(\omega)} = |\overrightarrow{Z(\omega)}| \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.2.4)$$

U **struktury B** platí analogické vztahy, nicméně jde o admitanci dvojpólu. Pro jednodušší představu o problematice uvažují následující vztahy **kladný řád** $\alpha \in (0,1)$, i když by dle předchozích konvencí (kapacitní charakter) měl být záporný. Admitance v Laplaceově transformaci je dána vztahem:

$$Y(s) = \frac{s \cdot \sum G}{(s+\omega_d)^{1-\alpha} (s+\omega_h)^\alpha}. \quad (1.2.5)$$

Zde $\sum G$ je součet všech převrácených hodnot rezistancí. Pro modul admitance platí:

$$|\overrightarrow{Y(\omega)}| = \frac{\omega \cdot \sum G}{(\sqrt{\omega^2 + \omega_d^2})^{1-\alpha} (\sqrt{\omega^2 + \omega_h^2})^\alpha}. \quad (1.2.6)$$

Zde je možné odvodit vztah pro výpočet **koefficientu D** ze vztahu (1.1.3). Je totiž užitečné proložit kmitočtově závislý model CPE ideálním modelem – pouze však na použitelném kmitočtovém pásmu. Výpočty pro složitější struktury zahrnující CPE se tak značně zjednoduší. Analogicky ze vztahu (1.1.3) platí (již se změnou konvence α):

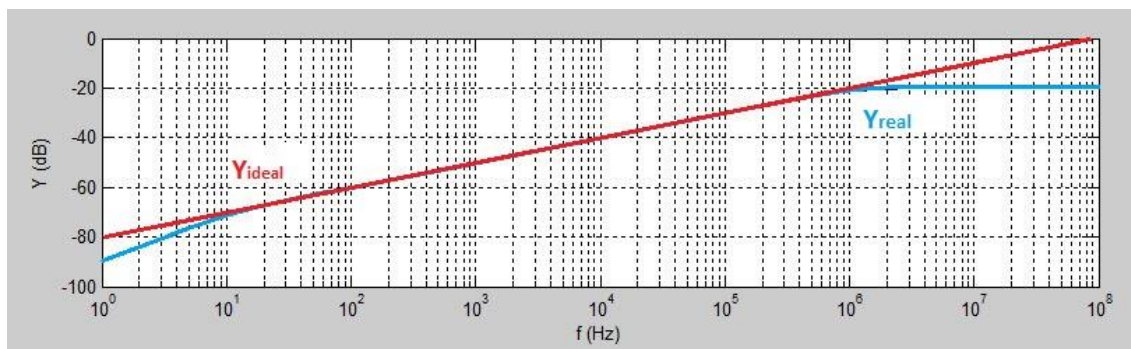
$$|\overrightarrow{Y(\omega)}| = \frac{1}{D} \cdot \omega^\alpha \quad (1.2.7)$$

Koeficient D je přibližně dán vztahem:

$$D \cong \frac{\omega_h^\alpha}{\sum G} \quad (1.2.8)$$

Ten byl odvozen na základě rovnosti vztahů (1.2.6) a (1.2.7) pro kmitočet uprostřed pracovního pásma CPE.

Následující obrázek 1.6 ukazuje průběhy vztahů (1.2.6) – modrá křivka, a (1.2.7) – červená křivka. Je třeba mít na paměti, že použitelnost vztahu (1.2.7) je limitována nejen odchylkou modulu, ale převážně pásmem konstantního průběhu argumentu admitance.



Obrázek 1.6 Ideální a reálný kmitočtový průběh modulu admitance – program Matlab.

Pro argument platí:

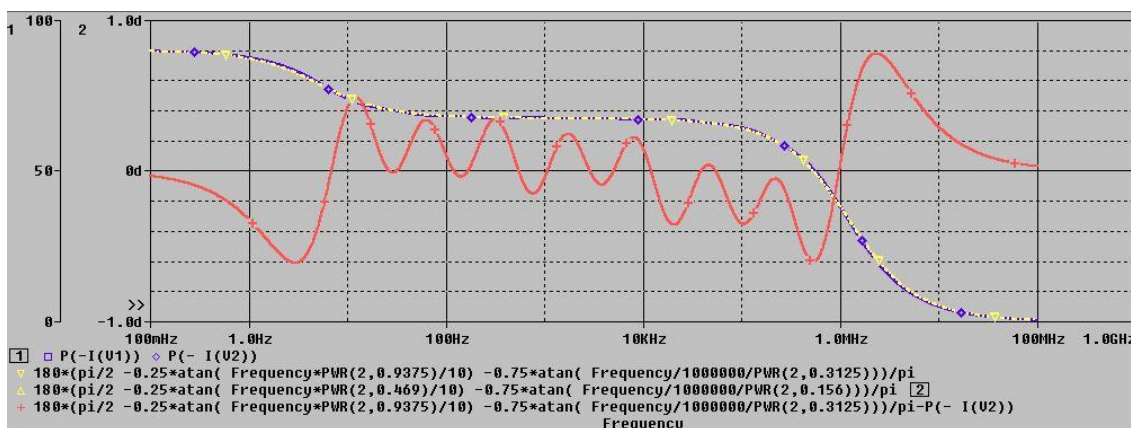
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - (1 - \alpha) \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) - \alpha \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_h}\right). \quad (1.2.9)$$

Výše uvedené vztahy jsou teoretické a odpovídají reálné situaci až **od určitého počtu sekcí** RC struktury. Pro korekci odchylek fázové charakteristiky lze přepočítat ω_d a ω_h na korigované hodnoty ω_d' a ω_h' , které **zahrnují vliv počtu sekcí** struktury. Odchylka modulových charakteristik není zdaleka tak kritická, jako u argumentových charakteristik. Vztahy jsou následující:

$$\omega_d' = \omega_d 2^{-\alpha \frac{10}{n}}, \quad (1.2.10)$$

$$\omega_h' = \omega_h 2^{(1-\alpha) \frac{10}{n}}. \quad (1.2.11)$$

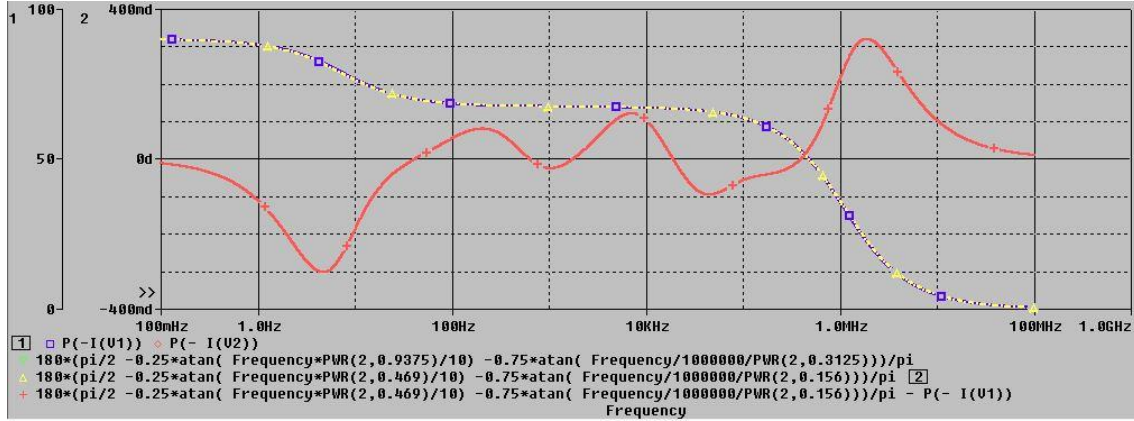
Zde n je počet sekcí struktury, α je fraktální řád a ω_d resp. ω_h jsou mezní kmitočty **bez korekce**, tedy přímo kmitočty krajních pólů reálné struktury. Při dosazení korigovaných mezních kmitočtů do vztahu (1.2.5) – potažmo do odvozených vztahů (1.2.6) a (1.2.9) je získán již velmi důvěryhodný model CPE. Na obrázku (1.7) je výsledek AC - analýzy v programu PSpice struktury B pro $\alpha = 3/4$, počet sekcí $n = 8$ a mezní kmitočty $f_d = 10 \text{ Hz}$ a $f_h = 100 \text{ kHz}$.



Obrázek 1.7 Výsledek simulace fázové charakteristiky (PSpice) struktury B pro $n = 8$.

Tmavě modrá křivka znázorňuje argument admitance reálné struktury, žlutá je výsledkem

vztahu (1.2.9) s použitím korigovaných kmitočtů podle (1.2.10) a (1.2.11) a červená křivka je rozdílem předchozích dvou (náleží jí pravá svislá osa grafu). Je zřejmé, že největší odchylka nedosahuje ani 1 °. Pro $n = 16$ na obrázku 1.8 jsou barvy křivek zachovány. Rozdíl zde dosahuje v maximech ještě nižších hodnot než u $n = 8$.



Obrázek 1.8 Výsledek simulace fázové charakteristiky (PSpice) struktury B pro $n = 16$.

V dalším textu projektu se bude práce zabývat pouze strukturou B. Z kmitočtové závislosti argumentu obou struktur je patrné, že na mezních kmitočtech ω_d a ω_h se i po korekci argument ještě značně odklání od žádané hodnoty $\alpha \frac{\pi}{2}$. Pro přesné stanovení odchylky argumentu na mezních kmitočtech je možné s výhodou použít výše uvedený vztah (1.2.9). Pro geometrický střed kmitočtového pásma platí:

$$\omega_s = \sqrt{\omega_d \omega_h}. \quad (1.2.12)$$

Dále je vhodné zavést podíl:

$$k = \frac{\omega_h}{\omega_d}. \quad (1.2.13)$$

Pro argument φ na kmitočtu ω_s platí vztah:

$$\varphi(\omega_s) = \frac{\pi}{2} - (1 - \alpha) \arctan(\sqrt{k}) - \alpha \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right). \quad (1.2.14)$$

Ten za předpokladu, že $k > 10^4$ (velmi častá situace) přechází ve vztah:

$$\varphi(\omega_s) = \frac{\pi}{2} \alpha. \quad (1.2.15)$$

Stejným způsobem lze odvodit vztahy pro argument φ na mezních kmitočtech:

$$\varphi(\omega_d) = \frac{\pi}{4} (1 + \alpha). \quad (1.2.16)$$

$$\varphi(\omega_h) = \frac{\pi}{4} \alpha. \quad (1.2.17)$$

Pro zvolenou relativní odchylku δ lze vypočítat odpovídající kmitočty, které ohraničují použitelné pracovní pásmo $Bp = \omega_{hx} - \omega_{dx}$. Vycházíme-li z toho, že toto pásmo je vstupním požadavkem k návrhu CPE, je nezbytné zpětně vypočítat ω_d a ω_h , což jsou přímo polohy krajních pólů admitance. Postup lze interpretovat do několika kroků.

Relativní odchylka od nominálního argumentu $\varphi(\omega_s)$ je definována jako:

$$\delta(\omega) = \frac{\varphi(\omega) - \varphi(\omega_s)}{\varphi(\omega_s)}. \quad (1.2.18)$$

Pro dolní mezní kmitočet platí odvozený vztah:

$$\omega_d = \omega_{dx} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha(1+\delta)}{1-\alpha}\right) \quad (1.2.19)$$

pro $\delta, \alpha \in (0,1)$.

Analogicky pak platí pro horní mezní kmitočet:

$$\omega_h = \omega_{hx} \cdot \cotg\left(-\delta \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.2.20)$$

pro $\delta \in (-1,0)$.

Všechny výše uvedené vztahy byly odvozeny autorem této práce.

1.3 Časová analýza vlastností CPE

Doposud bylo v textu k popisu vlastností CPE využíváno Laplaceovy transformace, jelikož je mnohem názornější pro ilustraci v kmitočtové doméně. Následující podkapitola nejprve představuje čtenáři základní matematické prvky fraktálního kalkulu a následně se zabývá charakterizací CPE v časové oblasti.

Prvním velmi důležitým vztahem je Cauchyho vzorec pro několikanásobnou integraci funkce jedné proměnné [1,2]:

$$\begin{aligned} I^n(f(x)) &= \int_a^x \int_a^{u_1} \dots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n du_{n-1} \dots du_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Ten nahrazuje n -násobnou integraci od a do x pouze jedním integrálem. Aby bylo možné použít tento vztah pro neceločíselné řády n , bylo nutné najít vhodnou spojitou funkci reprezentující výraz $(n-1)!$. Byla tedy definována Gamma funkce, která rozšiřuje výše zmíněnou funkci pro všechna komplexní čísla s kladnou reálnou složkou. Pro kladná celá čísla n platí:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Definice Gamma funkce je dána nevlastním integrálem:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx. \quad (1.3.2)$$

Po zakomponování Gamma funkce do vztahu (1.3.1) vznikne Riemannův – Liouvilleův integrál necelistvého řádu:

$$I^\alpha(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du. \quad (1.3.3)$$

Derivaci n -tého řádu lze vyjádřit vztahem:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)) = D^n(f(x)) \quad (1.3.4)$$

a ze základů integrálního počtu vyplývá rovnost

$$D^n I^{-n}(f(x)) = I^{-n} D^n(f(x)) = f(x). \quad (1.3.5)$$

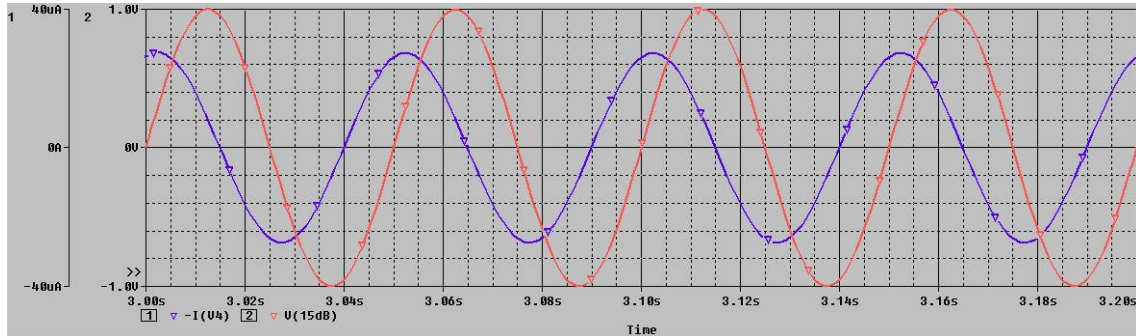
Pro derivaci necelistvého řádu α je potřeba využít kombinace celistvé derivace a již definované (1.3.3) fraktální integrace. Obecně platí:

$$\begin{aligned} D^\alpha(f(x)) &= D^1 I^{1-\alpha}(f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^\alpha} du. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Zde je řád $\alpha \in (0, 1)$. Pro $\alpha > 1$ je nutné zaokrouhlit řád α na vyšší celé číslo n . To je pak řádem celistvé derivace a řád fraktální integrace bude $n - \alpha$. Vše popisuje vztah:

$$D^\alpha(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-u)^{n-\alpha-1} f(u) du. \quad (1.3.7)$$

Jelikož jsou obě struktury tvořeny rezistory a kondenzátory, je proud dán podobně jako u kondenzátoru derivací napětí podle času. Naopak při proudovém buzení bude napětí dáno fraktální integrací proudu podle času. Nejnazornější je určitě případ buzení harmonickým napětím.



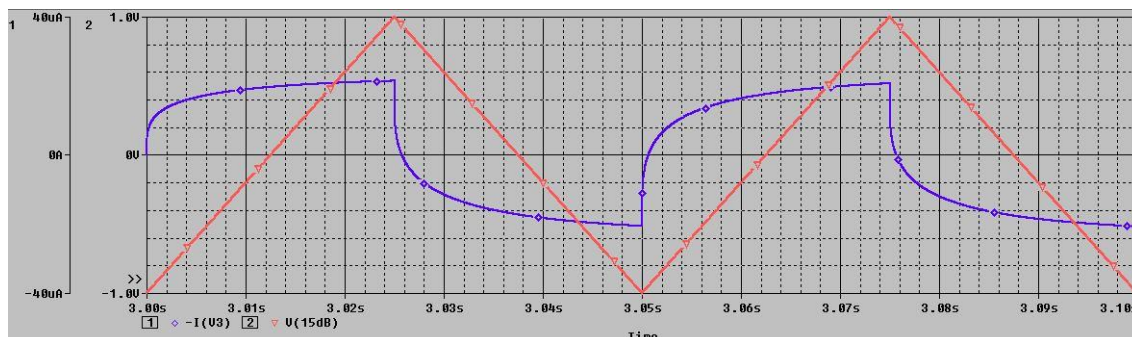
Obrázek 1.9 Proudová odezva na harmonické napěťové buzení (PSpice) – řád $3/4$.

Na obrázku (1.9) je výsledek simulace v programu PSpice. Jedná se o strukturu B navrženou pro $\alpha = 3/4$ a počet sekcí $n = 16$. Proud dvojpólu (modrá křivka) je derivací řádu $3/4$ vstupního napětí (červená křivka). Kmitočet budícího signálu je roven 20 Hz, což je uvnitř pracovního pásma. V případě harmonického signálu lze proud vypočítat snáze, než pro neharmonické buzení. Fázový posun (1.2.15) mezi napětím a proudem je roven $67,5^\circ$ v celém pracovním pásmu. Amplitudu proudu v harmonicky ustáleném stavu lze přibližně vyjádřit vztahem:

$$|I| \cong |U| \left(\frac{f}{f_h} \right)^\alpha \cdot \sum G. \quad (1.3.8)$$

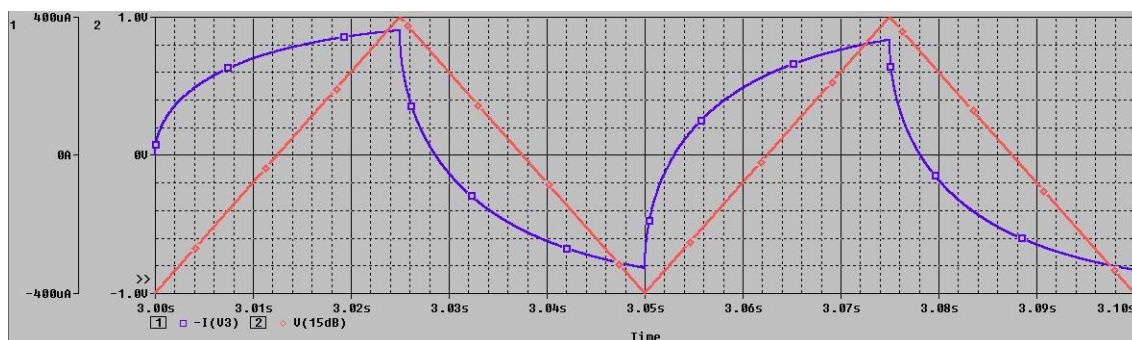
Zde $|U|$ je amplituda budícího napětí, f je jeho kmitočet, f_h je horní mezní kmitočet a $\sum G$ je již dříve zmíněný součet vodivostí.

Mnohem zajímavější je buzení neharmonickým signálem. Musí však být splněna podmínka, kdy se spektrum signálu nachází **zcela uvnitř pracovního pásma CPE**. Zde je příklad simulace v PSpice pro trojúhelníkový signál o základním kmitočtu 20 Hz. Řád CPE zůstává roven $\frac{3}{4}$.

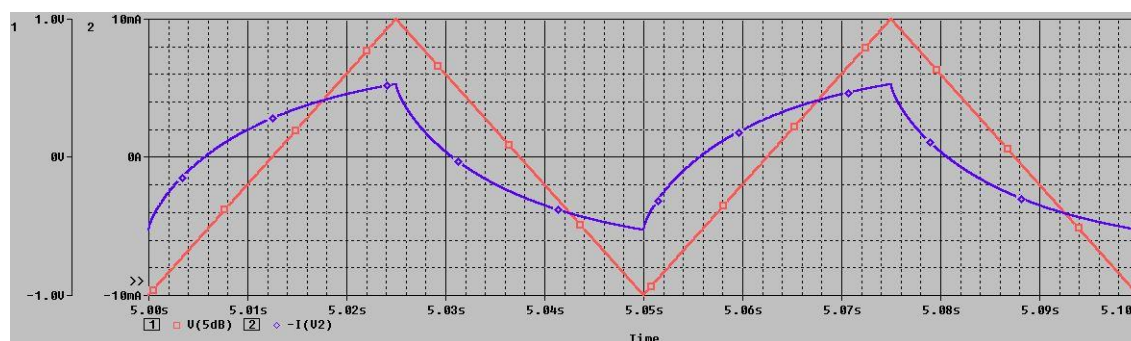


Obrázek 1.10 Proudová odezva na napětové buzení trojúhelníkovým signálem – řád $\frac{3}{4}$.

Pro porovnání jsou uvedeny dva další případy pro řád $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 0,25$.



Obrázek 1.11 Proudová odezva na napětové buzení trojúhelníkovým signálem - řád $\frac{1}{2}$.



Obrázek 1.12 Proudová odezva na napětové buzení trojúhelníkovým signálem - řád $\frac{1}{4}$.

Výše uvedené průběhy napětí a proudu lze logicky obhájit i čtenáři neznalému fraktálního počtu. Pro řád $\alpha \rightarrow 1$ se CPE více podobá kondenzátoru a proudová odezva se blíží obdélníkovému průběhu (proud je derivací napětí podle času). Naopak při $\alpha \rightarrow 0$ se kapacitní charakter vytrácí a proudová odezva nabývá tvaru stejného jako budící signál – rezistivní charakter.

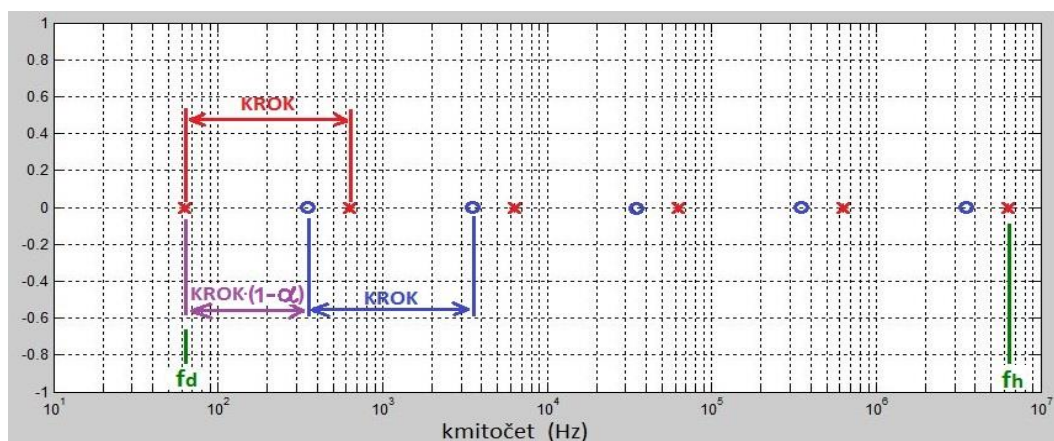
2 METODY NÁVRHU CPE

Kapitola popisuje dvě metody návrhu CPE, přičemž autorem první z nich je autor semestrální práce. Autorem jádra druhé metody je prof. Juraj Valsa spolu s pány inženýry P. Dvořákem a M. Friedlem [7]. Nicméně tato metoda je do značné míry upravena autorem semestrální práce. Jsou uvedeny pouze metody pro návrh struktury B a B-2.

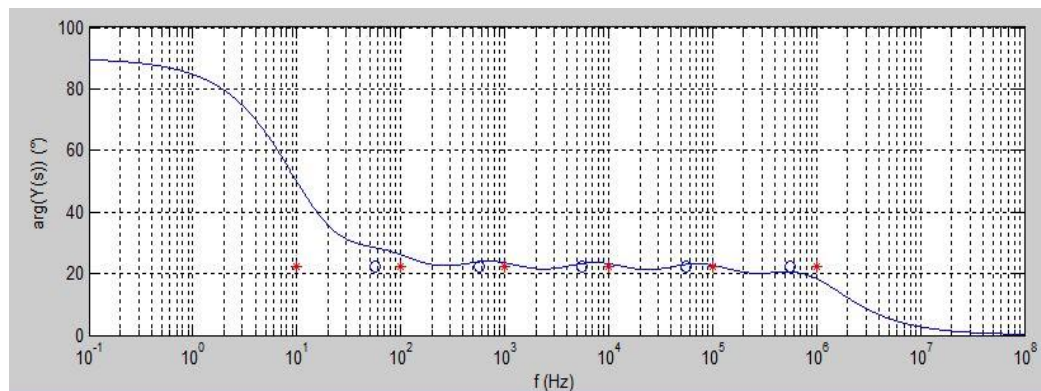
Všechna uvedená logaritmická zobrazení nul a pólů jsou absolutními hodnotami jejich kmitočtů, jelikož nuly a póly jsou na záporné části reálné osy. Všechny uvedené vztahy byly odvozeny autorem této práce (pokud není uvedena citace zdroje).

2.1 Metoda návrhu CPE řešením soustavy lineárních rovnic

Jádrem celé metody je předpoklad **ekvidistantního rozložení pólů a nul** admitance v logaritmickém zobrazení. Tuto myšlenku ilustruje obrázek (2.1). Admitance struktury B má ještě jednu nulu na nulovém kmitočtu. Ta však v logaritmickém měřítku nemůže být zobrazena.



Obrázek 2.1 Ekvidistantní rozložení nul a pólů v logaritmickém měřítku - Matlab.



Obrázek 2.2 Průběh argumentu admitance s příslušnými polohami nul a pólů – Matlab.

Kmitočty krajních pólů f_{dp} a f_{hp} stejně jako počet sekcí n a požadovaná strmost $\alpha 20 \text{ dB/dek}$ jsou vstupními požadavky pro návrh CPE. Z nich je možné vypočítat polohy všech nul a pólů pomocí následujících vztahů. Pro vzdálenost sousedních pólů, resp. nul v exponenciální míře platí:

$$KROK = \frac{\log\left(\frac{f_{hp}}{f_{dp}}\right)}{n-1}. \quad (2.1.1)$$

Pro i -tý kmitočet pólu platí:

$$\omega_{pi} = \omega_{dp} \cdot 10^{(i-1)KROK}, \quad (2.1.2)$$

kde $i = 1, 2, 3, \dots n$. Pro i -tý kmitočet nuly platí:

$$\omega_{ni} = \omega_{dp} \cdot 10^{(i-\alpha)KROK}, \quad (2.1.3)$$

kde $i = 1, 2, 3, \dots n - 1$.

Jakmile jsou známy polohy všech nul a pólů admitance, je potřeba pomocí nich vypočítat **konkrétní hodnoty R a C**. Pro admitanci i -té sekce platí:

$$Y_i(s) = \frac{sC_i}{1+sR_iC_i} = \frac{s\frac{1}{R_i}}{s+\frac{1}{R_iC_i}} = \frac{sG_i}{s+\omega_{pi}}, \quad (2.1.4)$$

kde C_i a R_i jsou hodnoty i -té kapacity a rezistance. $G_i = \frac{1}{R_i}$ a $\omega_{pi} = \frac{1}{R_iC_i}$.

Pro lepší názornost je metoda rozebrána pro počet sekcí $n = 3$. Jejich paralelní spojení je rovno admitanci:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^3 \frac{sG_i}{s+\omega_{pi}} = \frac{sG_1}{s+\omega_{p1}} + \frac{sG_2}{s+\omega_{p2}} + \frac{sG_3}{s+\omega_{p3}}. \quad (2.1.5)$$

Následně je proveden součet na společný jmenovatel a rozdělení na jednotlivé části zlomku (podle koeficientů polynomu v čitateli).

$$\begin{aligned} Y(s) &= s \frac{G_1(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3}) + G_2(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p3}) + G_3(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})} = \\ &= s \frac{s^2(G_1+G_2+G_3)}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})} + \\ &+ s \frac{s(G_1(\omega_{p2}+\omega_{p3}) + G_2(\omega_{p1}+\omega_{p3}) + G_3(\omega_{p1}+\omega_{p2}))}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})} + \\ &+ s \frac{G_1\omega_{p2}\omega_{p3} + G_2\omega_{p1}\omega_{p3} + G_3\omega_{p1}\omega_{p2}}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})}. \end{aligned}$$

Dále je zavedena obecná admitance $Y_{OB}(s)$ pro strukturu B, jejíž vzorec obsahuje i kmitočty nul.

$$Y_{OB}(s) = s \frac{(G_1+G_2+G_3)(s+\omega_{n1})(s+\omega_{n2})}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})}. \quad (2.1.6)$$

Po roznásobení a rozdělení na součet tří zlomků je získán vztah:

$$Y_{OB}(s) = s \frac{s^2(G_1+G_2+G_3)}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})} + s \frac{s(G_1+G_2+G_3)(\omega_{n1}+\omega_{n2})}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})} + s \frac{(G_1+G_2+G_3)\omega_{n1}\omega_{n2}}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})(s+\omega_{p3})}.$$

Nyní jde pouze o **porovnání čitatele** $Y(s)$ a $Y_{OB}(s)$, jelikož jmenovatele jsou stejné. Také nula na nulovém kmitočtu je u obou vztahů stejná. Je zřejmé, že vektorem neznámých v soustavě lineárních rovnic budou **vodivosti G** .

První rovnicí bude definice součtu všech vodivostí:

$$\sum G = G_1 + G_2 + G_3, \quad (2.1.7)$$

kde $\sum G$ je posledním **vstupním parametrem** návrhu CPE.

Druhá rovnice porovnává koeficienty u s^1 :

$$G_1(\omega_{p2} + \omega_{p3}) + G_2(\omega_{p1} + \omega_{p3}) + G_3(\omega_{p1} + \omega_{p2}) = (G_1 + G_2 + G_3)(\omega_{n1} + \omega_{n2}).$$

V homogenním tvaru je to pak:

$$G_1(\omega_{p2} + \omega_{p3} - \omega_{n1} - \omega_{n2}) + G_2(\omega_{p1} + \omega_{p3} - \omega_{n1} - \omega_{n2}) + G_3(\omega_{p1} + \omega_{p2} - \omega_{n1} - \omega_{n2}) = 0. \quad (2.1.8)$$

Třetí rovnice porovnává koeficienty u s^0 :

$$G_1\omega_{p2}\omega_{p3} + G_2\omega_{p1}\omega_{p3} + G_3\omega_{p1}\omega_{p2} = (G_1 + G_2 + G_3)\omega_{n1}\omega_{n2}.$$

Podobně zde pro homogenní tvar platí:

$$G_1(\omega_{p2}\omega_{p3} - \omega_{n1}\omega_{n2}) + G_2(\omega_{p1}\omega_{p3} - \omega_{n1}\omega_{n2}) + G_3(\omega_{p1}\omega_{p2} - \omega_{n1}\omega_{n2}) = 0. \quad (2.1.9)$$

Pokud se uspořádá soustava tří rovnic (2.1.7) až (2.1.9) do maticového tvaru, bude matice koeficientů $\vec{\Omega}$ následující:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_{p2} + \omega_{p3} - \omega_{n1} - \omega_{n2} & \omega_{p1} + \omega_{p3} - \omega_{n1} - \omega_{n2} & \omega_{p1} + \omega_{p2} - \omega_{n1} - \omega_{n2} \\ \omega_{p2}\omega_{p3} - \omega_{n1}\omega_{n2} & \omega_{p1}\omega_{p3} - \omega_{n1}\omega_{n2} & \omega_{p1}\omega_{p2} - \omega_{n1}\omega_{n2} \end{bmatrix}. \quad (2.1.10)$$

Vektor hledaných vodivostí je:

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}. \quad (2.1.10)$$

Vektor pravé strany maticové rovnice je:

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} \Sigma G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Celá maticová rovnice je ve tvaru:

$$\vec{\Omega} \times \vec{G} = \vec{B} \quad (2.1.12)$$

a jejím řešením je:

$$\vec{G} = \vec{\Omega}^{-1} \times \vec{B} \quad (2.1.13)$$

Zde $\vec{\Omega}^{-1}$ je matice inverzní k $\vec{\Omega}$. Pro získání hodnot rezistancí stačí provést inverzi vodivostí:

$$R_i = \frac{1}{G_i}. \quad (2.1.14)$$

Vztah mezi kapacitou C a rezistancí R je jednoznačně dán úhlovým kmitočtem pólu:

$$C_i = \frac{1}{R_i \omega_{pi}}. \quad (2.1.15)$$

Aby bylo možné popsat tuto metodu obecně pro strukturu o n - sekcích, je nutné zavést matematický symbol, který zpřehlední zápis do matice kmitočtů $\vec{\Omega}$. Jedná se o symbol pro **kombinatorický součet produktů** určité proměnné.

$${}^{a \rightarrow b}_k K^{\{c_1, c_2, \dots, c_m\}}(x) \quad (2.1.16)$$

Symbol pracuje s indexy proměnné x , které volí obecně z množiny celých čísel ohraničené krajními prvky a a b , přičemž z této množiny **vynechá** prvky z množiny $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Budou tak vytvořeny produkty o k prvcích, jejichž indexy budou voleny jako **kombinace bez opakování**. Následující příklad ilustruje popis symbolu.

$$\begin{aligned} {}^{1 \rightarrow 7}_3 K^{\{2,4\}}(x) &= x_1 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_6 + x_1 x_3 x_7 + x_1 x_5 x_6 + \\ &+ x_1 x_5 x_7 + x_1 x_6 x_7 + x_3 x_5 x_6 + x_3 x_5 x_7 + x_3 x_6 x_7 + x_5 x_6 x_7. \end{aligned}$$

Dále pak pro **počet vytvořených produktů** (k -tic) platí kombinační číslo:

$$\binom{b - a + 1 - m}{k}, \quad (2.1.17)$$

kde b a a jsou krajní prvky množin, m je počet prvků množiny $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ a k je počet prvků v produktu.

Pokud není v závorce u symbolu uvedena proměnná, o jejíž indexy se jedná, je provedena operace se samotnými indexy. Výsledkem bude tedy konkrétní číslo.

$$\begin{aligned} {}^{1 \rightarrow 7}_3 K^{\{2,4\}} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 6 + \\ &+ 1 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + \\ &+ 5 \cdot 6 \cdot 7 = 692. \end{aligned}$$

Nyní je možné zobecnit postup návrhu následujícím způsobem. Pro jednotlivé buňky matice koeficientů $\vec{\Omega}$ platí následující vzorec:

$$\Omega_{i,j} = {}^{1 \rightarrow n}_{i-1} K^{\{j\}}(\omega_p) - {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{i-1} K(\omega_n). \quad (2.1.18)$$

Zde $i = 2, 3, 4 \dots n$ je **pořadí řádku** matice a $j = 1, 2, 3, \dots n$ je **pořadí sloupce**. První řádek matice tvoří řada jedniček, proto za i nelze do vzorce (2.1.18) dosadit číslo 1. Obecný tvar matice koeficientů $\vec{\Omega}$ je následující:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ {}^{1 \rightarrow n}_{1} \{1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{1} & {}^{1 \rightarrow n}_{1} \{2\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{1} & \dots & {}^{1 \rightarrow n}_{1} \{n-1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{1} & {}^{1 \rightarrow n}_{1} \{n\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{1} \\ K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) & \dots & K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) \\ {}^{1 \rightarrow n}_{2} \{1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{2} & {}^{1 \rightarrow n}_{2} \{2\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{2} & \dots & {}^{1 \rightarrow n}_{2} \{n-1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{2} & {}^{1 \rightarrow n}_{2} \{n\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{2} \\ K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) & \dots & K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^{1 \rightarrow n}_{n-2} \{1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-2} & {}^{1 \rightarrow n}_{n-2} \{2\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-2} & \dots & {}^{1 \rightarrow n}_{n-2} \{n-1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-2} & {}^{1 \rightarrow n}_{n-2} \{n\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-2} \\ K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) & \dots & K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) \\ {}^{1 \rightarrow n}_{n-1} \{1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-1} & {}^{1 \rightarrow n}_{n-1} \{2\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-1} & \dots & {}^{1 \rightarrow n}_{n-1} \{n-1\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-1} & {}^{1 \rightarrow n}_{n-1} \{n\} & {}^{1 \rightarrow (n-1)}_{n-1} \\ K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) & \dots & K(\omega_p) - K(\omega_n) & K(\omega_p) - K(\omega_n) \end{bmatrix}$$

Obrázek 2.3 Obecný tvar matice koeficientů omega (kmitočtů) pro strukturu B.

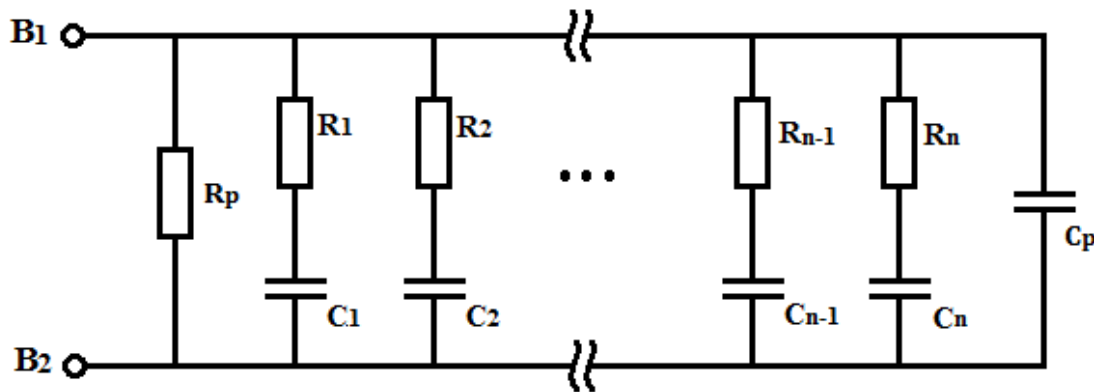
Hlavní výhodou metody je její univerzálnost. Umožňuje vypočítat hodnoty rezistorů a kondenzátorů nejen pro logaritmicky-ekvidistanční rozložení, ale také pro **libovolné jiné** rozložení nul a pólů admitance. Je tedy možné s touto strukturou dále experimentovat. Jediným omezením je nutnost řadit póly a nuly **střídavě za sebou** na kmitočtové ose, což vyplývá z typu použité struktury.

Nevýhodou je nutnost použití složitějšího matematického nástroje. Jelikož matice koeficientů $\vec{\Omega}$ obsahuje hodnoty o velkém rozptylu dekadických řádů, vzniká zde riziko nepřesnosti numerického výpočtu.

2.2 Metoda návrhu CPE na bázi geometrické řady

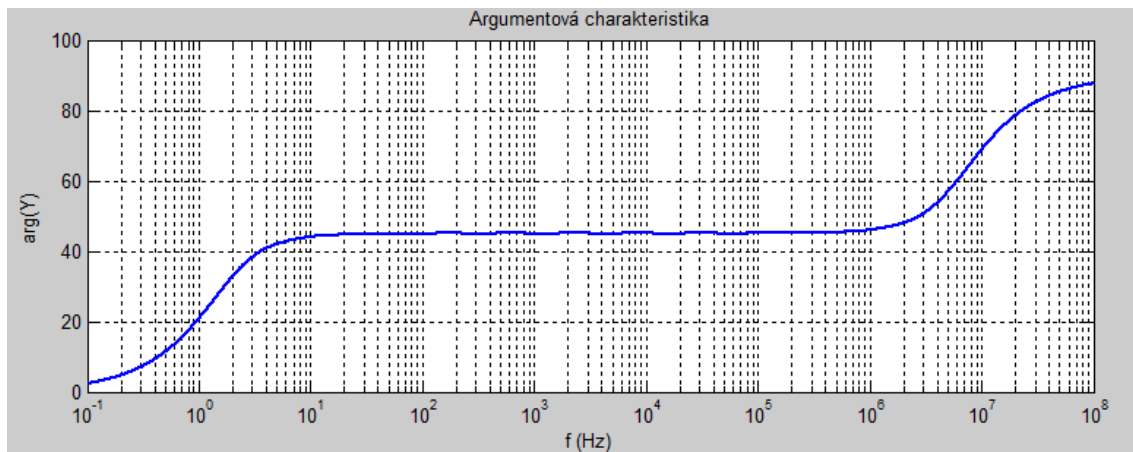
Tato metoda využívá jiné velmi specifické úvahy uvedené v [7,8]. Základem je již známá struktura B, která je ovšem opatřena jistými korekčními prvky R_p a C_p . Jakmile jsou tyto prvky připojeny paralelně k ostatním sekcím struktury B, změní se povaha celého dvojpólu. Tím je **struktura B** modifikována a vzniká tak nová **struktura B-2** (obrázek 2.4).

Struktura B-2

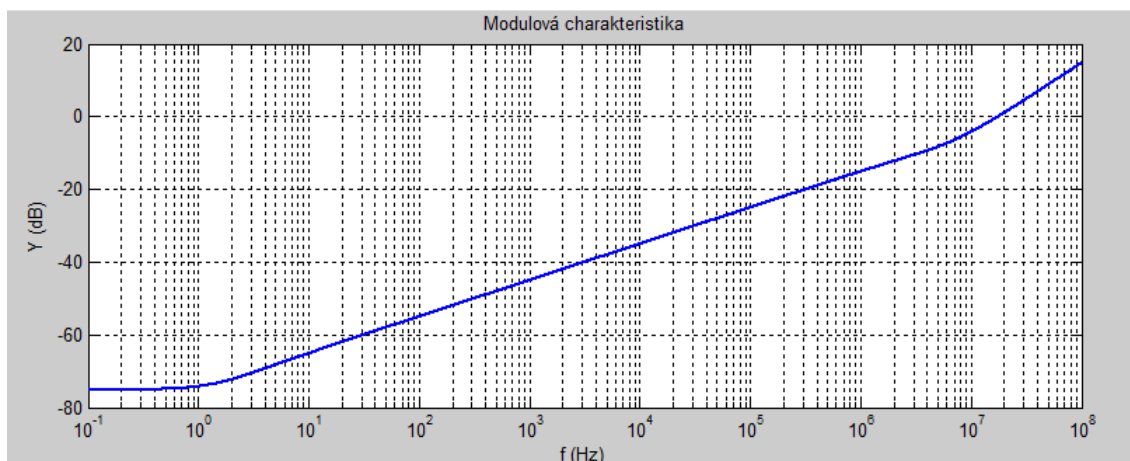


Obrázek 2.4 Struktura B-2 s korekčními prvky.

Jak je vidět na obrázku 2.5, na nízkých kmitočtech se projevuje rezistivní charakter R_p proto je argument blízký nule. Naopak na vysokých kmitočtech se dominantně projevuje C_p a argument konverguje k 90° . Modulová charakteristika (obrázek 2.6) naprosto koresponduje s charakterem argumentu.



Obrázek 2.5 Charakter argumentu admitance struktury B-2.



Obrázek 2.6 Charakter modulu admitance struktury B-2.

Samotné sekce struktury B se nyní mohou interpretovat jednoduššími vztahy právě díky připojení korekčních prvků. Pro i -tý prvek n sekcí platí:

$$R_i = R_1 \cdot a^{i-1}, \quad (2.2.1)$$

$$C_i = C_1 \cdot b^{i-1}. \quad (2.2.2)$$

Zde a a b jsou koeficienty geometrické řady. Jak již bylo řečeno, bez paralelních korekčních členů by řazení hodnot R a C do geometrické řady **nepřineslo** charakter konstantního argumentu. Pro hodnoty korekčních prvků platí:

$$R_p = R_1 \cdot \frac{1-a}{a}, \quad (2.2.3)$$

$$C_p = C_1 \cdot \frac{b^n}{1-b}. \quad (2.2.4)$$

Je třeba mít na paměti, že mezní kmitočty ω_d a ω_h zde nejsou přímo kmitočty pólů, neboť pro zachování zadaného kmitočtového rozsahu je potřeba přepočítat kmitočty pólů dané situaci. Platí empirické vztahy:

$$\omega_{dp} = \omega_d 2^{2\alpha - \frac{n}{10} - 1}, \quad (2.2.5)$$

$$\omega_{hp} = \omega_h 2^{2\alpha + \frac{n}{10} - 1}. \quad (2.2.6)$$

Podíl kmitočtů krajních pólů je potom vyjádřen jako:

$$k = \frac{\omega_{hp}}{\omega_{dp}} = \frac{\omega_h}{\omega_d} \cdot 2^{\frac{n}{5}}. \quad (2.2.7)$$

Pro celkovou admitanci struktury B-2 obecně platí:

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{s^{\frac{1}{R_i}}}{s + \frac{1}{R_i C_i}} \right) + s C_p. \quad (2.2.8)$$

Pro střední kmitočet pásma vztah přechází do tvaru:

$$Y(j\omega_s) = G_1 \frac{a}{1-a} + jG_1 A \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a^{-i}}{jA + (ab)^{-i}} \right) + jG_1 A \frac{b^n}{1-b}. \quad (2.2.9)$$

Geometrický střed pracovního pásma je dán vztahem:

$$\omega_s = \sqrt{\omega_h \omega_d} = \sqrt{\omega_{hp} \omega_{dp}} \cdot 2^{1-2\alpha}. \quad (2.2.10)$$

Je zavedena pomocná substituce:

$$A = 2^{1-2\alpha} \cdot \sqrt{k}.$$

Pro další používání je vhodné vztah (2.2.9) upravit následovně:

$$p = \frac{Y(j\omega_s)}{G_1} = \frac{a}{1-a} + jA \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a^{-i}}{jA + (ab)^{-i}} \right) + jA \frac{b^n}{1-b}. \quad (2.2.11)$$

Po podrobnější analýze vztahu (2.2.8) je zjevné, že **kmitočty pólů** původní struktury B se po připojení R_p a C_p nezmění. Proto je výhodné využívat i nadále **ekvidistantního rozložení pólů** v logaritmickém měřítku. Jestliže pro kmitočty pólů platí vztah (2.1.2), vznikne po dosazení vztahů (2.2.1) a (2.2.2) užitečný vztah:

$$ab = 10^{-KROK}, \quad (2.2.12)$$

kde pro $KROK$ platí vzorec (2.1.1). Koeficient a lze vypočítat pomocí následujícího vztahu [6]:

$$a = (ab)^\alpha, \quad (2.2.13)$$

kde α je fraktální řád z intervalu $(0, 1)$. Logicky pro koeficient b platí:

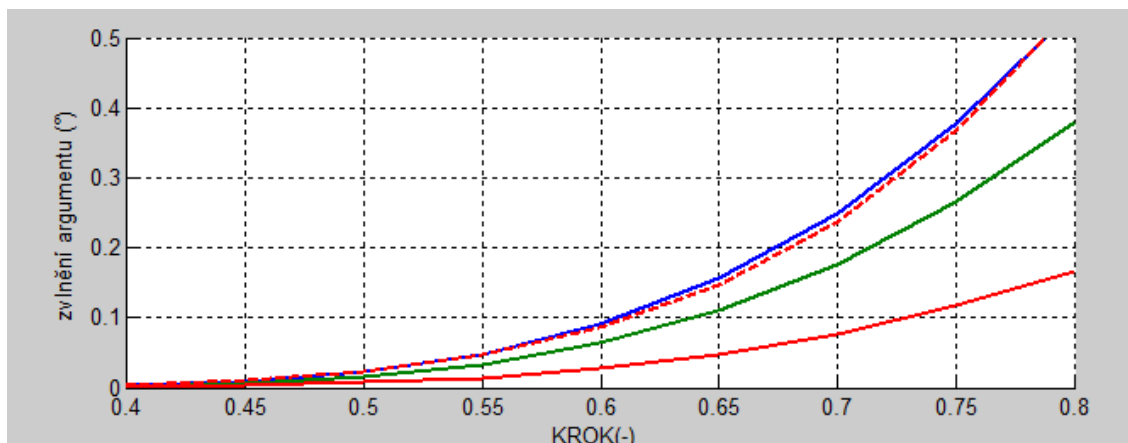
$$b = \frac{ab}{a}. \quad (2.2.14)$$

Vstupními parametry pro metodu jsou tedy oba mezní kmitočty ω_d a ω_h , řád struktury α , amplituda zvlnění argumentu $\Delta\varphi$ ve stupních a velikost modulu admitance $|Y(\omega_s)|$ na středním kmitočtu pásma.

Nejprve je nutné provést odhad počtu sekcí n , který je funkcí zvlnění argumentu $\Delta\varphi$, řádu α a podílu mezních kmitočtů ω_d a ω_h . Zvlnění $\Delta\varphi$ je přímo funkcí proměnné $KROK$, proto je možné psát:

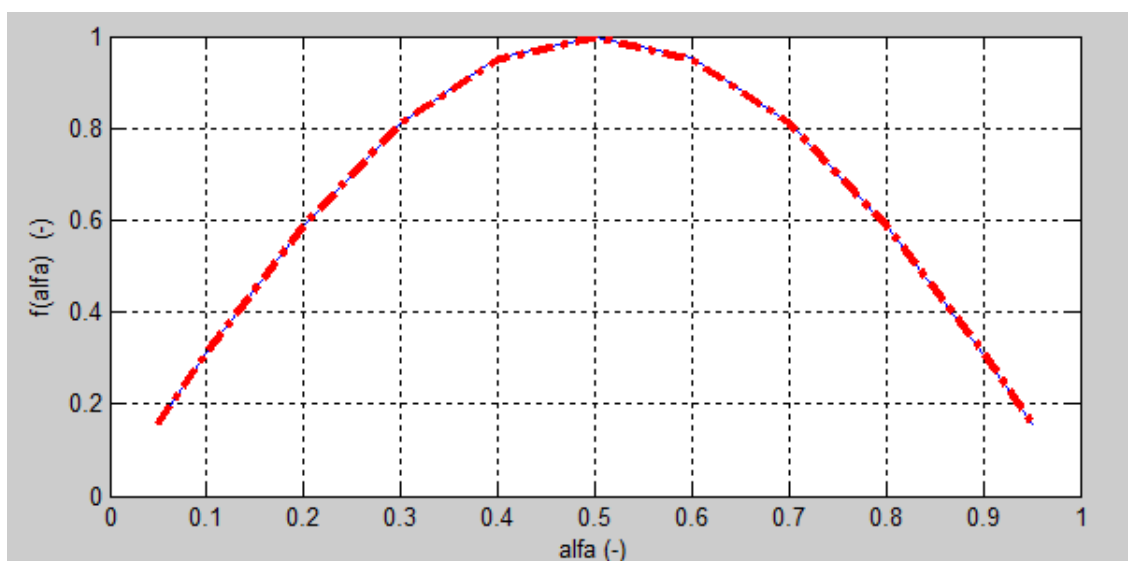
$$n = \frac{\log \frac{\omega_h}{\omega_d} + KROK}{KROK - 0.2 \log 2}. \quad (2.2.15)$$

Závislost $\Delta\varphi = f(KROK)$ je zjištěna empiricky – zpracováním grafických výsledků v programu Matlab.



Obrázek 2.7 Závislost zvlnění argumentu na exponenciálním kroku.

Obrázek 2.7 zobrazuje hodnoty $\Delta\varphi$ v závislosti na proměnné **KROK** s parametrem α . Modrá křivka odpovídá $\alpha = 0.5$, zelená $\alpha = 0.75$, červená plná odpovídá $\alpha = 0.9$ a červená čárkovaná křivka je výsledkem empirické aproximační funkce. Bylo zjištěno, že zvlnění závisí na řádu α podle sudé funkce rozdílu $\alpha - 1/2$. Konkrétně zde vyhovuje funkce kosinus.



Obrázek 2.8 Funkce proměnné alfa - součást aproximační funkce.

Výsledná aproximační funkce zvlnění argumentu je následující:

$$\Delta\varphi = f(\alpha) \left(2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} KROK \right) \right)^{3.5} - 0.003 \right). \quad (2.2.16)$$

Pomocná funkce proměnné α je:

$$f(\alpha) = \cos(\pi(\alpha - 0.5)). \quad (2.2.17)$$

Po vyjádření proměnné $KROK$ vznikne vztah:

$$KROK = \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \left(\frac{\Delta\varphi}{2f(\alpha)} + 0.0015 \right)^{\frac{2}{7}} \right). \quad (2.2.18)$$

Ze znalosti exponenciálního kroku a mezních kmitočtů lze vypočítat odhad počtu sekcí – vztah (2.2.13). Výslednou hodnotu je potřeba zaokrouhlit nahoru.

Dále následuje výpočet R_1 , od něhož se odvíjí celá geometrická řada rezistorů i kapacitorů (přepočteno přes kmitočty pólů). Je zde použit dříve odvozený vztah (2.2.11) ve více kompaktní formě:

$$G_1 = \frac{Y(\omega_s)}{p} = \frac{|Y(\omega_s)|e^{j\alpha\frac{\pi}{2}}}{p},$$

Zde modul $|Y(\omega_s)|$ je znám jako vstupní parametr CPE a proměnnou p je nutné vypočítat sumou komplexních lomených výrazů (2.2.11).

2.2.1 Příklad

Zadáno:

$$\varphi_s = 30^\circ, \Delta\varphi = 0.1^\circ, f_d = 10 \text{ Hz}, f_h = 1 \text{ MHz}, |Y(\omega_s)| = 0.05 \text{ S}.$$

Výpočet:

$$\omega_d = 2\pi f_d \cong 62.83 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = 2\pi f_h \cong 6.283 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\varphi_s}{90} \cong 0.333 (-)$$

$$f(\alpha) = \cos((\alpha - 0.5)\pi) \cong 0.866 (-)$$

$$KROK = \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \left(\frac{\Delta\varphi}{2f(\alpha)} + 0.0015 \right)^{\frac{2}{7}} \right) \cong 0.6262 (-)$$

$$n = \frac{\log \frac{\omega_h}{\omega_d} + KROK}{KROK - 0.2 \log 2} \cong 9.94 (-), \text{ potom } n = 10.$$

$$\omega_{dp} = \omega_d 2^{2\alpha - \frac{n}{10} - 1} \cong 24.933 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{hp} = \omega_h 2^{2\alpha + \frac{n}{10} - 1} \cong 9.973 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

Pro zaokrouhlený počet sekcí je třeba znova vypočítat exponenciální krok.

$$KROK = \frac{\log \frac{\omega_{hp}}{\omega_{dp}}}{n-1} \cong 0.6225 (-)$$

$$k = \frac{\omega_{hp}}{\omega_{dp}} \cong 400000 (-)$$

$$ab = 10^{-KROK} \cong 0.2385 (-)$$

$$a = (ab)^\alpha = 0.6202 (-); \quad b = \frac{ab}{a} = 0.3846 (-)$$

Jakmile jsou známy koeficienty geometrické řady, následuje výpočet rezistoru R_1 :

$$A = 2^{1-2\alpha} \sqrt{k} \cong 796.88 (-)$$

$$p = \frac{a}{1-a} + jA \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a^{-i}}{jA + (ab)^{-i}} \right) + jA \frac{b^n}{1-b} = 23.438 \cdot e^{j30^\circ}$$

$$R_1 = \frac{p}{Y(\omega_s)} = 468.76 \Omega$$

Výpočet kapacity první sekce:

$$C_1 = \frac{1}{\omega_{dp} \cdot R_1} = 85.59 \mu F$$

Nyní se postupuje podle vzorců (2.2.1) a (2.2.2).

i	1	2	3	4	5
Ri	468.5601	290.5920	180.2196	111.7687	69.3168
Ci	8.5591e-05	3.2920e-05	1.2662e-05	4.8699e-06	1.8731e-06

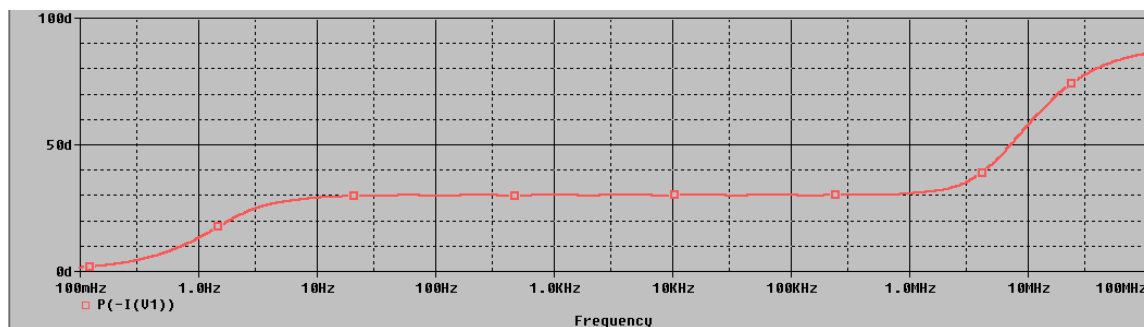
i	6	7	8	9	10
Ri	42.9890	26.6609	16.5346	10.2544	6.3596
Ci	7.2042e-07	2.7709e-07	1.0657e-07	4.0990e-08	1.5765e-08

Obrázek 2.3 Výčet hodnot R a C.

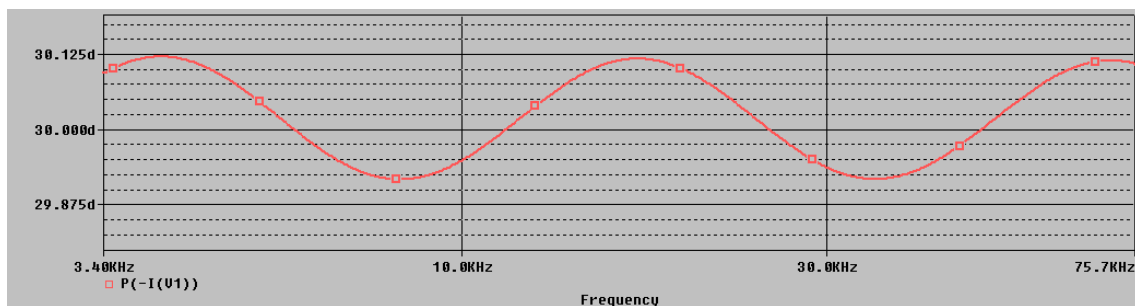
$$R_p = R_1 \frac{1-a}{a} = 286.96 \Omega$$

$$C_p = C_1 \frac{b^n}{1-b} = 9.853 nF$$

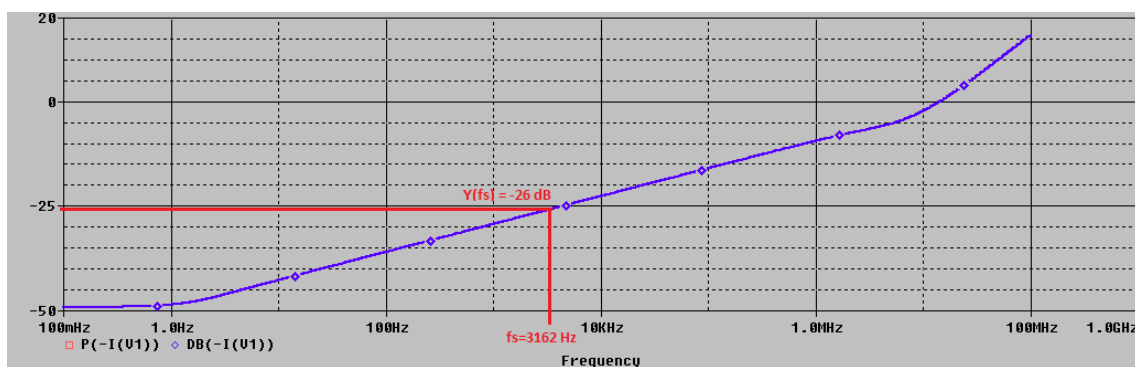
Následuje kontrola správnosti návrhu v OrCad PSpice.



Obrázek 2.9 Argumentová charakteristika ze simulátoru PSpice.



Obrázek 2.10 Detail zvlnění argumentové charakteristiky v PSpice.



Obrázek 2.11 Modulová charakteristika v PSpice.

Výsledky simulace jsou - jak je vidět z obrázků 2.9, 2.10 a 2.11 – dost uspokojivé.

Metoda se jeví jako ideální pro návrh **struktury B-2**, a eventuálně také (po jistých úpravách - přidání korekčního sériového rezistoru a kondenzátoru) struktury A. Svou jednoduchostí a hlavně nenáročností na výpočetní techniku se staví před metodu lineárních rovnic a uživatelsky disponuje **praktičtějšími vstupními parametry** než původní metoda publikovaná v [7].

3 ANALOGOVÉ POSOUVAČE FÁZE

Jak již bylo nastíněno v úvodu práce, analogové prvky (dvoj póly) celistvých řádů dosahují argumentu impedance pouze v celistvém násobku 90° . To platí analogicky i pro přenosy dvojbranů, a to jak pasivních, tak i aktivních. Dvojbrany celistvých řádů mohou asymptoticky (na limitních hodnotách kmitočtu) posouvat fázi signálu o $\Delta\varphi = n \cdot 90^\circ$, kde n je přirozené číslo (případ $n = \pm 1$ je pro tzv. obvod s minimální fází). Dále pak samotná hodnota fáze při obou limitních kmitočtech nabývá pouze $\pm n \cdot 90^\circ$. Nahrazením obyčejného akumulárního prvku fraktálním dvoj pólem CPE je možné tato fundamentální pravidla porušit [4] – vzniká **fraktální posouvač fáze** (dále jen FPF).

Fázovače signálů se dělí na **asymptotické** – pracující v širokém kmitočtovém pásmu (i když stále omezeném), kde se fáze asymptoticky blíží svým mezním hodnotám a na fázovače **s omezeným kmitočtovým pásmem**, kdy jediným požadavkem je, aby dva zadané krajní body (fáze na určitých kmitočtech) byly proloženy monotónně rostoucí/klesající křivkou. Kapitola se zabývá převážně teoretickým návrhem obou typů fázovačů signálů.

3.1 Asymptotické fázovače signálů

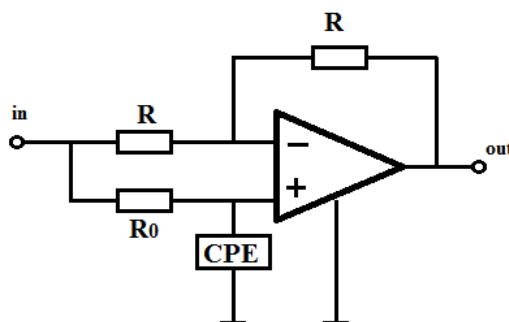
Z klasické teorie analogových obvodů jsou známy obvodové topologie různých asymptotických fázovačů signálu (dále jen APS – asymptotic phase shifter) pro celistvý řád. Dělí se na obvody s **rostoucí/klesající fází** [5,6] (IP/DP – increasing/decreasing phase). Nejznámější je jistě invertující všepropustný fázovací členek (dále jen VFČ) prvního řádu s přenosem napětí v Laplaceově transformaci:

$$K(s) = -\frac{s - \omega_0}{s + \omega_0}. \quad (3.1.1)$$

Pro jeho fázový posuv platí:

$$\varphi(\omega) = -2 \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (3.1.2)$$

Zde ω_0 je mezní kmitočet, na němž je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Asymptotický rozdíl fází $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$. Modul přenosu je ideálně konstantní a existuje jak pasivní, tak aktivní obvodová realizace. Je žádoucí, aby fázový rozdíl $\Delta\varphi$ **nabýval libovolných hodnot** z intervalu $(0, \pi)$. Nabízí se myšlenka místo obyčejného akumulárního prvku implementovat CPE – viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1 Allpass filtr (VFČ) - nahrazení kondenzátoru prvkem CPE.

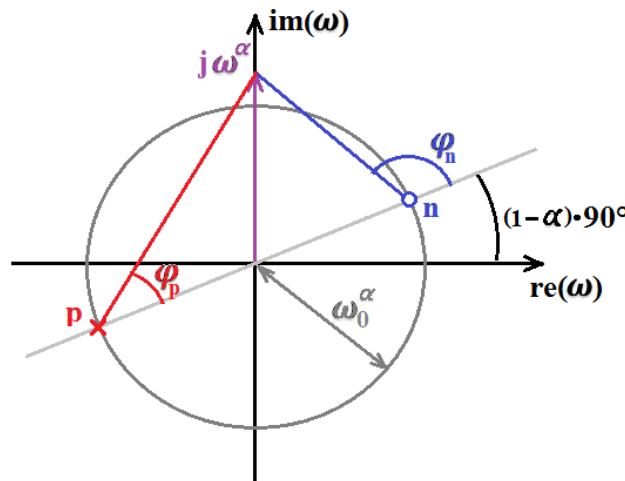
Vznikne však přenosová funkce:

$$K(s) = -\frac{s^\alpha - \omega_0^\alpha}{s^\alpha + \omega_0^\alpha}. \quad (3.1.3)$$

Jelikož platí:

$$s^\alpha = j^\alpha \omega^\alpha = \omega^\alpha \left(\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right), \quad (3.1.4)$$

není modul přenosu konstantní s kmitočtem. Obvod se chová jako **nekvalitní pásmová zadrž** na kmitočtu ω_0 , přičemž pro $\alpha \rightarrow 1$ se průběh modulu narovnáává. Navíc rozdíl $\Delta\varphi$ je stále roven $\pi \text{ rad}$. Nejlépe je tato situace ilustrována v zobrazení nul a pólů v komplexní kmitočtové doméně – viz obrázek 3.2.



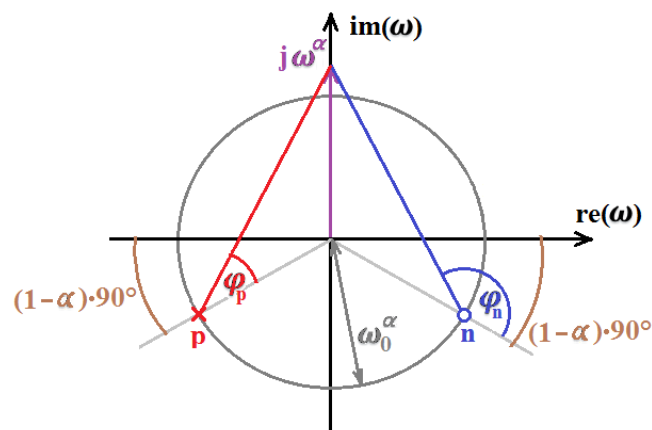
Obrázek 3.2 Zobrazení nul a pólů obyčejného VFČ s CPE.

Naklonění přímky s nulou a pólem lze vysvětlit úpravou vztahu (3.1.3) do tvaru:

$$\overrightarrow{K(\omega)} = -\frac{\omega^\alpha e^{j\alpha\frac{\pi}{2}} - \omega_0^\alpha}{\omega^\alpha e^{j\alpha\frac{\pi}{2}} + \omega_0^\alpha} = -\frac{j\omega^\alpha - \omega_0^\alpha e^{j\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}}{j\omega^\alpha + \omega_0^\alpha e^{j\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}}. \quad (3.1.5)$$

Zde jsou polohy nul a pólů komplexními čísly, nikoli však komplexně sdruženými dvojicemi, jak je tomu v klasické teorii obvodů. Z obrázku 3.2 lze vidět, proč není modul přenosu konstantní. Vzdálenosti nuly a pólu od polohy $j\omega^\alpha$ jsou (s rostoucím kmitočtem) nejprve totožné, poté nabývají maxima svého podílu při $\omega = \omega_0$ a při dalším zvyšování kmitočtu se pomalu opět srovnávají. Rozdíl $\varphi_n - \varphi_p$ je nejprve roven nule (invertující zapojení) a poté klesá k -180° .

Grafickou metodou návrhu je možné přijít na **teoretický koncept obvodu**, jenž má konstantní modul přenosu a jehož fázový rozsah $\Delta\varphi = \alpha\pi$. Jde tedy o **dokonalý fraktální VFČ** (obrázek 3.3).



Obrázek 3.3 Zobrazení nul a pólů ideálního fraktálního VFČ.

Vztah pro přenos ideálního článku podle obrázku 3.3 je:

$$\overrightarrow{K(\omega)} = \frac{j\omega^\alpha - \omega_0^\alpha e^{-j\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}}{j\omega^\alpha + \omega_0^\alpha e^{j\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}}.$$

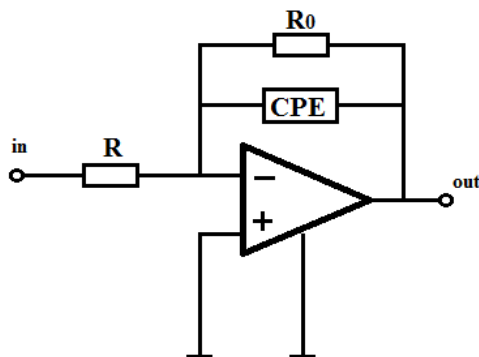
Po úpravě vznikne tvar:

$$K(s) = \frac{s^\alpha + \omega_0^\alpha e^{j\alpha\pi}}{s^\alpha + \omega_0^\alpha} = \frac{Y_\alpha(s) + Ge^{j\alpha\pi}}{Y_\alpha(s) + G}. \quad (3.1.6)$$

Zde figuruje Y_α jako admitance prvku CPE, vodivost G a dále prvek $Ge^{j\alpha\pi}$, který má též rozměr vodivosti, avšak je komplexní a kmitočtově nezávislý. Takový prvek již z principu nelze sestrojit. Proto zůstává koncept ideálního fraktálního VFČ **nedosažitelný**.

Dále se práce zabývá některými příklady APS s kmitočtově závislým modulem přenosu. Obvody jsou realizovány pomocí invertujícího zapojení OZ s napěťovou zpětnou vazbou (VFOA), jelikož jeho napěťová přenosová funkce je přímo podílem dvou impedancí.

V podstatě může jako FPF (APS-DP) fungovat i aktivní fraktální dolní propust zobrazená na obrázku 3.4.

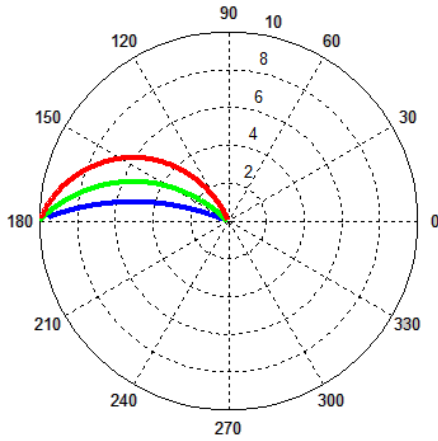


Obrázek 3.4 Aktivní fraktální dolní propust.

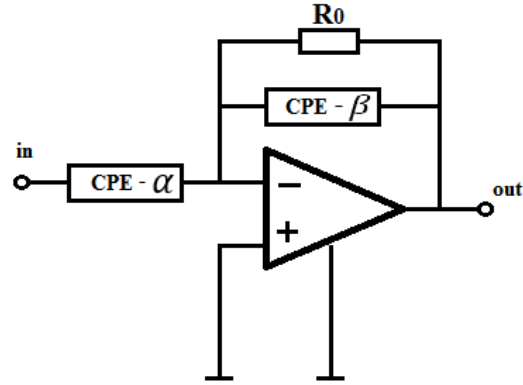
Napět'ová přenosová funkce je dána:

$$K_1(s) = -\frac{G}{Y_\alpha(s)+G_0} = -\frac{K_0 \cdot \omega_0^\alpha}{s^\alpha + \omega_0^\alpha}, \quad (3.1.7)$$

Zde se fáze mění v intervalu $\left(\pi, \pi \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$, což ilustruje polární graf napět'ového přenosu na obrázku 3.5. Jsou zde 3 průběhy odpovídající řádům $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$ počínaje modrou křivkou.



Obrázek 3.5 Polární graf přenosové funkce $K_1(s)$.

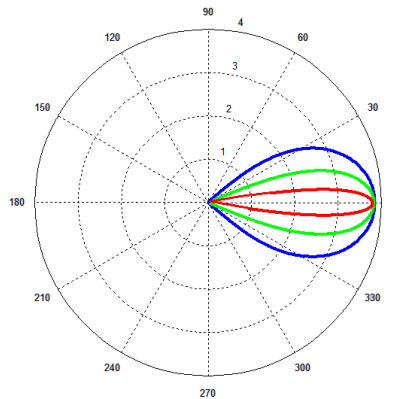


Obrázek 3.6 Obvodová realizace přenosové funkce $K_2(s)$.

Další obvod, který mimo změnu fáze umožňuje také nastavení počáteční fáze je ilustrován na obrázku 3.6. Jeho přenosová funkce je:

$$K_2(s) = -\frac{Y_\alpha(s)}{Y_\beta(s)+G} = -\frac{D_\beta}{D_\alpha} \frac{s^\alpha}{s^\beta + \omega_0^\beta}. \quad (3.1.8)$$

Admittance CPE jsou zde $Y_\alpha(s) = D_\alpha^{-1} s^\alpha$ a $Y_\beta(s) = D_\beta^{-1} s^\beta$, přičemž mezní kmitočet pólu je $\omega_0^\beta = D_\beta G$. Přenos v polárním zobrazení je na obrázku 3.7 a zobrazuje tři průběhy, kde řád α roste od 0.1 do 0.45 a řád β je vždy dvojnásobkem α (pro dodržení symetrie, nemusí být však nutně pravidlem). Červená křivka odpovídá $\alpha = 0.1$.



Obrázek 3.7 Polární graf přenosové funkce $K_2(s)$.

3.2 Posouvače s omezeným pracovním pásmem

Předchozí podkapitola se zabývá posouvači fáze, jejichž pracovní pásmo je omezeno prakticky pouze pracovním pásmem CPE a použitých aktivních prvků. Nyní je hlavním úkolem navrhnout dvojbran, jehož fázová charakteristika **prokládá dva body** ve fázově-kmitočtové doméně **monotónní spojitou hladkou křivkou** [4,5,6]. Tyto obvody jsou označovány zkratkou **RPS** – restricted phase shifters.

Zde existují dvě možnosti proložení, kde každá ústí v jinou metodu návrhu a potažmo obvodovou realizaci.

1. Libovolné monotónní proložení ve tvaru funkce arc-tangens.
2. Proložení, kdy inflexní bod funkce arc-tangens je uprostřed dvou zadaných bodů (v semilogaritmickém měřítku).

3.2.1 Libovolné proložení ve tvaru funkce arc-tangens

Zde je hlavní výhodou fakt, že k realizaci není potřeba FPF (viz. podkapitola 3.1), nýbrž pouze článek VFČ **celistvého řádu** (allpass filter) v kaskádě s fraktálním integrátorem resp. derivátorem. Je třeba brát na vědomí, že klasický VFČ lze realizovat pouze jako obvod s klesající fází – DP.

Jsou zadány body $\mathbf{A} = [f_1, \varphi_1]$ a $\mathbf{B} = [f_2, \varphi_2]$ a je známo, že bude použit VFČ o určitém inflexním bodu f_0 a celistvém řádu n a fraktální integrátor/derivátor řádu α . Pro logaritmické měřítko se vyplatí pracovat s exponenty daných kmitočtů

$$e_1 = \log f_1 \text{ a } e_2 = \log f_2. \quad (3.2.1)$$

Prvním krokem návrhu je ověření, zda strmost $\Delta\varphi/\Delta e$ poklesu z \mathbf{A} do \mathbf{B} je splnitelná daným řádem n . Platí podmínka:

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta e} \right| < \left| \frac{4n}{\Delta e} \left(\arctan(10^{\Delta e/2}) - \frac{\pi}{4} \right) \right|, \quad (3.2.2)$$

kde $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ a $\Delta e = e_2 - e_1$. Pokud není podmínka splněna, je třeba zvýšit řád n . Samotné proložení bodů je vykonáno funkcí:

$$\varphi(f) = -n \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{f}{f_0}\right) + \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.3)$$

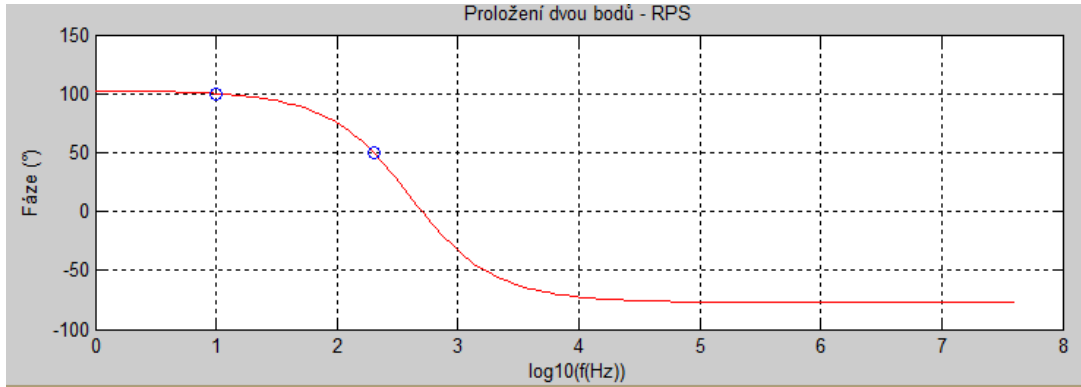
Pro zjištění kmitočtu inflexního bodu je potřeba numericky vyřešit transcendentální rovnici pro f_0 :

$$\arctan\left(\frac{f_1}{f_0}\right) - \frac{\Delta\varphi}{2n} - \arctan\left(\frac{f_2}{f_0}\right) = 0. \quad (3.2.4)$$

Zde poslouží Newtonova metoda tečen, nebo další iterační principy. Obecně jsou zde **dvě relevantní řešení** (kladné kořeny rovnice), ze kterých je třeba vybrat to výhodnější až na základě vypočteného řádu α . K tomu slouží následující vztah:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left(\varphi_2 + 2n \cdot \arctan\left(\frac{f_2}{f_0}\right) \right). \quad (3.2.5)$$

Na obrázku 3.8 lze vidět výsledný průběh funkce spolu s krajními body.



Obrázek 3.8 Příklad proložení bodů ve fázově-kmitočtové rovině.

Touto metodou lze teoreticky proložit **jakékoliv dva body**, avšak pouze při **klesající tendenci fáze**. Použitím klasického fázovacího članku prvního řádu (nebo jich kaskády) bude modul celkového přenosu ovlivněn pouze fraktálním integrátorem resp. derivátorem zajišťujícím konstantní fázový posuv o $\alpha \frac{\pi}{2}$. Nevýhodou však může být fakt, že se inflexní bod může nacházet jak uvnitř, tak vně intervalu $\langle f_1 | f_2 \rangle$.

3.2.2 Proložení s inflexním bodem uprostřed pásma

Koncept umístění inflexního bodu mezi krajní kmitočty RPS se jeví jako nejvíce vyhovující, jelikož je z něj patrný klasický průběh tvaru arc-tangens (je zde lineární část). Je jasné, že pro realizaci již nestačí použít VFČ jako u metody libovolného proložení, nýbrž je nezbytná přítomnost FPF (resp. jejich kaskády) v kombinaci s fraktálním derivátorem resp. integrátorem (pro nastavení počáteční fáze). Průběh fázové charakteristiky je dán funkcí:

$$\varphi(f) = n \cdot \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1 \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha_1 \frac{\pi}{2}) + (\frac{f_0}{f})^{\alpha_1}}\right) + \alpha_2 \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.6)$$

Zde je n rovno počtu FPF v kaskádě, α_1 je jejich fraktální řád a α_2 je řád fraktálního derivátoru/integrátoru. Znaménko řádu n určuje, zda se jedná o RPS-DP (záporné) nebo RPS-IP (kladné).

Návrh se provádí podobně jako u metody libovolného proložení – numerickým výpočtem α_1 z transcendentální rovnice (3.2.7) a výpočtem α_2 z explicitního vyjádření (3.2.8). Vztahy jsou následující:

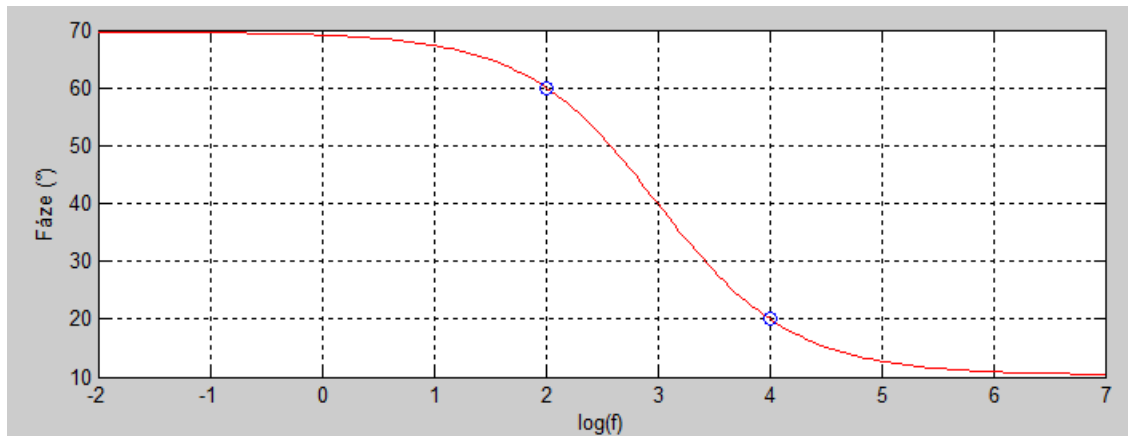
$$\frac{\Delta\varphi}{2} - n \cdot \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1 \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha_1 \frac{\pi}{2}) + (\frac{f_1}{f_2})^{\alpha_1/2}}\right) + \alpha_1 \frac{\pi}{4} n = 0, \quad (3.2.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi} \left(\varphi_s - n \alpha_1 \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.2.8)$$

Vstupní parametry návrhu jsou opět kmitočty krajních bodů f_1 , f_2 a příslušné hodnoty fází φ_1 , φ_2 . Proměnná φ_s je aritmetickým průměrem krajních fází:

$$\varphi_s = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (3.2.9)$$

Výsledný průběh fázové charakteristiky RPS-DP je na obrázku 3.11.

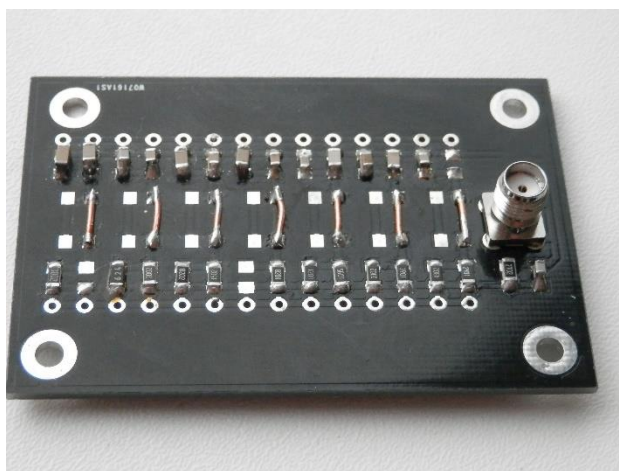


Obrázek 3.9 Proložení fázovou charakteristikou s inflexním bodem uprostřed pásma.

Průběh spojnice dvou zadaných bodů je zde téměř lineární (v logaritmické míře) oproti metodě libovolného proložení. Nicméně podstatnou nevýhodou je nutnost použití FPF namísto VFČ a pro větší $\Delta\varphi$ se může jednat o kaskádu totožně naladěných FPF.

4 VLASTNÍ REALIZACE CPE

Bylo zde zvoleno uspořádání na DPS se dvěma vrstvami spojů (oboustranná) viz Obrázek 4.1. Výstupem DPS je konektor SMA. Na každé straně je 7 sekcí RC tvořených uhlíkovými rezistory SMT v pouzdře 1206 a MLCC kondenzátory v pouzdrech 0805 a 1206. Jelikož jsou součástky vyráběny v normovaných řadách hodnot, bylo k dosažení přesné kapacity resp. odporu využito paralelní spojení dvou a více součástek.



Obrázek 4.1 Deska plošných spojů CPE.

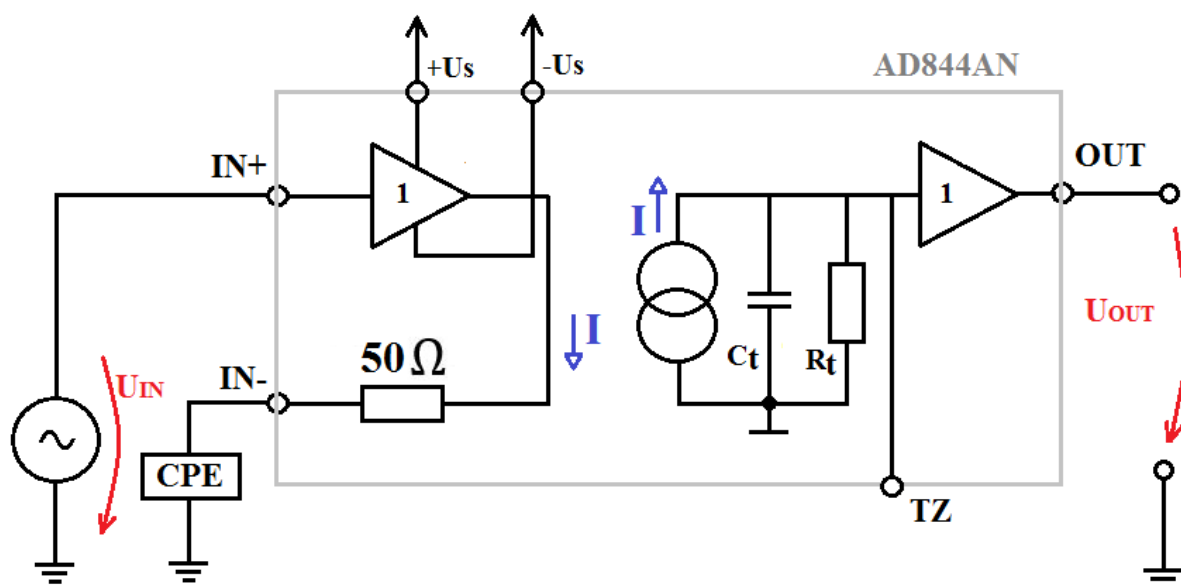
Takto navržené paralelní kombinace byly ještě před vzájemným spojením s protější kombinací (připájením drátové propojky - viz Obrázek 4.1) proměřeny RLC měřičem. Hodnoty odporů se od požadovaných lišily maximálně o 1%. Avšak hodnoty kapacity bylo o poznání složitější doladit. Hlavní příčinou byla velká výrobní tolerance kapacity (až 10%). Dále je zde známý fenomén teplotní závislosti kapacity, což v kombinaci s pájením značně prodlužovalo dobu konstrukce (chladnutí a následné měření).

Celkem byly realizovány tři CPE o řádech 0,25, 0,5 a 0,75. Všechny byly navrženy pro akustické pásmo od 5 Hz po 50 kHz a jejich impedanční parametr (popsán modulem admitance v geometrickém středu pásma – viz kapitola 2.2) byl volen tak, aby krajní hodnoty kapacit a odporů vycházely „přípustně“ (tj. odpory od *desítek* Ω do *stovek* $k\Omega$ a kapacity od *desítek* pF do *jednotek* μF). Byla použita metoda návrhu na bázi geometrické řady (viz kapitola 2.2).

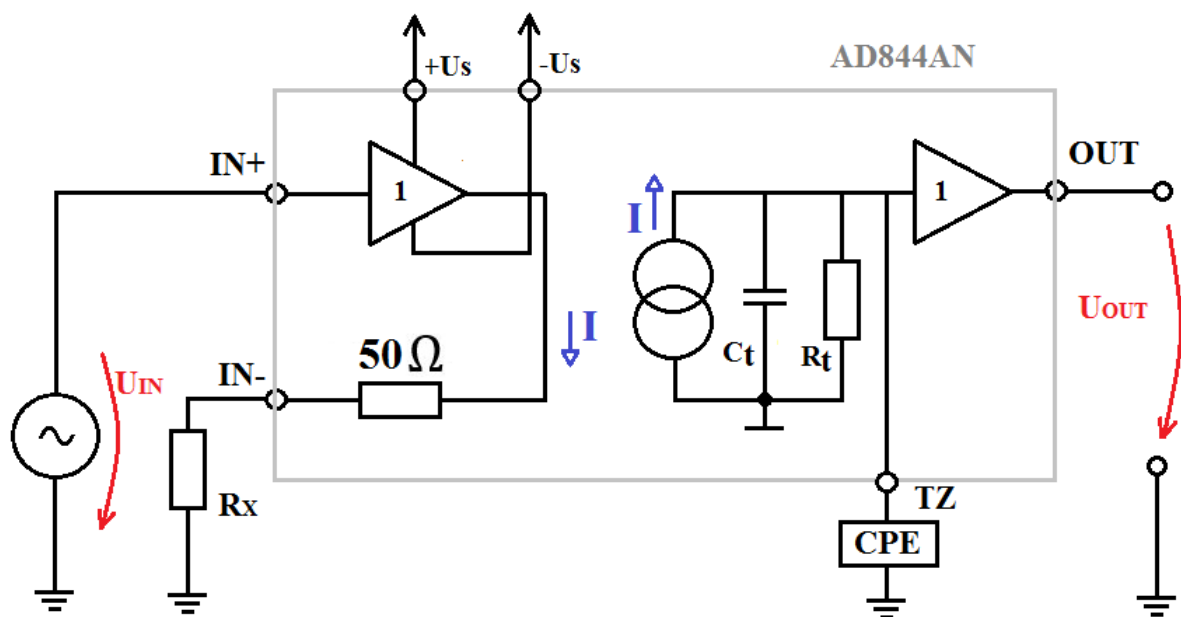
4.1 Měření kmitočtových charakteristik CPE

Nejprve bylo zamýšleno měřit charakteristiky CPE pomocí různých moderních aktivních funkčních bloků (proudový konvektor, CFOA, VFOA). Nicméně u všech se začaly projevovat nežádoucí parazitní vlastnosti (dokonce i v akustickém pásmu). Nejčastějším problémem byl konečný výstupní a vstupní odpor aktivního prvku.

Hlavní myšlenkou bylo měření vstupního a výstupního napětí dvojbranu, přičemž jedno nese informaci o fázi proudu CPE a druhé o fázi napětí. Například pro CFOA typu **AD844AN** situaci názorně vystihují obrázky 4.2 a 4.3.



Obrázek 4.2 Měření CPE pomocí AD844AN - zapojení č. 1.



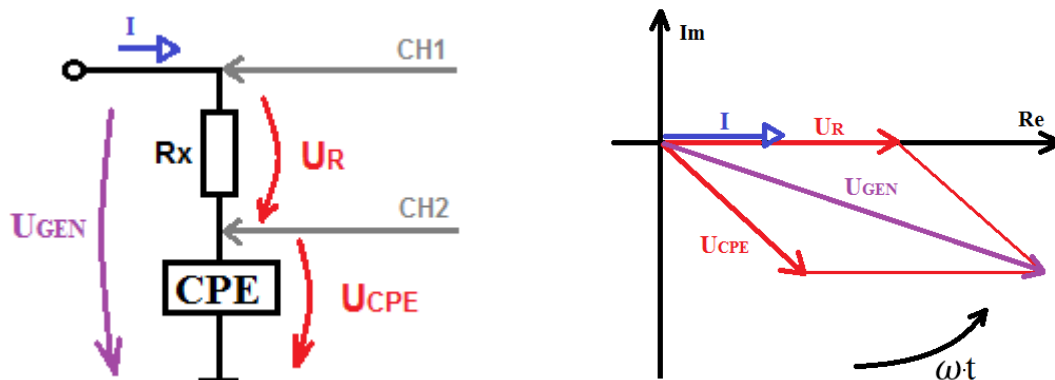
Obrázek 4.3 Měření CPE pomocí AD844AN - zapojení č. 2.

Na obrázku 4.2 je prvek CPE připojen na záporný vstupní pin AD844AN. Informace o **fázi proudu** CPE je zrcadlena ve výstupním napětí U_{OUT} . Nicméně vstupní napětí (na výstupu levého napěťového sledovače) je přivedeno nikoliv na samotný CPE, nýbrž na sériové spojení rezistoru $50\ \Omega$ a CPE. Tudíž fázový posuv mezi napětím U_{OUT} a U_{IN} není argumentem impedance CPE.

Další nápad byl využít k měření CPE svorku TZ (obrázek 4.3). Zde však měření nefungovalo

vůbec – výstupní signál byl velmi rušen vlastní oscilací obvodu. Důvodem může být fakt, že uzel spojení interních transimpedančních prvků $R_t \cong 3\text{ M}\Omega$ a $C_t \cong 4,5\text{ pF}$ není uzemněn do signálové země, ale pouze do jistého pomocného interního zemního potenciálu.

Přistoupilo se tedy na snad nejjednodušší metodu měření – **měření impedance na napěťovém děliči**.



Obrázek 4.4 Měřicí uspořádání - schéma a fázorový diagram.

Jak ilustruje obrázek 4.4 - vlevo, byl do série s CPE vložen rezistor R_x , a jelikož napětí na něm reprezentuje proud obou prvků v sérii, platí pro modul impedance CPE vztah:

$$|Z_{CPE}| = R_x \frac{|U_{CPE}|}{|U_{Rx}|}. \quad (4.1.1)$$

Ovšem pro měření fázového posunu mezi U_{CPE} a I_{CPE} je nutné zajistit přímé měření signálu, který nese informaci o fázi proudu v CPE. Většina osciloskopů má společný zemní potenciál pro všechny vstupní kanály, a proto je nutné měřit napětí U_{GEN} a U_{CPE} a přímo na osciloskopu provést operaci rozdílu (nabídka MATH). Tím lze získat průběh U_R . Problémem nyní je přesné měření fázového posuvu mezi U_R a U_{CPE} . Nejvýhodnější je použití osciloskopu, který umožňuje automatické měření fázového posuvu mezi vstupními kanály, ale také mezi výsledky matematických operací. V takto nastaveném režimu je možné s dostatečnou přesností měřit argument admitance (fázi) CPE.

Hodnotu R_x je potřeba průběžně měnit tak, aby byla řádově stejná, jako aktuální modul impedance CPE. K určení modulu CPE pro daný budicí kmitočet f poslouží odvozený vztah:

$$|Z_{CPE}(f)| = \left(\frac{f_s}{f}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{|Y(f_s)|}, \quad (4.1.2)$$

kde f_s je geometrický střed pracovního pásma CPE daný $f_s = \sqrt{f_d f_h}$ a $|Y(f_s)|$ je modul admitance CPE uprostřed prac. pásma (vstupní návrhový parametr). Dalším užitečným vzorcem k návrhu CPE je vztah mezi koeficientem D s jednotkou $\Omega \cdot \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^\alpha$ a modulem admitance $|Y(f_s)|$:

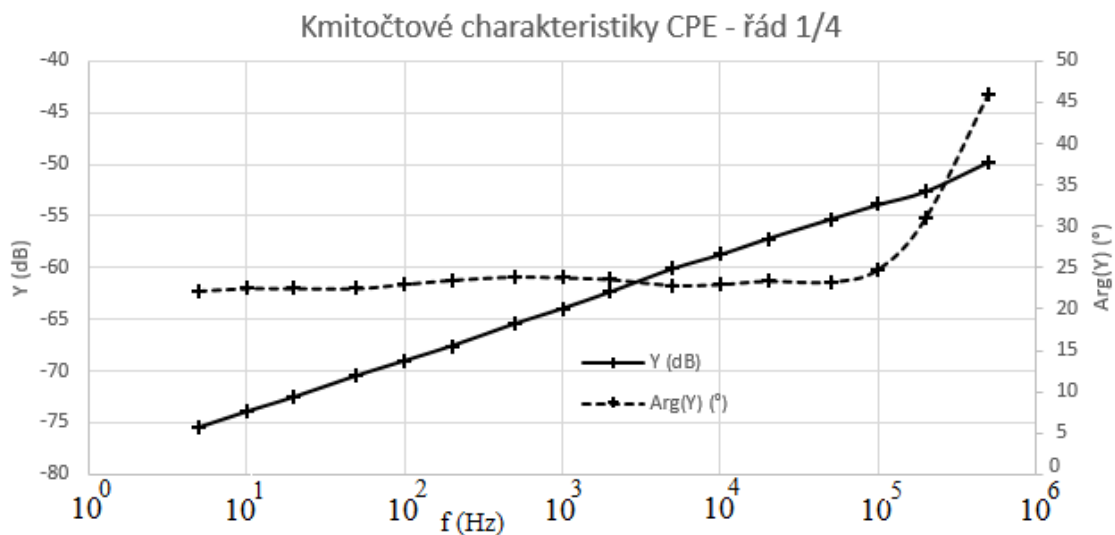
$$D = \frac{(2\pi\sqrt{f_d f_h})^\alpha}{|Y(f_s)|}. \quad (4.1.3)$$

Vztah (4.1.3) je užitečný, jelikož v teoretických výpočtech návrhu analogových obvodů se využívá pro impedanci CPE vzorec:

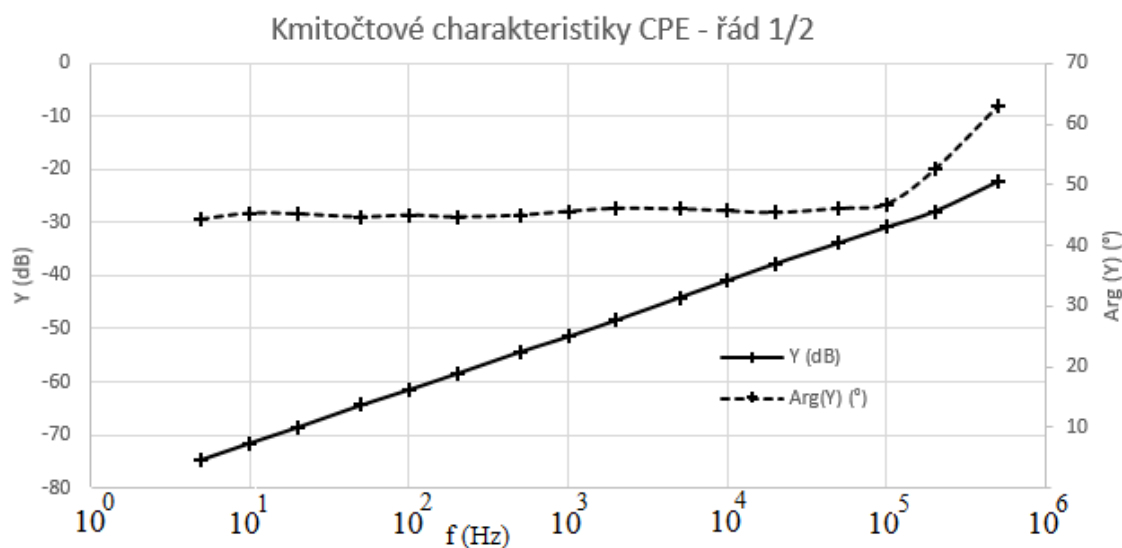
$$Z_{CPE}(s) = Ds^{-\alpha} \quad (4.1.4)$$

pro $\alpha \in (0,1)$.

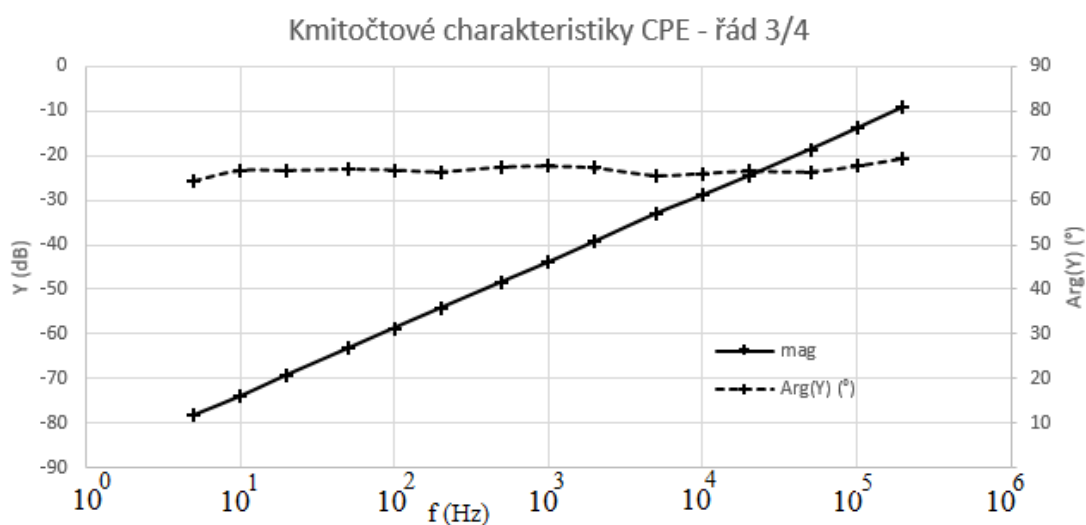
Obrázky 4.5 – 4.7 obsahují grafy měřených kmitočtových charakteristik CPE řádů 0,25; 0,5 a 0,75.



Obrázek 4.5 Modulová a fázová kmitočtová charakteristika CPE řádu 1/4.



Obrázek 4.6 Modulová a fázová kmitočtová charakteristika CPE řádu 1/2.



Obrázek 4.7 Modulová a fázová kmitočtová charakteristika CPE řádu $\frac{3}{4}$.

Zpětnou analýzou naměřených hodnot – proložením modulové char. logaritmickou spojnicí – byl vypočten řád aproximace α (strmost přímky) a koeficient D (posuv přímky vůči nule). V tabulce 4.1 je přehled naměřených (zpětně vypočtených) hodnot a prvotních návrhových požadavků včetně relativních odchylek.

Zadané parametry			Výsledky měření			Rel. Odchylky	
α (-)	Y_{MOD} [mS]	D [(rad/s) $^{\alpha}$]	α (-)	Y_{MOD} [mS]	D [(rad/s) $^{\alpha}$]	δ_{α} [%]	δ_Y [%]
0,25	0,545	13736	0,2523	0,536	14224	0,92	-1,65
0,5	2	28025	0,5096	1,935	31301	1,92	-3,25
0,75	3,86	108711	0,7486	3,823	108501	-0,19	-0,96

Tabulka 4.1 Přehled zadaných a reálných parametrů CPE.

Relativní odchylky řádů δ_{α} [%] a modulů admitancí δ_Y [%] jsou velmi malé, což svědčí o spolehlivosti návrhové metody. Mírné kolísání fázových charakteristik je z velké části způsobeno nepřesností měření (nepřesná kalibrace osciloskopických sond zanáší značnou chybu fáze).

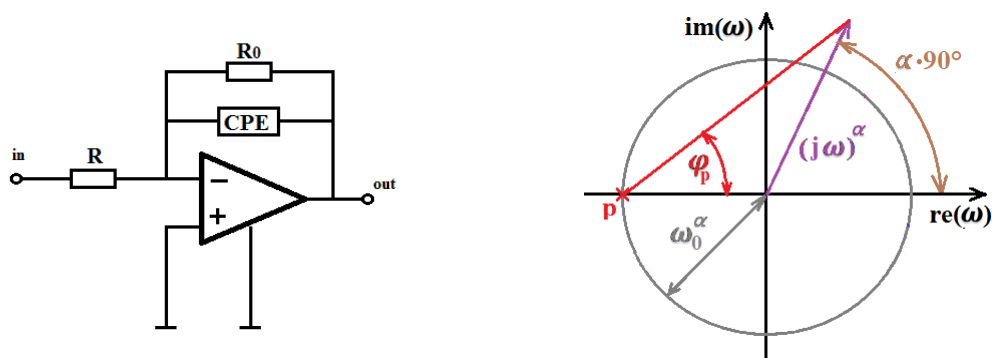
5 REALIZACE POSOUVAČŮ FÁZE S CPE

Jak již bylo zmíněno v kapitole 3.1 (asymptotické fázovače signálu), není možné sestavit ideální posouvač fáze necelistvého řádu. Tedy obvod, jehož fázová charakteristika se mění v libovolném rozsahu s kmitočtem a modulová charakteristika je konstantní.

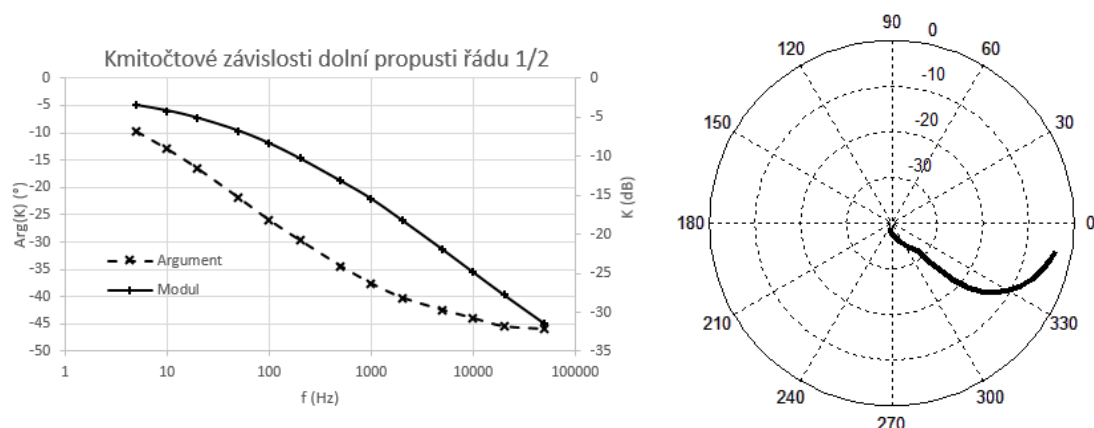
Je však možné realizovat fraktální horní a dolní propust, stejně jako integrátor (případně ztrátový derivátor) [5,6]. Pro použití v akustickém pásmu se osvědčil operační zesilovač MAE411. Všechny měřené obvody uvedené v následujících podkapitolách byly konstruovány na nepájivém kontaktním poli.

5.1 Fraktální dolní propust – DP

Jedná se o fázovací obvod typu **DP (decreasing phase)** – s klesající fázovou charakteristikou. Pro měření (viz obrázek 5.2) byl použit prvek CPE o řádu $\frac{1}{2}$.



Obrázek 5.1 Schéma a komplexní kmit. rovina fraktálního posouvače fáze typu DP.



Obrázek 5.2 Kmitočtová char. a polární graf fraktální dolní propusti typu DP (měřeno).

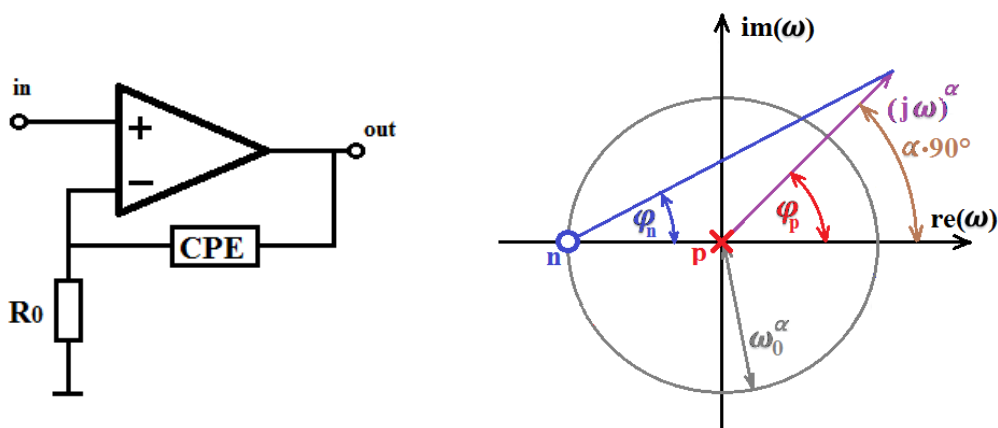
Z kmitočtových charakteristik je patrna asymptoticky klesající fáze přenosu od 0° do -45° . Modul přenosu je nejprve dán stejnosměrným napěťovým přenosem rezistivních prvků v obvodu - CPE aproximace ještě neplatí, je to rezistor. Poté se projeví pól přenosu (na cca 100 Hz) daný prvky R_0 a CPE. Dále pak modul přenosu klesá se strmostí -10 dB/dek dokud platí aproximace prvku CPE. Názorné je také zobrazení v polárním grafu (obrázek 5.2 vpravo), avšak ztrácí se zde povědomí o kmitočtu. Napěťový přenos v laplaceově transformaci je:

$$K(s) = \frac{\frac{D}{R}}{s^\alpha + \frac{D}{R_0}} = \frac{\frac{R_0 \cdot D}{R \cdot R_0}}{s^\alpha + \frac{D}{R_0}} = \frac{K_0 \cdot \omega_p^\alpha}{s^\alpha + \omega_p^\alpha} \quad (5.1.1)$$

Zde je ω_p úhlový kmitočet pólu, D je koeficient CPE s jednotkou $\Omega \cdot \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)^\alpha$. Napěťový přenos je také možné ilustrovat v kmitočtové rovině nul a pólů (obrázek 5.1 - vpravo). Osa budícího kmitočtu ω (obyčejně ryze imaginární) je nyní obecně komplexní (nakloněná).

5.2 Fraktální dolní propust – IP

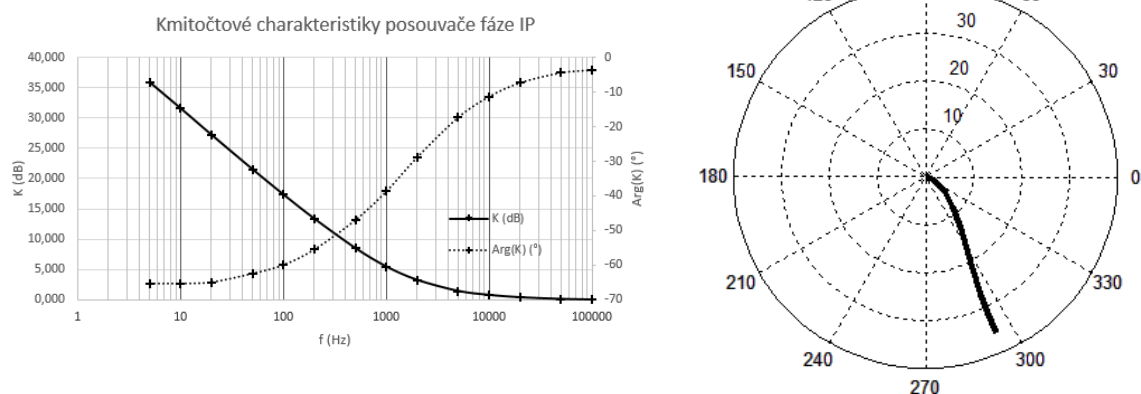
Jedná se o fázovací obvod typu **IP (increasing phase)** – s rostoucí fázovou charakteristikou. Pro měření (viz obrázek 5.4) byl použit prvek CPE o řádu $\frac{3}{4}$.



Obrázek 5.3 Schéma a komplexní kmit. rovina fraktálního posouvače fáze typu IP.

Použitá topologie (obrázek 5.3 – vlevo) byla vybrána pro svou kmitočtově nezávislou vstupní impedanci. Fázová charakteristika s kmitočtem roste od $-67,5^\circ$ do 0° a modul přenosu klesá se strmostí -15 dB/dek než se vyrovná vlivem nuly přenosu na kmitočtu 1 kHz. Přenos napětí v Laplaceově transformaci je dán vztahem:

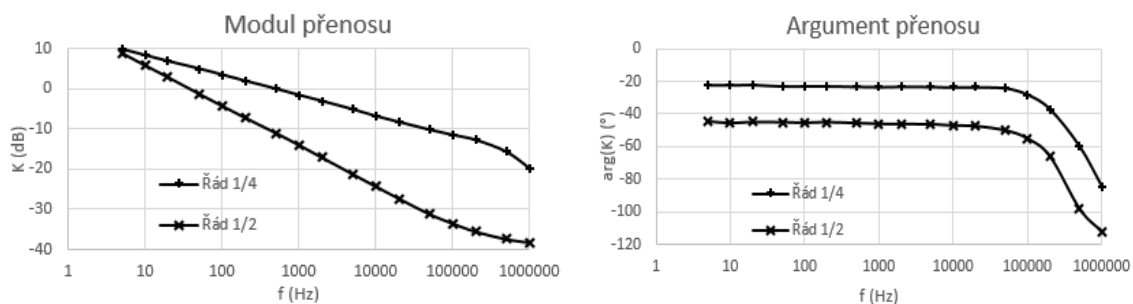
$$K(s) = \frac{s^\alpha + \frac{D}{R_0}}{s^\alpha} = \frac{s^\alpha + \omega_n^\alpha}{s^\alpha}. \quad (5.1.2)$$



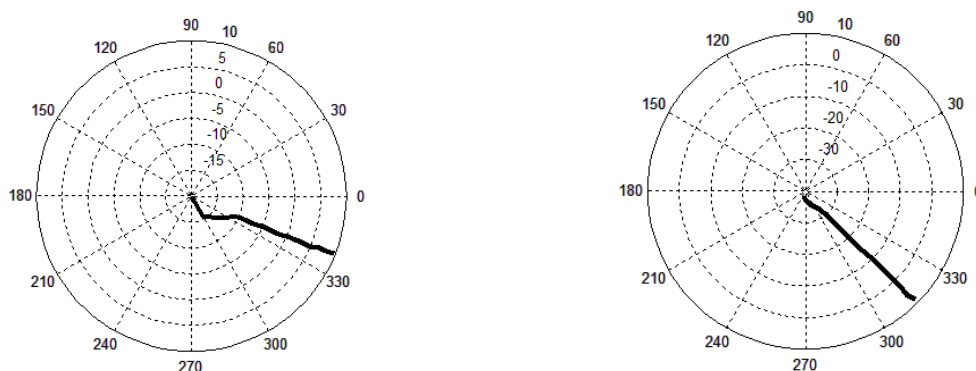
Obrázek 5.4 Kmitočtová char. a polární graf fraktální dolní propusti typu IP (měřeno).

5.3 Fraktální integrátor

Podobně jako integrátor celistvého řádu je zde modul napět'ového přenosu klesající a fáze konstantní o záporné hodnotě. Jsou zde uvedeny výsledky měření v akustickém pásmu pro fraktální řády $\alpha = 0,25$ a $0,5$ (obrázky 5.5 a 5.6).



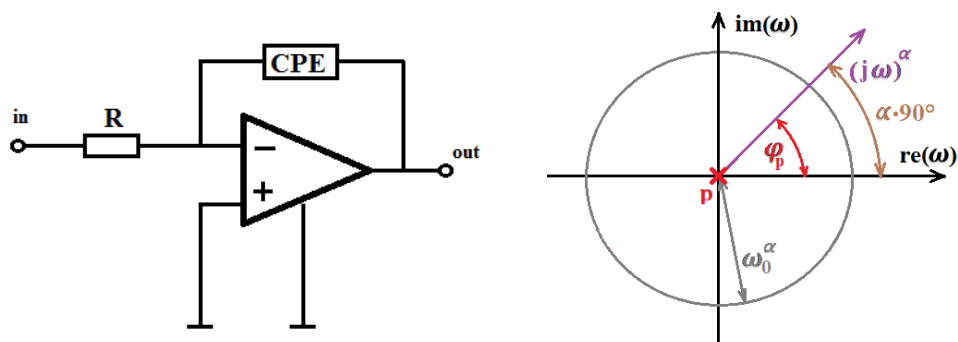
Obrázek 5.5 Modulová a fázová charakteristika fraktálního integrátoru (měřeno).



Obrázek 5.6 Polární grafy měřených charakteristik pro řád $1/4$ (vlevo) a $1/2$ (vpravo).

Modulové charakteristiky mají lineární tvar (v logaritmických souřadnicích) o směrnících -5 a -10 dB/dek . Průběhy fázových charakteristik jsou konstantní na $-22,5^\circ$ a -45° . Na vyšších kmitočtech ($> 20 \text{ kHz}$) již aproximace CPE neplatí, a proto modul přenosu nabývá vyšší strmosti (-20 dB/dek , pro řád $\frac{1}{2}$ je zde chyba měření) a fáze klesá k -90° (poté i níže vlivem parazitních vlastností OZ). Přenosová funkce napětí je dána vztahem:

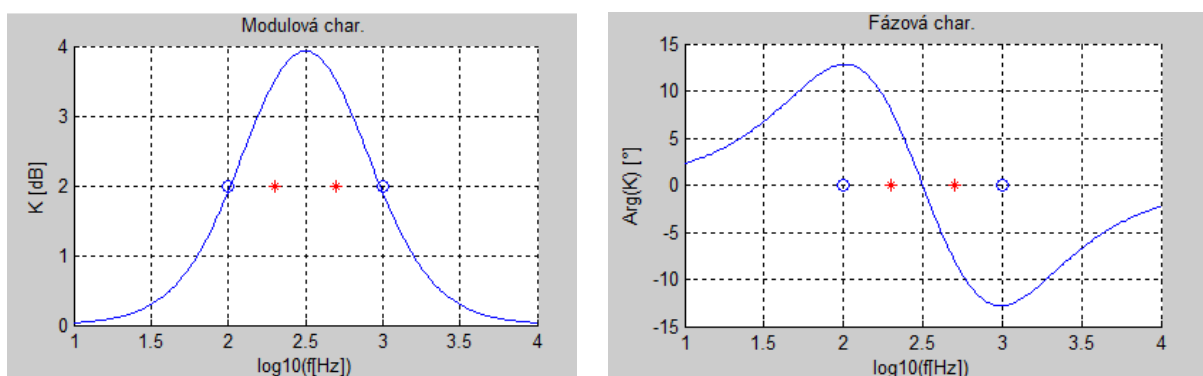
$$K(s) = \frac{1}{\frac{R}{D} \cdot s^\alpha}. \quad (5.1.3)$$



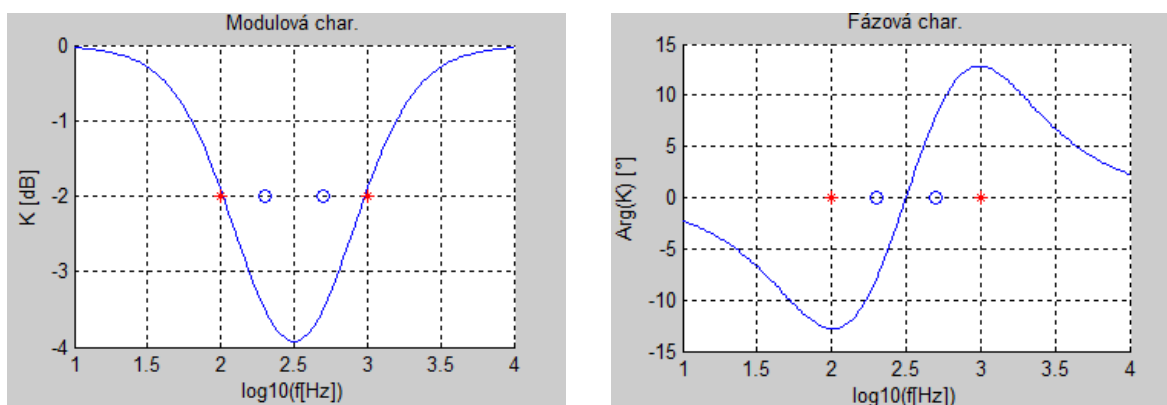
Obrázek 5.7 Schéma a komplexní kmitočtová rovina fraktálního integrátoru.

6 NÁVRH FRAKTÁLNÍCH DVOJBRANŮ POMOCÍ KASKÁDY PÁSMOVÝCH PROPUSTÍ A ZÁDRŽÍ

Hlavní myšlenkou je realizace dvojbranu, jehož fázová charakteristika je maximálně plochá (konstantní) v omezeném kmitočtovém rozsahu. Jedná se tedy o hledání ideálních **konstelací nul a pólů** přenosových funkcí (nikoliv admitancí, jak tomu bylo doposud) a jejich realizaci pomocí kaskády **pásmových propustí** (BP – Band Pass) a **pásmových zádrží** (BR – Band Reject) [3].



Obrázek 6.1 Modulová a fázová charakteristika obvodu BP (Matlab).



Obrázek 6.2 Modulová a fázová charakteristika obvodu BR (Matlab).

Již podle kmitočtových charakteristik na obrázcích 6.1 a 6.2 je vidět, že se jedná o **obecné bikvadratické filtry** s napětřovým přenosem:

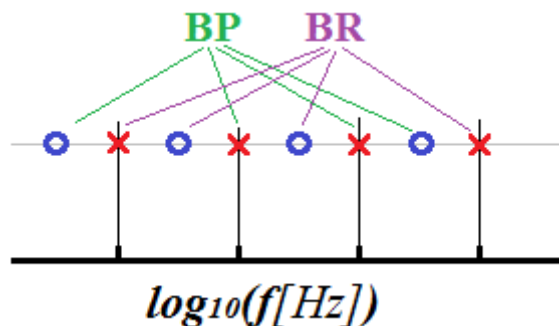
$$K(s) = \frac{(s + \omega_{n1}) \cdot (s + \omega_{n2})}{(s + \omega_{p1}) \cdot (s + \omega_{p2})} = \frac{s^2 + s \frac{\omega_n}{Q_n} + \omega_n^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{Q_p} + \omega_p^2}.$$

Dále lze odvodit:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_{n1} \cdot \omega_{n2}}, \quad Q_n = \frac{\omega_n}{\omega_{n1} + \omega_{n2}}.$$

Tyto vztahy platí také pro kmitočty a jakost **pólů přenosu**.

Pro vhodné naladění BP a BR musí být nuly a póly přenosu poskládány za sebou způsobem, který ilustruje obrázek 6.3.



Obrázek 6.3 Přiřazení nul a pólů obvodům BP a BR.

Zde je vidět, že na počet dvojic nul a pólů $n = 4$ je potřeba jeden pár BP – BR. Proto může proměnná n nabývat pouze **násobků čtyř**.

6.1 Ideální konstelace nul a pólů

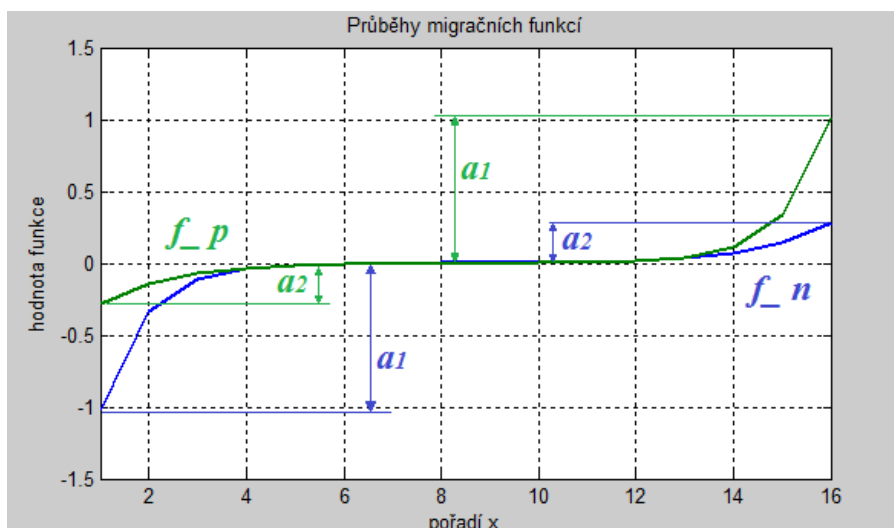
Cílem návrhu je rozmístit nuly a póly obvodů BP a BR tak, aby vyhovovaly ideální konstelaci pro maximálně plochou fázovou charakteristiku přenosu. Pro hledání ideálních konstelací byl opět využit software Matlab.

Optimalizační metoda vychází z počátečního **ekvidistantního rozložení** exponentů kmitočtů nul a pólů (podobně jako metody návrhu CPE), na které jsou pak aplikovány jisté **migrační funkce**:

$$f_p(x) = a_1 \cdot b_1^{x-n} - a_2 \cdot b_2^{1-x}, \quad (6.1.1)$$

$$f_n(x) = -a_1 \cdot b_1^{1-x} + a_2 \cdot b_2^{x-n}. \quad (6.1.2)$$

Zde n je počet dvojic nul a pólů (vždy násobky čtyř) a x je pořadí pólu resp. nuly a nabývá hodnot **1, 2, 3, ... n**. Koeficienty a_1 a a_2 představují maximální hodnoty funkcí na krajních pozicích nul, resp. pólů ($x = 1$, nebo $x = n$), což ilustruje obrázek 6.4. Koeficienty b_1 a b_2 představují základy exponenciálních funkcí (vyšší b značí prudší nárůst funkce v okolí krajního bodu).



Obrázek 6.4 Příklad migračních funkcí nul (modrá) a pólů (zelená) - program Matlab.

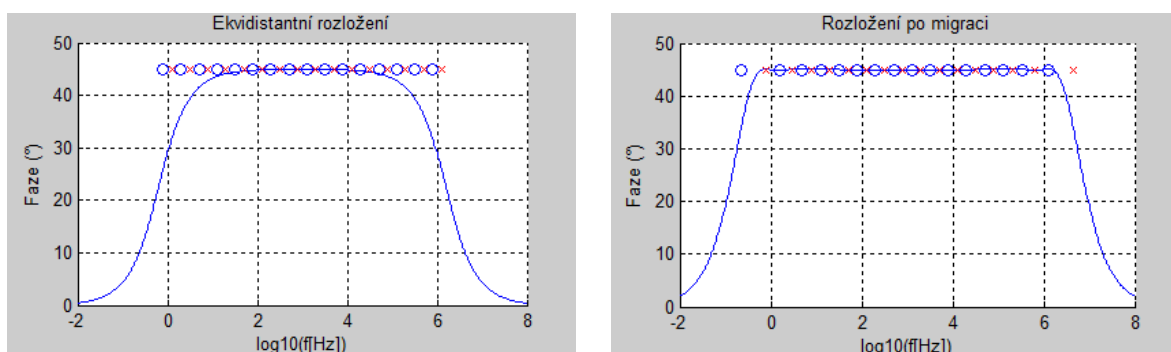
Samotná migrace je pak popsána vztahy:

$$e_n(x) = e_{n_ekv}(x) + KROK \cdot f_n(x), \quad (6.1.3)$$

$$e_p(x) = e_{p_ekv}(x) + KROK \cdot f_p(x). \quad (6.1.4)$$

Zde $e_{n_ekv}(x)$ je hodnota exponentu kmitočtu x -té **nuly** v ekvidistantním rozložení, **KROK** značí exponenciální vzdálenost sousedních pólů, resp. nul a $e_n(x)$ je již výsledná poloha x -té **nuly** po migraci. Tentýž význam má vztah (6.1.4) pro posun pólů.

Jednoduše lze podle obrázku 6.4 říci, že první pól zleva ($x=1$) se posune doleva o hodnotu $a_2 \cdot KROK$, první nula zleva se posune doleva o $a_1 \cdot KROK$. Dále například krajní pól vpravo ($x=n$) se posune o $a_1 \cdot KROK$ doprava a krajní nula vpravo zase o $a_2 \cdot KROK$ doprava. Výsledné fázové charakteristiky jsou na obrázku 6.5.



Obrázek 6.5 Fázová charakteristika před (vlevo) a po migraci (vpravo) – program Matlab.

Optimalizační metodou byly nalezeny výsledné migrační koeficienty a_1, a_2, b_1 a b_2 , jež jsou uvedeny v tabulce 6.1. Pro zadaný exponent kmitočtového pásma Δe (počet dekád), odpovídající počet dvojic nul a pólů n a fraktální řád α bylo možné najít přesné hodnoty koeficientů migračních funkcí. Parametr $\Delta\varphi$ značí maximální odchylku fáze od nominální hodnoty (není vstupním parametrem návrhu).

$n (-); \Delta e \text{ (dek)}$	$\alpha (-)$	$\Delta \phi (^{\circ})$	a_1	a_2	b_1	b_2
8; 3	0,25	0,05	0,705	0,377	16,330	24,050
	0,50	0,08	1,021	0,282	15,400	31,120
	0,75	0,11	1,969	0,492	5,801	5,470
12; 4	0,25	0,05	0,834	0,429	15,461	15,055
	0,50	0,1	1,164	0,309	10,131	7,008
	0,75	0,07	2,349	0,616	5,285	4,770
16; 6	0,25	0,07	0,908	0,532	9,100	10,256
	0,50	0,1	1,385	0,538	6,030	6,017
	0,75	0,1	2,074	0,542	5,265	4,716

Tabulka 6.1 Výsledky optimalizovaných migračních koeficientů.

6.2 Příklad návrhu fraktálního dvojbranu

Zadání:

$$\alpha = 0.5; \quad \Delta e = 3 \text{ dekády}; \quad f_0 = 1 \text{ kHz}.$$

Řešení:

Z tabulky 6.1 jsou vyčteny hodnoty migračních koeficientů:

$$\mathbf{a} = [1,021 \quad 0,2816] \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = [15,40 \quad 31,12].$$

Dále je znám parametr $n = 8$, jelikož je přímo spjat s šířkou pásma. Pro výpočet exponenciální vzdálenosti sousedních pólů/nul platí:

$$KROK = \frac{\Delta e}{n-1} = \frac{3}{7} \cong 0,429.$$

Střed pásma v exponenciálním tvaru a krajní exponenty kmitočtů pásma jsou:

$$e_0 = \log_{10} f_0 = 3; \quad e_d = e_0 - \frac{\Delta e}{2} = 1,5; \quad e_h = e_0 + \frac{\Delta e}{2} = 4,5.$$

Nyní lze pro exponenciální polohy pólů psát:

$$e_{p_{ekv}}(i) = e_d + \alpha \cdot \frac{KROK}{2} + (i - 1) \cdot KROK,$$

kde člen $\alpha \cdot \frac{KROK}{2}$ zajišťuje posunutí všech pólů k vyšším kmitočtům z důvodu středové symetrie fázové charakteristiky. Pořadová proměnná i nabývá hodnot 1,2, ..., n . Exponenty kmitočtů nul jsou dány:

$$e_{n_{ekv}}(i) = e_p(i) - \alpha \cdot KROK.$$

Tím je zajištěno ekvidistantní rozložení nul pólů. Migrační funkce lze vyčíslit jako:

$$f_p(i) = 1,021 \cdot 15,4^{i-8} - 0,2816 \cdot 31,12^{1-i},$$

$$f_n(i) = -1,021 \cdot 15,4^{1-i} + 0,2816 \cdot 31,12^{i-8}$$

a pro samotný akt migrace platí vztahy (6.1.3) a (6.1.4). Tabulka 6.2 uvádí výsledné exponenty nul a pólů s odpovídajícími kmitočty.

i	e_p	e_n	f_n [Hz]	f_p [Hz]
1	1,4865	0,9553	9,02	30,65
2	2,0318	1,7930	62,09	107,61
3	2,4642	2,2482	177,07	291,18
4	2,8929	2,6785	476,93	781,38
5	3,3215	3,1071	1279,8	2096,8
6	3,7518	3,5358	3434,3	5647,4
7	4,2070	3,9682	9293,2	16106,0
8	5,0447	4,5135	32624	110840

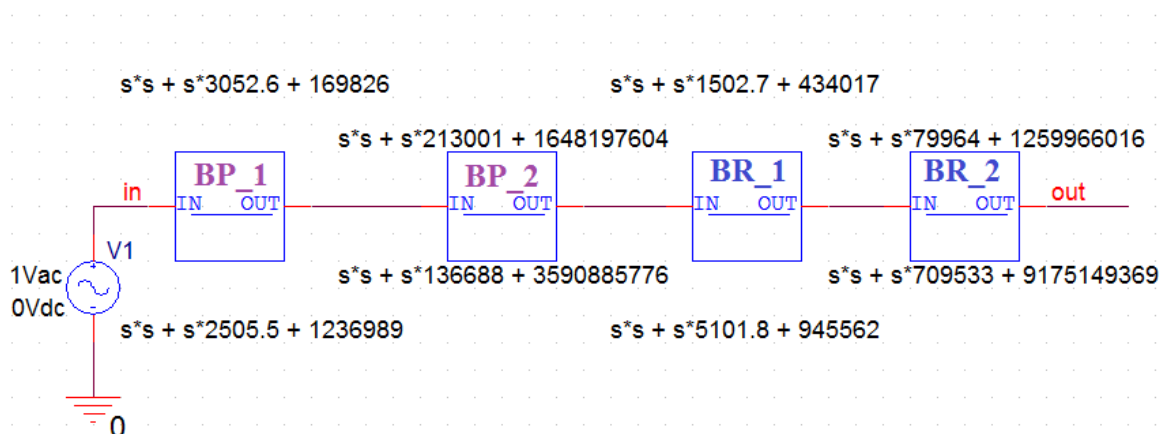
Tabulka 6.2 Přehled kmitočtů pólů a nul po migraci.

Nyní zbývá pouze přiřadit kmitočty jednotlivým BP a BR a vypočítat jejich střední kmitočty a jakosti pólů a nul jakožto návrhové parametry obvodů (tabulka 6.3).

	Q_n [-]	Q_p [-]	ω_n [rad/s]	ω_p [rad/s]
BP_1	0,135	0,4439	412,1	1112,2
BP_2	0,1906	0,4384	40598	5992,4
BR_1	0,4384	0,1906	658,8	972,4
BR_2	0,4439	0,135	35496	95787

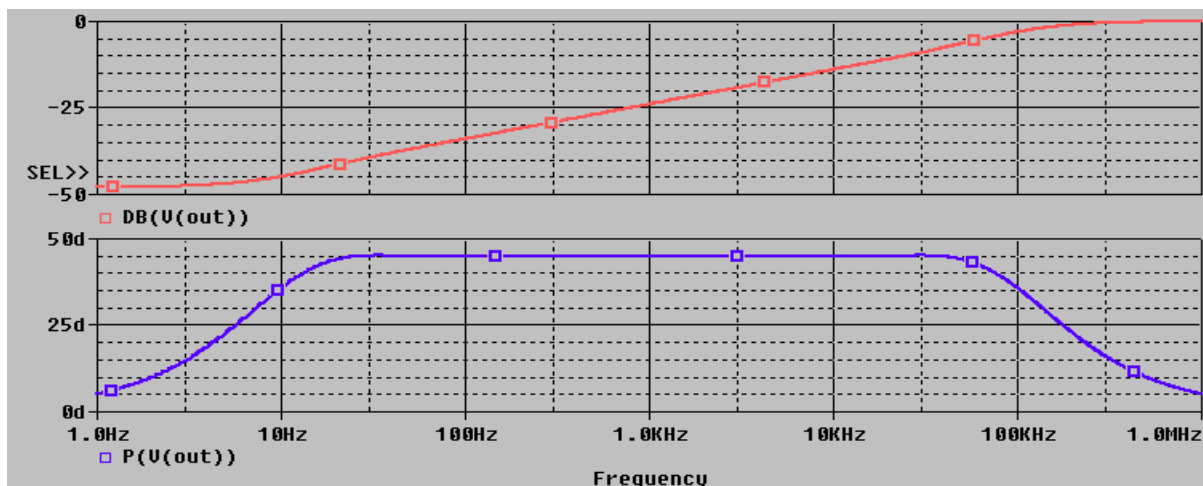
Tabulka 6.3 Vypočtené parametry obvodů BP a BR.

Pro kontrolu bylo zapojení sestaveno v programu PSpice pomocí bloků Laplace – viz obrázek 6.6.

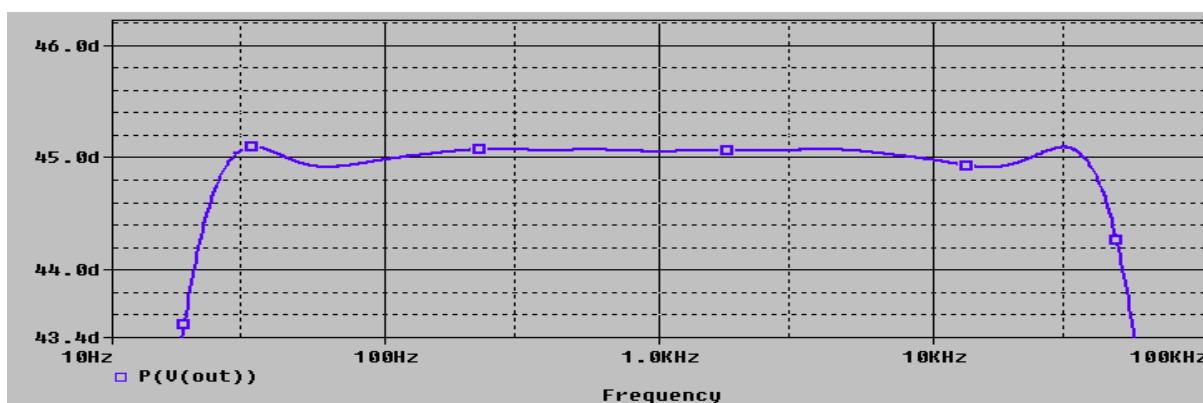


Obrázek 6.6 Schéma kaskády obvodů BP a BR – PSpice.

Výsledky AC analýzy jsou na obrázcích 6.7 a 6.8.



Obrázek 6.7 Modulová a fázová charakteristika výsledné kaskády BP a BR - PSpice.



Obrázek 6.8 Detail fázové charakteristiky obvodu - PSpice.

Z výsledných charakteristik je patrné, že všechny vstupní požadavky obvodu byly splněny. Fázová charakteristika je konstantní na hodnotě $+45^\circ$ s maximálním rozkmitem $\pm 0,1^\circ$ od kmitočtu $31,6 \text{ Hz}$ (odpovídá exponentu 1,5) do $31,6 \text{ kHz}$. Šířka pásma je tedy rovna třem dekadám.

7 ZÁVĚR

Primárním úkolem práce bylo detailní seznámení se s problematikou fraktálních obvodových prvků. Je zde široce pojednáno o teoretickém konceptu fraktálního dvoj pólu a hlavním produktem práce jsou dvě metody návrhu CPE.

První z nich – **metoda návrhu CPE řešením soustavy lineárních rovnic** – je čistě výtvorem autora semestrální práce. Jedná se o metodu návrhu paralelně-sériové struktury rezistorů a kondenzátorů (tzv. Struktura B), jejichž hodnoty jsou přímým výstupem výpočetního algoritmu. Vstupní parametry metody jsou voleny s ohledem na praktické požadavky uživatele. Výhodou metody je její univerzálnost (v rámci limitací dané struktury), díky které je možné hlouběji bádát a experimentovat s polohami nul a pólů imitance struktury. Nevýhodou metody je značná výpočetní náročnost při řešení soustavy lineárních rovnic a tedy nutnost použití sofistikovaného početního nástroje. Dále pak bylo zjištěno, že struktura B má svá omezení s hlediska šířky použitelného pásma CPE.

Druhá metoda návrhu je pozměněna z originální podoby [7], u které byly vstupní parametry voleny ne-úplně uživatelsky přívětivě. Skloubením poznatků z metody první a dokumentu [7] byla původní metoda přetvořena do podoby **metody návrhu CPE na bázi geometrické řady**. Ta využívá jisté struktury B-2 zahrnující paralelní korekční členy. Výsledkem návrhu jsou opět hodnoty rezistorů a kondenzátorů, přičemž průběh fázové charakteristiky je mnohem uspokojivější než u struktury B.

Dalším významným objevem je koncept ideálního fraktálního VFČ (kapitola 3.1), jenž prostřednictvím komplexní roviny nul a pólů přenosu osvětluje problém jeho realizace. Zpětným sestrojením přenosové funkce z polohy nul a pólů lze dospět ke vztahu, který obsahuje jistý element, jenž není možné fyzicky realizovat. Jedná se totiž o prvek s konstantním modulem i argumentem imitance, přičemž ani jeden z nich není nulový.

Jelikož ideální fraktální VFČ nelze sestrojit jako lineární obvod (platný princip superpozice), je jedinou možností implementovat reálný FPF do zpětnovazebního AGC obvodu, jenž modul přenosu vyrovná bez zásahu do fázové charakteristiky. Tímto druhem řešení se však práce nezabývá.

Během letního semestru byla práce obohacena o data z měření a konstrukce CPE a následně některých obvodů FPF (pouze v akustickém pásmu). Byla tím ověřena spolehlivost návrhové metody (na bázi geometrické řady) a byly získány cenné poznatky o konstrukci CPE (metoda měření, parazitní vlivy součástek).

V závěrečné kapitole je stručně představen další experimentální nápad, jak lze realizovat fraktální dvojbrany bez použití CPE – kaskádou obecných bikvadratických filtrů. Jedná se pouze o teoretický koncept, který nebyl nijak realizován, ani měřen. Je to jakási alternativní možnost, která má proti CPE nevýhodu většího počtu aktivních prvků. To se jistě projeví obtížností naladění a dlouhodobou nestálostí parametrů obvodu. Naopak výhodou tohoto konceptu je jeho elektronická přeladitelnost.

Obecně je nyní možné navrhnout a realizovat CPE o určitém fraktálním řádu α v rozsahu od nuly do jedné pro určité kmitočtové pásmo, v němž fraktální aproximace platí. Omezení nastává u extrémně nízkých a vysokých kmitočtů a fraktálních řádů blízkých 0 a 1, kde hodnoty R a C mohou nabývat až nereálných velikostí.

LITERATURA

- [1] Rudolf Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, c2000. ISBN 98-102-3457-0.
- [2] PODLUBNY, Igor. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press, c1999. ISBN 9780125588409.
- [3] PETRZELA, J. Fundamental analog cells for fractional-order two-port synthesis. In *Proceedings of 23rd International Conference RADIOELEKTRONIKA 2013*, s. 182-187.
- [4] PETRZELA, J. Analog continuous-time filtering extended to fractional-order network elements. In *Proceedings of 36th International Conference TSP 2013*, s. 417-421.
- [5] PETRZELA, J. Arbitrary phase shifters with decreasing phase. In *Proceedings of 37th International Conference TSP 2014*, s. 329-333.
- [6] PETRZELA, J. Arbitrary phase shifters with increasing phase. In *Proceedings of 38th International Conference TSP 2015*, s. 329-333.
- [7] VALSA, J., DVORAK, P., FRIEDL, M. Network model of CPE. *Radioengineering*, 2011, vol. 20, issue 3, s. 59-67.
- [8] VALSA, J., VLACH, J. RC models of a constant phase element. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2011, vol. 20, s. 619-626. DOI: 10.1002/cta.785.
- [9] PODLUBNY, I., PETRAS, I., VINAGE, B., OLEARY, P., DORCAK, L. Analogue realization of fractional-order controllers. *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, issue 1, s. 281-296. DOI: 10.1023/A: 1016556604320.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

f	kmitočet
ω	úhlový kmitočet
j	imaginární jednotka, index pořadí
s	Laplaceův operátor
K	napět'ový přenos dvojbranu
π	konstanta Π
I, i	elektrický proud, index pořadí
U, u	elektrické napětí
L	indukčnost
C	kapacita
R	elektrický odpor - rezistance
G	elektrická vodivost - konduktance
X	reaktance
Z	impedance
Y	admitance
φ	argument komplexního čísla
α, β	fraktální řád
$n, m,$	celistvý řád, počet prvků
D	fraktální koeficient, modul na jednotkovém úhlovém kmitočtu
dB	decibel
δ	relativní odchylka
$I^n(f(x))$	integrál řádu n funkce f podle x
$D^n(f(x))$	derivace řádu n funkce f podle x
$\vec{\Omega}$	matice koeficientů
\vec{G}	vektor vodivostí
\vec{B}	vektor pravé strany soustavy rovnic
$K(x)$	kombinatorický součet produktů proměnné x
a, b	koeficient geometrické řady, pořadí kombinačního prvku
CPE	prvek s konstantní fází
FPF	fraktální posouvač fáze

<i>APS</i>	asymptotický posouvač fáze
<i>VFC</i>	všeprůstný fázovací člunek
<i>DP</i>	klesající fáze
<i>IP</i>	rostoucí fáze
<i>RPS</i>	omezený posouvač fáze
<i>VFOA</i>	operační zesilovač s napěťovou zpětnou vazbou
<i>BP</i>	pásmová propust
<i>BR</i>	pásmová zadrž