



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

SROVNÁNÍ PULSUJÍCÍHO PROUDĚNÍ NEWTONSKÉ A NE-NEWTONSKÉ KAPALINY V KOMPLEXNÍ GEOMETRII

COMPARISON OF PULSATING FLOW OF NEWTONIAN AND NON-NEWTONIAN FLUID IN COMPLEX GEOMETRY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. JIŘÍ KOHÚT

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. JIŘÍ JAGOŠ

BRNO 2020

Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Bc. Jiří Kohút**
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Fluidní inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Jiří Jagoš**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Srovnání pulsujícího proudění newtonské a ne-newtonské kapaliny v komplexní geometrii

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Proudění krve v tepnách je velká výzva pro výpočtové modelování. Obecně se jedná o nestacionární (pulsující) proudění ne-newtonské kapaliny v poddajné nehomogenní a anizotropní „trubicí“. Jedna z mnoha otázek je, zda-li je nutné uvažovat vliv ne-newtonské kapaliny při výpočtovém modelování proudění v tepnách. Pro numerické řešení obecné Navier–Stokesovy rovnice nelze doposud korektně uvažovat proměnnou viskozitu (způsobenou ne-newtonským chováním kapaliny).

Cíle diplomové práce:

1. Rešeršní studie o aktuálních možnostech modelování proudění krve a úskalích modelování turbulentního proudění krve. Srovnání výsledků simulací a experimentů (dostupných v literatuře) pulsujícího proudění newtonské a ne-newtonské kapaliny v pevných trubicích.
2. Praktická část bude srovnávat (pravděpodobně pomocí rychlostních profilů) vlastní výpočty laminárního proudění s experimentem provedeným v článku [2], tj. (i) výpočty s ne-newtonskou kapalinou a (ii) kapalinou o konstantní viskozitě. Dále bude určena uklidňující délka pro pulsující proudění vystupující ze zakřivené trubice. Simulace provedené v článku [2] na zakřivené trubici by byla rozšířena o jiné tvary trubice.

Seznam doporučené literatury:

ETHIER, C. R., & C. A. SIMMONS. Introductory Biomechanics From Cells to Organisms, 2007.

GIJSEN, F. J. H., ALLANIC, E., Van De VOSSE, F. N., & JANSSEN, J. D. The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Unsteady flow in a 90° curved tube. Journal of Biomechanics, 1999, 32(7), 705–713. [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(99\)00014-7](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(99)00014-7).

KHAN, M. O., STEINMAN, D. A., & VALEN-SENDSTAD, K. Non-Newtonian versus numerical rheology: Practical impact of shear-thinning on the prediction of stable and unstable flows in intracranial aneurysms. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2017, 33(7), 1–10. <https://doi.org/10.1002/cnm.2836>.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá pulsujícím prouděním newtonské a ne-newtonské kapaliny. V teoretické části jsou uvedeny potřebné teoretické znalosti jak obecně k pulsujícímu proudění, tak k ne-newtonskému chování kapaliny. Dále se práce zaměřuje na numerické modelování pulsujícího proudění v přímé, ideálně tuhé trubici a v „patient-specific“ modelu lidské tepny, přesněji v karotidě. Jsou použity dvě metody: numerické řešení pomocí metody konečných objemů (MKO) a také analytické řešení pomocí Besselových funkcí (tzv. Womersley). Výsledky jsou validovány proti experimentálnímu měření metodou „particle image velocimetry“ (PIV). Shoda numerického řešení s experimentálními daty je vzhledem k nepřesnostem PIV velmi dobrá z obou pohledů - kvalitativně i kvantitativně. Numerické řešení dále srovnává vliv turbulence a ne-newtonské kapaliny vůči bázi (laminární, newtonská kapalina). Vyvinutá metodika je v závěru aplikována na „patient-specific“ model karotidy, zrekonstruovaný z CT snímků. Měření *in vivo* je v lidských tepnách velmi nákladné a často invazivní. Výstupy z měření jsou tak omezené, většinou pouze na tlak a průtok. Výpočtové modelování proudění (CFD) je neinvazivní a výstupy jsou přes celou doménu. Díky těmto výhodám CFD výrazně přispívá k pochopení vlivu hemodynamiky při tvorbě kardiovaskulárních onemocnění.

Abstract

This master's thesis deals with pulsating flow of Newtonian and non-Newtonian fluid. Theoretical part represents necessary theoretical knowledge for pulsating flow and understanding of non-Newtonian behaviour. Furthermore the thesis focus is directed on numerical simulation of pulsating flow in straight, ideally rigid tube and in patient-specific model of human artery, more precisely in carotid. Two methods are used: numerical solution based on finite volume method (FVM) and also analytical solution using Bessel functions by Womersley. Results are validated against experimental measurements of velocity profiles by particle image velocity method (PIV). The agreement between numerical and experimental data with consideration of PIV inaccuracy was very good from both point of views - qualitative and quantitative. Numerical solution also compare influence of turbulence and non-Newtonian behaviour towards base (laminar flow, Newtonian fluid). Developed methodology is then applied on patient-specific model of carotid, which was renovated from computed tomography. Measurements *in vivo* in human arteries is very expensive and often invasive. Because of that measurement outputs are limited, most of the time on pressure and flow. Computational fluid dynamics (CFD) is non-invasive and outputs are through whole domain. Due to these advantages CFD significantly contributes to understanding of hemodynamics influence in cardiovascular diseases.

Klíčová slova

Carreau model, erytrocyty, karotida, $k-\omega$ SST, mezní vrstva, rychlostní profil, WSS

Keywords

Boundary layer, carotid artery, Carreau model, erythrocytes, $k-\omega$ SST, velocity profile, WSS

Citace

KOHÚT, Jiří. *Srovnání pulsujícího proudění newtonské a ne-newtonské kapaliny v komplexní geometrii*. Brno, 2020. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojíňho inženýrství. Vedoucí práce Ing. Jiří Jagoš

Srovnání pulsujícího proudění newtonské a ne-newtonské kapaliny v komplexní geometrii

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Jiřího Jagoše. Uvedl jsem všechny literární prameny, publikace a další zdroje, ze kterých jsem čerpal.

.....

Jiří Kohút
26. června 2020

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval panu Ing. Jiřímu Jagošovi za cenné rady a poznámky při řešení práce. Děkuji také panu Ing. Ondřeji Lisickému za zprostředkování výpočetní domény karotidy a tvorbu její sítě v programu ANSYS® ICEM®. V neposlední řadě děkuji paní Ing. Darině Jašíkové a panu Ing. Michalu Kotkovi, Ph.D. za poskytnutí experimentálních dat.

Obsah

1 Úvod	9
2 Krev	10
2.1 Kompozice a struktura krve	10
2.1.1 Důležitost proteinů plazmy	11
3 Proudění ve velkých cévách	13
3.1 Cévy a šíření tlakové vlny	16
3.2 Poiseuillovo proudění	19
3.3 Womersleyho rychlostní profily	21
4 Ne-newtonské chování krve	25
4.1 Viskózní modely	26
4.2 Viskoelasticita	29
4.3 Tixotropie	31
4.4 Kritické smykové napětí	33
4.5 Mikrocirkulace	34
5 Praktická část	35
5.1 Numerická simulace	36
5.1.1 Diskretizace domény a výpočetní síť	37
5.1.2 Okrajové podmínky	38
5.1.3 Volba výpočtového viskózního modelu	40
5.1.4 Průběh výpočtu a validace výsledků	46
5.1.5 Nezávislost výsledků na výpočetní síti	56
5.2 Analytické řešení	57
5.3 Newtonský a ne-newtonský model krve	62
5.4 Specifická karotida pacienta	65
6 Závěr	72
Seznam použitých zdrojů	74
Seznam použitých zkratk a symbolů	79
Přílohy	83
Tabulky	85

Kapitola 1

Úvod

Diplomová práce se zabývá pulsujícím prouděním newtonské a ne-newtonské kapaliny. Tyto jednotlivé druhy chování zastupuje krev, která je velmi komplexní kapalinou z hlediska její kompozice a struktury. V závislosti na jejím složení vykazuje krev několik jevů (smykové řídnutí, viskoelasticita, tixotropie, kritické smykové napětí). Ve výpočtovém modelování se však většina těchto ne-newtonských aspektů zanedbává a v úvahu se berou jen ty, které mají podstatný vliv. Z tohoto důvodu je teoretická část věnována právě také těmto jevům.

Srdce funkcí podobné membránovému čerpadlu dodává této kapalině pulsující charakter, která proudí potrubím respektive cévami. Poddajnost cév související s jejich strukturou je zmíněna pouze okrajově a větší důraz je kladen na pulsující proudění. Obecně je proudění skutečné kapaliny popsáno dvěma základními rovnicemi, a to rovnicí kontinuity a hybnosti. S určitými předpoklady lze pomocí těchto rovnic pulsující proudění kapaliny odvodit analyticky.

Praktická část se zaměřuje na pulsující proudění newtonské kapaliny (vody) ve skleněné trubici. Experimentální data rychlostních profilů pomocí metody „particle image velocimetry“ (PIV) byly obdrženy z Technické univerzity v Liberci. Následně jsou uvedeny dvě numerické simulace, ze kterých jsou rychlostní profily porovnány s experimentem. Otázkou však je, zdali je dostačující pro tento případ využít pouze rovnic pro laminární proudění. Proto je využit hybridní turbulentní model, který je vhodný pro proudění při nízkých Reynoldsových číslech. Pulsující laminární proudění newtonské kapaliny v přímé trubici je možné odvodit analyticky, což představuje idealizovaný případ uvedeného experimentu. Toto řešení využívá Fourierovy transformace tlakového gradientu vedoucí na Womersleyho rychlostní profily.

Ve výpočtovém modelování proudění krve se uvažují pouze některá ne-newtonská chování a někdy bývají úplně zanedbána. Na stejnou geometrii byl tak aplikován model smykového řídnutí a model o konstantní viskozitě. Závěrem jsou provedeny numerické simulace na specifické geometrii karotidy, kde jsou z pohledu hemodynamiky lokalizována místa s možnými nefyziologickými podmínkami.

Kapitola 2

Krev

Z hlediska charakterizujících vlastností se krev řadí mezi ne-newtonské kapaliny a tudíž nesplňuje lineární závislost mezi smykovým napětím τ a smykovou rychlostí $\dot{\gamma}$. Míra disipace energie způsobena buněčnými deformacemi a skluzu (viskozita) tak není konstantní. Z tohoto důvodu se nahrazuje viskozita viskozitou efektivní μ_{ef} , která je závislá na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ a mnoha dalších faktorech a platí rovnice 2.1 [13]. Ze závislosti μ_{ef} na $\dot{\gamma}$ lze vyvodit chování jako je smykové řídnutí resp. houstnutí, kdy efektivní viskozita klesá resp. roste se smykovou rychlostí. Krev se vyznačuje zejména smykovým řídnutím, tixotropií a viskoelasticitou.

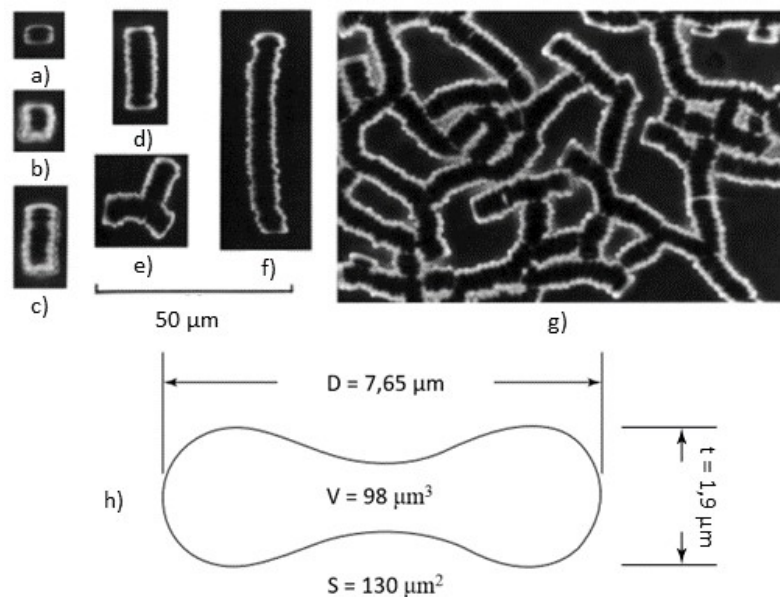
$$\tau = \mu_{ef} \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

Dalším charakteristickým znakem je schopnost proudění až po překročení kritického napětí τ_y (v anglické literatuře „yield stress“), v opačném případě se krev chová jako tuhé těleso. Tyto jednotlivé vlastnosti jsou zapříčiněny strukturou a kompozicí krve [15].

2.1 Kompozice a struktura krve

Významný obsah krve tvoří plazma (až 55%) a červené krvinky neboli erytrocyty. Plazmu, jako kapalnou složku krve, tvoří z 93% voda, 3% proteiny (albumin, globulin a fibrinogen) a zbylou část organické a anorganické látky. Její chování je na rozdíl od krve jako celku newtonské s teplotně proměnnou viskozitou (1,2 mPa·s při teplotě 37 °C). Elastické buňky erytrocyty jsou druhou podstatnou složkou krve a mají zásadní vliv na ne-newtonské chování krve. Jejich průměrná životnost je 120 dní a tělo musí produkovat okolo $3 \cdot 10^9$ erytrocytů denně na jeden kilogram hmotnosti člověka. Tuto kontinuální produkci zajišťuje kostní dřev. Erytrocyty představují více než 99% ze všech buněk, kde zbylý objem zaujímají bílé krvinky (leukocyty) a krevní destičky (trombocyty). Objemové zastoupení erytrocytů v krvi se označuje jako hematokrit a u dospělého člověka činí přibližně 47 %. Mají bikonkávní tvar a skládají se z elastické membrány obepínající vodu s hemoglobinem (newtonská kapalina o viskozitě 6 mPa·s), který přenáší kyslík z plic do tkání a oxid uhličitý z tkání zpět do plic. Tyto vlastnosti umožňují jejich deformaci, popřípadě agregaci a mají tak vliv na celkovou viskozitu krve [16] [14].

Při malých smykových rychlostech mají erytrocyty tendenci se shlukovat do struktur zvaných „rouleaux“ a tak dochází k výraznému zvýšení efektivní viskozity. Jedná se o relativně dlouhé válcovité struktury z nahromaděných erytrocytů, které se větví a tvoří celkovou síť. Tento nárůst nastává při snížení smykových rychlostí pod 1 s^{-1} [7].

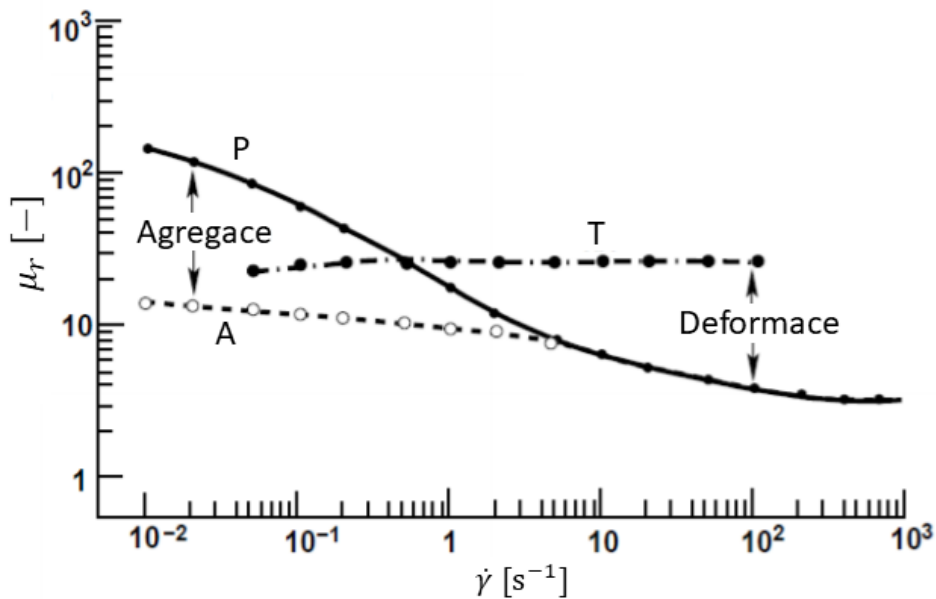


Obrázek 2.1: Jednotlivé lineární a větvící se rouleaux zachycené na mikroskopu s odlišným počtem erytrocytů 2; 4; 9; 15; 36 (a, b, c, d, e, f) a celková síť g) [16]. Geometrické parametry jednoho erytrocytu h) [13].

Obrázek 2.1 ukazuje zachycené snímky na mikroskopickém sklíčku jednotlivých rouleaux a z nich vytvořenou sekundární strukturu (obr. 2.1g). Pro představu je uvedeno měřítko a přibližné geometrické parametry jednoho erytrocytu o průměru D , objemu V a ploše povrchu S s maximální tloušťkou t_m [7]. Pokud se smykové rychlosti blíží nule a hodnota hematokritu je dostatečně vysoká, buňky vytvoří jeden velký agregát a krev se začíná chovat jako tuhé těleso. S vysokými hodnotami $\dot{\gamma}$ se rouleaux rozpadají a tím se μ_{ef} snižuje, jednotlivé buňky se rozptylují v plazmě a zarovnávají podélně s proudnicemi. Naopak při nízkých hodnotách dominuje Brownův pohyb a orientace je náhodná. Smykově řídnuocí chování a kritické smykové napětí τ_y je tedy důsledkem formace rouleaux. S procesem shlukování vysoce souvisí přítomnost proteinů plazmy. Experimentální pokusy s opláchnutými erytrocyty v čistém roztoku při přidávání fibrinogenu prokázaly výrazný nárůst viskozity při nízkých smykových rychlostech. Tato suspenze vykazovala také kritické smykové napětí τ_y [15].

2.1.1 Důležitost proteinů plazmy

Ne-newtonské chování a vliv proteinů plazmy jsou znázorněny na grafu 2.2. Jedná se o závislost relativní viskozity μ_r (poměr viskozity dané suspenze a viskozity plazmy) na $\dot{\gamma}$. Každá křivka znázorňuje jiný druh suspenze erytrocytů. V krevní plazmě (P), v Ringerově roztoku bez úprav s albuminem (11%) (A) a křivka chemicky zpevněných erytrocytů, u kterých nedochází k deformacím (T). Přidáním albuminu je udržován přirozený tvar erytrocytů. Pro všechny uvedené suspenze je obsah erytrocytů stejný $H = 45\%$. Absence ostatních proteinů, jako jsou fibrinogen a globulin, vykazuje u křivky A výrazný vliv na agregaci. Netvoří se rouleaux a nedochází tak k prudkému nárůstu relativní viskozity [32]. Naopak z křivky



Obrázek 2.2: Závislost relativní viskozity μ_r na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ pro jednotlivé suspenze s erytrocyty; P - plazma, A - Ringerův roztok s albuminem bez úprav, T- chemicky zpevněné erytrocyty v Ringerově roztoku s albuminem [7].

P (erytrocyty v plazmě) je patrné zpevňující se chování u nízkých smykových rychlostí. Přibližně od $\dot{\gamma} < 1 \text{ s}^{-1}$ lze pozorovat nárůst relativní viskozity.

Jak už bylo zmíněno, při vyšších smykových rychlostech se erytrocyty zarovnávají s proudnicemi, navíc také dochází k jejich prodlužování (deformaci). Tím se snižuje viskozita a křivka A (P) klesá. Naopak křivka T stagnuje kvůli nedeformovatelným erytrocytům, dokonce se celkově jeví jako konstantní [16]. Ze všech zmíněných vlastností je patrná závislost viskozity na mnoha faktorech, jako jsou hematokrit, teplota, smyková rychlost, buněčná agregace a deformace, ale také tvar buněk a jejich orientace. Nicméně ne-newtonské chování, zejména smykové řídnutí, je výraznější u menších cév. Pro větší cévy, například u aorty, lze uvažovat krev jako newtonskou kapalinu s konstantní viskozitou, protože běžný fyziologický rozsah smykové rychlosti se zde pohybuje mezi $30 - 450 \text{ s}^{-1}$ [13] (viz obr. 2.2 křivka P). U zdravých jedinců je hraniční hodnota, kdy chování krve je čistě newtonské, okolo 100 s^{-1} [9].

Kapitola 3

Proudění ve velkých cévách

Kvůli větším průměrům a vysokým smykovým rychlostem se ve větších cévách (průměr cévy > 1 mm) krev chová převážně jako newtonská kapalina s konstantní viskozitou 3,5 mPa·s. Nejenže se zanedbává ne-newtonské chování krve, ale také se v mnoha studiích modelují cévy jako nepoddjené. Například stenty sloužící k udržení průchodnosti cévy se modelují jako tuhé. Nicméně tyto idealizované nedeformující se geometrie zanedbávají mnoho důležitých vlastností. Zejména šíření pulsní vlny ve stěnách tepny, které ovlivňuje proudové pole uvnitř domény a z něho plynoucí veličiny. Uvažování poddajnosti je důležité například u posuzování rizika ruptury aorty, kde deformace stěn hraje důležitou roli. U tepen deformace kolísají v rozmezí $\pm 4\%$ jejich průměru [13] (více v sekci 3.1).

Pro řešení problémů ve výpočtovém modelování proudění (CFD-„Computational Fluid Dynamics“) se používají programy simulující proudění na základě metody konečných objemů (MKO). Tyto CFD programy, jako je například ANSYS® Fluent®, využívají především dvou základních rovnic hydrodynamiky. Jedná se o zákon zachování hybnosti, tzv. Navier-Stokesova (NS) rovnice 3.1 [44] [45], a rovnici kontinuity 3.3 [41]. Ta vyjadřuje zákon zachování hmotnosti pro nestlačitelnou kapalinu o konstantní hustotě ρ . NS rovnice je pro využití v kapitole 5.1.3 přepsána z maticového tvaru do Einsteinovi sumační symboliky 3.5 (ESS). Deviační tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$ je úměrný tenzoru rychlosti deformace $\mathbf{D}$ (viz 3.2 [32]). Tenzor rychlosti deformace $\mathbf{D}$ je spojován se stlačitelností kapaliny a to tak, že pro jeho první invariant I_D platí 3.3, kdy pro nestlačitelnou kapalinu je roven nule. Taktéž označováno jako nezřídlovost vektorového pole, tj. nulová divergence. Invariant je vyjádřen na základě „stopy“ (v anglickém jazyce „trace“), která je definována jako suma elementů na hlavní diagonále [41]. Účinek vnějších sil $\mathbf{a}$, představující síly jako jsou například gravitační, se u proudění krve většinou zanedbává. Při řešení laminárního proudění v 3D prostoru má systém celkově 4 neznámé. Jednotlivé složky vektoru rychlosti $\mathbf{v}$ a tlak p . Rovnice 3.1 je popsána pro každou složku rychlosti. Systém je tak uzavřen s rovnicí kontinuity a definováním příslušných okrajových a počátečních podmínek. Pro turbulentní proudění je situace složitější a je o něm pojednáváno v kapitole 5.1.3.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \cdot \mathbf{a} \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} = 2\mu \frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T}{2} \quad (3.2)$$

$$I_D = \text{tr} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.3)$$

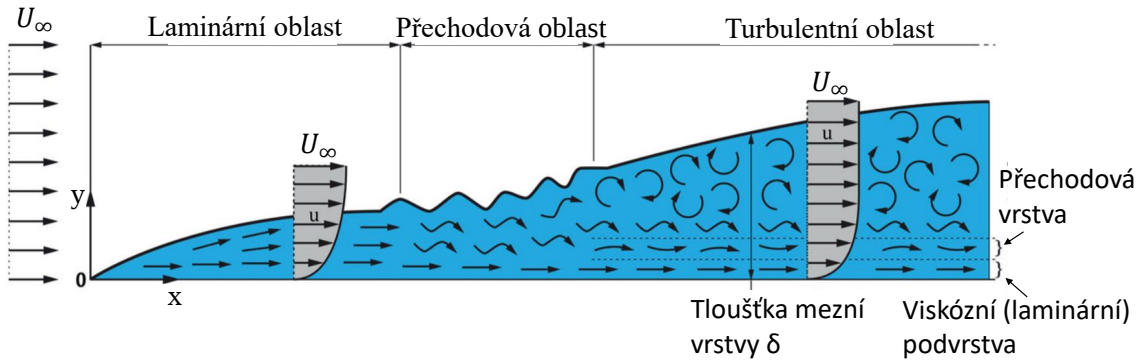
$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho a_i \quad (3.5)$$

Poměr setrvačných a viskózních sil vyjadřuje Reynoldsovo bezrozměrné číslo 3.6. U proudění krve jsou rychlosti a průměry cév relativně malé, tudíž je proudění převážně laminární ($Re < 2300$). Důležitost difuzního členu $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ tak hraje větší roli (do ESS s uvažováním nestlačitelné kapaliny přepsán rovnicí 3.4). Může ale dojít ke vzniku nestabilit (turbulence) vyvolaných převažujícími setrvačnými silami. Za konvekci je z matematického hlediska odpovídá nelineární člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Vliv setrvačných sil u proudění krve však není většinou dostatečný na to, aby došlo k plně vyvinutému turbulentnímu proudění ($Re > 10000$) [32]. Uvedená mezní čísla jsou pouze orientační, u krve se v závislosti na pulsujícím proudění, ne-newtonském chování, poddajnosti a drsnosti cév mohou významně lišit.

$$Re = \frac{\text{konvekce}}{\text{difuze}} = \frac{vD}{\nu} \quad (3.6)$$

Přechod z laminární do přechodové až turbulentní oblasti při proudění na rovině ploše je ilustrován obrázkem 3.1. Laminární proudění je charakterizováno hladkými proudnicemi, částice se pohybují v rovnoběžných vrstvách bez příčného mísení (uspořádaný pohyb) [23]. Naopak turbulentní proudění je vysoce neuspořádaný pohyb, který nastává kvůli rychlostním fluktuacím. Při dostatečně velkých Re je možné rozdělit proudící viskózní tekutinu do dvou oblastí. Jedná se o oblast v blízkosti stěny, kde se uplatňují viskózní síly a oblast, kde se proudění řídí výhradně setrvačnými silami. Daleko od stěn se dá říci, že proudění je skoro až potenciální (nevířivé) [8]. U turbulentního proudění se mezní vrstva (MV) skládá z několika přilehlých vrstev. U stěny, kde jsou nejmenší rychlosti se vyskytuje viskózní (laminární) podvrstva. Následuje přechodová vrstva (v anglické literatuře také „buffer layer“) a zbylá část pak představuje turbulentní vrstvu. Velikostně viskózní a přechodová vrstva zaujímá přibližně 15% (vnitřní vrstva) a turbulentní vrstva zbylou část (vnější vrstva) [36]. Zda-li je proudění v MV laminární nebo turbulentní určuje nejen Re , ale také drsnost povrchu.



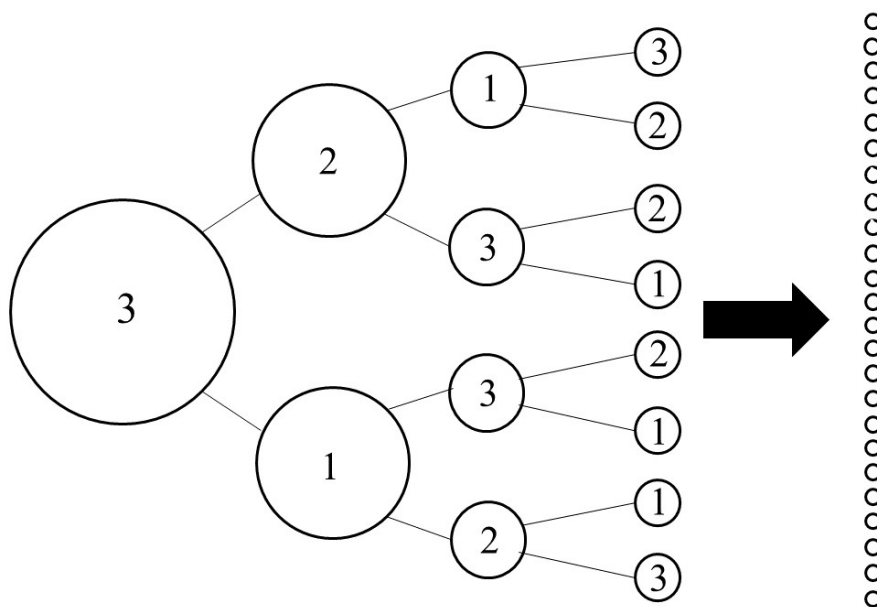
Obrázek 3.1: Proudění kapaliny přes rovinný povrch znázorňující vývin mezní vrstvy a přechod z jednotlivých režimů proudění [31].

Celková tloušťka MV δ není jednoznačná a tudíž je většinou definována smluvně. Nejčastěji na základě porovnání rychlostního profilu s rychlostním profilem potenciálního proudění bez tření (ideální kapalina). V tomto případě by se jednalo o pístový profil [52].

Podle zdroje [31] je tloušťka určena jako vertikální vzdálenost od rovinné plochy do místa, kde rychlost odpovídá 99% rychlosti v neovlivněné oblasti U_∞ . U laminárního proudění se dá říci, že laminární MV je napříč celým rychlostním profilem.

Kritické Reynoldsovo číslo slouží k vymezení přechodu z oblasti laminární do přechodové. U krve je však stanovení tohoto čísla poněkud obtížné a to nejen kvůli komplexním vlastnostem proudění krve (pulsace, poddajnost cév, ne-newtonská kapalina) ale také drsnosti a křivosti cév. Turbulentní proudění za fyziologických podmínek se může vyskytnout především v pozdní fázi systoly (zpomalení proudění). Avšak aby k takovému proudění došlo je potřeba určitý čas k vyvinutí turbulence. To závisí na frekvenci srdečního pulsu, kdy časový okamžik pozdní systoly nemusí být dostačující pro vznik tohoto typu proudění. Začátek systoly (zrychlení) má naopak stabilizující efekt [38]. Turbulentní proudění může nastat např. při vysokých rychlostech nebo bezprostředně za zúžením cév, tzv. stenóze. Krev zrychlená zúžením prochází náhlým rozšířením průřezu a dochází k nestabilitě a následnému zavírání [43]. Vzniklé víry v krevním proudu mají za následek zvýšení tlaku, což vede k větší zátěži srdce. Výskyt vírů ovšem nemusí charakterizovat turbulentní proudění, může se jednat o laminární vírové struktury.

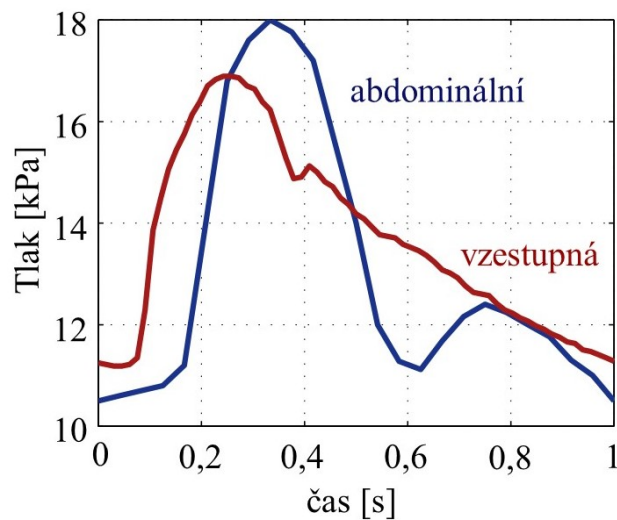
Vysokofrekvenční fluktuace rychlostí, které jsou charakteristické pro turbulentní proudění, byly u proudění krve pozorovány *in vivo* ve vzestupné aortě ($Re=4000$), arteriovenózním stentu a za mechanickými srdečními chlopněmi. S předpokladem izotropní a homogenní kapaliny tyto fluktuace představují kaskádu náhodných vírů (obrázek 3.2), kdy dle teorie energetické kaskády se největší víry rozpadají a předávají energii vírům menším. Ty nejmenší víry, na tzv. Kolmogorovu měřítku, se nevětví a nepředávají jejich energii dalším rozpadajícím se vírům ale dochází k disipaci této energie [4].



Obrázek 3.2: Znázornění energetické kaskády vírů, velké víry se postupně rozpadají na menší víry, kde tento proces je ukončen disipací energie nejmenších vírů v teplo [35].

3.1 Cévy a šíření tlakové vlny

Obečně se tlak v cévách liší se vzdáleností od srdce. Tento jev je možné sledovat na příkladu tlakové vlny u vzestupné a abdominální aorty, které jsou v různé vzdálenosti (viz obr. 3.3). Tlaková vlna se skrz systém šíří určitou rychlostí a tudíž je v abdominální aortě opožděna za vlnou v aortě vzestupné, která je blíže srdci. Amplituda tlakového pulzu (systolický tlak) v abdominální aortě, které je vzdálenější, je tak opožděna o určitou fázi kvůli této rychlosti. Místa měření jednotlivých aort jsou vzdálené přibližně 0,5 m, časový posun mezi nimi je ca 0,1 s. Průměrná rychlost šíření vlny na tomto úseku je tedy se vlna pohybuje $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rychlost šíření vlny však závisí na více faktorech a tato hodnota je pouze informativní. Aorta se distálně zužuje a zvyšuje se její tuhost, kvůli čemuž se tato rychlost mění. Kromě toho se také mění tvaru pulzu a narůstá amplituda. Nárůst tlaku je na začátku periody strmější a na rozdíl od přibližně lineárně klesajícího tlaku ve vzestupné aortě nastává prudší spád navazující na jemný tlakový nárůst. Nejnižší tlak během srdečního pulsu se označuje jako diastolický [46].

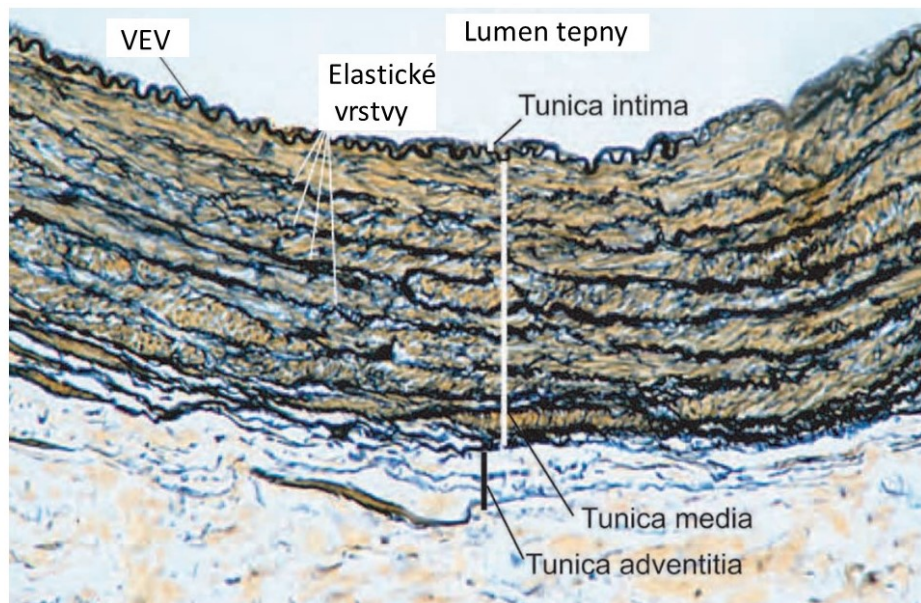


Obrázek 3.3: Rozdílnost tlakových vln ve vzestupné a abdominální aortě, kde vzdálenost měření míst je přibližně 0,5 m [46].

Tento fenomén šíření tlakové vlny je zapříčiněn roztažitelností (poddajností) tepen [46]. Například u karotidy se mohou tyto radiální deformace pohybovat až v rozmezí $\pm 7,4\%$ [13]. Poloměr tepny se mění nelineárně v závislosti na tlaku. Navíc arteriální stěna vykazuje anizotropii (odlišná tuhost v jednotlivých směrech), hyperelasticitu a viskoelasticitu, která je oproti ostatním jevům zanedbatelná. Při výpočtovém modelování poddajných výseků vaskulárního stromu (FSI-„Fluid Structure Interaction“) dochází v místech ukončení k nežádoucím odrazům těchto vln. To způsobuje nefyziologické tvary tlakové a průtokové vlny. Tento problém lze řešit pomocí 1D modelů, které určitým způsobem tyto vlny zachycují [13] [46].

Stěny se skládají z třívrstvé struktury *tunica intima*, *tunica media* a *tunica adventia*, které jsou znázorněny v příčném řezu na obrázku 3.4. *Tunica intima* představuje nejvnitřnější vrstvu a její tloušťka u mladého a zdravého jedince je jenom několik mikrometrů. Tato vrstva obsahuje endoteliální buňky, které slouží jako rozhraní mezi vnitřní částí tepny

(lumenem), kde se nachází krev a zbylou částí stěny. Prostřední vrstva *tunica media* je prokládána jednotlivými elastickými vrstvami a oddělena od vnitřní vrstvy vnitřní elastickou vrstvou (VEV). Vnější vrstva *tunica adventitia* pomáhá propojovat tepny s okolní pojivou tkání.



Obrázek 3.4: Příčný řez stěny tepny zahrnující jednotlivé vrstvy - *tunica intima*, *tunica media*, *tunica adventitia* a lumen tepny [13].

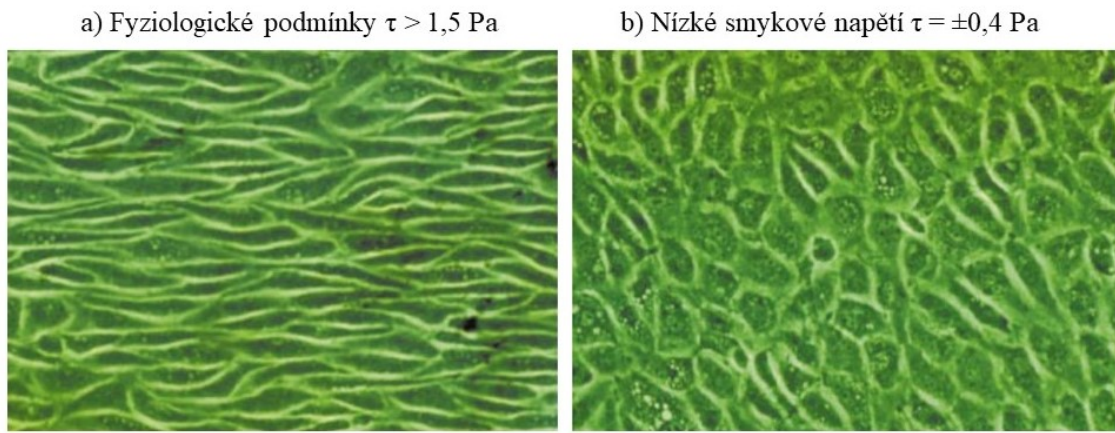
Tlakové pulzace se tedy šíří napříč cévní soustavou s určitou rychlostí, která závisí jak na poddajnosti cévy (materiálové vlastnosti), tak na její velikosti. Pulzy cestují jako příčné elastické vlny. Tento jev je podobný vodnímu rázu s tím rozdílem, že v podstatě všechna elastická energie je ukládána ve stěnách. Nejvíce výrazné pulzace jsou ve velkých tepnách. Arterioly a navazující kapiláry, které propojují tepny a žíly, tlumí tyto pulzace (velká tlaková ztráta - 50 až 70 %) a tím pádem jsou méně výrazné směrem k periférii. Tlak i nadále v žilním systému směrem k srdci klesá. To může v některých případech způsobovat eliptický tvar žil nebo dokonce jejich kolaps. V důsledku tlakové ztráty jsou charakteristické rychlosti a tlaky nižší než u tepen. Aby nedocházelo ke zpětnému proudění jsou žíly opatřeny chlopněmi, které fungují na principu zpětného ventilu a umožňují tak pouze jednosměrné proudění. Žíly jsou obecně oproti tepnám méně náchylné k cévním onemocněním jako je například ateroskleróza [13] [46].

Endoteliální buňky *in vivo* jsou ovlivňovány dvěma silami, a to z obvodového a smykového napětí. Tyto síly se chovají na základě pulzací buzených srdcem (až na místa, kde jsou tlakové pulzace tlumené). Toto cyklické obvodové napětí je důsledkem transmuraního tlaku p_{tr} 3.7 [45]. Jedná se o rozdíl tlaků působících na stěnu tepny (vnitřní mínus vnější). Tento tlak zahrnuje hydrostatickou složku úměrnou hustotě krve uvnitř tepny ρ , gravitaci g a výšce h . Přičemž vnější tlak působící na stěnu je blízký atmosférickému. Dalšími složkami jsou časově nezávislý tlak p_0 a periodicky časově proměnný tlak p_t . [45].

$$p_{tr} = \rho gh + p_0 + p_t \quad (3.7)$$

Povrchy endoteliálních buněk jsou také vystavovány třecím silám od smykového napětí vyvolané prouděním krve [6]. Kombinace těchto dvou účinků ovlivňuje morfologii a orientaci těchto buněk. Například při větších smykových napětích u stěny při laminárním proudění se buňky zarovnávají a protahují ve směru proudu. Naopak s nízkými a oscilujícími hodnotami napětí zaujímají polygonální tvar bez zřetelné orientace. Tyto hodnoty slouží jako lokalizační faktor, kde se může vyvíjet ateroskleróza.

Hodnotám smykového napětí za fyziologických podmínek odpovídá $\tau > 1,5$ Pa. Tyto vyšší hodnoty umožňují určitou ochranu vůči vzniku aterosklerózy. Naopak v citlivých oblastech, související se vznikem aterosklerózy, se smykové napětí pohybuje v rozmezí $\pm 0,4$ Pa [25]. Chování při jednotlivých podmínkách je znázorněno na obrázku 3.5. Jedná se o aortu skotu, kde na levém obrázku je vystavena fyziologickým podmínkám po 24 hodin. Endoteliální buňky se zarovnávají se směrem proudu. Naopak napravo při $\tau = \pm 0,4$ Pa zaujímají nepravidelný polygonální tvar bez výrazné orientace.



Obrázek 3.5: Chování endoteliálních buněk znázorněných na aortě skotu; a) při fyziologických podmínkách, b) při nízkých smykových napětích [25].

V anglické literatuře se smykové napětí na arteriálních stěnách (luminální) označuje jako WSS („Wall Shear Stress“). Ve výpočtovém modelování se stanovuje časově průměrovaný WSS ($TAWSS$ –„Time Averaged Wall Shear Stress“), kterému odpovídá vztah 3.8 [27]. Velikosti vektorů WSS jsou časově zintegrovány v jednotlivých uzlech přes periodu T .

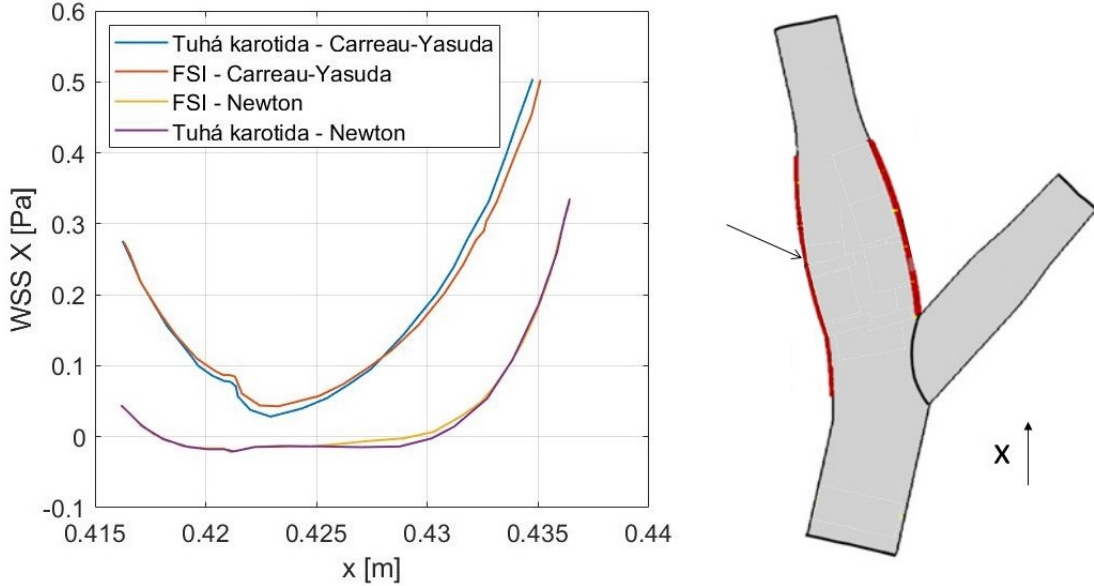
$$TAWSS = \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{WSS}| dt \quad (3.8)$$

Další důležitou veličinou je oscilační smykový index OSI („Oscillatory Shear Index“). Jedná se o bezrozměrnou veličinu, která popisuje oscilační vlastnosti daného média rovnicí 3.9 [27]. Udává jak moc se mění směr WSS v průběhu srdečního cyklu. Hodnota se pohybuje v rozmezí 0 až 0,5, kdy nejmenší hodnota značí oblast jednosměrného proudění. Největší hodnota naopak představuje oblast, kde je pozorováno zcela oscilační proudění.

$$OSI = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left| \int_0^T \mathbf{WSS} dt \right|}{\int_0^T |\mathbf{WSS}| dt} \right) \quad (3.9)$$

Článek [42] se zabývá numerickými výpočty v ideálně tuhé a poddajné trubici. Poukazuje na rozdíly ve výpočtovém modelování při uvažování tepen jako ideálně tuhých. Konkrétně

se jedná o bifurkaci karotidy, přes kterou se krev dostává do mozku. Jelikož je tato tepna náchylná na aterosklerózu je vhodné si představit chování jak rychlostního pole, tak především veličin jako je WSS . Na obrázku 3.6 lze vidět výsledky z výpočtové simulace v ANSYS® CFX®. Hodnoty WSS byly odečítány z vnějšího poloměru interní karotidy znázorněné na obrázku vpravo. V grafu jsou porovnány výsledky při uvažování tuhé a poddajné karotidy - FSI.



Obrázek 3.6: Porovnání výpočtových simulací tuhé karotidy a FSI jak s použitým newtonským modelem krve, tak s ne-newtonským Carreau-Yasuda modelem [42].

Kvalitativně lze usoudit převážnou shodu chování jednotlivých křivek. A to jak u newtonské kapaliny, tak i u smykového řádnutí popsané modelem Carreau-Yasuda (viz sekce Viskózní modely 4.1). Kvantitativně jsou pozorovány relativně malé odchylky. Maximální rozdíl u simulací FSI a tuhé trubice je přibližně 0,0125 Pa. Nicméně uvažování pouze newtonského modelu krve má větší dopad, kde maximální odchylka od Carreau-Yasuda modelu dosahuje 0,175 Pa. Tato práce je soustředěna především na proudění newtonské a ne-newtonské krve. FSI přesahuje její obsah a tudíž se o tomto tématu zmiňuje pouze okrajově.

3.2 Poiseuillovo proudění

Proudění krve má převážně laminární charakter a proto je vhodné tento jev popsat pro jednodušší případ ustáleného děje. Pro stacionární laminární proudění ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$) v přímém potrubí je charakteristický parabolický rychlostní profil. Lze ho odvodit pomocí Navier-Stokesovi rovnice a rovnice kontinuity. Jelikož se jedná o válcovitý tvar potrubí (cévy) je vhodné si převést tyto rovnice do cylindrického souřadného systému s jednotlivými souřadnicemi r , θ a z . Rovnice 3.10 [45] představuje rovnici kontinuity a zbylé rovnice 3.11, 3.12 a 3.13 [45] jednotlivé složky NS rovnice .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r + \\ + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho a_\theta + \\ + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z + \\ + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Předpoklady:

- Proudění je stacionární a tudíž parciální derivace podle času jsou nulové ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Radiální a obvodové složky rychlosti jsou nulové, jedná se pouze o axiální proudění
- Proudění je rotačně symetrické a tudíž parciální derivace podle úhlové souřadnice θ jsou nulové ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$)
- Proudění je plně vyvinuté (nekonečně dlouhé potrubí), tím pádem je velikost rychlosti ve směru z konstantní a derivace nulová ($\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$), tato podmínka plyne i z rovnice kontinuity a druhého předpokladu

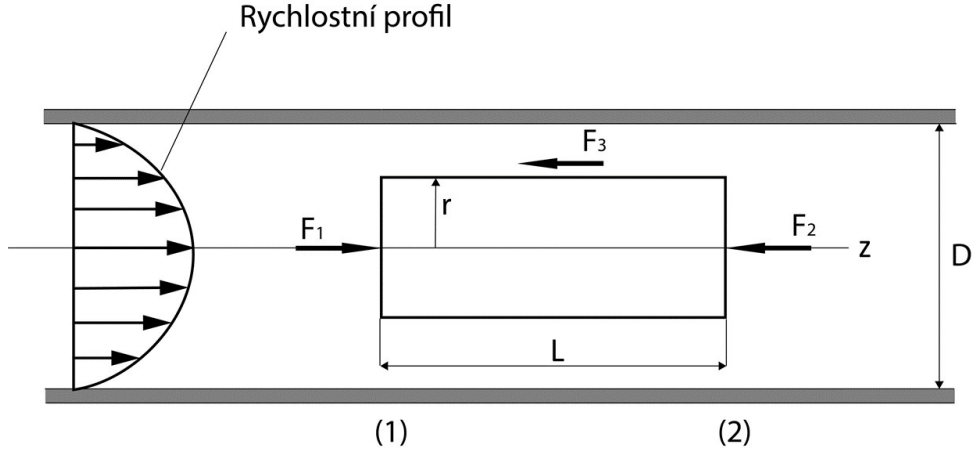
Na základě těchto předpokladů a zanedbáním gravitačních účinků vyplývá z rovnice 3.11 neměnnost tlaku v radiální složce ($\frac{\partial p}{\partial r} = 0$). Tlak se tedy mění pouze v axiálním směru a je experimentálně dokázáno, že tato změna je konstantní $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L}$. Po zahrnutí těchto předpokladů z rovnic 3.11-3.13 je obdržena pouze jedna rovnice ve tvaru 3.14 [21] ($v_z = u$). Parciální derivace jsou nahrazeny totálními (závislost jedné proměnné). Z následné dvojité integrace je potřeba určit integrační konstanty C_1 a C_2 . Rychlost ve středu potrubí $u(0)$ je konečné číslo a tudíž konstanta C_1 musí být nulová z důvodu definice logaritmu. Druhá konstanta je obdržena z podmínky ulpívání reálné (viskózní) kapaliny ve styku s potrubím platí $u(R) = 0$. Tato podmínka značí nulovou hodnotu normálové i tečné složky rychlosti na stěně. Výsledný tvar 3.22 je parabolická závislost axiální rychlosti u na poloměru r . Tato rovnice se také značí jako Pouiseuilleova rovnice, kde $y = \frac{r}{R}$.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{L\mu} \quad (3.14)$$

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.15)$$

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} (1 - y^2) \quad (3.16)$$

Stejný výsledek je obdržen užitím silové rovnováhy na element kapaliny o poloměru r a rovnicí pro newtonskou kapalinu 3.20. V přímém potrubí je díky zanedbání gravitačních účinků tlak ve vertikálním řezu všude stejný. Po délce potrubí se však mění a tlak p_2 je v porovnání s tlakem p_1 ochuzen o tlakovou ztrátu Δp . Gradient rychlosti je dle rychlostního profilu a daným souřadnicím na obrázku 3.7 záporný, kvůli tomu je vztah 3.20 opatřen znaménkem mínus, aby smykové napětí vycházelo kladně. Kombinací vztahů 3.19, 3.20 a následnou integrací kdy konstanta C je opět určena z podmínky ulpívání, je obdržen stejný vztah jako v předešlém případě [23].



Obrázek 3.7: Síly působící na válcovitý element o délce l a poloměru r uvnitř potrubí o průměru D při konstantní rychlosti elementu [19].

$$F_1 - F_2 - F_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$p_1 \pi r^2 - (p_1 - \Delta p) \pi r^2 - \tau 2 \pi r l = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad (3.19)$$

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (3.20)$$

$$u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + C \quad (3.21)$$

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (3.22)$$

3.3 Womersleyho rychlostní profily

U proudění krve není tlakový gradient konstantní, ale osciluje s frekvencí f . Tím pádem už není axiální rychlost závislá pouze na radiální souřadnici, ale i na čase. Jedná se o lami-nární nestacionární proudění a do rovnice 3.14 vstupuje nestacionární člen $-\frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t}$. Využitím znalosti derivací dvou funkcí v součinu má tedy tvar následující.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.23)$$

Je vhodné definovat bezrozměrné veličiny a zavést je do této rovnice. Rychlost $u^* = u/U$, souřadnice $r^* = \frac{r}{R}$, $z^* = \frac{z}{R}$, tlak a čas $t^* = \omega t$. Dané bezrozměrné veličiny se vztahují na jejich charakteristickou maximální hodnotu. Pro tlak pak platí $p^* = \frac{pR}{\mu U}$ a výsledná bezrozměrná rovnice hybnosti má tvar 3.26 [21].

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - R^2 \frac{\omega}{\nu} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{R}{\mu U} \frac{\partial p}{\partial z^*} \quad (3.24)$$

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \alpha^2 \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \quad (3.26)$$

Z čehož plyne další důležité bezrozměrné číslo charakterizující proudění krve, a to Womersleyho číslo 3.25. Toto číslo souvisí se Stokesovou vrstvou δ_s , která se nachází v bezprostřední blízkosti stěn a při oscilaci kapaliny v ní dochází k tlumení pohybu. Stokesova vrstva je úměrná $\frac{\nu}{\omega}$ a Womersleyho číslo je tak rovno poměru $\frac{R}{\sqrt{\delta_s}}$. Z čehož je možné usoudit, že tvar rychlostních profilů se bude odvíjet na základě Womersleyho čísla. Například u větších α bude poloměr cév v porovnání se Stokesovou vrstvou větší a tudíž rychlostní profil bude odpovídat více pístovému tvaru, vyjma blízkosti stěn. Naopak při nízkých hodnotách se budou více podobat parabolickému tvaru. Womersleyho číslo, podobně jako Reynoldsovo, je tedy možné definovat jako podíl nestacionárních setrvačných sil a viskózních sil [13]. Předpokládají se tak dvě asymptotní řešení rovnice 3.23.

Jelikož se jedná o oscilační pohyb, rychlost i tlak jsou proměnné s časem a platí rovnice 3.27 a 3.28 ($e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$).

$$u = \hat{u} e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

Derivací nestacionárního členu a využitím znalosti komplexních čísel ($i^2 = -1$) se tato rovnice upraví na 3.29.

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{i^3 \omega}{\nu} \hat{u} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (3.29)$$

a) Pro $\alpha \rightarrow 0$ (malé průměry cév nebo nízké frekvence) převažují viskózní síly a rovnice 3.29 má tvar následující. Tento tvar plyne z rovnice 3.26, kde nestacionární člen je zanedbatelně malý. Řešení vede na kvazistatický Poiseuilleho profil [45].

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (3.30)$$

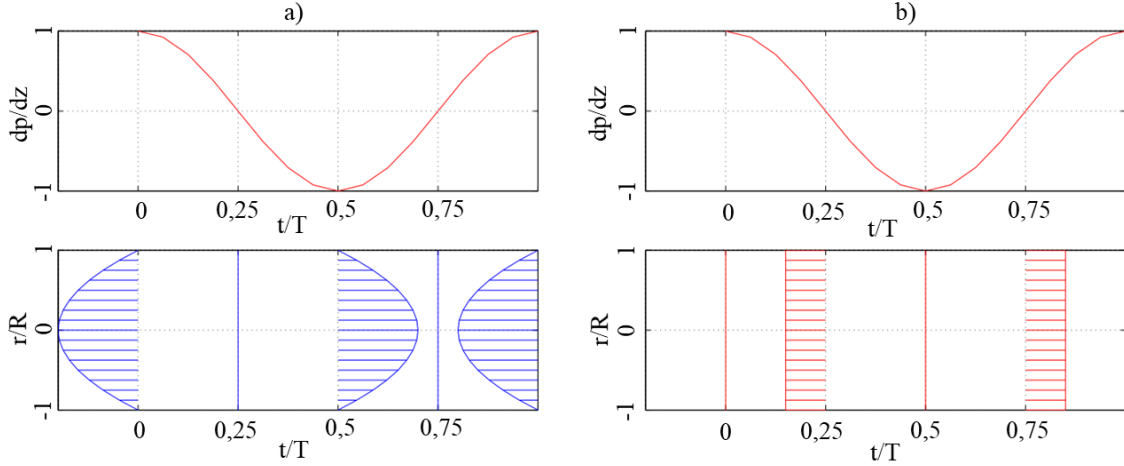
$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} (R^2 - r^2) e^{i\omega t} \quad (3.31)$$

b) Druhým extrémem pro $\alpha \rightarrow \infty$ je dominance setrvačných sil. Opět z rovnice 3.26 je nestacionární člen naopak výrazně větší [45].

$$i\omega \hat{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (3.32)$$

$$u = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} e^{i\omega t} \quad (3.33)$$

Tyto dvě limitní řešení jsou znázorněny na obrázku 3.8. Z tlakového gradientu ve tvaru kosinus plynou jednotlivé rychlostní profily, které mají v závislosti na α odlišné tvary. V případě a) se jedná o parabolické rychlostní profily a u b) tzv. pístové. Lze si všimnout, že oscilace těchto profilů jsou oproti tlakovému gradientu fázově posunuty u a) o 180° , naopak u b) fázový posun činí 90° .



Obrázek 3.8: Jednotlivé asymptotní řešení a) $\alpha \rightarrow 0$ s fázovým posunem 180° a b) $\alpha \rightarrow \infty$ s fázovým posunem 90° [45].

Matematicky rovnice 3.29 představuje nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Řešení je dosaženo pomocí Besselových funkcí prvního a druhého druhu nultého řádu. Jedná se o funkce, které jsou využívány při řešení rotačně symetrických úloh, někdy také označovány jako cylindrické funkce. Tyto funkce tlumeně kmitají při přechodu do nekonečna. Jako první je nutné si převést rovnici na tzv. Besselovu rovnici v homogenním tvaru ($\frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = 0$). K tomu je využita substituce $s = i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R}$, kdy po úpravě je obdržen požadovaný tvar [21].

$$\frac{i^3 \alpha^2}{R^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial s^2} + \frac{i^3 \alpha^2}{R^2} \frac{1}{s} \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + i^3 \frac{\omega}{\nu} \hat{u} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + \hat{u} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + \left(1 - \frac{n_B^2}{s^2}\right) \hat{u} = 0 \quad (3.35)$$

Z tohoto tvaru rovnice lze posoudit, že řešení homogenní rovnice bude dosaženo pomocí nultého řádu Besselových funkcí ($n_B = 0$). Jelikož je n_B celé nezáporné číslo řešení má tvar [2]:

$$\hat{u}^h = K_1 J_0(s) + K_2 Y_0(s) \quad (3.36)$$

Daná hodnota n_B konverguje k celému číslu a kvůli tomu nabývá funkce $Y_0(s)$ neurčitěho tvaru. Pro určení této funkce lze využít l'Hospitalova pravidla [37].

$$Y_0(s) = \lim_{n_B \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial n_B} \left(J_0(s) \cos(n_B \pi) - J_0(s) \right)}{\frac{\partial}{\partial n_B} (\sin(n_B \pi))} = 0 \quad (3.37)$$

Z čehož plyne, že konstanta K_2 je nula. Kombinací homogenního a partikulárního řešení $\hat{u}^p = \frac{i}{\rho \omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z}$ má daná rovnice obecné řešení 3.38. Konstanta K_1 je určena z okrajové podmínky $\hat{u}(R) = 0$ a s využitím zpětné substituce je rovna 3.39. Celkové řešení nehomogenní

lineární diferenciální rovnice druhého řádu uvádí 3.41. Tato rovnice představuje Womersleyho rychlostní profily [48].

$$\hat{u} = K_1 J_0(s) + \hat{u}^p \quad (3.38)$$

$$K_1 = -\frac{\hat{u}^p}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \quad (3.39)$$

$$\hat{u} = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \left(1 - \frac{J_0(\alpha y i^{\frac{3}{2}})}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right) \quad (3.40)$$

$$u = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \left(1 - \frac{J_0(\alpha y i^{\frac{3}{2}})}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right) e^{i\omega t} \quad (3.41)$$

Besselovi funkce je možné vyjádřit na základě fáze θ_0 a amplitudy M_0 . Jejich hodnoty jsou tabulovány a uvedeny v příloze v tabulce č.1 [29] [48]. Následující vztahy vychází ze zdroje [48].

$$J_0(\alpha y i^{\frac{3}{2}}) = M_0(y) e^{i\theta_0(y)} \quad (3.42)$$

$$J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}}) = M_0 e^{i\theta_0} \quad (3.43)$$

$$\delta_0 = \theta_0 - \theta_0(y) \quad (3.44)$$

Pokud je reálná část tlaku vyjádřena obecně jako $\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} e^{i\omega t}$ obecně $M \cos(\omega t + \phi)$, kde M je amplituda a ϕ fázový posun, pak pro odpovídající reálnou část axiální rychlosti ze vztahu 3.41 platí 3.47. Daný vztah byl odvozen na základě užití obecného vztahu $e^{i(\cdot)} = \cos(\cdot) + i \sin(\cdot)$ a předešlých vztahů 3.42-3.44.

$$u = \frac{M}{\rho\omega} \left(\sin(\omega t + \phi) - \frac{M_0(y)}{M_0} \left(\sin(\omega t + \phi) \cos(-\delta_0) + \cos(\omega t + \phi) \sin(-\delta_0) \right) \right) \quad (3.45)$$

Využitím vzorce pro goniometrické funkce 3.46 je obdržén vztah pro axiální rychlost u .

$$\sin((\cdot) + \{\cdot\}) = \sin((\cdot)) \cos(\{\cdot\}) + \cos((\cdot)) \sin(\{\cdot\}) \quad (3.46)$$

$$u = \frac{M}{\rho} \frac{1}{\omega} \left(\sin(\omega t + \phi) - \frac{M_0(y)}{M_0} \sin(\omega t + \phi - \delta_0) \right) \quad (3.47)$$

Rovnici 3.47 lze dále upravit pomocí Kosinovy věty a goniometrických funkcí. Řešení je tak zjednodušeno pouze na jednu funkci sinus. Z uvedených vztahů plyne závislost fáze ϵ_0 na y , tím pádem se tato fáze mění napříč potrubím. Fáze matematicky představuje vliv viskózních a nestacionárních setrvačných sil.

$$h_0 = \frac{M_0(y)}{M_0} \quad (3.48)$$

$$M'_0 = \sqrt{1 + h_0^2 - 2h_0 \cos \delta_0} \quad (3.49)$$

$$\epsilon_0 = \arctan \frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_0 \cos \delta_0} \quad (3.50)$$

$$u = \frac{M}{\rho} \frac{1}{\omega} M'_0 \sin(\omega t + \phi + \epsilon_0) \quad (3.51)$$

Upravením vztahu pomocí Womersleyho čísla proměnná $\frac{M'_0}{\alpha^2}$, v porovnání s Pouseilleho rovnicí, odpovídá členu $\frac{1}{4}(1 - y^2)$.

$$u = \frac{M}{\mu} \frac{R^2}{\alpha^2} M'_0 \sin(\omega t + \phi + \epsilon_0) \quad (3.52)$$

Kapitola 4

Ne-newtonské chování krve

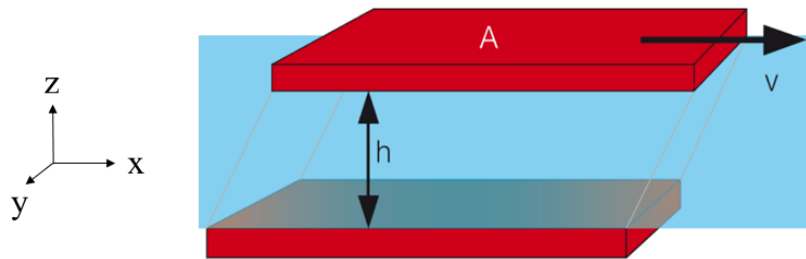
Jak už bylo zmíněno, krev vykazuje při nízkých smykových rychlostech ne-newtonské chování, které nelze zanedbat. U deviačního tenzoru napětí $\boldsymbol{\tau}$ zastupující difúzní člen v NS rovnici už není viskozita konstantní. Viskozita μ je zobecněná na funkci jednotlivých invariantů. První invariant I_D je roven nule, jelikož se předpokládá nestlačitelná kapalina. To platí i pro třetí invariant III_D z důvodu uvážení pouze jednoduchého axiálního proudění. Relevantní je tak pouze druhý invariant tenzoru rychlosti deformace II_D a souvisí se smykovou rychlostí 4.2. Jeho fyzikální význam je spojován s disipací energie [41]. Rovnice 4.3 [12] je označována jako zobecněná rovnice pro newtonskou kapalinu [12].

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(I_D, II_D, III_D)\mathbf{D} \quad (4.1)$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2II_D} = \sqrt{2tr(\mathbf{D}^2)} \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (4.3)$$

Zde je možné odůvodnit, proč je smyková rychlost užitečná v popisu rychlostí deformace. Lze si to znázornit na jednoduchém případě dvou paralelních desek, mezi kterými je kapalina (viz obr. 4.1). Horní deska o ploše A se pohybuje rychlostí v , zatímco spodní je v klidu.



Obrázek 4.1: Dvě paralelní desky, mezi nimiž je kapalina. Jedna se pohybuje rychlostí v vůči desce s nulovou rychlostí (jednoduché smykové proudění) [5].

Tvar tenzoru rychlosti deformace definovaný v rovnici 3.2 lze přepsat do maticového tvaru s jednotlivými složkami rychlosti v kartézském souřadném systému x, y, z . Po úpravě pro

axiální proudění ve směru x .

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Pro konkrétní případ (viz obrázek 4.1) z uvedené definice invariantu pomocí „stopy“ (součet diagonálních prvků) platí:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v}{h} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{h} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$II_D = \text{tr}(\mathbf{D}^2) = \text{tr} \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{v}{h}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{v}{h}\right)^2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{h}\right)^2 \quad (4.6)$$

Z rovnice 4.2 lze tedy vyvodit $\dot{\gamma} = \frac{v}{h}$, neboli v diferenciálním tvaru gradient rychlosti $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ (symetrická část tenzoru $\mathbf{D}$). Platí tak konstitutivní zobecněná Newtonova rovnice 4.3, ze které vychází různé viskózní modely pro kapaliny o odpovídajících vlastnostech.

4.1 Viskózní modely

Například mocninný model, kde funkce viskozity je definována rovnicí 4.7. Kladné konstanty k_f a n_t se označují jako faktor konzistence a index toku. Pro $n_t = 1$ kapalina vykazuje newtonského chování o konstantní viskozitě. Index toku $n_t < 1$ značí smykové řídnutí a naopak pro $n_t > 1$ smykové houstnutí. Tento model je pro krev běžně používán díky jejich jednoduchým analytickým řešením. Avšak tyto rovnice neodpovídají fyzikálními vlastnostem v limitních hodnotách. Pokud u smykového řídnutí hodnota $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ je viskozita nulová, což je nereálné [7].

$$\mu(\dot{\gamma}) = k_f \dot{\gamma}^{n_t-1} \quad (4.7)$$

Rozšířením tohoto modelu je například Walbur-Schneck model, ve kterém se uvažuje závislost viskozity na hematokritu H a důležitých proteinech, jako je fibrinogen a globulin (diskutováno v sekci 2.1.1). Konstanty k_1, k_2 a k_3 plynou z vlastností těchto proteinů [7].

$$k_f = k_1 e^{k_2 H} \quad (4.8)$$

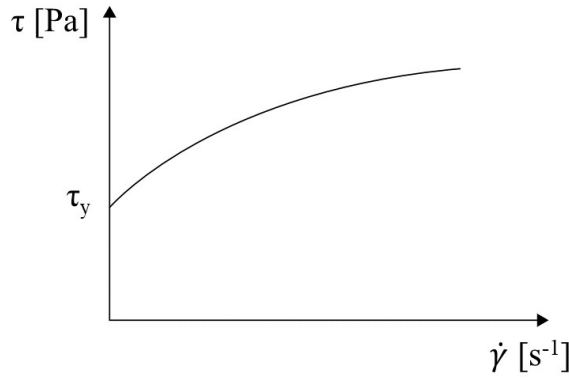
$$n_t = 1 - k_3 H \quad (4.9)$$

Z rovnice 4.7 s uvažováním smykového řídnutí pro krev má křivka závislosti smykového napětí na smykové rychlosti konkávní tvar (obr. 4.2). Navíc, jak bylo zmíněno v úvodu kapitoly 2, vykazuje také kritické napětí τ_y . Což vede na Herschel-Bulkleyho model 4.10 [24].

$$\tau = \tau_y + k \dot{\gamma}^{n_t} \quad \text{pro} \quad \tau \geq \tau_y, \quad n_t < 1 \quad (4.10)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{pro} \quad \tau < \tau_y \quad (4.11)$$

Bylo dokázáno, že experimentální data z uvedené závislosti odpovídají také Cassonovu modelu 4.12, který byl původně odvozen jako model pro tiskárenský inkoust. V tomto modelu je $\sqrt{c}$ konstantou [24]. Newtonské chování nastává při velkých smykových rychlostech $\dot{\gamma} \gg \frac{\tau_y}{c}$, čímž daná rovnice přechází na Newtonův lineární zákon $\tau = \mu \dot{\gamma}$. Porovnání Cassonova



Obrázek 4.2: Chování krve znázorněné v závislosti smykového napětí τ na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$, konkávní tvar křivky s počátečním smykovým napětím τ_y [13].

modelu, Herschel-Bulkeyho modelu a newtonské kapaliny o viskozitě 3,5 cP je znázorněno na obrázku 4.3a (1 centiPoise (cP)=0,001 Pa). Při vyšších hodnotách smykové rychlosti $\dot{\gamma} > 100 \text{ s}^{-1}$ (běžné hodnoty pro větší cévy) poskytují jednotlivé modely přibližně stejné hodnoty viskozity. Naopak při nízkých smykových rychlostech se tyto modely neshodují a největší nárůst viskozity je pozorován u Herschel-Bulkleyho modelu [49].

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + \sqrt{c}\sqrt{\dot{\gamma}} \quad \text{pro } \tau \geq \tau_y \quad (4.12)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{pro } \tau < \tau_y \quad (4.13)$$

Mocninné modely pro krev se s $\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0}$ přibližují asymptotně k nulové viskozitě (viz obr. 4.3b), což není fyzikálně reálné. To platí i pro druhou kritickou limitu, kdy viskozita jde k nekonečnu. Vhodnější jsou tak modely s definovanými limitními hodnotami μ_∞ a μ_0 . Obecně mají tvar viz 4.14 [7] se smykově závislou funkcí F , kde pro limitní hodnoty smykové rychlosti platí 4.15, což definuje limitní hodnoty plynoucí z rovnice 4.14. Tyto modely se vyskutují nejčastěji v bezrozměrné formě μ^* viz 4.16 [21] a 4.17 [21].

$$\mu_{\dot{\gamma}} = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)F(\dot{\gamma}) \quad (4.14)$$

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} F(\dot{\gamma}) = 1, \quad \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} F(\dot{\gamma}) = 0 \quad (4.15)$$

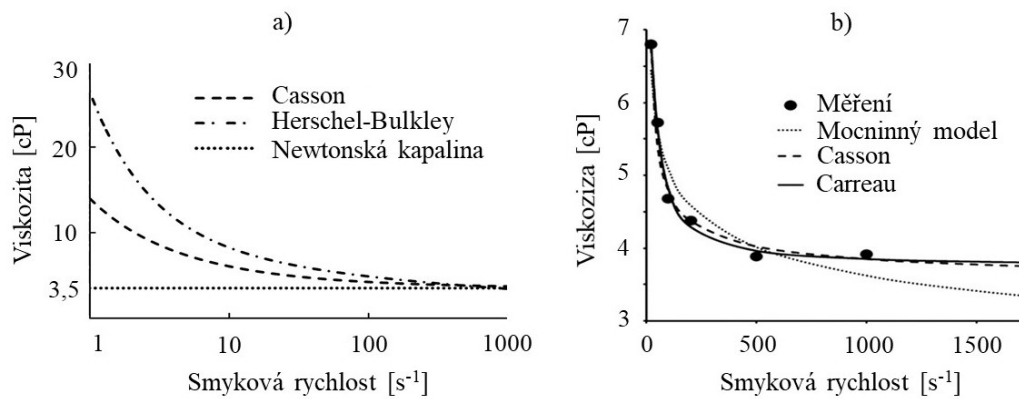
Nejběžnější modely pro proudění krve, které jsou implementovány v komerčních softwarech, jsou Carreau a Carreau-Yasuda model. Ve Fluentu je Carreau model 4.16. V CFX je vestavěn modifikovaný model Carreau-Yasuda 4.17. Popisují chování krve při nízkých $\dot{\gamma}$ ($\mu_0 = 56$ cP), vysokých $\dot{\gamma}$ ($\mu_\infty = 3,45$ cP) a v přechodové oblasti. Tato oblast je řízena časovou konstantou λ_k , materiálovými konstantami krve n_k a a u Carreau-Yasuda modelu. Konstanty jsou získávány z experimentálních pokusů proložením naměřených dat. Tudiž se mohou lišit na základě vlastností zkoumané krve jako jsou hematokrit, viskozita plazmy, stáří erytrocytů, pohlaví a zdravotní stav [33]. Článek [16] str. 208 tabulka č. 3 poukazuje na odlišné hodnoty jednotlivých konstant a na další tzv. časově nezávislé modely.

$$\mu^* = \frac{\mu(\dot{\gamma}) - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = (1 + (\lambda_k \dot{\gamma})^2)^{\frac{n_k - 1}{2}} \quad \lambda_k = 3,313 \text{ s}, \quad n_k = 0,3568 \quad (4.16)$$

$$\mu^* = \frac{\mu(\dot{\gamma}) - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = (1 + (\lambda_k \dot{\gamma})^a)^{\frac{n_k - 1}{a}} \quad \lambda_k = 1,902 \text{ s}, \quad n_k = 0,22, \quad a = 1,25 \quad (4.17)$$

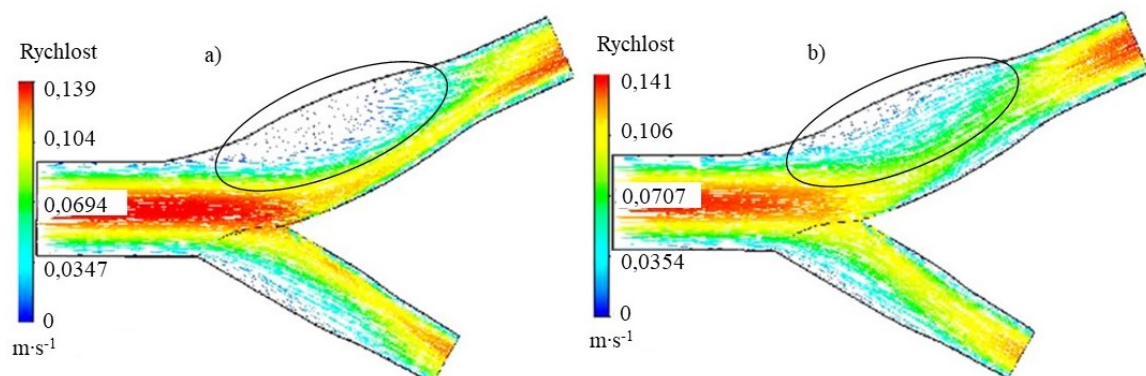
Největší vliv na makroskopické vlastnosti má teplota. Krev vykazuje podobnou závislost viskozity na teplotě jako je tomu u vody. Toto podobné chování je pozorováno v rozmezí $\dot{\gamma}$ 1 až 100 s^{-1} a teplot 10° až 40°C [7].

Článek [1] se zabývá viskozitou krve ptačího embrya ve všech fázích vývinu, která vykazuje velmi podobné chování jako krev dospělého jedince. Zde jsou experimentálně naměřená data proložena jednotlivými modely, které znázorňuje obrázek 4.3b (mocninný, Casson a Carreau model). Naměřené data odpovídají čtyřdenní inkubaci embrya o hematocritu 52%, což je porovnatelná hodnota s člověkem. Znátelná je shoda s Casson a Carreau modelem, který odpovídal proložení naměřených dat nejvíce. Mocninný model od hodnoty cca 500 s^{-1} výrazně klesá, kdežto ostatní modely od této hodnoty stagnují a chovají se tak na základě konstitutivního Newtonova lineárního zákona.



Obrázek 4.3: a) Porovnání jednotlivých modelů popisujících chování krve s horizontální osou v logaritmickém měřítku [49]; b) porovnání jednotlivých modelů s měřením viskozity krve ptačího embrya odpovídající čtyřdenní inkubaci o $H = 52\%$ [1].

Rozdíl mezi newtonským a ne-newtonským modelem krve ve výpočtovém modelování je přiblížen obrázkem idealizované karotidy 4.4. Jedná se o vektory rychlostí v rovině symetrie bifurkace nepoddajné karotidy (zmíněné i v úvodu kapitoly na obrázku 3.6).



Obrázek 4.4: Rozložení vektorů rychlosti v rovině symetrie bifurkace karotidy. Krev o konstantní viskozitě a) a ne-newtonský Carreau-Yasuda model b) [42].

Průměr společné karotidy („Common Carotid Artery“-CCA) je 8 mm. Smykové řídnutí krve (Carreau-Yasuda model) na obrázku vpravo má nezanedbatelný vliv na velikost recirkulace v označené oblasti. Oblast kde nastává zpětné proudění je výrazně větší u newtonského modelu vlevo [42]. Newtonský model krve má pouze konstantní viskozitu $\mu_\infty=2,2 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. Zatímco ne-newtonský Carreau-Yasuda model se řídí rovnicí 4.17 ($\mu_0=22 \cdot 10^{-3}$ Pa.s; $\mu_\infty=2,2 \cdot 10^{-3}$ Pa.s; $a=0,644$; $n_k=0,392$ a $\lambda_k=0,110$ s). V luminální oblasti je chování v obou případech podobné. Směrem ke středu interní karotidy se smyková rychlost snižuje a tím se u případu b) zvyšuje viskozita, což tlumí oblast recirkulace.

4.2 Viskoelasticita

Viskoelasticita je definována jako schopnost kapaliny hromadit a uvolňovat energii. Při normálních hodnotách hematokritu je viskozita připisována vratným deformacím 3D struktur erytrocytů. Jak už bylo zmíněno v úvodu, viskozita je zodpovědná za disipaci energie kvůli buněčným deformacím a skluzům. Zatímco elasticita se posuzuje jako hromadění energie převážně kvůli kinetické deformovatelnosti erytrocytů. Chování viskoelastické krve tak odpovídá vlastnostem viskózní kapaliny i elastického tuhého tělesa. K popisu viskoelasticity kapaliny slouží bezrozměrné Debořino číslo De 4.18 [20]. Je vyjádřeno jako podíl časové konstanty λ_r (relaxační doby) a charakteristické doby t_c , po kterou je tento materiál deformovaný. Relaxační doba λ_r může být definována jako poměr viskozity μ a modulu pružnosti v tahu E [20] [16].

$$De = \frac{\lambda_r}{t_c} \quad (4.18)$$

$$\lambda_r = \frac{\mu}{E} \quad (4.19)$$

Dle tohoto čísla lze zjistit jaké chování materiál vykazuje. Pokud je $De \ll 1$ materiál je viskózní, naopak pokud je $De \gg 1$ chová se elasticky. Pohybuje-li se toto číslo v hodnotách přibližně $De \sim 1$, kapalina (krev) vykazuje viskoelastické chování a tudíž musí být bráno v potaz při výpočtovém modelování. Další bezrozměrné číslo pro analýzu viskoelastického chování je Weissenbergovo číslo We 4.20. Je spojováno s charakteristickou smykovou rychlostí $\dot{\gamma}_c$ [16].

$$We = \lambda_r \dot{\gamma}_c \quad (4.20)$$

Nejvíce odpovídající hodnota relaxační doby erytrocytů je $\lambda_r = 0,06$ s. Charakteristická doba t_c je rovna periodě fyziologického pulzu. Stanovení hodnoty $\dot{\gamma}_c$ se liší od autora. Někteří ji charakterizují na základě stěnové smykové rychlosti, která je většinou největší napříč cévou. Nebo se vychází z průměrné hodnoty smykových rychlostí [20].

Krev je obecně mírně viskoelastická a většinou se tento efekt ve výpočtovém modelování proudění zanedbává. Respektive výše zmíněné viskózní modely v sekci 4.1 neberou viskoelastické chování v potaz. Při nízkých smykových rychlostech do 1 s^{-1} odpovídá krev elastickým vlastnostem tuhého tělesa. U vyšších smykových rychlostí krev ztrácí viskoelastický efekt a erytrocyty se chováním přizpůsobují kapalině. Viskoelastické modely mohou být tedy vhodné pro krev jenom při určitých podmínkách, a to především při nižších smykových rychlostech. Jelikož je ale proudění oscilační, tak důležitost viskoelasticity roste [34].

Jeden ze základních modelů je zobecněný Maxwellův model 4.21 [34] (Thurston model), který lze použít pro viskoelastickou nestlačitelnou kapalinu s laminárním prouděním (krev). Předpokládá izotropní chování tohoto média (vlastnosti kapaliny ve všech směrech stejné).

Bere v úvahu, že relaxace se neprojevuje v jednom časovém úseku. Je rozložena na jednotlivé časové úseky vzhledem k různým délkám erytrocytů, jejichž doba relaxace se liší. Řešení má takový počet Maxwellových elementů j (pružný a tlumící element v sérii), aby byl dostatečně popsán daný problém. Viskozita μ je zde funkcí rychlostního gradientu (viz úvod kapitoly 4). Z NS rovnice 3.1 převedené do cylindrických souřadnic plyne při zanedbání gravitačních účinků rovnice 4.24.

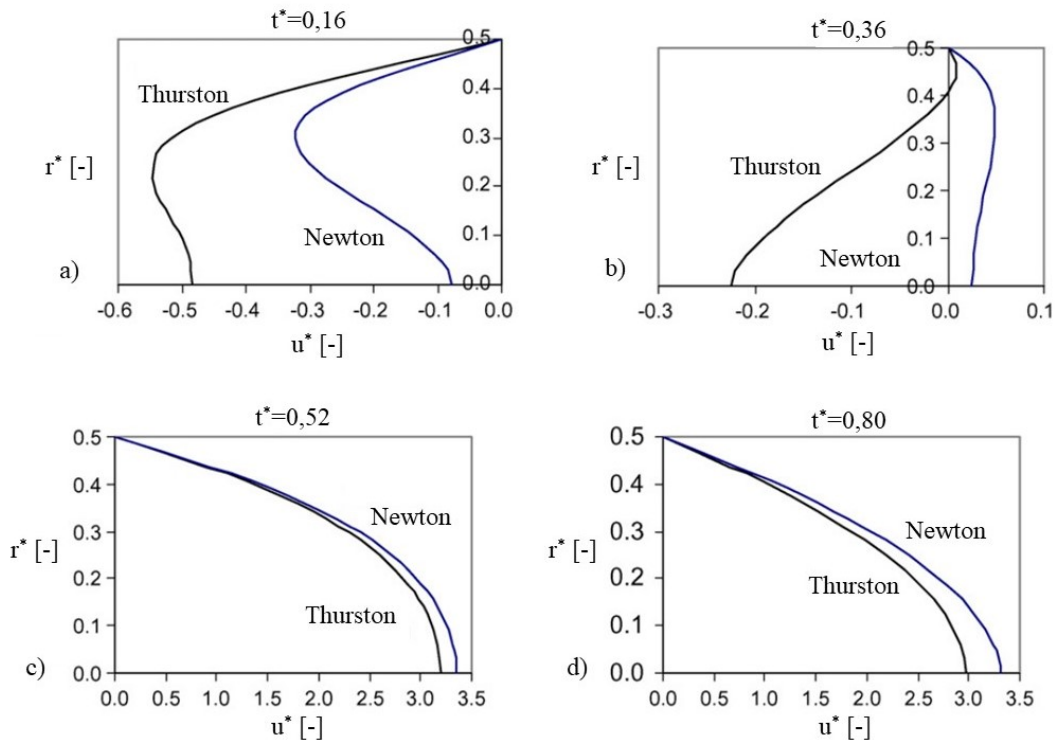
$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_r \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\mu \mathbf{D} \quad (4.21)$$

$$(\sigma_{rz})_j + (\lambda_r)_j \frac{\partial (\sigma_{rz})_j}{\partial t} = \mu_j \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.22)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.24)$$

Rozepsáním 4.21 do odpovídajícího souřadného systému je člen $\tau_{rz} = \sum_{j=1}^7 (\sigma_{rz})_j$. Smykové napětí $(\sigma_{rz})_j$ odpovídá napětí j -tého elementu [34]. Celkově je užito sedmi elementů, zahrnující jeden tlumící a šest Maxwellových v paralelním zapojení. Viskózní člen v 4.22 odpovídá prostorové změně dynamické viskozity μ (zapříčiněna závislostí μ a druhého invariantu II_D). Jelikož se jedná o přímou trubici o neměnném průřezu s průměrem D je použit 1D model, kde symetrická část tenzoru $\mathbf{D}$ je rychlostní gradient $\frac{\partial u}{\partial r}$. Členy μ_j jsou konstanty uvedeny v [34] str. 494 tabulka č. 1 s odpovídajícími relaxačními časy.



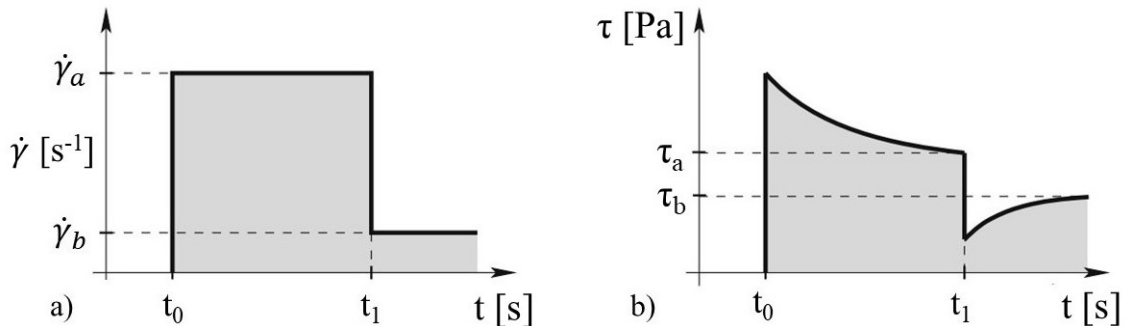
Obrázek 4.5: Rychlostní profily newtonské a viskoelastické krve (Thurston) pro jednotlivé bezrozměrné časy t^* , na vertikální ose $r^* = \frac{r}{D}$ a na horizontální $u^* = \frac{u}{U}$ [34].

Po diskretizaci a linearizaci rovnic 4.22 a 4.24 byl v článku [34] proveden výpočet pro síť s 15ti uzly a časovým krokem 0,01 s. Jedná se o transientní simulaci a je zde brána normalizovaná srdeční perioda. Ve výpočtu byla validována třetí po sobě jdoucí perioda, aby nedošlo k ovlivnění počátečními podmínkami. Jednotlivé grafy na obrázku 4.5 ukazují výsledky výpočtu pro krev s konstantní viskozitou a krev vykazující viskoelastické chování (Thurstonův model). Osy jsou bezrozměrnými veličinami s poloměrem $r^* = \frac{r}{D}$ a rychlostí $u^* = \frac{u}{U}$. Grafy a) až d) znázorňují rozdíly rychlostních profilů pro bezrozměrné časy $t^* = \frac{t}{T_0} = 0, 16; 0, 36; 0, 52; 0, 80$. Při nižších průtocích je zachycen výrazný rozdíl mezi newtonským a viskoelastickým chováním. Naopak při velké hybnosti se tyto rychlostní profily téměř shodují a tudíž výsledky jsou nezávislé na použitém modelu. Z čehož je možné usoudit větší vliv nestacionárních setrvačných sil (vysoké rychlosti) oproti silám viskózním, kdy profil je téměř parabolický profil. Krev je tak vystavována velkým smykovým rychlostem a efekt viskoelasticity je zde zanedbatelný.

4.3 Tixotropie

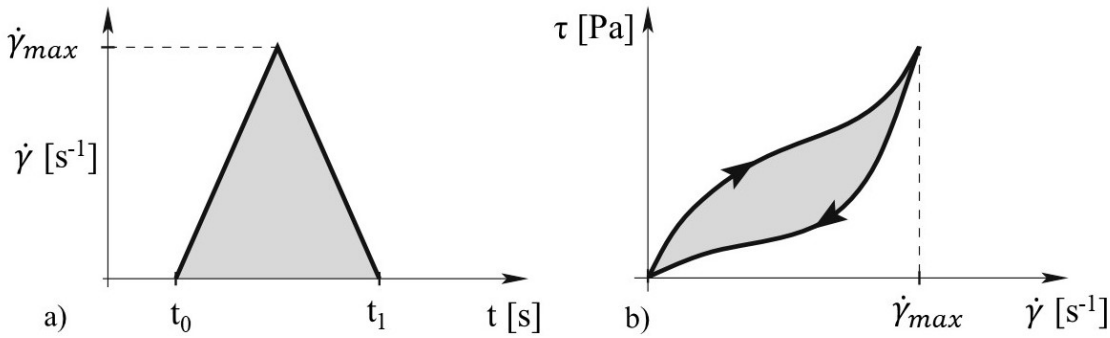
Tixotropie krve je spojována s formováním 3D struktur a zarovnáváním erytrocytů, které nejsou okamžité. Zejména se jedná o chování jako je formace a rozpad 3D mikrostruktur, prodlužování a zotavování erytrocytů, formace a rozpad zarovnaných vrstev erytrocytů. Tudíž je to závislost materiálových vlastností (modulu pružnosti, τ_y , viskozity) na době, po kterou působilo smykové napětí [32].

Tixotropní odezva je znázorněna na obrázku 4.6. Pro představu je aplikován jednoduchý případ dvou paralelních desek viz obrázek 4.1. Horní deska se ale pohybuje nestacionárně a smyková rychlost $\dot{\gamma}$ je funkcí času. Obrázek 4.6a reprezentuje průběh $\dot{\gamma}$, kde v čase t_0 je deska vystavena smykové rychlosti $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_a$. Následuje další skoková změna v čase $t=t_1$ na hodnotu $\dot{\gamma}_b$. Po zbytek času je smyková rychlost konstantní. Tixotropní odezvu je znázorněna na vedlejším obrázku 4.6b, kde se po první skokové změně snižuje viskozita a tím pádem i aplikované smykové napětí. Pro dosažení rovnovážného stavu je potřeba určitý čas, po kterém se kapalina ustálí na hodnotě smykového napětí τ_a (viskozita přestane klesat). Při druhé skokové změně dolů na $\dot{\gamma}_b$ ($t = t_1$) smykové napětí spadne pod ustálenou hodnotu τ_b . Dochází k většímu rozbití jednotlivých mikrostruktur a viskozita klesne výrazněji. S časem se opět struktury agregují a blíží se k rovnovážnému stavu kde $\tau = \tau_b$ [32].



Obrázek 4.6: a) Závislost smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ na čase t , b) závislost smykového napětí τ na čase t . V závislosti na změně $\dot{\gamma}$ je tixotropní odezva znázorněna na grafu b) [32].

Chování odpovídající lineární změně $\dot{\gamma}$ na čase znázorňuje obrázek 4.7a. Jedná se o lineární nárůst v čase t_0 do maximální hodnoty smykové rychlosti $\dot{\gamma}_{max}$. V tomto okamžiku následuje lineární pokles $\dot{\gamma}$ až do doby t_1 . Smyková rychlost se nepřetržitě mění a tím pádem nelze u materiálu dosáhnout rovnovážné (ustálené) struktury jako v předešlém případě se skokovými změnami. Pro znázornění této tixotropní odezvy se nebere v potaz viskoelastické chování. V čase t_0 je nulová $\dot{\gamma}$ a tudíž je přítomná výrazná mikrostruktura (materiál je tuhý). Při zvyšování smykové rychlosti do $\dot{\gamma}_{max}$ se tato mikrostruktura postupně rozpadá. Jelikož zde není dostatek času pro jejich rozpad do rovnovážného stavu, tak smykové napětí bude vyšší. S klesajícím $\dot{\gamma}$ dochází opět ke tvoření struktur. Jelikož se nejedná o skokovou změnu, budou hodnoty viskozity a smykového napětí menší než hodnoty v první polovině, odpovídající lineárnímu růstu $\dot{\gamma}$. Takové chování spěje k obrázku 4.7b, kde lze pozorovat hysterzní smyčku. V případě newtonské kapaliny například vody je chování jiné. Při změně $\dot{\gamma}$ není pozorována žádná podstatná změna mikrostruktury a tím pádem je na obr. 4.7b jenom identická lineární křivka popisující dané chování [32].



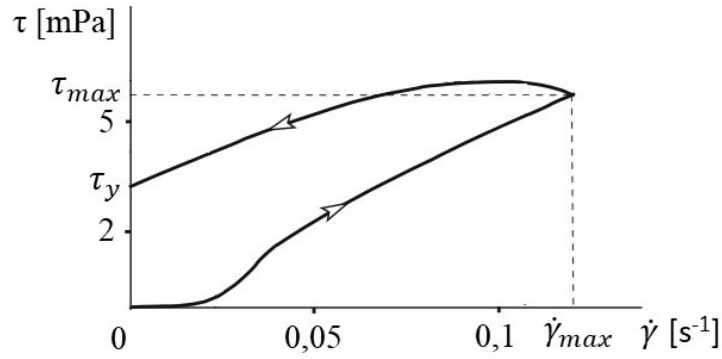
Obrázek 4.7: a) Závislost smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ na čase t , b) závislost smykového napětí τ na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ [32].

Hysterzní smyčka z naměřených dat krve fyziologického jedince na základě zatížení z obrázku 4.7a je zobrazena na obrázku 4.8 [10]. Smyková rychlost se mění lineárně s časem na základě uvedených rovnic.

$$\dot{\gamma} = 0,0185t \quad \text{pro } 0 \leq t \leq 6,5 \text{ s} \quad (4.25)$$

$$\dot{\gamma} = 0,0185(13 - t) \quad \text{pro } 6,5 \leq t \leq 13 \text{ s} \quad (4.26)$$

Konečné smykové napětí v polovině cyklu při $\dot{\gamma}_{max}=0,12 \text{ s}^{-1}$ odpovídá na časové ose $t=6,5 \text{ s}$. Na konci cyklu ($t=13 \text{ s}$) je zřetelné nenulové smykové napětí, což značí viskoelastické chování krve a závislost napětí na deformační historii (smyčka není uzavřená). Tudíž nezáleží jenom na okamžité smykové rychlosti, jak je tomu u newtonských i zobecněných newtonských kapalin. To lze pozorovat například na Herschel-Bulkleyho modelu (obr. 4.2). Velikosti těchto hysterzních smyček slouží jako měřítko tixotropie.



Obrázek 4.8: Závislost smykového napětí τ na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ pro krev při fyziologických podmínkách [10].

Efekt tixotropie byl zkoumán také při ustáleném proudění. Strukturální změna krve nastává při vyšších smykových rychlostech mnohem rychleji než u nižších smykových rychlostí. Jako první bylo zkoumáno, jak se bude krev chovat v rozmezí nulových smykových rychlostí (krev neproudí) až do 10 s^{-1} . Bylo zaznamenán klesání viskozity po dobu 20 sekund při změně na $\dot{\gamma}=10 \text{ s}^{-1}$, než byl dosažen konečný stav. Následovalo zvýšení $\dot{\gamma}$ na 100 s^{-1} . Téměř žádný čas nebyl potřebný pro dosažení ustálené struktury krve [14]. V literatuře [18] se tato změna pohybovala od 500 do 0 s^{-1} . Na základě jejich výsledků je potřeba při malých $\dot{\gamma}$ přibližně 50 sekund k dosažení rovnováhy. U vyšších hodnot $\dot{\gamma}$ se tento čas pohybuje řádově v sekundách. Tato znalost je užitečná i při měření vlastností krve. Pokud je zapotřebí toto chování minimalizovat je nutné krev nechat určitý čas pod daným smykovým napětím.

4.4 Kritické smykové napětí

Kritické smykové napětí τ_y představuje vlastnost materiálu, která odpovídá konstantní hodnotě. Jedná se o kritickou hodnotu, pod kterou se kapalina chová jako tuhé těleso a tudíž nebude proudit. Může se ale pohybovat jako „zátku“, což však neodpovídá definici proudění (deformace se průběžně mění v závislosti na aplikovaném smykovém napětí). Z mikroskopického hlediska se jedná o kohezní (přitažlivé) síly mezi jednotlivými buňkami, které nejsou zanedbatelné. Jde o van der Waalsovy a Coulombické síly. Aby kapalina proudila, musí se tyto vazby mezi částicemi zpretrhat aplikováním určité síly. I když krev obsahuje přibližně 45% erytrocytů je potřeba jen relativně malé síly na přerušení těchto vazeb. Kritické napětí τ_y je závislé především na hematokritu a koncentraci proteinu fibrinogenu. Při poklesu hematokritu pod určitou kritickou hodnotu efekt kritického smykového napětí τ_y se zdá zanedbatelný [14].

U krve τ_y nepředstavuje jednu konstantní hodnotu, ale pohybuje se v rozsahu od 0,2 do 40 mPa. To je zapříčiněno nejen interakcí erytrocytů a povrchem rheometru, ale také použitými experimentálními metodami, které měří τ_y a dobu trvání daného experimentu. Z tohoto důvodu se kritické napětí spojuje s tixotropií a doporučuje se uvažovat jako funkce času [7] (lze pozorovat i na obrázku 4.8).

Kritické napětí je spojováno s druhým invariantem deviačního tenzoru napětí II_τ a pro jednoduché smykové proudění platí [17]:

$$\tau_y = \sqrt{|II_\tau|} \quad (4.27)$$

$$II_\tau = \frac{1}{2} \left((tr(\boldsymbol{\tau}))^2 - tr(\boldsymbol{\tau}^2) \right) \quad (4.28)$$

Modely popisující toto kritické napětí jsou užitečné v oblastech nízkých smykových rychlostí. Nejběžnější je Cassonův model, kdy se krev chová jako tuhé těleso dokud není splněna podmínka 4.27 a následně znázorňuje smykové řídnutí [17]. Konstitutivní Newtonova rovnice je speciálním případem Cassonova modelu, kde $\tau_y=0$. Poté pro deviační tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$ platí $\boldsymbol{\tau} = 2\mu_N \mathbf{D}$, přičemž μ_N je konstantní newtonská viskozita [7] [17].

$$\sqrt{|II_\tau|} < \tau_y \rightarrow \mathbf{D} = 0 \quad (4.29)$$

$$\sqrt{|II_\tau|} \geq \tau_y \rightarrow \begin{cases} \mathbf{D} = \frac{1}{2\mu_N} \left(1 - \frac{\sqrt{\tau_y}}{\sqrt{|II_\tau|}} \right)^2 \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} = 2 \left(\sqrt{\mu_N} + \frac{\sqrt{\tau_y}}{\sqrt[4]{4|II_D|}} \right)^2 \mathbf{D} \end{cases} \quad (4.30)$$

Relativně jednoduchý vztah pro kritické smykové napětí znázorňuje rovnice 4.31. Značí závislost τ_y na hematokritu avšak je použitelná pouze do $H_t=50$ %. H_{tc} je kritická hodnota hematokritu, pod kterou krev nevykazuje žádné τ_y . Na základě měření se tato hodnota pohybuje od 1,3 do 6,5 % [17].

$$\tau_y^{\frac{1}{3}} = \frac{A(H_t - H_{tc})}{100} \quad \text{kde } A \approx 0,8 \pm 0,2 \text{ mPa} \quad (4.31)$$

4.5 Mikrocirkulace

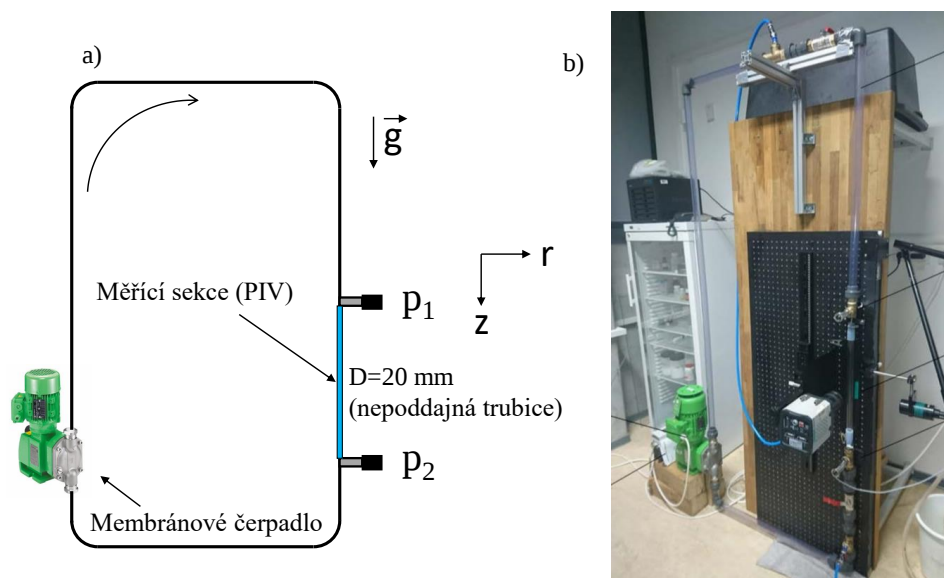
Na druhou stranu u velmi malých cév, jako jsou arterioly, kapiláry a venuly, kde jejich velikosti jsou v rozmezí 6-50 μm , lze pozorovat výrazně odlišné chování. S ohledem na velikost erytrocytu se jedná o srovnatelné hodnoty a viskozita začíná záviset na velikosti cévy. V menších kapilárách se tak nachází tenká vrstva plazmy přilehlá ke stěně kapiláry (v anglické literatuře „skimming layer“), která je ochuzena o erytrocyty. Kvůli tomu je její efektivní viskozita nižší než krve jako celku. Tato vrstva obklopující erytrocyty umožňuje jejich „klouzání“ (snižuje odpor proti pohybu) a díky tomu dochází i k poklesu viskozity.

U velmi malých kapilár s průměrem podobným velikosti erytrocytu (6-8 μm) dochází k poněkud opačnému chování. Tady začíná být diskutabilní, zdali je v pořádku uvažovat krev jako kontinuum. Mezera vyplněná plazmou mezi stěnou kapiláry a hranicí buňky je velmi malá. Dochází zde k velkým smykovým napětím. Tyto smykové napětí zpomalují erytrocyty a tím narůstá efektivní viskozita. Zmíněné protichůdné chování se označují jako Fahraeus–Lindqvistův efekt a jeho inverze [13].

Kapitola 5

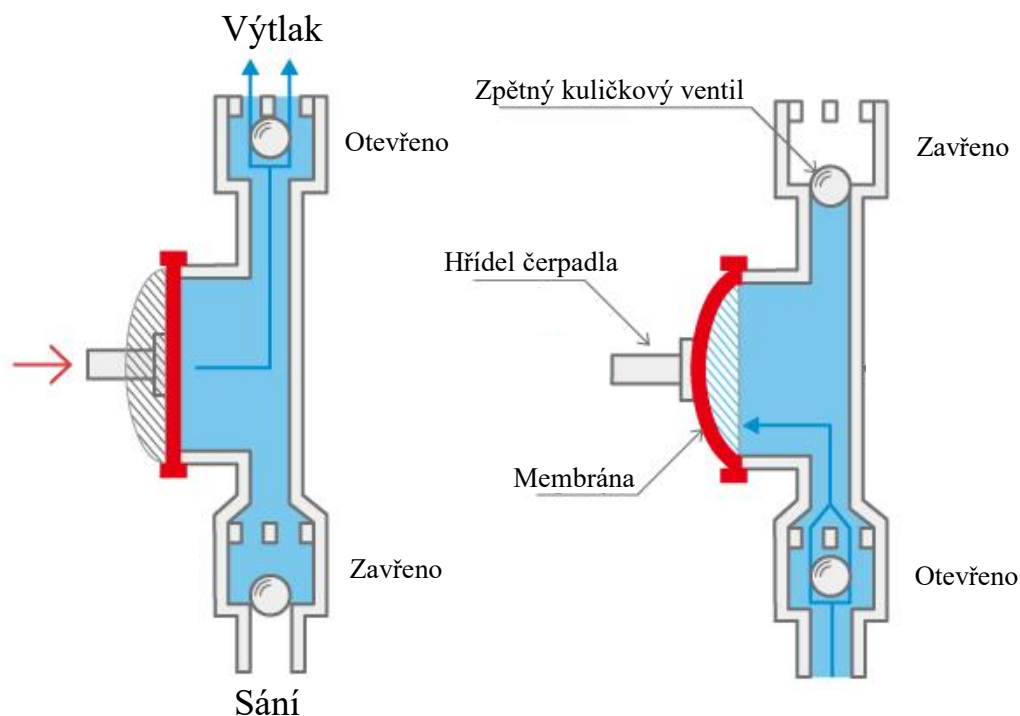
Praktická část

Experimentální trať se nachází v laboratořích technické univerzity v Liberci [22]. Ta se skládá z membránového čerpadla, které pohání médium (v tomto případě vodu) skrz potrubí znázorněné na odpovídajícím schématu 5.1a. Pulzace čerpadla (Bran+Luebbe ProCam Smart DS500) byla nastavena pomocí frekvenčního měniče na 1 Hz. Trať je také opatřena PIV metodou („particle image velocimetry“), pomocí které je možné zrekonstruovat rychlostní profily v rovině. Metoda vyžaduje, aby kapalina obsahovala částice, které jsou viditelné při prosvícení kapaliny laserem. Konkrétně se jednalo o polyamidové fluoreskující částice s velikostí $5\ \mu\text{m}$ obarveny rhodaminem B, emitující vlnovou délku o 570 nm. Přes skleněnou trubici se prosvítí laserová rovina (vlnová délka 532 nm), kde kamera zachycuje jednotlivé snímky pohybujících se částic. Rychlost se pak určuje ze vzdálenosti, kterou částice urazí za definovaný časový úsek. Na začátku a konci měřící sekce jsou piezoelektrické snímače tlaku p_1 a p_2 . Měřící část tvoří skleněná (tuhá) trubice o průměru 20 mm, která je ve vertikální poloze.



Obrázek 5.1: a) Odpovídající schéma tratě technické univerzity v Liberci znázorněné na fotce b). Trať se skládá z membránového čerpadla pohánějící kapalinu přes okruh. Na začátku a konci měřící sekce jsou umístěny tlakové snímače.

Průběh jednoho pulzu ($T = 1$ s) buzeného čerpadlem lze rozdělit do čtyř fází. První fáze odpovídá tlakovému nárůstu, kdy je kapalina zrychlována. Objem kapaliny, znázorněný šrafováním na obrázku 5.2 vlevo, je vytlačován do oběhu. Zpětný kuličkový ventil, který umožňuje průtok média pouze jedním směrem, působí na sání v závěrném směru a je tedy zavřený. V druhé fázi nastává největší nárůst tlaku, což odpovídá největšímu vychýlení membrány čerpadla. Poté je uzavřen zpětný kuličkový ventil na výtlačku (obrázek 5.2 vpravo), přes který je kapalina vytlačována membránou. Nastává prudký pokles rychlosti. Třetí fáze odpovídá otevření dolního kuličkového ventilu a čerpadlo nasává kapalinu opět do maximálního vychýlení (obrázek 5.2 vpravo). Kvůli čemuž klesá tlak a kapalina je urychlována. V poslední fázi tlak poklesne na konstantní hodnotu a kapalina zpomaluje. Poté se děj začíná opakovat a šrafovaný objem kapaliny opět vytlačuje do oběhu. Tlakový skok, který lze pozorovat na začátku periody u tlakové okrajové podmínky (obrázek 5.6), je pravděpodobně způsoben otevřením kuličkového zpětného ventilu na výtlačku.



Obrázek 5.2: Znázornění principu membránového čerpadla. Na obrázku vlevo lze vidět membránu v maximálním vychýlení vytlačující kapalinu (vyšrafovaná oblast) do oběhu. Obrázek vlevo značí nasávání kapaliny, kdy je membrána opět v maximálním vychýlení [39].

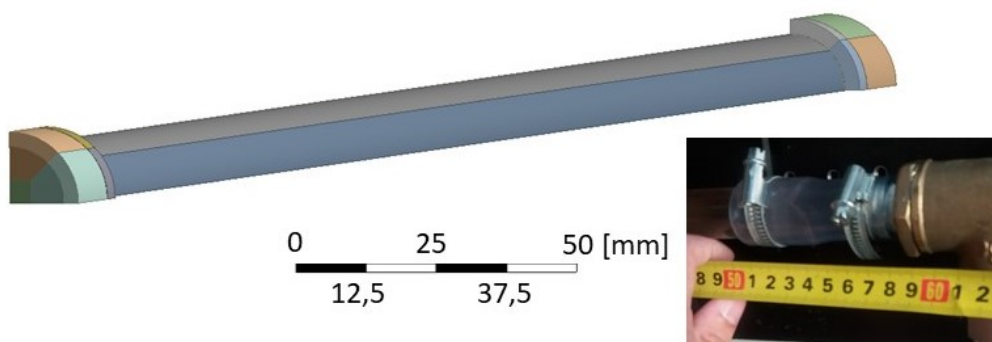
5.1 Numerická simulace

Prvním cílem této diplomové práce byla validace výsledků numerického řešení a experimentálního měření popsáním výše. Numerické řešení bylo provedeno v programu ANSYS® Fluent® 2019/2020 R1/R3. Tvorba výpočetní sítě a vyhodnocení výsledků jsou zhotoveny v ANSYS® Workbench™. Exportované data a data z PIV byly zpracovány v programu MATLAB® R2019b. Názvy jako je „viskózní model“ a „laminární model“ jsou uvedeny z

důvodu souladu názvů s programem Fluent®. Také názvy a zkratky, kde překlad do českého jazyka není výstižný, jsou zachovány v originální formě.

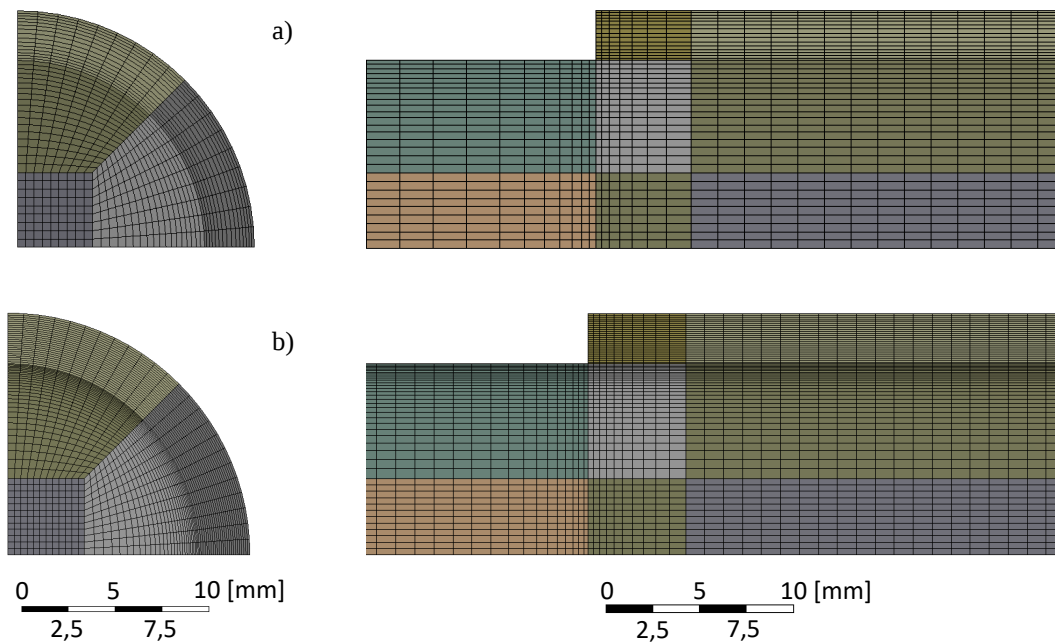
5.1.1 Diskretizace domény a výpočetní síť

Pro toto numerické řešení bylo potřeba diskretizovat danou doménu viz obrázek 5.3. V tomto případě se jedná o newtonskou kapalinu - vodu ($\rho = 998,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\mu = 0,001003 \text{ Pa}\cdot\text{s}$), která je uvnitř skleněné trubice o délce 510 mm. Díky dvojnásobné symetrii bylo možné modelovat pouze čtvrtinu trubice. Na začátku resp. na konci je náhlé zúžení resp. rozšíření, které reprezentují podstatné geometrické znaky osazených tlakových snímačů. To lze pozorovat na fotce, kde vpravo je potrubí s tlakovým snímačem navazující na měřicí sekci vlevo (skleněnou trubici). Přechod z mosazné části na skleněnou trubici je umožněn pryžovým materiálem. Rozšíření/zúžení o průměru 25,3 mm a délce 25 mm navazuje na hlavní sekci o délce 510 mm (celková délka 560 mm). Bez zahrnutí těchto prvků byla axiální rychlost ve středu trubice vyšší v porovnání s experimentem. Náhlé zúžení tak nezanedbatelně mění hybnost a tudíž je nutné tuto část v numerickém modelu uvažovat. Délka hlavní sekce je dostatečně velká na to, aby v numerické simulaci došlo k vyvinutí rychlostních profilů a tudíž není potřeba opatřit vstup/výstup prodloužením. Rychlostní pole je navíc rozrušováno náhlým zúžením a vstupní prodloužení tak není důležité.



Obrázek 5.3: Čtvrtinový model reprezentující podstatné geometrické prvky měřicího okruhu včetně fotky, která zachycuje praktickou realizaci přechodu mezi mosaznou a skleněnou částí.

Poté byla vytvořena síť prvků v ANSYS® Meshing™, kde byl brán důraz na zhuštění prvků v okolí stěny, aby byla správně zachycena mezní vrstva. K zachycení této vrstvy byla využita konformní strukturovaná H+O síť znázorněna na obrázku 5.4. Toto výrazné zhuštění bylo provedeno z důvodu použití výpočtového viskózního modelu, který nevyužívá stěnových funkcí (dále viz sekce 5.1.3). Celkově se jedná o 147 000 hexa prvků a 134 000 uzlů pro hrubší síť a 500 000 prvků s 540 000 uzly pro jemnější síť. Pro výpočet byla zvolena jemnější síť z důvodu uvedených v sekci 5.1.3. V druhém případě byla výrazně zvýšena jak náklonnost prvků ke stěně (z angličtiny „bias factor“), tak jejich počet. Užší radiální část trubice byla vyplněna 45 prvky s faktorem 8. Na úkor tohoto zvýšení byly přidány prvky i radiálně, jelikož je potřeba korigovat poměr stran prvků, kdy při velkém nárůstu by mohlo řešení divergovat. U pulsujícího proudění může docházet v blízkosti stěn ke zpětnému proudění a tak je vhodné toto zjemnění zohlednit pro větší radiální úsek, aby byl správně zachycen i sekundární rychlostní gradient.

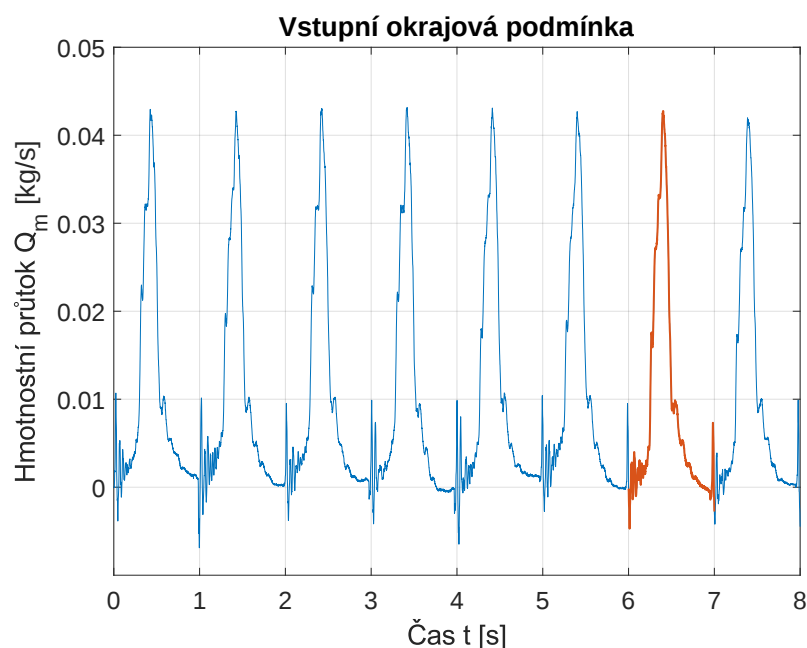


Obrázek 5.4: Konformní strukturovaná H+O síť, kde důraz je brán na zhuštění prvků v mezní vrstvě. a) Hrubší síť - celkový počet hexa prvků je 147 000 se 134 000 uzly; b) jemnější síť - 509 000 prvků s 543 000 uzly.

Síť b) byla vytvořena pro turbulentní model a dodržení jeho podmínek stanovených v sekci 5.1.3. Avšak aby bylo možné porovnat výsledky dvou různých numerických modelů je při srovnání jednotlivých výpočtů využita pouze jedna, a to jemnější síť b). Zásadní bylo také zjemnit síť směrem k náhlému zúžení a rozšíření. Protože se jedná o pulsující proudění axiální rychlost se během periody výrazně mění. Z tohoto důvodu je také důležitá longitudinální velikost prvků.

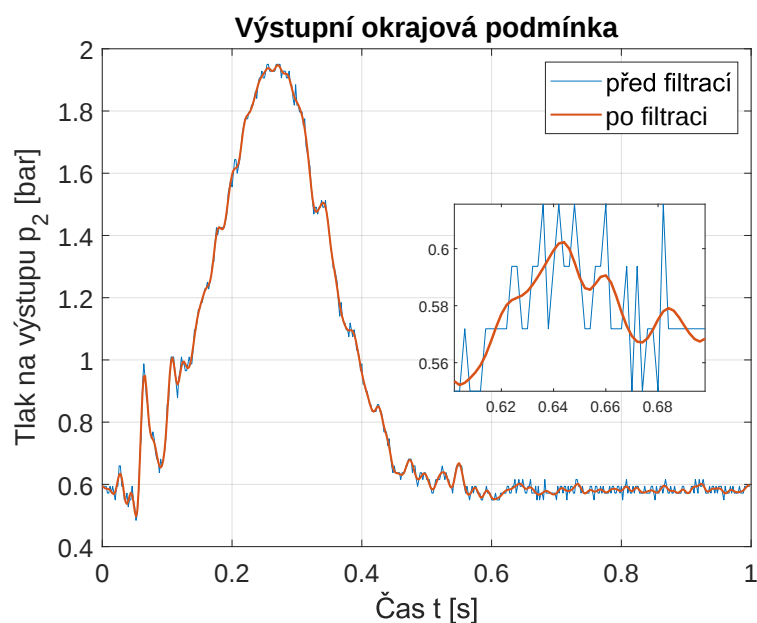
5.1.2 Okrajové podmínky

Celkově bylo experimentálně zrekonstruováno 8 period rychlostních profilů s časovým krokem $t_k=0,001$ s. Obecně je v CFD pro řešení daného problému vhodné předepsat okrajové podmínky ze dvou veličin (tlak a průtok). Jelikož nebyl k dispozici průtokoměr, byla vstupní okrajová podmínka vypočítána integrací rychlostních profilů jedné periody ($Q = \int v dS$). Integrace byla provedena v MATLAB[®] R2019b na základě ploch jednotlivých mezikruží a odpovídajících zprůměrovaných rychlostí. Plocha mezikruží je počítána jako $\pi(r_2^2 - r_1^2)$, kde r_1 a r_2 značí radiální vzdálenost sousedících bodů (fluoreskujících částic) od středu trubice. Rychlost vedlejších bodů je zprůměrována, což představuje numerickou integraci s využitím obdélníkové metody. Rychlosti z PIV nejsou totožné přes rovinu symetrie potrubí, tudíž tyto hodnoty byly taktéž zprůměrovány. Vynásobením výsledné průměrné rychlosti a plochy mezikruží je obdržen infinitezimální průtok. Součtem těchto jednotlivých průtoků je obdržen průtok v daný časový okamžik. Perioda, která byla využita k numerickému výpočtu jako vstupní okrajová podmínka byla sedmá (je možné zvolit jakoukoliv periodu). Hmotností průtok byl obdržen vynásobením průtoku Q hustotou ρ . Jelikož se jednalo pouze o čtvrtinu trubice, musela být tato okrajová podmínka podělena čtyřmi (graf 5.5).



Obrázek 5.5: Osm period hmotnostních průtoků obdrženy integrací jednotlivých rychlostních profilů z PIV metody. Sedmá perioda brána jako vstupní okrajová podmínka k numerickému výpočtu.

Výstupní okrajová podmínka byla obdržena z tlakového snímače p_2 znázorněným na obrázku 5.1. Pomocí Butterworthova filtru v MATLAB® R2019b byly odebrány vysoké frekvence způsobeny zašuměním piezoelektrického tlakového snímače ($f \approx 500$ Hz).

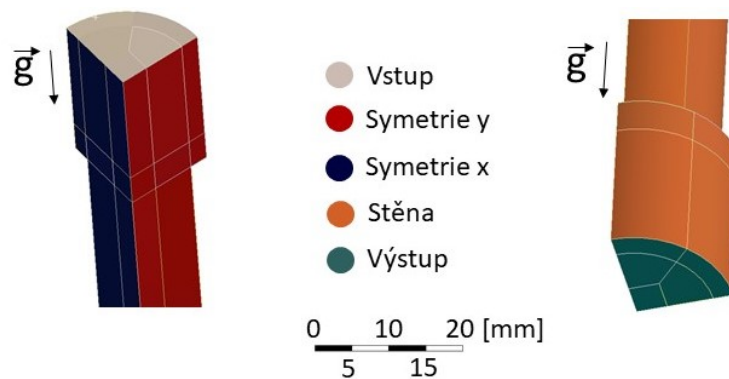


Obrázek 5.6: Výstupní tlaková okrajová podmínka upravena filtrací vysokých frekvencí pomocí Butterworthova filtru s nulovým fázovým posunem.

Aby nedošlo při filtraci k fázovému posunu, byla využita funkce „filtfilt“. Jelikož se jedná o tuhou trubici, tlaková výstupní okrajová podmínka výpočet z hlediska rychlostního pole (a veličin plynoucích z nich) nijak neovlivní. A to kvůli hmotnostní průtokové okrajové podmínce na vstupu, kterou se tento výpočet řídí. Respektive je znám průtok a na základě výstupního tlaku je dopočítáván tlak na vstupu tak, aby tlakový gradient odpovídal zadanému průtoku.

Pokud by však trubice v numerickém výpočtu byla poddajná, je potřeba klást větší důraz při stanovení těchto okrajových podmínek. Mezi vstupem a výstupem je časové zpoždění, které závisí na rychlosti šíření pulsní vlny a je nutné tak tyto okrajové podmínky posunout o určitou fázi.

S ohledem na nízké hodnoty Re a pulsující proudění byla intenzita turbulence pro turbulentní model zvolena u okrajových podmínek na 1% s hydraulickým průměrem $D_h = 0,02$ m. Hydraulický průměr je definován jako poměr průřezu S a omočeného obvodu O . Shrnutí všech okrajových podmínek je znázorněno na obrázku 5.7. Jako vstupní okrajová podmínka byl zadán hmotností průtok sedmé periody. Jelikož se jedná o trubici, byla využita symetrie dvou rovin. Tlaková výstupní okrajová podmínka byla obdržena z piezoelektrického snímače. Zbývající plocha znázorňuje stěnu, kde je podmínka ulpívání a tudíž rychlosti jsou nulové. Gravitace byla také brána v potaz kvůli vertikální poloze trubice (viz obrázek 5.1). Pro správné fungování je potřeba v programu ANSYS® Fluent® nastavit okolní médium trubice. V tomto případě vzduch o hustotě $\rho = 1,19 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



Obrázek 5.7: Znázornění jednotlivých okrajových podmínek pro numerický výpočet.

5.1.3 Volba výpočtového viskózního modelu

Výpočtový model se volí především na základě typu proudění. Jeli proudění laminární je volba modelu zřejmá a volí se laminární viskózní model, který je definován Navier-Stokesovou rovnicí 3.1 a rovnicí kontinuity 3.3. Oproti laminárnímu proudění je turbulence matematicky podstatně složitější jev. Při turbulentním proudění se pro uzavření tzv. Reynoldsových středovaných Navier-Stokesových rovnic (v anglické literatuře „Reynolds Averaged Navier-Stokes equations“ - RANS) používají například dvourovnicové modely jako je $k-\epsilon$ nebo $k-\omega$.

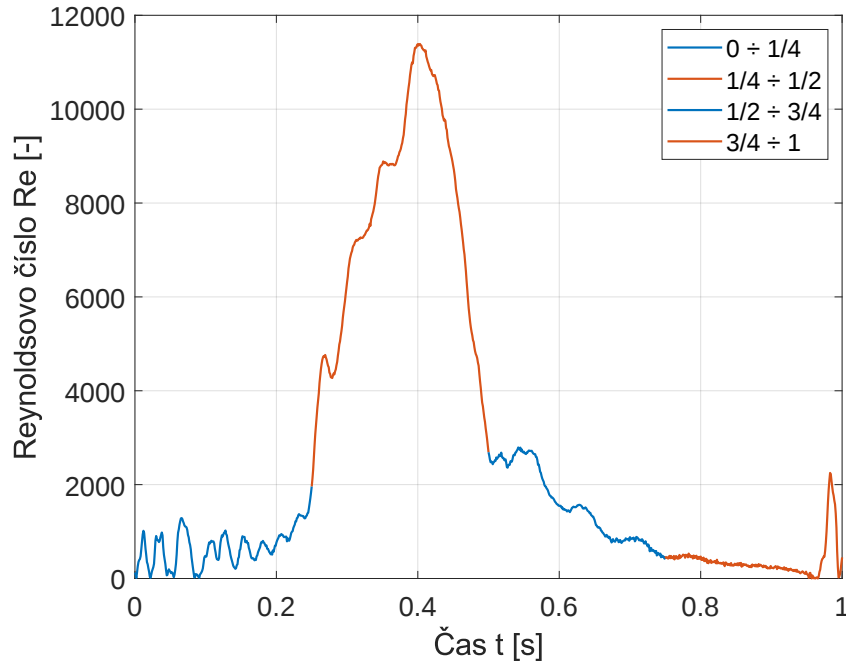
Rovnice RANS 5.1 [35] jsou obdrženy pomocí časového středování, kvůli kterému přibude v rovnicích nový člen představující tenzor Reynoldsových napětí τ_t (středování vnáší do systému dalších 6 neznámých). Zde přichází na řadu tzv. Boussinesqova hypotéza (5.2), kde pro nestlačitelnou kapalinu jsou tyto napětí vyjádřeny na základě turbulentní viskozity

μ_t a středované rychlosti deformace $((\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T))$. Předpokládá se tak izotropní turbulence, což odpovídá stejným fluktuacím jednotlivých složek rychlosti ve všech směrech. Je zde určitá obdoba s rovnicí 3.2, která má na rozdíl od uvedené hypotézy fyzikální opodstatnění. Turbulentní viskozita je skalární veličinou a mění se v závislosti na poloze a čase, vyjadřuje tak vlastnost proudění nikoliv kapaliny [44].

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho v'_i v'_j} \right) + \rho a_i \quad (5.1)$$

$$\tau_t = \mu_t \left(\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \right) = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) = \overline{\rho v'_i v'_j} \quad (5.2)$$

První je potřeba analyzovat v jakých hodnotách Re se daná úloha pohybuje a na základě toho zvolit výpočetní viskózní model. V tomto případě se jedná o pulsující proudění a tudíž Re osciluje v závislosti na měnící se rychlosti. Pro určení, v jakém intervalu se v tomto případě Re pohybuje, byla perioda rozdělena na čtyři časové úseky, které jsou znázorněny na grafu 5.8.



Obrázek 5.8: Reynoldsovo číslo Re mění se kvůli oscilující rychlosti v závislosti na čase t . Perioda je rozdělena na čtyři časové úseky.

Reynoldsovo číslo bylo spočítáno z průměrované rychlosti přes průřez. Tudíž bylo zahrnuto jak prostorové průměrování rychlosti, tak časové průměrování Re 5.4. V této rovnici m značí počet vzorků odvíjející se z časového kroku $t_k = 0,001$ s ($m=250$ pro jeden časový úsek). Z těchto definovaných vztahů vychází tabulka 5.1, které je doplněna o maximální Reynoldsova čísla Re_{max} pro daný časový úsek.

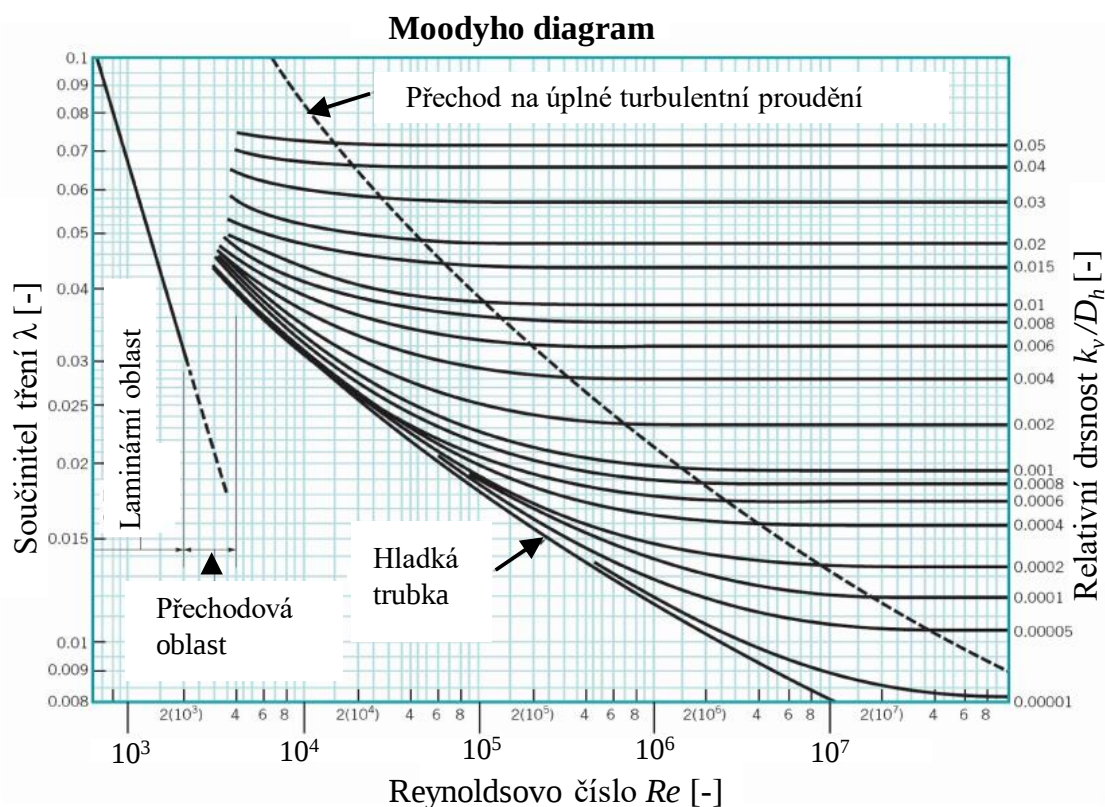
$$Re_p = \frac{v_p D}{\nu} \quad (5.3)$$

$$Re_{p,t} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Re_p \quad (5.4)$$

	$0 \div 1/4$	$1/4 \div 1/2$	$1/2 \div 3/4$	$3/4 \div 1$
$Re_{p,t} [-]$	700	7300	1600	400
$Re_{max} [-]$	2000	11400	2700	1600

Tabulka 5.1: Tabulka Reynoldsových čísel obsahující časově průměrované hodnoty $Re_{p,t}$ a maximální hodnoty v daném časovém úseku Re_{max} .

Pro znázornění a charakteristiku proudění je uveden Moodyho diagram 5.9, který je však pro stacionární proudění v přímé trubici. Jelikož se jedná o skleněnou trubici, lze předpokládat hladkou trubku, která se řídí přibližně lineární závislostí znázorněnou ve grafu. Z časově průměrovaných hodnot tabulky 5.1 vyplývá, že se Re pohybují převážně v oblasti laminární a přechodové. S ohledem na maximální hodnoty se však proudění dostává i do turbulentní oblasti. Reynoldsova čísla Re_p se pohybují v rozmezí 5 až 11400.



Obrázek 5.9: Moodyho diagram pro stacionární proudění značící závislost součinitele tření potrubí λ na Reynoldsově číslu Re a relativní drsnosti $\frac{k_v}{D_h}$ [23].

U pulsujícího proudění je tak problémem stanovit kritické Reynoldsovo číslo Re_k , při kterém dochází k proudění v přechodové oblasti (výskyt možných turbulencí). Článek [50] shrnuje na tento konkrétní problém různé pohledy z odlišných literárních pramenů.

Mnoho studií prokazuje, že Re_k je ovlivněno mírou pulzace resp. Womersleyho číslem α . Hodnota Re_k je pro stacionární proudění přibližně 2320. Dřívější studie pulsujícího proudění pouze v sinusových vlnách naznačují pokles Re_k při zvyšujících se pulzacích až na 1500. Avšak tento fenomén je pozorován pouze při menších α ($\alpha < 3$) a pro $\alpha > 10$ je vliv zanedbatelný. Pro rozsah $4 > \alpha > 10$ je dokonce tato mezní hodnota Re_k posunována k vyšším hodnotám než při stacionárním proudění. Některé studie poukazují na mezní číslo jako na poměr Re a α (viz rovnice 5.5), kdy $\frac{Re}{\alpha} > 200$ je hranice pro turbulentní proudění. V tomto případě by záleželo na fázi periody, kde u druhé fáze ($Re_{p,t}=7300$) se tento poměr rovná 292. Naopak u ostatních fází je tento poměr pod uvedenou mez. Poměr se odvíjí také od frekvence, kdy při relativně vysoké frekvenci zde nemusí být dostatečný čas na to, aby k vývinu turbulence vůbec došlo [50].

$$\alpha = R \sqrt{\frac{2\pi f}{\nu}} = 0,01 \sqrt{\frac{2\pi}{10^{-6}}} = 25,066 \quad (5.5)$$

Další studie poukazují na pulsující proudění jako střídavý děj, kdy pro určité α , amplitudy a průměrné rychlosti se turbulence nevyskytují náhodně ale v určitém okamžiku periody. Což bylo zmíněno i v teoretické části, kdy urychlování kapaliny má za následek stabilizační (laminarizující) efekt. Naopak při zpomalování je výskyt turbulencí mnohem pravděpodobnější [38] [50].

Vzhledem k nejednotnému názoru v literatuře je pro tento případ provedeno srovnání vlivu turbulentního vůči laminárnímu modelu na charakter proudění. Jelikož se jedná o proudění převážně v přechodové oblasti a nedochází k plně vyvinutému turbulentnímu proudění není vhodné volit k - ϵ model, který neumožňuje korekci při nižších Reynoldsových číslech (proudění v přechodové oblasti). Korekce u nízkých Reynoldsových čísel je dostupná u modelů k - ω (SST a standard), které umožňují tlumení turbulentní viskozity. Pro tento výpočet byl zvolen konkrétně novější hybridní model k - ω SST, který využívá oba modely, tj. k - ϵ a k - ω .

Pro uzavření rovnic RANS u SST k - ω modelu slouží dvě rovnice. Rovnice pro turbulentní kinetickou energii k a pro míru disipace turbulence ω (v anglické literatuře „specific dissipation rate“), které v ESS mají tvary 5.6 a 5.7 [44]. Pro každou složku rychlosti je tak obdrženo celkově 6 rovnic, a to 3 z rovnice pro k a 3 z rovnice pro ω .

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k \bar{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tilde{G}_k + S_k - Y_k \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega \bar{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega + S_\omega - Y_\omega + D_\omega \quad (5.7)$$

Člen $\tilde{G}_k$ představuje turbulentní kinetickou energii generovanou středními rychlostními gradienty. Generace míry disipace ω je zastoupena členem G_ω . Y_k a Y_ω představují disipaci k a ω způsobenou turbulencí. S_k a S_ω jsou uživatelem definované členy. Model k - ϵ je transformován pouze pomocí rovnic k - ω , což zastupuje člen D_ω 5.8 [40] („cross-diffusion term“), ve kterém je obsažena jedna ze dvou tzv. „blending“ funkcí F_1 umožňující přechod na k - ϵ model ($\sigma_{\omega,2} = 1,168$). V závislosti na F_1 se přepínají jednotlivé turbulentní modely a můžou tak nastat 2 mezní případy. V blízkosti stěn je $F_1 = 1$ a tudíž rovnice 5.7 představuje standardní rovnici ω ($D_\omega = 0$), kdy je aktivován standardní k - ω model. Naopak daleko od povrchu je tato funkce nulová, což aktivuje model k - ϵ , kdy D_ω není nulové a je obdržena rovnice pro míru disipace ϵ přepsána pomocí ω .

$$D_\omega = 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega,2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (5.8)$$

Efektivní difusivita turbulentní kinetické energie k a míry disipace ω , ve kterých je obsažena turbulentní viskozita, je popsána členy Γ_k 5.9 a Γ_ω 5.10 [3]. Tyto členy jsou závislé na dynamické viskozitě μ , turbulentní viskozitě μ_t a Prandtlových číslech σ_k a σ_ω , které jsou také závislé na funkci F_1 .

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad (5.9)$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \quad (5.10)$$

Tlumení turbulentní viskozity u nízkých Re je umožněno koeficientem α^* 5.11 [3]. Kde $Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$, $R_k = 6$, $\alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}$; $\beta_i = 0,072$; $a_1 = 0,31$. Při vysokých Reynoldsových číslech je $\alpha^* = \alpha_\infty^* = 1$ a tudíž nedochází k tlumení. Turbulentní viskozita obsahuje druhou „blending“ funkci F_2 a je určitým způsobem oproti turbulentní viskozitě u modelu $k-\omega$ standard limitována. Díky této limitaci je lépe predikováno smykové napětí v blízkosti stěn. Opět pokud jsou S_d (velikost rychlosti deformace) a F_2 malé je obdržen originální vztah ($\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}$), což platí pro situaci ve velké vzdálenosti od stěny. Při velkých hodnotách, tzn. u stěn, dochází k limitování turbulentní viskozity.

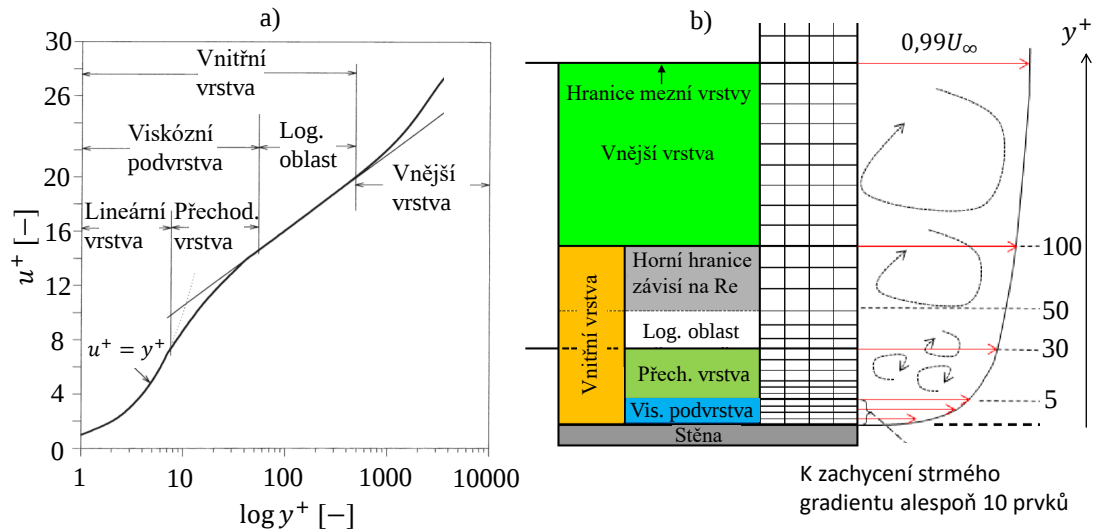
$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{S_d F_2}{a_1 \omega}\right]} \quad (5.11)$$

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + \frac{Re_t}{Re_k}}{1 + \frac{Re_t}{Re_k}} \right) \quad (5.12)$$

Pro výpočet byl zvolen tedy $k-\omega$ SST model („Menter’s Shear Stress Transport“). Jak už bylo zmíněno v sekci 5.1.1, výpočtový viskózní model $k-\omega$ nevyužívá stěnových funkcí a tudíž je potřeba dostatečně jemného zhuštění sítě v okolí stěny. To jestli je dostatečně jemná síť v okolí stěny se identifikuje pomocí bezrozměrné vzdálenosti y^+ 5.13 [35]. Rychlost u značí velikost nejbližší rychlosti u stěny, y je vzdálenost k této stěně a ν je kinematická viskozita. Bezrozměrná veličina u^+ je definována jako poměr rychlosti u a rychlosti tření u_τ („friction velocity“). Veličina u_τ je definována na základě smykového napětí působící na stěnu τ_s a hustoty kapaliny ρ [35].

$$y^+ = \frac{uy}{\nu}; \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \quad (5.13)$$

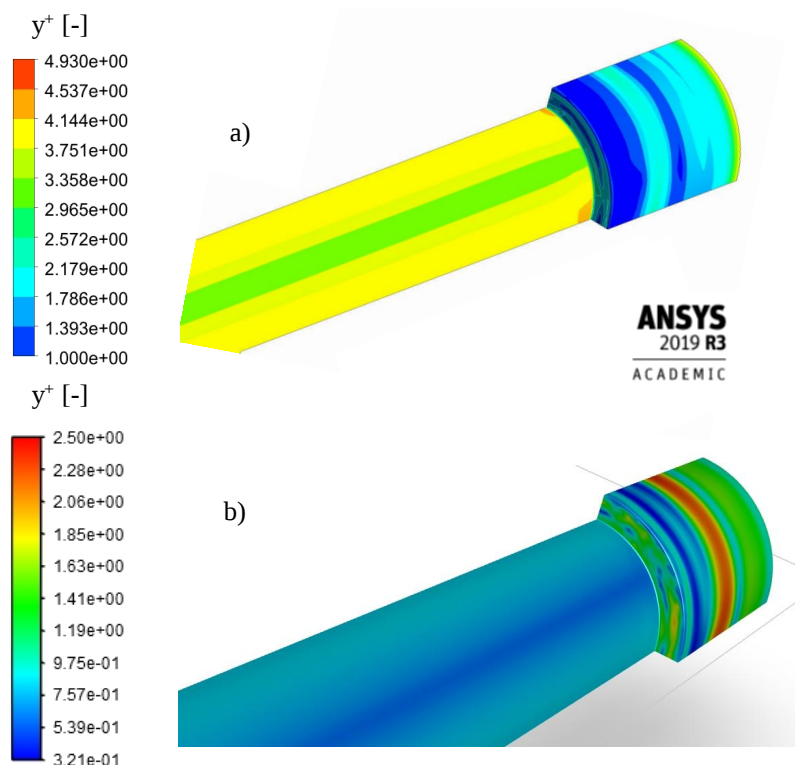
Graf 5.10a značí závislost u^+ na y^+ v logaritmickém měřítku a koresponduje s obrázkem 3.1. Křivka zvýrazněná tučně představuje data obdržená z experimentálních a DNS simulací („Direct Numerical Simulation“). Plně vyvinutá mezní vrstva se dělí na 4 oblasti. První oblast představuje laminární podvrstvu a nachází se nejbližší u stěny ($y^+ < 5$). Proudění je zde laminární a platí $u^+ = y^+$, kde označení lineární vrstva plyne z lineární závislosti u^+ na y^+ při užití standardního měřítka. Přechodová vrstva se neřídí ani předešlým vztahem a ani lineární závislostí v logaritmické oblasti (při standardním měřítku logaritmická závislost). Z analýzy tohoto grafu pak plyne zjemnění výpočetní sítě pro turbulentní modely, které nevyužívají stěnových funkcí ilustrované obrázkem 5.10b.



Obrázek 5.10: a) Normalizovaný průměrovaný rychlostní profil v turbulentní vrstvě se semi-logaritmickými souřadnicemi [36]; b) Hodnoty y^+ při nevyužívání stěnových funkcí [35].

Jelikož se jedná o pulsující proudění, rychlost v blízkosti stěny se výrazně mění. Tudíž je potřeba analyzovat y^+ v čase, kdy je největší rychlostní gradient v blízkosti stěny a podle toho zjemnit výpočetní síť. Největší rychlostní gradient z naměřených rychlostních profilů pomocí PIV byl pozorován v maximálním průtoku. Avšak tyto experimentální gradienty nemusí z hlediska nepřesnosti PIV v blízkosti stěn vypovídat realitě (rozebráno více při validaci výsledků). Stěnové hodnoty y^+ tak byly pozorovány i během výpočtu, kde se potvrdil největší nárůst y^+ v maximálním průtoku. Aby bylo dosaženo ve všech časových okamžicích stěnových hodnot y^+ pod 1, byla síť upravena viz obrázek 5.4b, což je přibližně 500 000 prvků.

Hodnoty y^+ v časovém okamžiku při největším průtoku pro hrubou a jemnější síť jsou znázorněny na obrázku 5.11. Lze pozorovat, že hrubší síť a), ca 140 000 prvků, nesplňuje stěnové y^+ pod 1 skoro přes celou stěnu domény. U jemnější sítě b) je možné pozorovat hodnoty i nad tuto mez, ale jelikož oblast náhlého rozšíření není důležitá při validaci výsledků, jsou tyto hodnoty pomínuty. S omezením studentské licence již nebylo možné navyšovat prvky. Oblastí zájmu je naopak část trubice o průměru $D=20$ mm a tam je zmíněná podmínka pro $k-\omega$ SST model splněna přes celou periodu.



Obrázek 5.11: Porovnání stěnových hodnot y^+ při maximálním průtoku Q pro a) hrubou a b) jemnější síť znázorněných na obrázku 5.4.

5.1.4 Průběh výpočtu a validace výsledků

Výpočet byl proveden v ANSYS® Fluent® 2019/2020. Jedná se o časově proměnný děj kvůli pulsujícímu proudění buzeného membránovým čerpadlem. Tudíž je tato úloha řešena jako nestacionární s řešičem na základě tlaku („Pressure-Based solver“-PBS) [3]. PBS pracuje na algoritmu metody projekce, kde kontinuita rychlostního pole je dosažena řešením tlakových rovnic. Tyto rovnice jsou odvozeny z rovnice kontinuity a rovnic hybnosti. Jelikož se jedná o nelineární problém (viz teorie NS rovnice kapitola 3) a jednotlivé rovnice jsou navzájem propojeny, řešení je možné dosáhnout numericky. A to pomocí iterací, kde tyto rovnice jsou opakovaně řešeny do té doby, než je dosaženo požadovaného kritéria konvergence residuí.

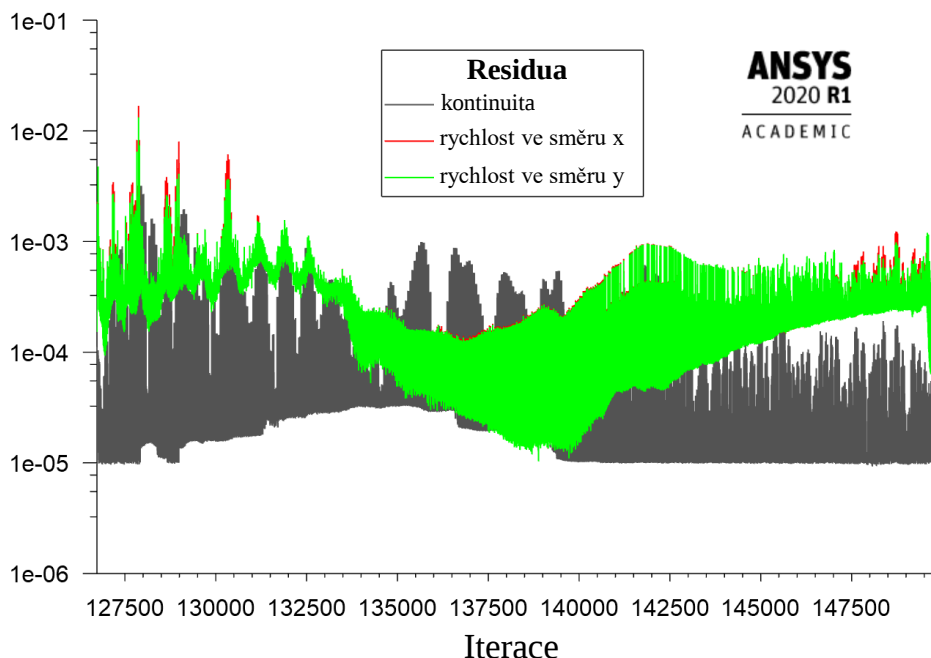
Jak už bylo zmíněno jedná se o RANS rovnice, kde k uzavření těchto rovnic je využit dvourovnicový model $k-\omega$ SST. Pro řešení byl využit segregáční PBS, který řeší jednotlivé složky rychlosti (z rovnic hybnosti RANS) a rovnici kontinuity sekvenčně. PBS, který řeší tyto rovnice zároveň, tzv. „Coupled“, není vhodný pro periodické hmotnostní průtokové okrajové podmínky [3]. Nejvhodnějším segregáčním PBS pro tento problém se jeví PISO („Pressure-Implicit with Splitting of Operators“), který je doporučován pro transientní úlohy. Z fyzikálního hlediska se však PISO a výchozí algoritmus v programu Fluent® „SIMPLE“ nijak neliší. Jedná se spíše o to, že u PISO je potřeba méně iterací pro konvergenci, ale jedna iterace oproti SIMPLE zabere více výpočetního času. Ve výsledku jde především jen o časovou náročnost daného výpočtu [3].

Výpočet byl inicializován ze vstupu pomocí standardní inicializace. Pro dosažení menších residuí (přesnějšího řešení) byl výpočet spuštěn jako stacionární po dobu, než se residua

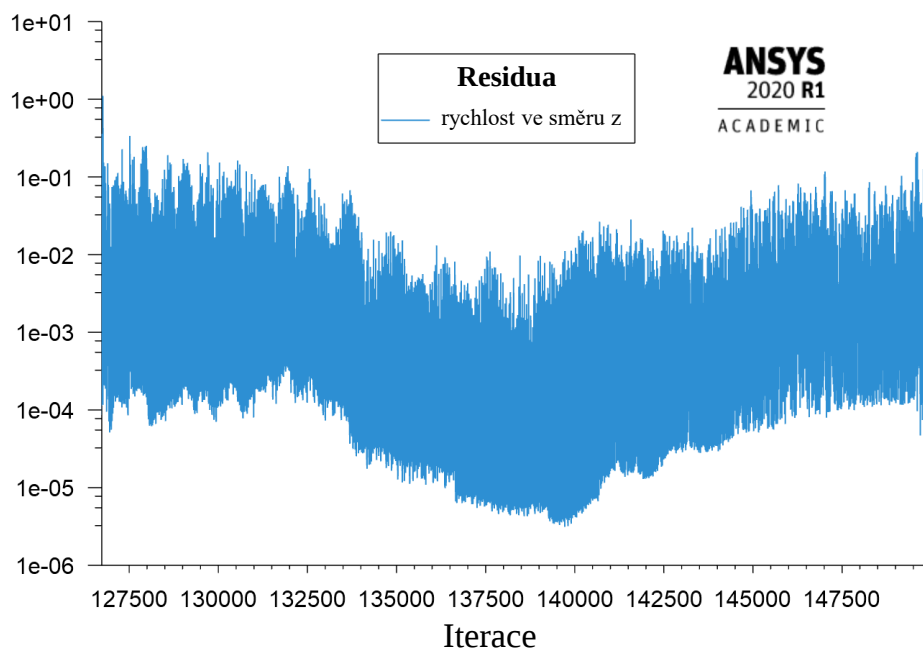
ustálily (přibližně 500 iterací). Následně už byl výpočet řešen jako nestacionární s druhými řády přesnosti, včetně tlaku a transientní formulace. Z hlediska konvergence residuí byly sledovány jednotlivé proměnné - rychlosti ve směrech x , y a z , kontinuita, turbulentní kinetická energie k a míra disipace turbulence ω . Kritéria pro konvergenci residuí jednotlivých rychlostí byly nastaveny na hodnotu 10^{-3} a pro kontinuitu, k a ω 10^{-5} . Pro dosažení zmíněných kritérií se nastavilo 20 iterací na každý časový krok ($t_k=0,001$ s).

S každým časovým krokem residua konvergují ke stanovenému konvergenčnímu kritériu, kvůli čemuž lze pozorovat jejich oscilaci. Graf 5.12 znázorňuje konvergenci residuí pro rychlosti ve směru x , y a kontinuitu pro ustálenou periodu. U rychlosti ve směru x a y se jedná o téměř totožné hodnoty kvůli symetrii trubice a tudíž se residua převážně shodují. Residua rychlostí ve směrech x , y a z (obrázek 5.13) se chovají v závislosti na hmotnostní průtokové okrajové podmínce. U nižších průtoků je zřejmá horší konvergence rychlostí (vyplývající z relativně malých hodnot), kdy naopak při maximálním průtoku residua jednotlivých rychlostí dosahují hodnot odpovídajících 10^{-5} . Residua kontinuity nedosáhly stanoveného kritéria v každém časovém kroku, zejména v oblasti nárůstu hmotnostního průtoku. Ke konci periody však dosahují požadovaného kritéria a je možné, že nastavením žádných kritérií (bez omezení) a ponechání pouze stanoveného počtu iterací na t_k by bylo dosaženo přesnějšího řešení. Residua rychlosti z (axiální rychlosti v trubici), která jsou důležitá pro porovnání s PIV, dosahovaly převážně hodnot nad 10^{-4} . Konvergenci residuí k a ω je možné pozorovat na grafu 5.14, kde požadované kritéria byly splněny v každém časovém kroku.

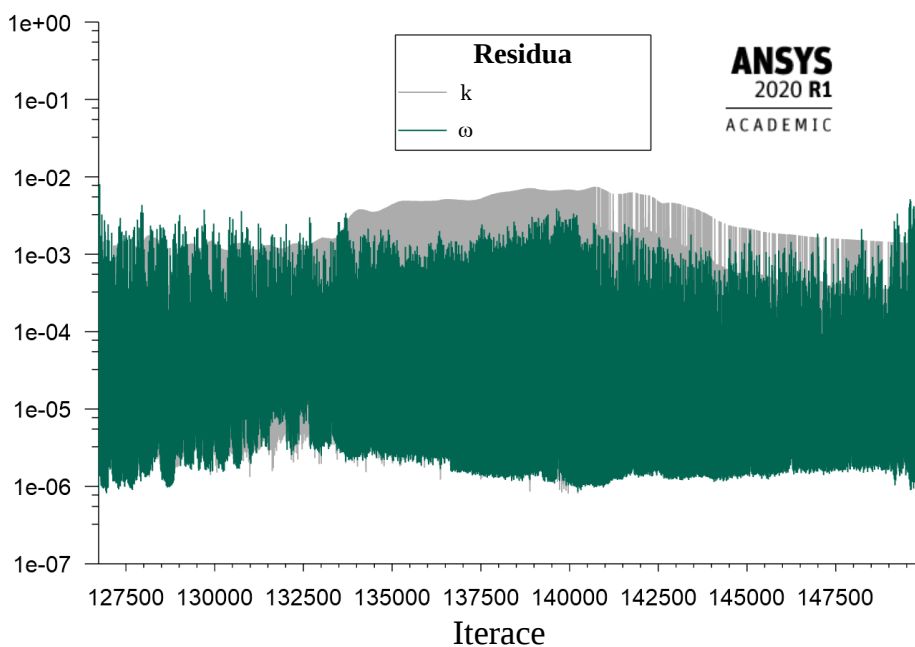
U laminárního modelu byly kritéria residuí nastaveny totožně, tzn. pro kontinuitu 10^{-5} a pro rychlosti 10^{-3} s 20 iteracemi na každý časový krok.



Obrázek 5.12: Oscilující residua rychlostí ve směru x,y a kontinuity s kritériem konvergence 10^{-3} pro rychlosti x,y a 10^{-5} pro kontinuitu. Znárodněny jsou residua ustálené periody.

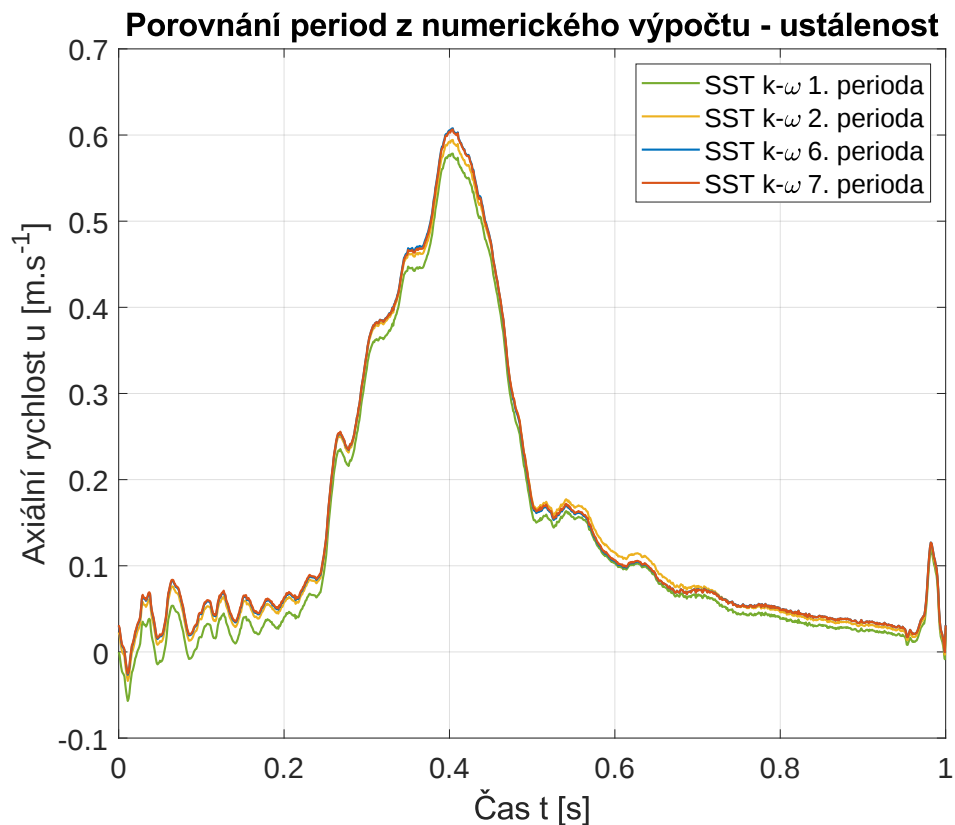


Obrázek 5.13: Oscilující residua rychlosti ve směru z s kritériem kovergence 10^{-3} . V závislosti na kritériu kontinuity dosahují residua hodnot pod 10^{-4} . Znáznorněny jsou residua ustálené periody.



Obrázek 5.14: Oscilující residua turbulentní kinetické energie k a míry disipace ω s kritériem kovergence 10^{-5} . Požadované kritéria jsou splněny v každém časovém kroku. Znáznorněny jsou residua ustálené periody.

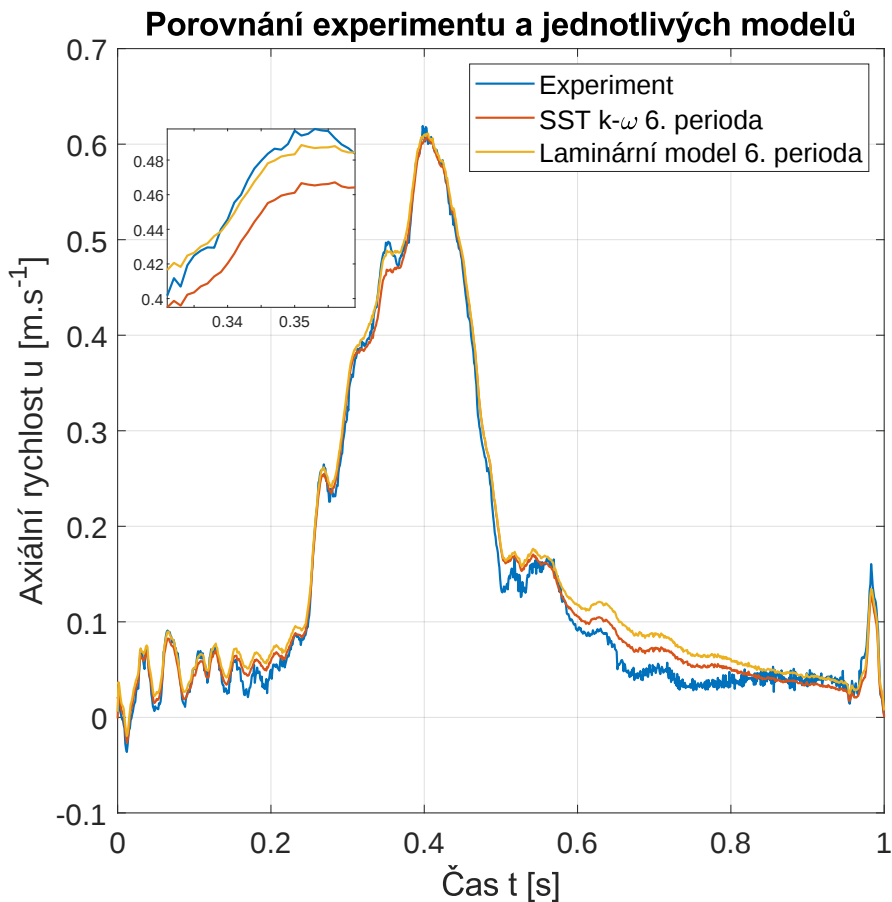
V průběhu výpočtu byla sledována axiální rychlost v bodě, který se nachází v polovině trubice a středu jejího průřezu. Tento bod byl zvolen z hlediska přesnosti PIV metody, která by měla být nejvíce výstižná ve středu trubice. V polovině trubice byly zrekonstruovány i rychlostní profily pomocí PIV. Následující graf znázorňuje rozdílnost jednotlivých napočítaných period pro SST $k-\omega$ model. Lze pozorovat výrazné odchýlení první periody od ostatních. Odchýlení první periody od sedmé je pozorováno nejen v maximálních rychlostech (5%) ale i na začátku a konci periody ($\sim 35\%$ a $\sim 18\%$). Šestá perioda byla vyhodnocena jako ustálená, jelikož se v porovnání se sedmou periodou rychlosti už výrazně nemění (rozdíl v maximech $<0,24\%$). Pro laminární model proběhlo ustálení také v šesté periodě. Označení laminární model odpovídá NS rovnicím 3.1 a rovnici kontinuity 3.3 uvedených v teoretické části.



Obrázek 5.15: Porovnání jednotlivých period axiálních rychlostí z numerického výpočtu. Sledovaný bod se nachází v polovině trubice a středu jejího průřezu. Šestá perioda, která se téměř shoduje se sedmou se bere jako ustálená.

Graf 5.16 znázorňuje periodu naměřenou experimentálně (modrá) a dvě periody z numerického řešení. Jedná se o ustálené periody SST $k-\omega$ modelu (červená) a laminárního modelu (žlutá). Do grafu je přidáno přiblížení jednoho časového úseku $t \in <0,33; 0,36>$ nalevo. Lze si všimnout větší shody laminárního modelu při akceleraci kapaliny. To může odpovídat teorii, kdy laminarizování proudu je důsledkem zrychlování kapaliny. Naopak pozorovatelný rozdíl je při zpomalování, zejména od 0,6 s, kdy se experimentálnímu řešení přibližuje více turbulentní model $k-\omega$ SST s tlumícím koeficientem turbulentní viskozity. Maximální

rozdíl modelu $k-\omega$ SST a experimentu lze pozorovat na patě rychlostní vlny v čase 0,5 s, který činí přibližně 28%. Pro laminární model je maximální rozdíl v čase 0,65 s, a to 50%. Největší neshoda laminárního modelu s experimentem nastává od časového úseku $t > 0,6$ s, kdy kapalina zpomaluje, téměř stagnuje. Z porovnání rychlostí v jednom bodě se zdá být $k-\omega$ SST model přesnější a zachycuje i laminární proudění kapaliny. Statisticky lze periody jednotlivých řešení vyhodnotit pomocí korelace a posoudit tak, který numerický model se více přibližuje reálnému experimentu.



Obrázek 5.16: Porovnání period axiální rychlosti experimentu a numerických modelů. Sledovaný bod se nachází v polovině trubice a středu jejího průřezu.

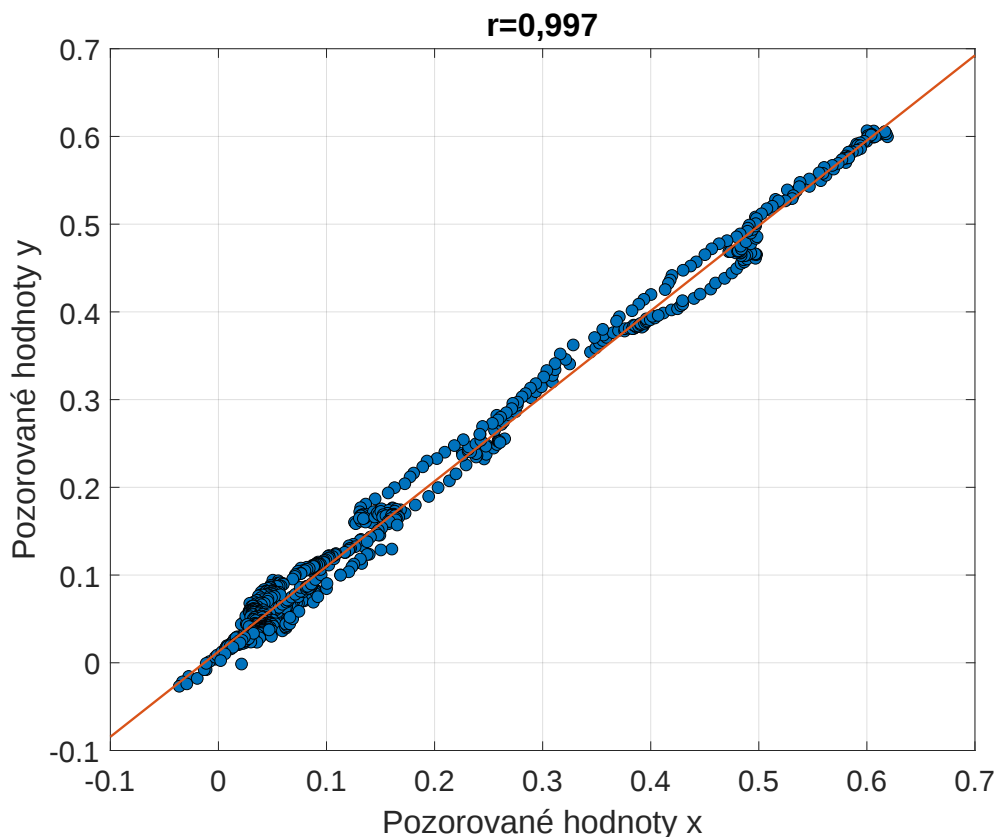
Pro porovnání respektive míru shody experimentu a numerického řešení byl využit Pearsonův korelační koeficient r_k . Koeficient udává míru lineární závislosti mezi dvěma veličinami x a y . V tomto případě se jedná o rychlosti periody z experimentu a ustálené periody z numerického výpočtu. Počet experimentálních jednotek n_p značí počet naměřených/vypočítaných rychlostí. Jelikož perioda trvá jednu sekundu a časový krok pro experiment i numerický výpočet je $t_k = 0,001$ s, je počet jednotek $n_p = 1000$. Koeficient r_k se pohybuje v rozmezí -1 až 1. Hodnota 0 značí nulovou korelaci a proměnné nemají žádnou souvislost. Hodnoty menší resp. vyšší jak 0 značí negativní resp. pozitivní korelaci. Výběrový průměr je počítán na základě vzorců 5.15. K výpočtu byl použit program MATLAB® R2019b, kde

je tento koeficient implementován.

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_p} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n_p} (y_i - \bar{y})^2}} \quad (5.14)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} y_i \quad (5.15)$$

Graf 5.17 značí míru korelace (lineární závislosti) mezi rychlostmi uvedených v obrázku 5.16. Pozorované hodnoty x představují axiální rychlosti z experimentu a y z modelu $k-\omega$ SST. Pearsonův korelační koeficient je pro tyto data $r_k = 0,9970$ a značí tak silnou pozitivní korelaci. V porovnání s laminárním modelem je tato hodnota přibližně stejná, tj. 0,9967. Přes celou periodu je shoda v pozorovaném bodu pro oba případy velmi dobrá.

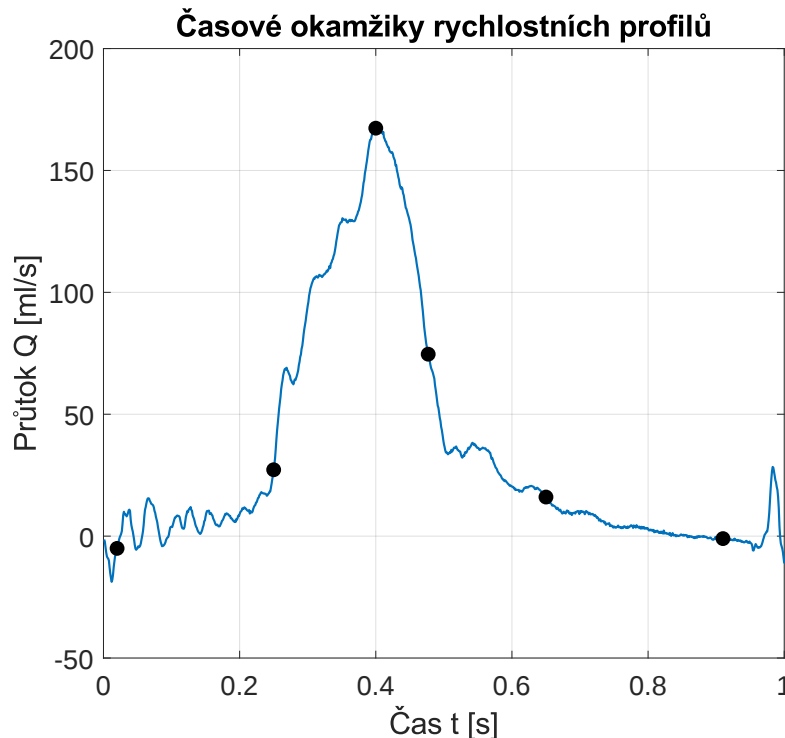


Obrázek 5.17: Silná pozitivní korelace axiálních rychlostí ve sledovaném bodu dat z PIV metody x a numerického výpočtu y . Pearsonův korelační koeficient $r=0,997$ pro $k-\omega$ SST model.

K porovnání rychlostních profilů byl pomocí programu Fluent[®] vypisován rychlostní profil uprostřed trubice pro každý časový krok do textového souboru a následně zpracován v programu MATLAB[®] R2019b. Rychlost byla zapisována pro každý uzel elementu, což se osvědčilo kvůli zachycení gradientu v blízkosti stěn. V porovnání s konstantním rozdělením na jednotlivé body v programu Fluent[®] „rake“ může při nedostatečném bodování rychlostní profily zkreslovat, a to zejména u stěn.

Data z PIV byly zaznamenány kamerou HiSense Neo od Dantec Dynamics. Trubice byla prosvícena pulsním laserem, který byl sesynchronizován tak, aby pulzace odpovídala, stejně jako u čerpadla, 1 Hz. Celkově bylo napočítáno 8000 rychlostních profilů, tedy 8 period. V důsledku rozdílného indexu lomu mezi různými materiály, jako je voda (proudící médium v trubici), sklo (materiál trubice) a vzduch (okolní médium), dochází ke zkreslení obrazu a tudíž i k zachycení jednotlivých částic. Což způsobuje chybné vyhodnocení rychlostních profilů a to zejména v blízkosti stěn, kde z hlediska analýzy proudění se jedná o velmi podstatnou oblast. Navíc nastávaly i situace, kdy se fluoreskující částice přichytávaly na stěnu trubice a při menším otřesu se vracely zpátky do proudu. To následně způsobilo chybu vyhodnocení rychlosti, jelikož se tato částice při vyhodnocovacím algoritmu mohla zaměnit s pozorovanou částicí. Hodnoty, které v oblasti stěny neměly nulovou rychlost byly vyhodnoceny jako chybné a upraveny tak, aby splnily podmínku ulpívání. Odebrání těchto hodnot a přidání nulové rychlosti může také výrazně změnit gradient v blízkosti stěn a nelze tak brát tyto rychlostní profily jako exaktní. Hmotnostní průtoková okrajová podmínka, která byla obdržena z této experimentální metody, není tak zcela přesná a tím pádem lze očekávat určité odchylky od experimentálního řešení.

Pro porovnání bylo vybráno celkově šest časových okamžiků, které jsou znázorněny na periodě průtoku 5.18. Je znázorněn jak rychlostní profil z laminárního modelu tak turbulentního SST $k-\omega$. První bod se nachází na začátku periody, kde jsou výrazné oscilace. Druhý a třetí bod mapuje patu, resp. špičku průtokové vlny. Čtvrtý bod zachycuje oblast, při prudkém klesání rychlostí. Pátý bod slouží k porovnání rychlostních profilů při nižších průtocích, kde je možné pozorovat zpětné proudění v blízkosti stěn. Šestý bod znázorňuje opět rychlostní profily při velmi nízkých průtocích, kdy kapalina téměř stagnuje.

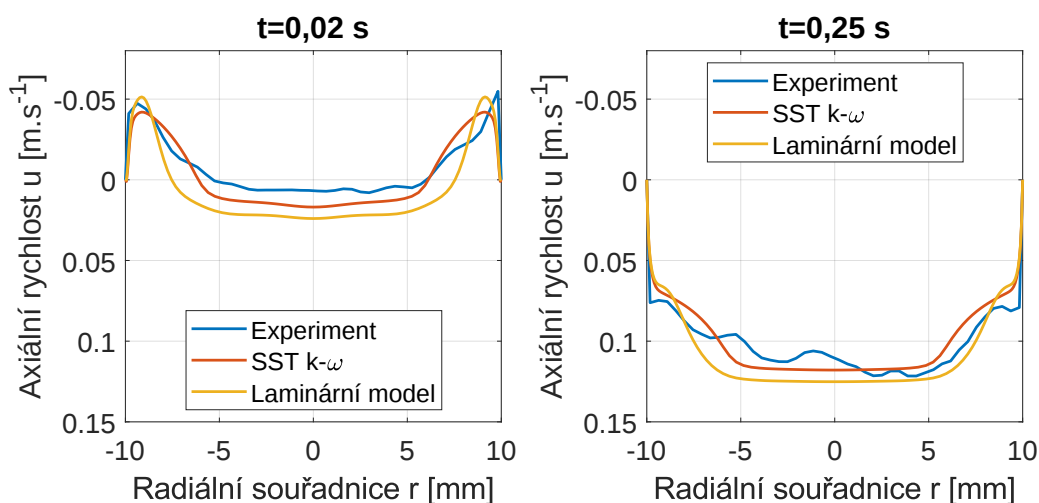


Obrázek 5.18: Znázornění časových okamžiků vybraných rychlostních profilů na průtoku Q .

V hydrodynamice jsou důležité oblasti velkých smykových rychlostí, tj. v blízkosti stěn, které úzce souvisí se smykovým napětím. Z hlediska hemodynamiky, to má pak souvislost s orientací a morfologií endoteliálních buněk. Kvůli čemuž se také vyhodnocují veličiny jako je např. TAWSS. Z tohoto důvodu je vyhodnocení numerické simulace soustředěno především na rychlostní profily. Je důležité poznamenat, že velikost průtoku se odvíjí od přesnosti integrace rychlostních profilů. Data z PIV byly zprůměrovány přes osu symetrie potrubí. Navíc diskretizace PIV po průřezu je 0,46 mm, což vzhledem ke komplexnímu tvaru profilů (obzvláště v nízkých rychlostech se zpětným prouděním) může způsobovat nepřesnost. Pokud by byla trať opatřena například magneticko-indukčním průtokoměrem, který je schopen při správném nastavení měřit takový pulsující průtok, bylo by toto řešení přesnější.

První bod představuje začátek periody při nízkých průtocích. Je možné pozorovat přechod ze zpětného proudění v blízkosti stěn (graf vlevo), kdy po čase v závislosti na rostoucím průtoku úplně vymizí (graf vpravo). Tento jev je zapříčiněn viskózními silami, které mají větší vliv v blízkosti stěn. Nejprve dochází k vývinu rychlostního profilu ve středu trubice (dominance nestacionárních setrvačných sil) a vývin rychlostí v blízkosti stěn je opožděn. Jakmile je kapalina urychlována a setrvačné síly se zvětšují je vliv viskózních sil směrem ke stěnám trubice více zanedbatelný. Tento nárůst hybnosti je doprovázen příznivým tlakovým gradientem $\frac{dp}{dt} < 0$, kdy tlak ve směru proudění v závislosti na čase klesá. Jedná se o pulsující proudění a je sledováno pouze jedno místo, tudíž se tento gradient mění výhradně na čase. Navíc změna průřezu po délce trubice je v okolí zájmu nulová $\frac{dS}{dz} = 0$ a odtržení mezní vrstvy tak není ovlivněno geometrií (viz graf 5.20).

Rychlostní profily - porovnání

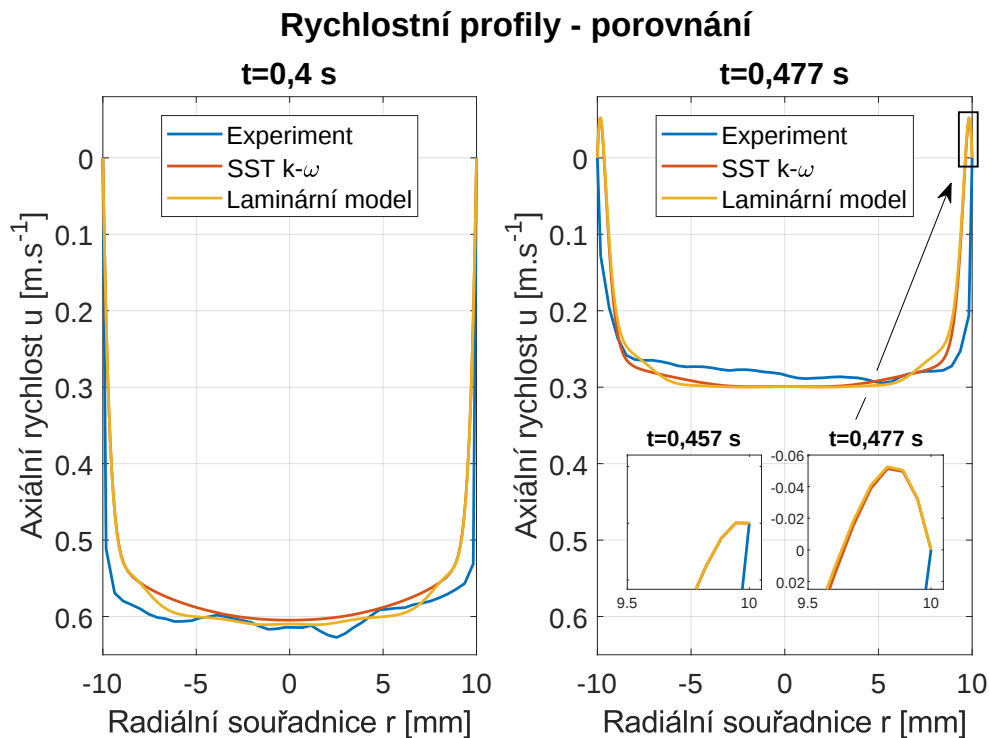


Obrázek 5.19: Porovnání rychlostních profilů pro časové okamžiky $t=0,02$ a $0,25$ s znázorněné na obrázku celé periody 5.18.

Následující grafy zachycují rychlostní profily při maximálním průtoku a prudkém poklesu průtoku, tj. okamžik, kdy jsou zpětné ventily membránového čerpadla zavřené. V porovnání s numerickými simulacemi je rychlostní gradient u stěn výrazně větší (modrá). Avšak toto znázornění v důsledku s výše zmíněnými nepřesnostmi nemusí úplně odpovídat realitě. Experimentální trať je navíc opatřena dalšími ventily a prvky, které nejsou v CFD mo-

delu zahrnuty, což může přispívat k dalším odchylkám. U obou numerických modelů si lze všimnout dřívějšího vývinu zpětného proudění (5.20 vpravo), kde na rozdíl u experimentu je pozorován se zpožděním 0,1 s. Je však otázkou zdali k tomuto proudění nedošlo nebo není jen zachyceno PIV metodou. Zpětné proudění nastává při zpomalování kapaliny a je důsledkem nepříznivého tlakového gradientu tj. $\frac{dp}{dt} > 0$ (tlak narůstá ve směru proudění v závislosti na čase). Tento gradient destabilizuje mezní vrstvu v blízkosti stěn trubice, kde kinetická energie částic není dostatečná k překonání tlakového nárůstu. V určitém časovém okamžiku tak vznikne bod, kde je rychlostní gradient a tudíž i smykové napětí nulové. Tento tzv. bod separace lze pozorovat ve stejném okamžiku u obou modelů v čase 0,457 s. Následně dochází k odtržení mezní vrstvy, zavření a zpětnému proudění těchto částic ($t=0,477$ s). Tudíž vířivost v tomto tzv. úplavu bude mít opačný směr oproti hlavnímu směru proudění a v místě, kde se proud obrací, bude nulová.

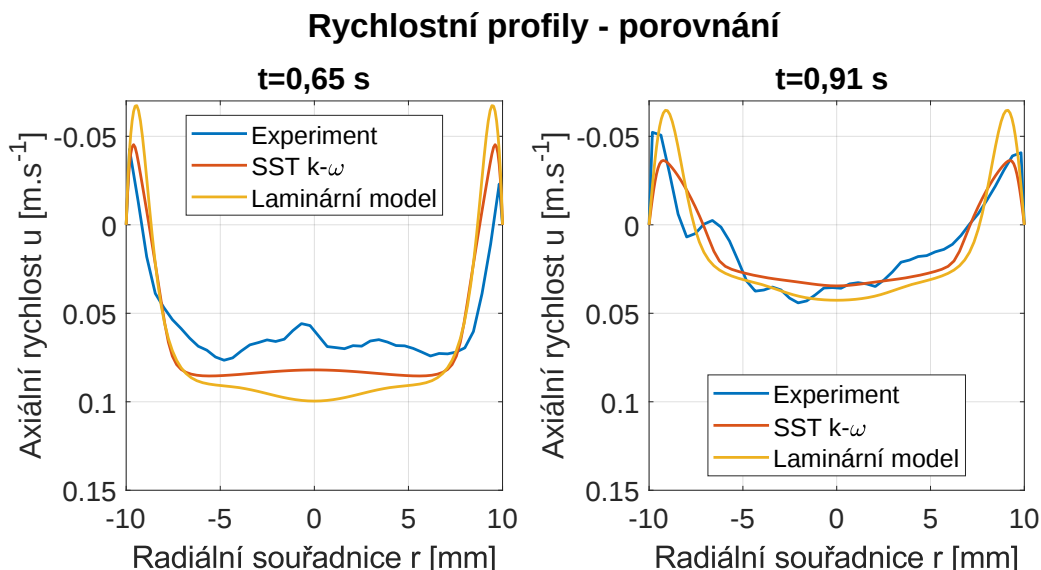
Jedná se tak o obdobu případu, kdy v závislosti na poloze ve směru proudění ($\frac{\partial p}{\partial z} > 0$) dochází k odtržení mezní vrstvy (například profil křídla). Matematicky je tento problém popsán pro případ stacionárního proudění v laminární mezní vrstvě, kdy se vychází z NS rovnic (2D). Na tyto rovnice je aplikována rozměrová analýza, která vede na zanedbání některých jejích členů. Celkově jsou tak obdrženy dvě rovnice pro laminární mezní vrstvu, tzv. Prandtlovy rovnice. Důležitá rovnice při objasňování odtržení mezní vrstvy představuje $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Plyne z ní fakt, že tlak napříč mezní vrstvou se nemění [52].



Obrázek 5.20: Porovnání rychlostních profilů pro časové okamžiky $t=0,4$ a $0,477$ s znázorněné na obrázku celé periody 5.18.

V okamžiku maximálního průtoku (obr. 5.20 vlevo) je rozdíl mezi laminárním a turbulentním profilem zanedbatelný. Významnější rozdíl se ukazuje až ve fázi téměř maximálního zpomalení kapaliny (obr. 5.21 vlevo, bod 4), kdy laminární profil má tendenci zachovávat

tvar s pozůstatky paraboly, kdežto turbulentní profil je téměř plochý (mírně se dokonce propadá) a výrazně lépe odpovídá měření. Pro klidovou fázi (obr. 5.21, vpravo, bod 6), je shoda mezi experimentem a turbulentním profilem také lepší. Nicméně zde mohou být data z experimentu kvůli velmi nízkým rychlostem a komplexnímu charakteru z podstaty metody zatíženy chybou.



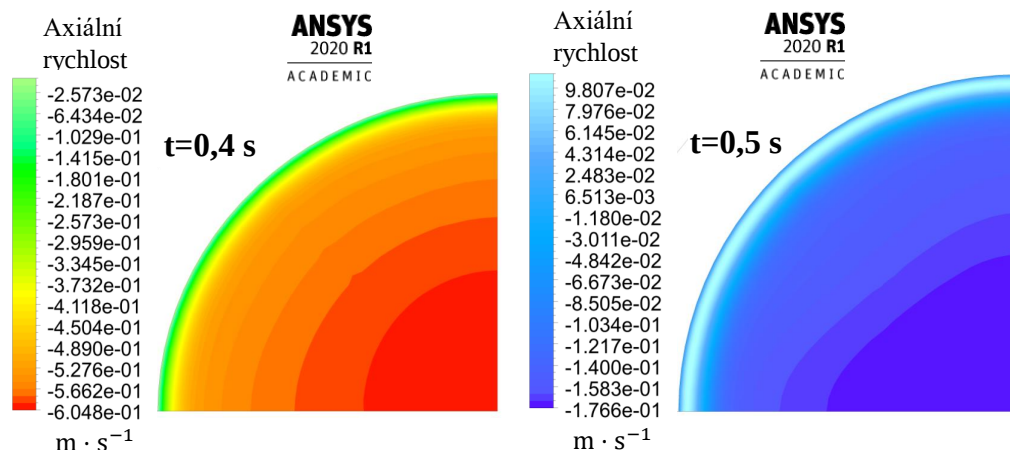
Obrázek 5.21: Porovnání rychlostních profilů pro časové okamžiky $t=0,65$ a $0,91$ s znázorněné na obrázku celé periody 5.18.

Znázornění kvantitativní shody představují odchylky od experimentálního řešení, které jsou stanoveny na základě průtoků v jednotlivých časových okamžicích. Pro rychlostní profily z numerické simulace byla zvolena následná numerická integrace. Daný profil byl proložen kubickým splinem, což znamená, že každý interval (vzdálenost mezi body) je proložen polynomem třetího stupně. Díky tomuto přesnému proložení je možné diskretizovat profil rovnoměrně. Z programu Fluent® v závislost na „bias“ faktoru je toto rozložení bodů nerovnoměrné. Dále jsou průtoky obdrženy stejným způsobem jako u okrajové podmínky a to na základě plochy mezikruží a odpovídající rychlosti (součet infinitezimálních průtoků).

Tabulka 5.2 reprezentuje procentuální odchylky od průtoků v experimentu. Zejména při velmi nízkých průtocích se tyto odchylky výrazně zvětšují. Toto je důsledkem nesymetrického rozložení rychlosti v radiálních směrech trubice, plynoucí z náhlého zúžení. Tím pádem i volby poloměru, na kterém jsou vykreslovány rychlosti (viz obr. 5.22). Zrcadlením jednoho rychlostního profilu tak není možné obdržet zadaný průtok. Naopak při vyšších průtocích je toto rozložení téměř symetrické a odchylky v průtocích jsou tak výrazně menší.

	0,02 s	0,25 s	0,4 s	0,477 s	0,65 s	0,91 s
SST $k-\omega$	-17,7%	3,2%	-0,1%	35,7%	12,4%	-70%
Laminární model	-74,6%	11,5%	1,4%	36,7%	10,3%	-79,1%

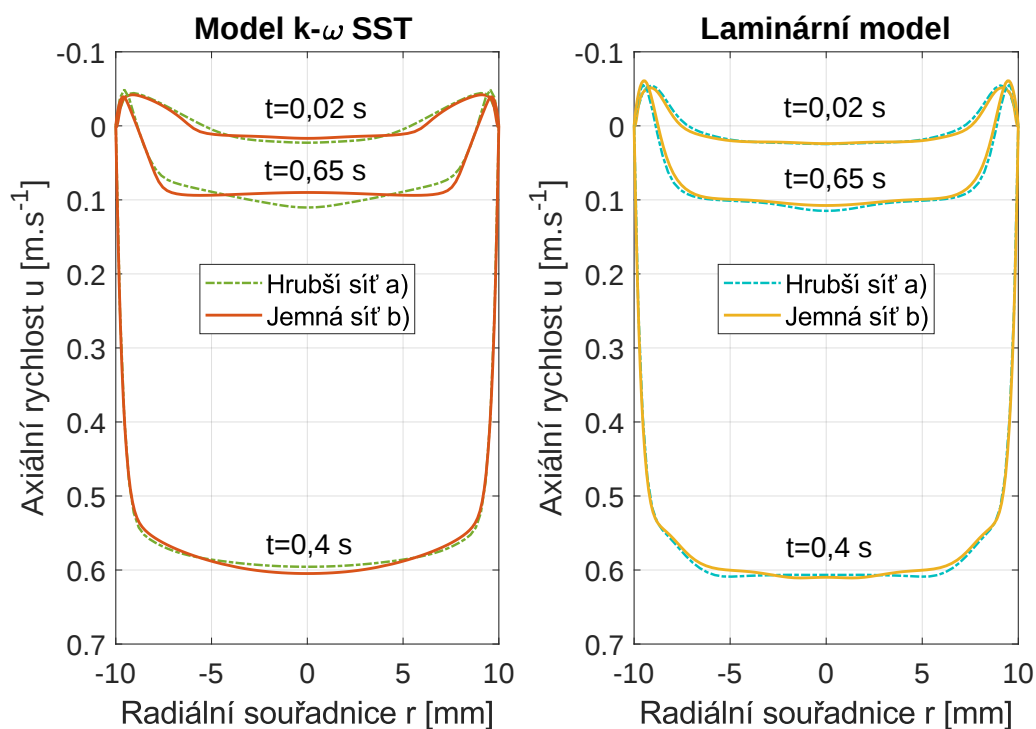
Tabulka 5.2: Procentuální odchylka jednotlivých modelů od PIV metody. Absolutní hodnotou je zde průtok, který je stanoven z PIV metody a znázorněn na grafu 5.18.



Obrázek 5.22: Kontury axiálních rychlostí při maximálním a výrazně nižším průtoku v polovině trubice (vykresleno je 50 kontur).

5.1.5 Nezávislost výsledků na výpočetní síti

Výsledky v předešlé kapitole byly pro oba případy porovnány s experimentálním měřením s jemnější sítí b), která je omezena studentskou licencí. Pro nezávislost výsledků na výpočetní síti byly vybrány stejné profily, které byly uvedeny v porovnání s experimentem.



Obrázek 5.23: Pro zhodnocení nezávislosti výsledků na výpočetní síti byly zvoleny tři rychlostní profily pro oba numerické modely.

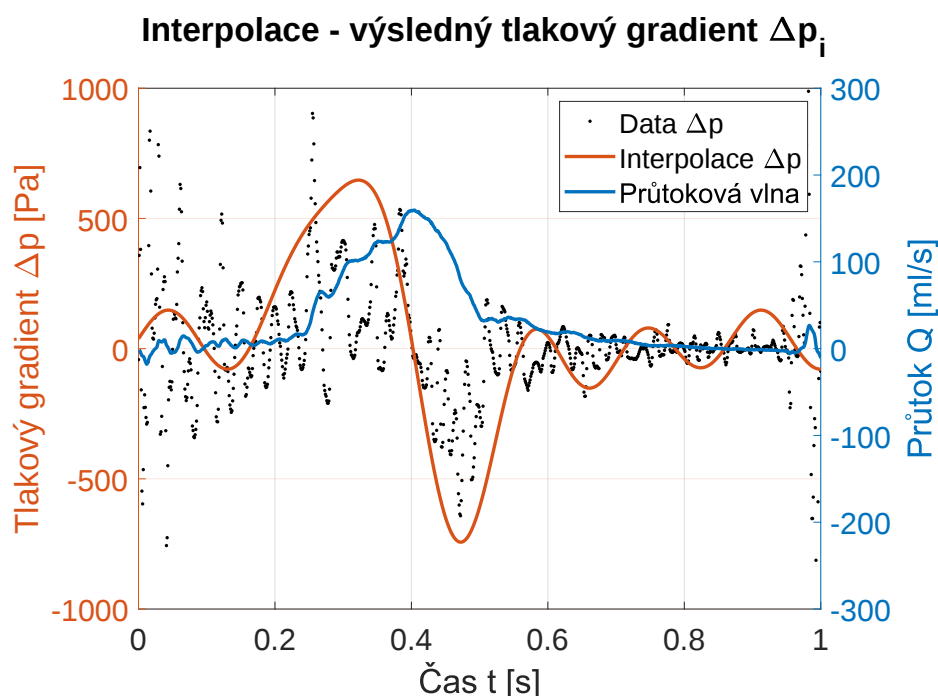
Porovnáním výsledků s hrubší sítí a) na obrázku 5.23 lze pozorovat rozdíly zejména ve středu trubice. V čase 0,65 s u SST $k-\omega$ se rychlostní profil díky kvalitnějšímu zjemnění ve středu trubice propadá, což odpovídá snížení rychlosti o 22%. Při maximálním průtoku je rychlost ve středu trubice pro síť b) větší o 1,5%. Zjemněním sítě je také ovlivněn čas odtržení mezní vrstvy, který je u hrubší sítě a) opožděn o 0,012 s.

Menší vliv výsledků na kvalitu výpočetní sítě je zaznamenán u laminárního modelu. Zjemněním sítě na téměř čtyřnásobný počet prvků jsou stále pozorovány pozůstatky laminárního parabolického profilu (0,4 s a 0,65 s). Při maximálním průtoku se tak rychlostní profil laminárního modelu jeví jako vlnitý. Procentuální odchylka v čase 0,65 s ve středu trubice činí přibližně 6,5 %.

5.2 Analytické řešení

Teoretický úvod analytického řešení byl nastíněn v sekci 3.3. Pro toto řešení je zásadní správně stanovit tlakový gradient Δp_i , ze kterého následně vychází rychlostní profily. Zdroje [48] a [28] upozorňují na to, že není možné stanovit gradient z tlakových snímačů ve velké vzdálenosti, protože se řešení se zvětšující se vzdáleností jednotlivých bodů zkresluje. Bylo tak využito dřívější numerické simulace, pomocí které se tento gradient stanovil. V průběhu výpočtu byly zaznamenávány dva relativní tlaky (statický + dynamický) ve vzdálenosti $\pm 3\text{cm}$ od poloviny trubice a následně určen jejich rozdíl ($\Delta p = p_1 - p_2$). Od tlaku p_2 byla odečtena hydrostatická složka tlaku úměrná vzdálenosti využitých bodů, tj. 6cm.

Dále je potřeba daný tlakový gradient vyjádřit pouze funkcemi cosinus, kvůli čemuž byla využita interpolace pomocí Fourierovi řady 5.16.



Obrázek 5.24: Interpolace tlakového gradientu obdrženého z numerické simulace pomocí Fourierovy řady. Pro orientaci je zobrazena i průtoková vlna.

V programu MATLAB[®] R2019b je dostupná aplikace „Curve Fitting“, kdy je možné využít až osmého řádu interpolace. Jako nejvhodnější se jevila interpolace pátého řádu, jelikož koeficient a_0 je zanedbatelný a po proložení frekvence odpovídá přibližně 1 Hz, tj. frekvence děje v experimentu.

$$\Delta p_i = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + a_3 \cos(3t) + b_3 \sin(3t) + a_4 \cos(4t) + b_4 \sin(4t) + a_5 \cos(5t) + b_5 \sin(5t) \quad (5.16)$$

K obdržení pouze funkce $M_n \cos(nt + \phi_n)$ pro jednotlivé řády $n=1 \div 5$ je potřeba využít rovnice 5.19 pro amplitudy M_n a goniometrických funkcí pro fáze ϕ_n 5.20. Obecně lze kosinový gradient rozložit podle následujícího vztahu.

$$M_n \cos(nt - \phi_n) = M_n \cos(nt) \cos(\phi_n) + M_n \sin(nt) \sin(\phi_n) \quad (5.17)$$

Vhodné substituce plynoucí ze vztahů 5.16 a 5.17 jsou $a_n = M_n \cos(\phi_n)$ a $b_n = M_n \sin(\phi_n)$, z čehož je pak vyjádřena amplituda M_n , kdy u jednotlivých koeficientů a_n a b_n nezáleží na znaménku ($\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$).

$$a_n^2 + b_n^2 = M_n^2 (\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n)) = M_n^2 \quad (5.18)$$

$$M_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (5.19)$$

K dodržení znaménkové konvence ze vztahu 5.17 je nutné brát fázi ϕ_n jako zápornou. Řešení závisí na kvadrantu, ve kterém konstanty a_n a b_n leží. Pro I. a IV. kvadrant platí vztah 5.20. Pro II. resp. III. kvadrant je potřeba posunout fázi ϕ_n o $+\pi$ resp. $-\pi$, čímž je zabezpečeno, že $\phi_n \in (-\pi, \pi)$ [30].

$$\phi_n = -\arctan\left(\frac{M_n \sin(\phi_n)}{M_n \cos(\phi_n)}\right) = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (5.20)$$

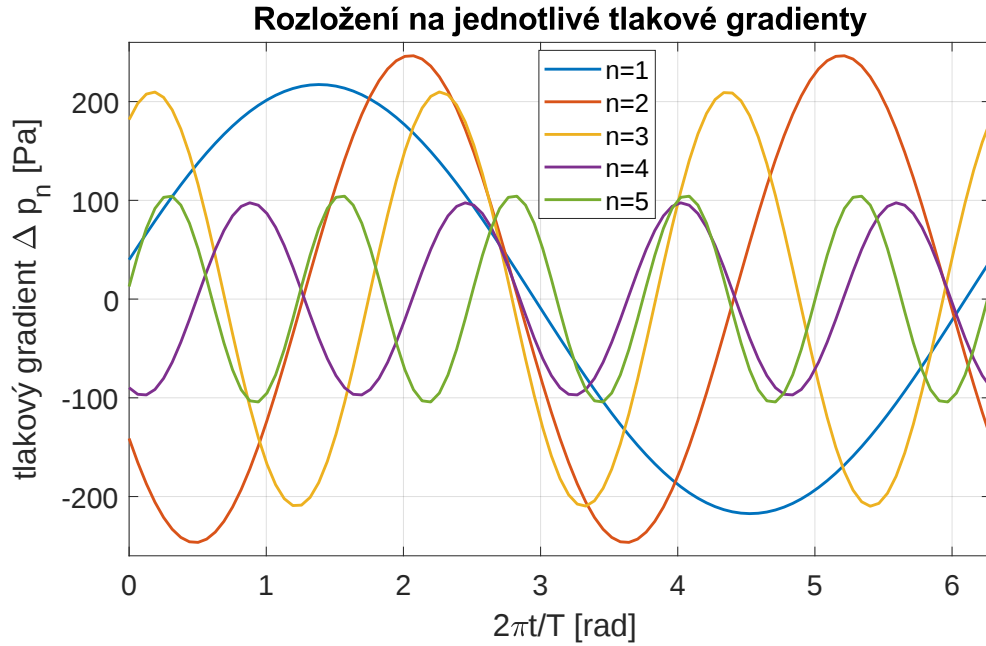
$$\phi_n = -(\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) + \pi) \quad \text{pro } a < 0 \wedge b > 0 \quad (5.21)$$

$$\phi_n = -(\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) - \pi) \quad \text{pro } a < 0 \wedge b < 0 \quad (5.22)$$

Následující graf zobrazuje jednotlivé tlakové gradienty Δp_n pro jednu periodu $0 \div 2\pi$. Sečtením těchto gradientů vyjádřených pouze pomocí funkce kosinus je obdržen výsledný tlakový gradient odpovídající Fourierově interpolaci na obrázku 5.24. Pro jednotlivá Womersleyho čísla α , které se mění v závislosti na n (α_n), jsou následně určeny konstantní amplitudy M_0 a fáze θ_0 . Pokud je $z < 45$ je využito tabulky 1 v příloze. Hodnoty z v tomto případě představují číslo α_n (viz vztah 3.43), kde k přesnějšímu řešení je využita lineární interpolace tabulovaných hodnot. Pro hodnoty $z > 45$ už nejsou k dispozici tabulky ale je možné využít vztahů 5.23 a 5.24.

$$M_{0n} = 10^{0,307093\alpha_n + \frac{0,0384}{\alpha_n} - 0,39909 - \frac{1}{2} \log(\alpha_n)} \quad (5.23)$$

$$\theta_{0n} = 40,51423\alpha_n - \frac{5,06}{\alpha_n} - 22,5 \quad (5.24)$$

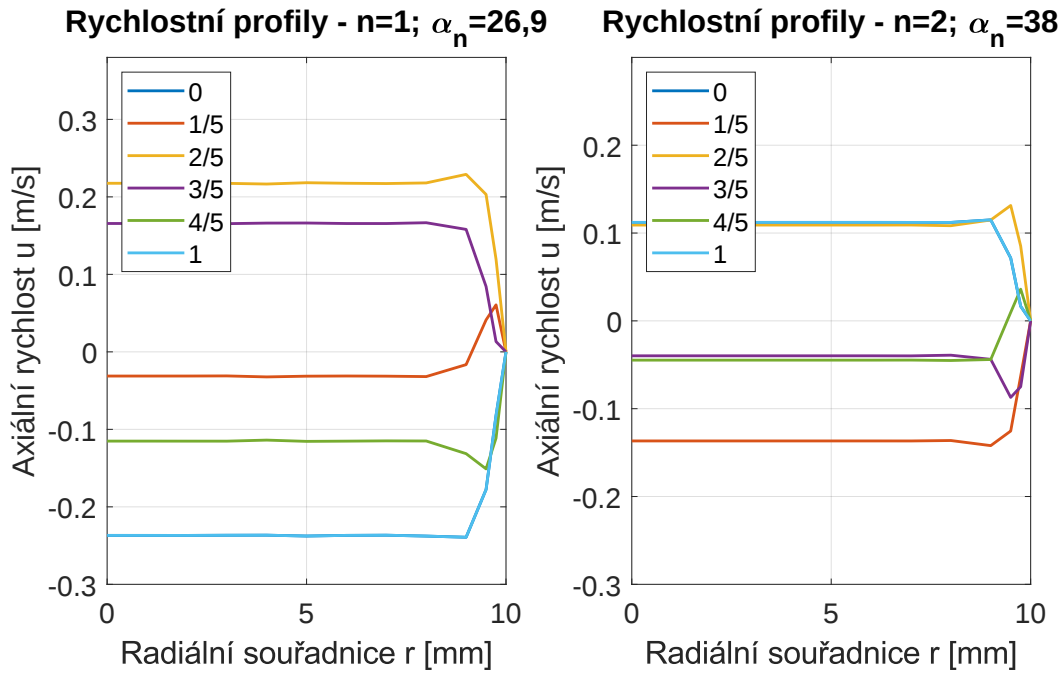


Obrázek 5.25: Jednoduché funkce cosinus odpovídající rozloženým tlakovým gradientům $\Delta p_n = M_n \cos(nt + \phi_n)$.

Poté jsou obdobným způsobem spočítány amplitudy $M_{0n}(y)$ a fáze $\theta_{0n}(y)$, které se navíc mění radiálně napříč trubicí. Tím pádem už není obdržen vektor jako v minulém případě (závislost pouze na α_n). Výsledkem je matice 5x12, kde počet řádků je reprezentován řádem Fourierovy transformace a počet sloupců radiální diskretizací. Proměnná z je teď počítána jakou součin radiální souřadnice y a čísla α (viz vztah 3.42). Nakonec jsou využity vztahy 3.48; 3.44; 3.49 a 3.50, ze kterých je obdržena amplituda M'_0 a fáze ϵ_0 . Velikostně zachovávají rozměr matice 5x12 plynoucí z předešlých matic. Jelikož finální vztah pro Womersleyho rychlostní profily 5.25 vychází z lineární diferenciální rovnice 3.23 platí, že suma jednotlivých řešení je také řešením.

$$u = \frac{M_n}{\rho} \frac{1}{n} M'_0 \sin(nt + \phi_n + \epsilon_0) \quad (5.25)$$

Pro lepší reprezentaci rychlostních profilů byla opět využita podmínka ulpívání pro reálnou kapalinu. V závislosti na časové diskretizaci je pro každé n obdržen určitý počet rychlostních profilů (obrázek 5.26), které jsou následně sečteny přes časové okamžiky. Pro ilustraci jsou uvedeny rychlostní profily pro $n = 1$ a 2, kde perioda je pro přehlednost rozdělena pouze na šest časových okamžiků. Tyto profily odpovídají dílčím tlakovým gradientům Δp_n , kdy jejich součtem je obdržen výsledný interpolovaný tlakový gradient Δp_i . Taktéž to platí i pro profily, které se sečtou ve stejný časový okamžik a tím je získán výsledný rychlostní profil odpovídající Δp_i . Na grafech je pouze pět rychlostních profilů a to z toho důvodu, že děj je periodický a pro 0 a 2π se profily shodují.



Obrázek 5.26: Rychlostní profily odpovídající dílčím tlakovým gradientům s časovou diskretizací $1/5$ periody.

Womersleyho číslo α_n je počítáno na základě výsledné frekvence Δp_i a je funkcí Fourierova řádu interpolace n .

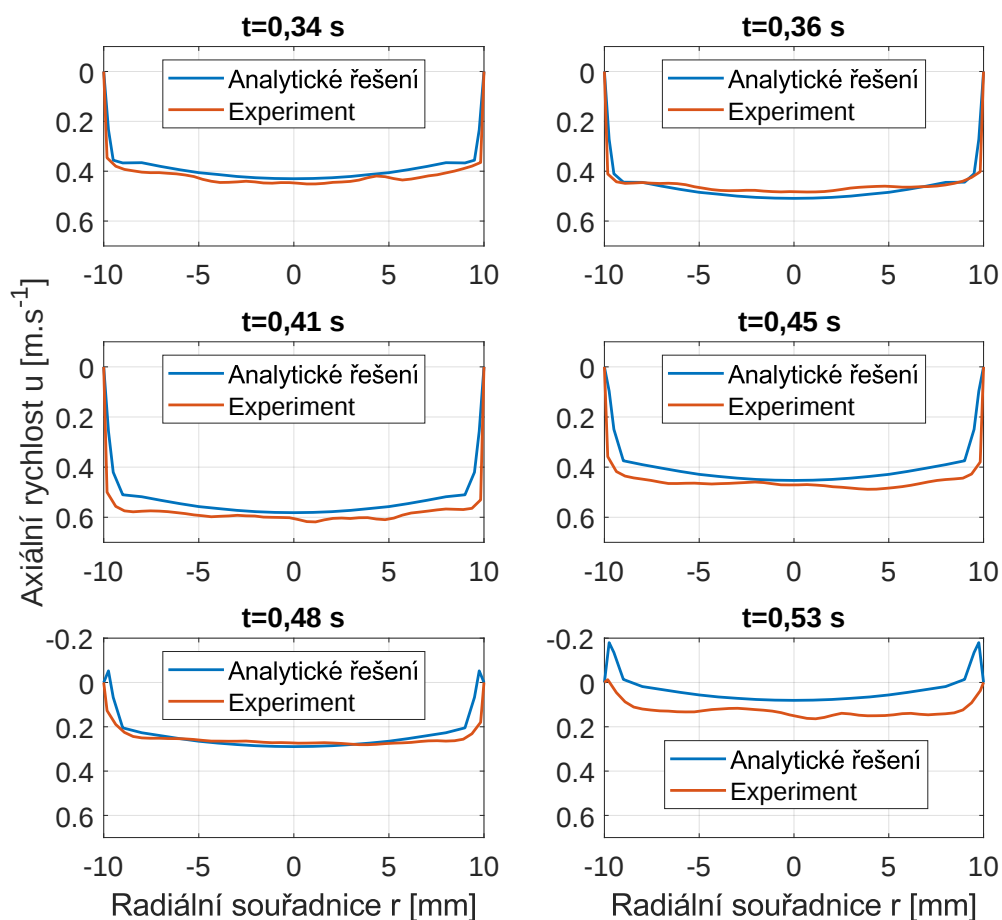
$$\alpha_n = R \sqrt{\frac{2\pi n f}{\nu}} \quad (5.26)$$

K tomu, aby byl popsán správný pohyb kapaliny v trubici a analytické řešení bylo kompletní je potřeba přičíst k těmto rychlostním profilům parabolický profil [48]. Ten zastupuje ustálené laminární proudění, kdy jeho maximální rychlost byla vypočítána z průměrné rychlosti za periodu. Parabolický profil byl tak stanoven pomocí rychlosti ve středu trubice $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a nulové rychlosti na stěně trubice.

Výsledné profily úzce souvisí s přesností interpolace a jelikož tlakový gradient osciluje na více frekvencích, nelze předpokládat velkou přesnost řešení. V literatuře je tato metoda používána na jednoduchou křivku tlakového gradientu, kde již čtvrtý řád Fourierovy transformace je přesný. V tomto případě je použit pátý řád a jak je znázorněno na grafu 5.24 je vidět velkou neshodu interpolace. Otázkou pak je, zdali při přesném interpolaci bude tato metoda pro tento gradient vůbec vhodná.

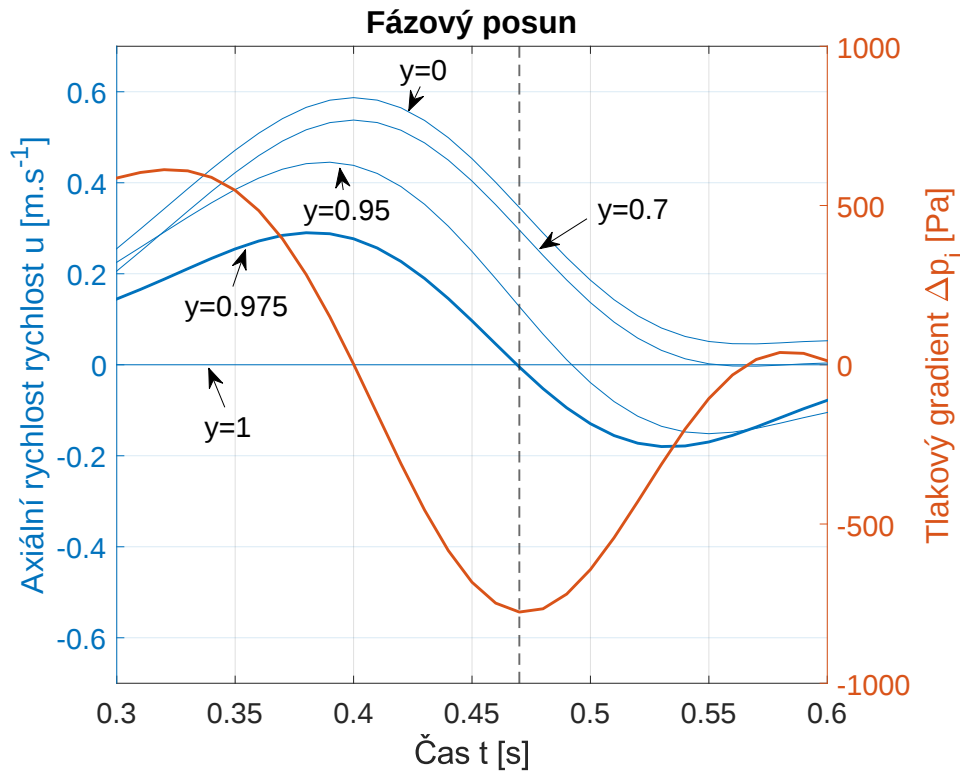
Při analýze rychlostních profilů s časovou diskretizací $0,01 \text{ s}$ se pro tuto interpolaci pohyb kapaliny přibližoval k experimentu pouze v oblasti od $1/3$ do $1/2$ periody. Pro tuto oblast bylo vybráno opět šest časových okamžiků, kdy i při velmi oscilujícím tlakovém gradientu je vidět obdobné chování rychlostních profilů. Graf v čase $t=0,48 \text{ s}$ odpovídá přibližně stejnému časovému okamžiku jako 5.20 vpravo, při kterých je zachycen stejný vývin záporného proudění u analytického a numerického řešení. Rozdíl v maximálních záporných rychlostech činí pouze $0,24 \%$. Na rychlostních profilech v čase $t=0,51 \text{ s}$ se analytické řešení začíná odchylovat od experimentu a následně kvůli nesprávnému zachycení interpolované tlakové vlny se profily nechovají v souladu s experimentálním řešením.

Rychlostní profily - porovnání



Obrázek 5.27: Porovnání experimentu a analytického řešení pro jednotlivé časové okamžiky.

Obr. 5.28 reprezentuje jednotlivé rychlosti bodů radiální diskretizace v závislosti na čase (obdobný případ grafů 5.27). Je brán pouze úsek, kde sejevila interpolace tlakovým gradientem jako dostatečná. Bezrozměrná veličina $y = \frac{r}{R}$ značí radiální pozici v trubici. Hodnota $y = 1$ představuje podmínku ulpívání na stěně a tak je rychlost přes celou periodu nulová. Naopak křivka $y = 0$ zastupuje průběh rychlosti ve středu trubice. Na tomto grafu je dobře zachycen vývin zpětného proudění, kde nejprve nastává v nejbližším bodě u stěny ($y=0,975$). Tato křivka se nejvíce fázově blíží k tlakovému gradientu, kdežto ostatní se čím dál více odchylují. To je způsobeno právě vlivem viskózních sil u stěn, kde je malá hybnost částic kapaliny a tudíž se chovají téměř okamžitě v závislosti na změně tlakového gradientu. S větší blízkostí ke stěně by se modrá křivka posunovala doleva a byla by více utlumená kvůli menším rychlostem. Na druhou stranu křivka $y = 0$ střed (střed trubice) je nejvíce fázově posunutá oproti Δp_i , kde nedochází k zápornému proudění (dominance setrvačných sil). Tento fázový posun je matematicky vyjádřen fází ϵ_0 (rovnice 5.25) vyjadřující vliv nestacionárních setrvačných sil. Jak již bylo zmíněno v sekci 5.1 zpětné proudění je doprovázeno nepříznivým tlakovým gradientem. To znamená, že jeho časová derivace je kladná, což je splněno na oranžové křivce napravo od přerušované oblasti, která protíná křivku $y = 0,975$ v nulové rychlosti (bod separace).



Obrázek 5.28: Souvislost tlakového gradientu Δp_i s axiálními rychlostmi u v jednotlivých bodech radiální diskretizace y .

5.3 Newtonský a ne-newtonský model krve

Pro zachycení vlivu ne-newtonského chování krve byl využit model Carreau 5.27, který je dostupný v programu Fluent[®]. Následně je tento model porovnán s newtonským modelem krve, tj. modelem o konstantní viskozitě při smykové rychlosti $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$. Pro tuto analýzu je použita stejná geometrie jako v sekci Numerická simulace 5.1. Na základě nezávislosti sítě byla využita hrubší síť a) ca 140k prvků s modelem $k-\omega$ standard, který akceptuje y^+ u stěny do hodnoty 5 [35]. Tento model byl zvolen kvůli výrazně lepší konvergenci nežli $k-\omega$ SST, se kterým řešení divergovalo. Turbulentní model $k-\omega$ standard taktéž umožňuje tlumení turbulentní viskozity μ_t pomocí koeficientu α^* . Carreau model je dostupný jako výchozí nastavení v programu Fluent[®] pouze pro laminární proudění, pro které je také odvozen. U turbulentních modelů je nutné pomocí příkazového řádku povolit ne-newtonské modely („define/models/ viscous/turbulence-expert/turb-non-newtonian?“). V programu Fluent[®] je smyková rychlost $\dot{\gamma}$ pod názvem „strain rate“ (rychlost deformace), která byla zaznamenávána každý časový krok. V tabulce 5.3 jsou shrnuty hodnoty jednotlivých konstant a hustoty krve.

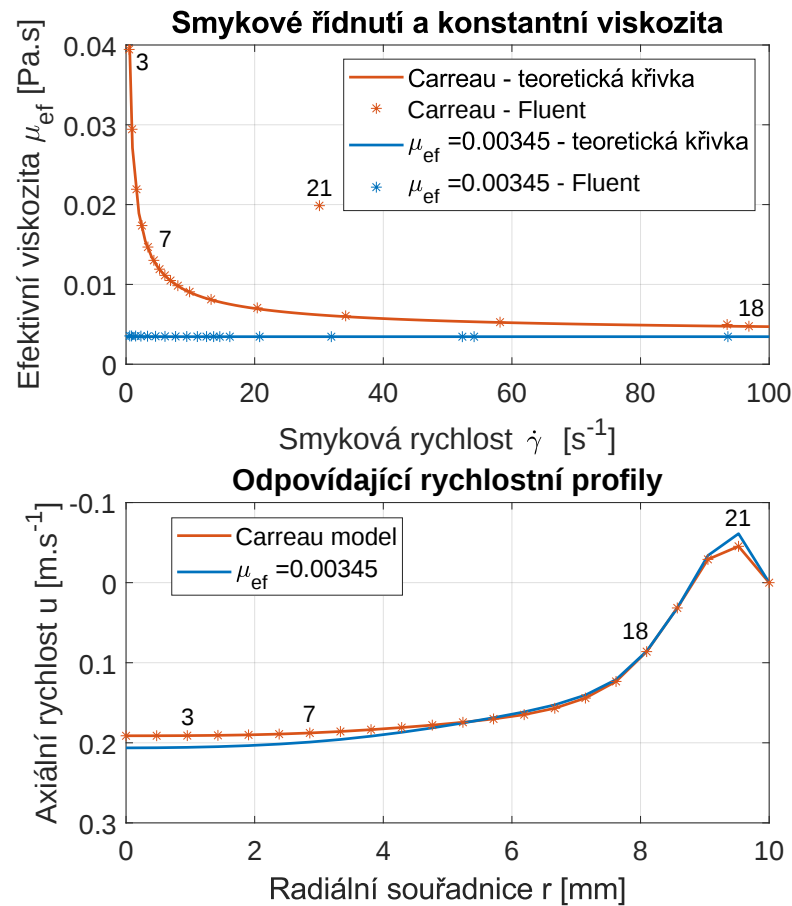
$$\mu(\dot{\gamma}) = (1 + (\lambda_k \dot{\gamma})^2)^{\frac{n_k-1}{2}} (\mu_0 - \mu_\infty) + \mu_\infty \quad (5.27)$$

Grafy z obrázku 5.29 znázorňují závislost efektivní viskozity μ_{ef} na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ a jejich odpovídající rychlostní profily pro Carreau model (smykové řídnutí) a při uvažování pouze konstantní viskozity ($\mu_{ef} = 0,00345$ Pa.s). Ve středu trubice je přibližně plochý

λ_k [s]	n_k [-]	μ_0 [Pa·s]	μ_∞ [Pa·s]	ρ [kg·m ⁻³]
3,313	0,3568	0,056	0,00345	1060

Tabulka 5.3: Konstanty pro ne-newtonský model krve Carreau a hustota krve [16].

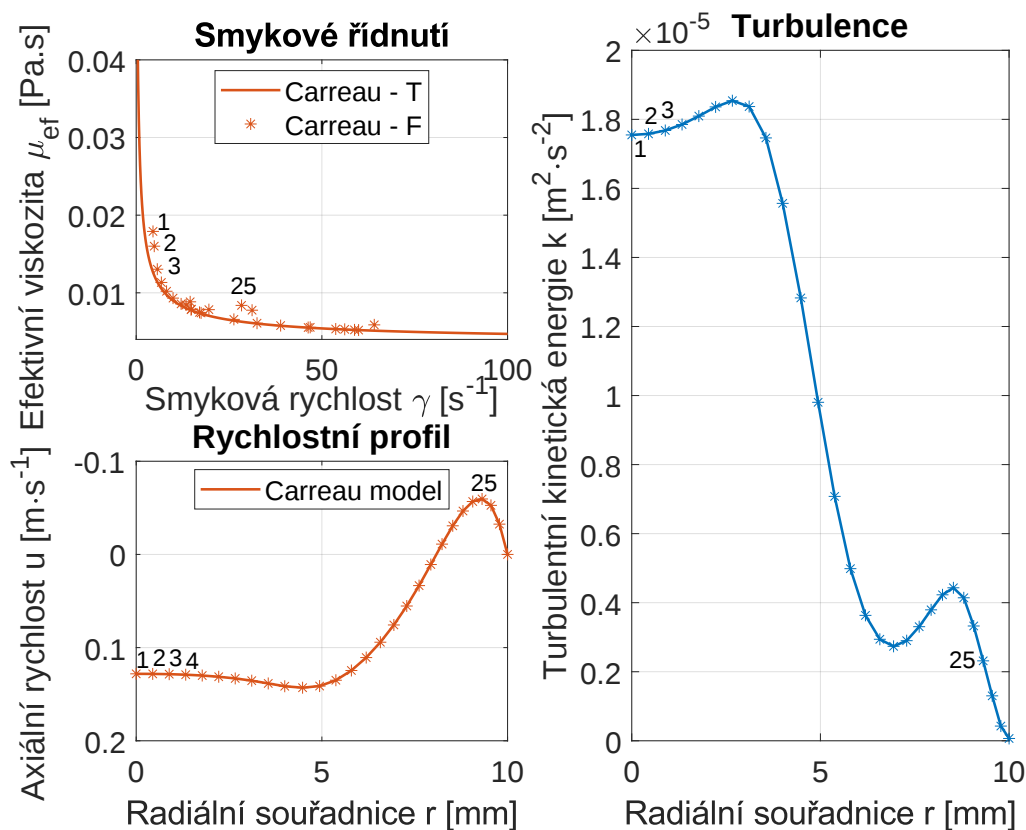
rychlostní profil ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$) a tím pádem je zde viskozita největší. Viskozita představuje určitý odpor proti proudění a tak v porovnání s newtonovským chováním kapaliny je rychlost menší (body 3 a 7). Ve středu trubice ($r=0$) rozdíl viskozity 0,0487 Pa·s způsobuje 7,3 % rozdíl v rychlostech. S rostoucím rychlostním gradientem (smykovou rychlostí) se tento rozdíl výrazně zmenšuje, kde v bodě 18 už je rychlost přibližně totožná. V tomto případě se však jedná o proudění pouze v přímé trubici a vliv smykového řídnutí není tak markantní, jako by mohl být ve složitějších geometriích (viz obrázek 4.4). V teoretické části bylo navíc konstatováno zanedbání ne-newtonského chování při průměru trubice větší jak 1 mm (v tomto případě $D = 20$ mm).

Obrázek 5.29: Vliv uvažování pouze newtonského chování v porovnání s Carreau modelem v polovině trubice o průměru $D = 20$ mm v časovém okamžiku $t=0,52$ s

Z analýzy každého časového kroku lze vypočítat odchýlení vypočítaných bodů viskozity v programu Fluent® od teoretické křivky (bod 21). Toto vychýlení je pozorováno jen v některých časech a přes celou periodu se viskozita odchyluje pouze k větším hodnotám, než

je teoretická křivka. V bodě 21 je tak výrazně větší viskozita, a to o 69%. Tím je rychlost pozorována na profilech nižší, než by byla při teoretické viskozitě. Toto je způsobeno užitím turbulentního modelu, pro který ne-newtonské chování kapalin není zcela probádáno a neexistuje tak žádný obecný model pro turbulentní proudění. V programu Fluent® je viskozita uvažována pouze jako funkce smykové rychlosti, která souvisí s druhým invariantem II_D . Na druhou stranu většina bodů odpovídá této teoretické křivce a model $k-\omega$ standard s tlumícím koeficientem pro nízkou intenzitu turbulence (vstup a výstup - 1%), se tak jeví jako dostatečný pro popsání transientních jevů s Carreau modelem. Časový okamžik byl zvolen na základě zachycení všech zmíněných jevů. Při maximálním průtoku je rozdíl rychlostí ve středu trubice přibližně stejný jako je na obr. 5.29 a tudíž více zanedbatelný vzhledem k větším rychlostem. V blízkosti stěn kvůli velkým smykovým rychlostem je tento rozdíl mizivý. Proto znázornění více okamžiků není potřebné.

Jelikož se jedná o turbulentní model, bylo předpokládáno, že četnost těchto odchylek bude výraznější při větší turbulenci, resp. turbulentní kinetické energii k . Proto byla vybrána oblast za náhlým zúžením, kde dochází k největší nestabilitě a zavírání (vzdálenost od výstupu $l_p = 0,5225$ m). Grafy 5.30 reprezentují časový okamžik $t=0,6$ s, kde byl pozorován největší nárůst k za periodu.



Obrázek 5.30: Vliv turbulentní kinetické energie k na Carreau model v okamžiku $t=0,6$ s, kdy je pozorována největší míra turbulence.

V porovnání s minulým případem dochází k odchýlení pravidelněji a to zejména při vyšších k . V bodě 1 je viskozita vyšší o 30% a postupně s radiální souřadnicí klesá. Výjimkou je

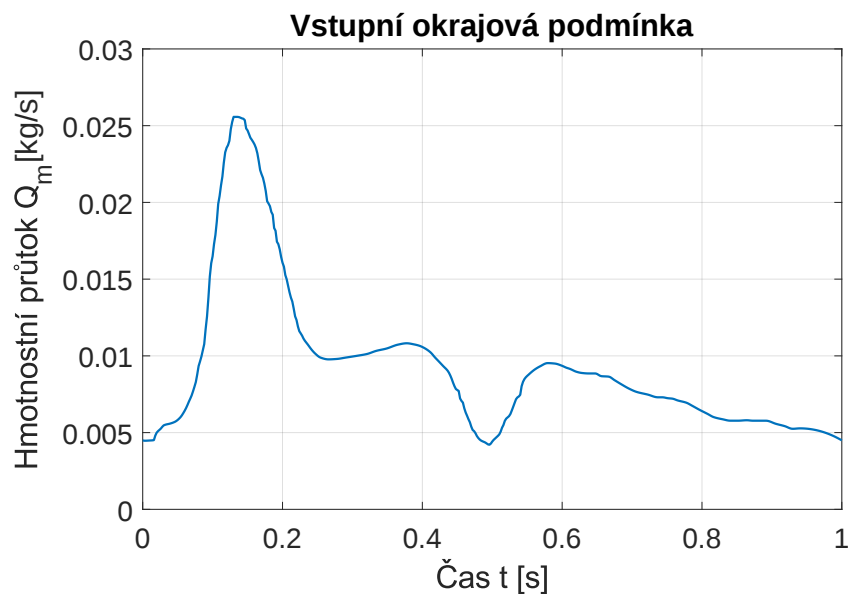
však bod 25, kde je skoro nejmenší hodnota k a nadhodnocení viskozity je oproti ostatním bodům vyšší. Jedná se o bod jako v minulém případě (pozorováno na rychlostním profilu 5.29), který se nachází v oblasti zpětného proudění. Jelikož je ale k závislá na intenzitě turbulence I (na vstup a výstup zadáno pouze 1%), je pravděpodobné, že by při vyšší I bylo toto odchýlení větší. Tato závislost se řídí vztahem 5.28 [3], kde v_p je průměrná rychlost.

$$k = \frac{3}{2}(v_p I)^2 \quad (5.28)$$

5.4 Specifická karotida pacienta

Poslední sekce v praktické části se zabývá stanovením možných nefyziologických míst pouze z pohledu hemodynamiky. Tyto místa mohou následně způsobovat aterosklerózu vedoucí ke zhoršení průchodnosti arterie (stenózu), což způsobuje větší zátěž na srdce. Geometrie a výpočetní síť specifické karotidy byla obdržena od pana Ing. Ondřeje Lisického, která byla následně upravována pro turbulentní model. Na základě předešlých numerických simulací byl vybrán k - ω SST model při nízkých Reynoldsových číslech s Carreau modelem. Intenzita turbulence byla opět předpokládána nízká s hydraulickým průměrem CCA ($I = 1\%$; $D_h = 8$ mm).

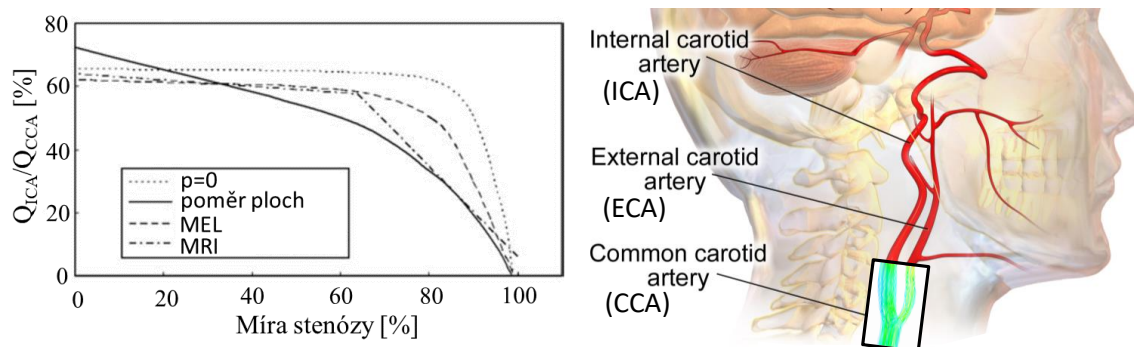
Ke stanovení okrajových podmínek byl využit článek [11], kde jsou zaznamenány průtoky jak pro společnou karotidu („Common Carotid Artery“-CCA), tak pro interní (ICA) a externí (ECA). V tomto případě byl využit pouze průtok CCA, a to na vstupní okrajovou podmínku.



Obrázek 5.31: Perioda hmotnostního průtoku určena ze zdroje [11], která odpovídá průtoku v CCA.

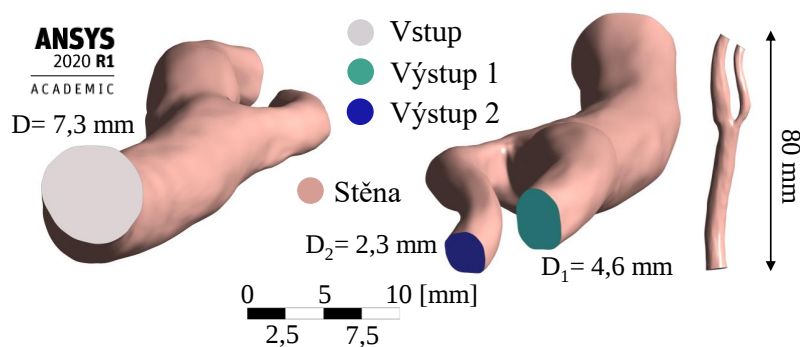
Jelikož se jedná o ideálně tuhý model a vstupní okrajovou podmínkou je průtok, lze na výstup použít konstantní tlak. Výpočet se řídí pouze tímto průtokem respektive tlakovým gradientem, který se chová v závislosti na této okrajové podmínce. Tudíž tlaková výstupní

podmínka nemá vliv na rychlostní pole a veličiny s ní spojené. To je pro tento případ vhodné z hlediska stanovení luminálního smykového napětí WSS. Problém je však v rozdělení průtoku z CCA do jednotlivých větví karotidy. Tento poměr průtoku v ICA a CCA závisí především na míře stenózy (obr. 5.32). S konstantním tlakem v CFD dochází k výrazné změně průtoků až při 80% stenózy a oproti výsledkům z magnetické rezonance (MRI) se tak výrazně liší. Metoda MEL („Minumum Energy Loss“) představuje algoritmus, který odhaduje průtoky na základě minimální energetické ztráty mezi vstupem a výstupem. Touto metodou je poměr průtoků od 65% nadhodnocován. Poměr ploch na druhou stranu poměr průtoků od 60% podceňuje. Protože je zde provedena simulace zdravé karotidy, tzn. 0% míra stenózy, je viditelné, že konstantní tlak splňuje tento poměr dostatečně.



Obrázek 5.32: Poměr průtoků ICA a CCA v závislosti na míře stenózy. Porovnání CFD výpočtů (konstantní tlak, poměr ploch, metoda MEL) s výsledky z MRI [51]. Obrázek vpravo znázorňuje polohu karotidy [47].

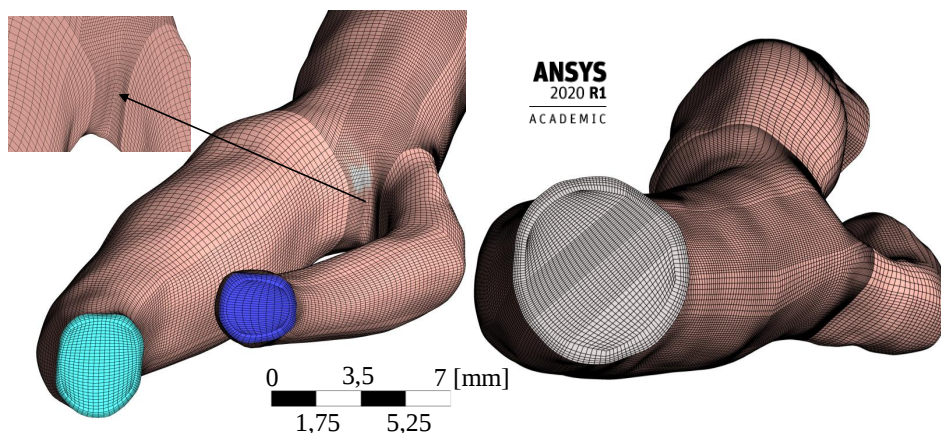
Přehled okrajových podmínek a základní geometrické rozměry pravé karotidy jsou uvedeny na obrázku 5.33. Průměr ICA (D_1) je v tomto případě přibližně dvojnásobně větší než ECA (D_2). Výšek geometrie karotidy je dlouhý 80 mm s hlavní větví o průměru D .



Obrázek 5.33: Znázornění jednotlivých okrajových podmínek pro numerický výpočet. Uvedeny jsou rozměry průměrů CCA, ICA, ECA (D_1 , D_2 , D_3) a délky karotidy.

Výpočetní síť 5.34 byla následně upravena tak, aby co nejvíce odpovídala podmínkám výpočtového viskózního modelu. Největší stěnové y^+ se projevovalo v místě bifurkace. Nutno

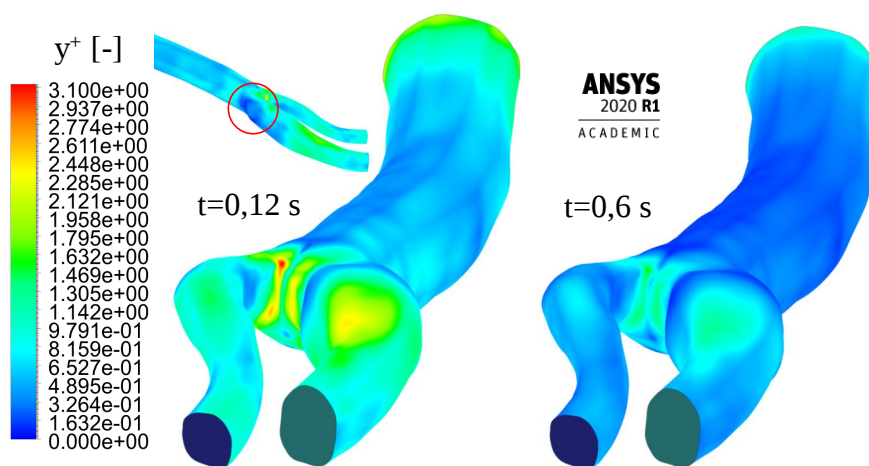
podotknout, že při využití Carreau modelu je proměnná viskozita a y^+ se tak mění i v závislosti na ní. Větší viskozita bude tím pádem tuto bezrozměrnou veličinu snižovat.



Obrázek 5.34: Výpočetní síť karotidy - 498 000 prvků a 520 000 nodů.

Opět byla síť zjemněna směrem ke stěnám, kde nejvíce problémová oblast byla v místě bifurkace. Z důvodů složité diskretizace domény bylo nutno síť nejvíce zjemnit v celé CCA, aby tak v oblasti bifurkace nedocházelo k výrazně velkým y^+ . Nicméně s omezením student-ské licence jsou ECA a ICA ochuzeny o počet prvků a není tak dodržena úplná návaznost z CCA na ICA/ECA.

Obr. 5.35 představuje hodnoty největších y^+ (přibližně maximální průtok $t = 0,12$ s) a hodnoty vyskytující se převážně přes celou periodu, které znázorňuje okamžik $t = 0,6$ s. Zejména v oblasti bifurkace ($y^+ = 3,1$) a v záhybu ICA ($y^+ = 2,6$) nebylo při maximálních průtocích ($t = 0,12$ až $0,14$ s) dosaženo $y^+ \sim 1$. Zjemnění sítě vzhledem k studentské licenci dále není možné a tak je tady tato síť brána jako dostačující. Zobrazeno je také místo, které je později vyhodnoceno jako stenoticky náchylné (červená oblast oddálené karotidy). Zde jsou hodnoty $y^+ \leq 1$ přes celou periodu.

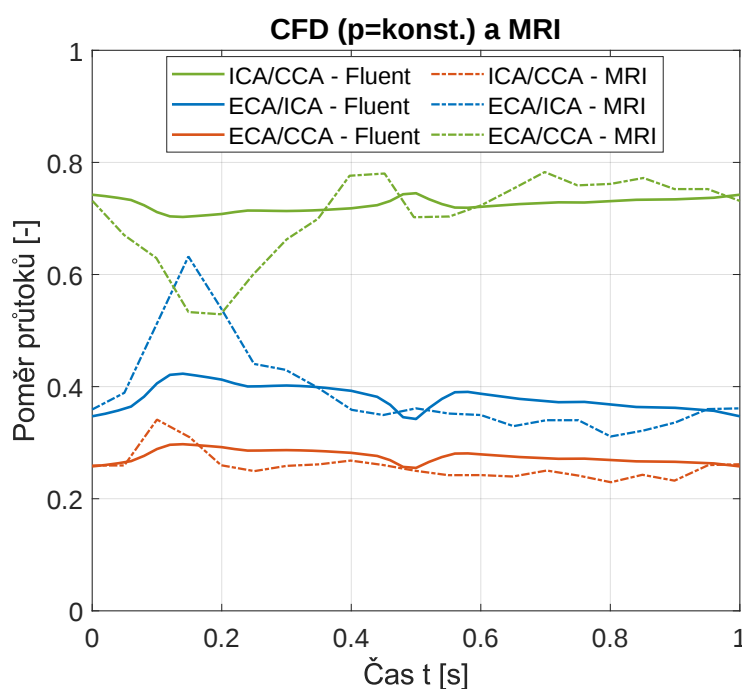


Obrázek 5.35: Porovnání hodnot y^+ časové okamžiky představující maximální a výrazně menší průtok.

Ze zdroje [26], kde bylo provedeno měření na sedmi případech pacientů se zdravou karotidou, byly odebrány výsledky rozdělení průtoků v jednotlivých větvích (čerchované křivky grafu 5.36). Celkově se jedná o 14 zdravých arterií (levá i pravá), jejichž poměry průtoků jsou zprůměrovány. Jelikož u každého pacienta byla tepová frekvence různá (od 77 do 57 úderů za minutu) byla perioda znormalizována. Oproti tomu jsou vyhodnoceny poměry z numerické simulace s konstantním tlakem $p = 0$ Pa (plné křivky). Průměrované hodnoty naměřených a vypočítaných poměrů za periodu jsou uvedeny s procentuálními odchylkami v tabulce 5.4. S uvažováním pouze konstantního tlaku na obou výstupech, ideálně tuhého modelu a okrajové podmínky z jiného měření, se rozdělení průtoků z CFD výpočtu na základě procentuálních odchylek velmi přibližuje realitě.

	ICA/CCA	ECA/ICA	ECA/CCA
CFD	0,7231	0,3833	0,2769
MRI	0,7	0,39	0,26
odchylka CFD/MRI	3,3 %	-1,71	6,5%

Tabulka 5.4: Hodnoty poměrů průtoků zprůměrované přes periodu z CFD a MRI, které jsou uvedeny v článku [26] ($T = 1$ s).

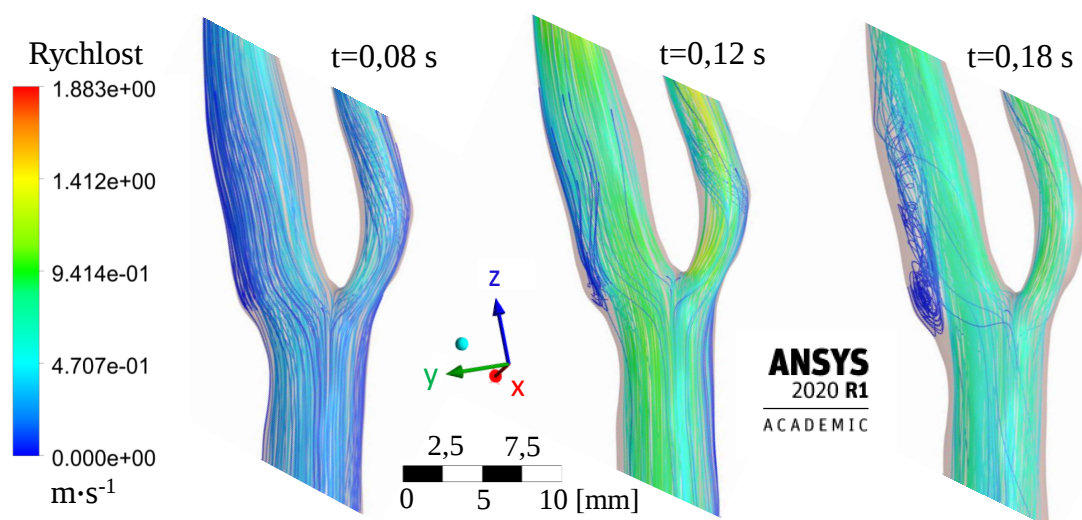


Obrázek 5.36: Porovnání poměrů průtoků z programu ANSYS® Fluent® a výsledků obdržených na základě MRI, které jsou převzaty z článku [26]. Průměrované hodnoty jednotlivých průtoků jsou uvedeny v tabulce 5.4.

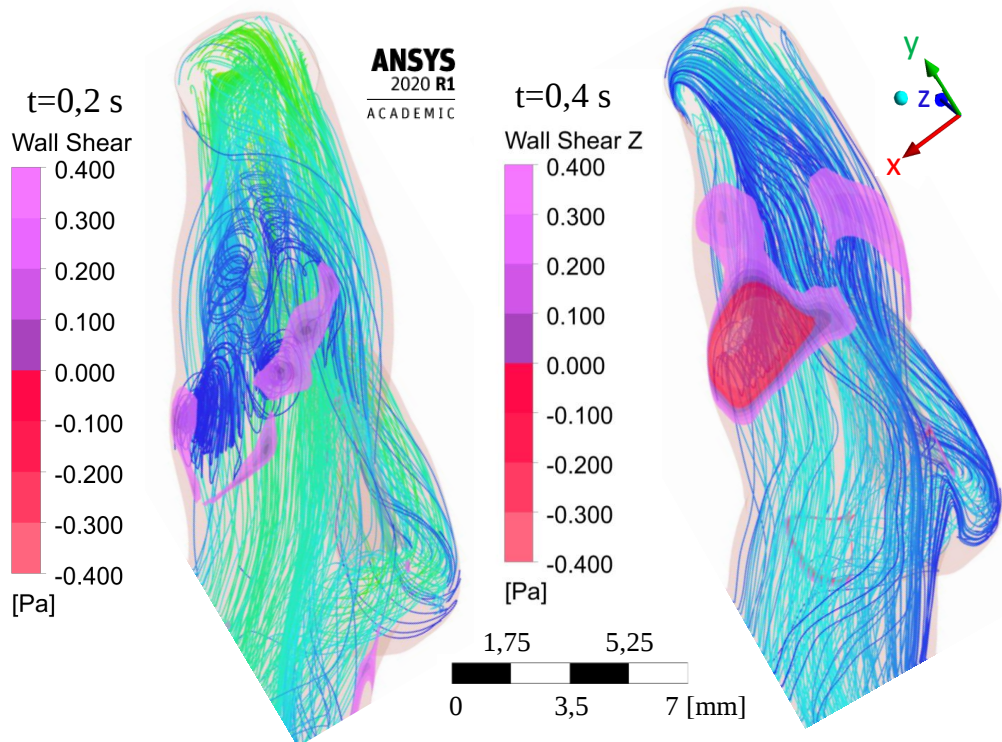
Pro znázornění proudění v karotidě pomocí ANSYS® CFD-PostTM byly vybrány proudnice, jelikož nejlépe zachycují situace znázorněné na obrázku 5.37, který představuje 3 časové okamžiky periody T . V prvním případě ($t = 0,08$ s) se jedná o okamžik, kdy je krev urychlována. Proudnice se příčně nemísí a proudění se zdá být výhradně laminární (laminarizace

při akceleraci). Druhý okamžik ($t = 0,12$ s) ilustruje téměř maximální průtok a proudnice se destabilizují na vnější straně ICA, kde dochází k odtržení MV. Oblast zpomalování znázorňuje $t = 0,18$ s, kde v důsledku odtržení se tvoří oblast recirkulace. V předešlém případě numerické simulace 5.1.4 docházelo k odtržení pouze vlivem časově nepříznivého tlakového gradientu $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$. Nyní už je situace poměrně složitější a odtržení bude ve velké míře ovlivňováno i komplexní geometrií, tj. zejména radiálním náhlým rozšířením bezprostředně za bifurkací a tudíž gradientem $\frac{\partial p}{\partial z} > 0$ (vznik až dvou protichůdných vírů obr. 5.38 vlevo). V závislosti na $\frac{\partial p}{\partial z} > 0$ dochází k této separaci již při $t = 0,12$ s a v $0,18$ s se tyto nepříznivé gradienty kulminují a nastává největší míra recirkulace. Po tomto výrazném spádu (graf 5.33) se v závislosti na $\frac{\partial p}{\partial t}$ tato oblast stabilizuje a zavíření téměř vymizí. Nicméně po čase $0,4$ se tento děj opakuje ale v podstatně menším měřítku. Následnou akcelerací zejména v čase $t = 0,55$ oblast zpětného proudění opět vymizí a znovu začíná od $0,6$ s.

Obrázek 5.38 zastupuje dva časové okamžiky ($t = 0,2$ a $0,4$ s), kde v čase maximální recirkulace je vykreslen celkový WSS (WS) a při menším průtoku pouze WSS ve směru hlavního proudu krve Z (WSZ). V teoretické části 3.1 byly rozebrány hodnoty nefyziologických WSS , které se pohybují v rozmezí $\pm 0,4$ Pa. Celkový WS ($\sqrt{WSX^2 + WSY^2 + WSZ^2}$) bylo nutné brát v potaz pouze při maximálních zavíření, jelikož složky WSX a WSY nejsou zanedbatelné a ve vektorovém součtu pak přesahují uvedené rozmezí. Tím pádem ve výsledku by toto luminální napětí z hlediska hemodynamiky nemělo mít vliv na vznik aterosklerózy. Avšak jsou zde také pozorovatelné hodnoty WS , které do tohoto rozmezí spadají. Jedná se zejména o jádra jednotlivých vírů, jejichž osy jsou téměř kolmé na arteriální stěnu a se vzdáleností od jejich středu se WSS zvětšuje (ve středu nulová rychlost a tudíž i WSS). Víry strhává hlavní proud a jsou unášeny ve směru proudění, osa jejich rotace se tím pádem mění a zarovnáva se se směrem proudění. Trvání těchto dvojitéch protichůdných vírových struktur je však pouze $0,1$ s (10 % periody) a důležitější je pozorovat, ve kterém místě je arterie zatěžována nefyziologickými WSS za periodu nejdéle. Tyto místa jsou znázorněny červenou oblastí v čase $t=0,4$ s. Zde po většinu periody (přibližně 80%), vyjma akcelerace krve, jsou pozorovány nízké hodnoty WS respektive WSZ .

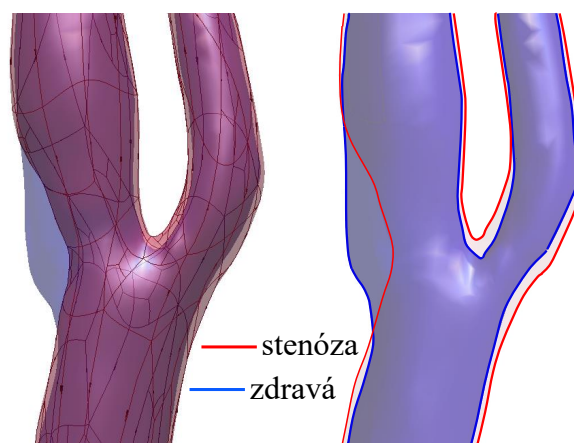


Obrázek 5.37: Proudnice zachycující laminarizaci ($t = 0,08$ s), destabilizaci mezní vrstvy ($t = 0,12$ s) a největší zavíření za celou periodu ($t = 0,18$ s).



Obrázek 5.38: Nefyziologické luminální smykové napětí působící na stěny karotidy v časových okamžicích největší recirkulace a nižšího průtoku.

Zobrazením WSZ je možné znázornit i záporné hodnoty (červená), což značí zpětné proudění (oblast vnější ICA bezprostředně za bifurkací). Ve fázi menších průtoků ($t = 0,4$ s) je pozorována rovnost WS a WSZ (shodný směr působení napětí se směrem proudění). Porovnání zdravé a stenotické varianty stejné karotidy je zobrazeno na obrázku 5.39.



Obrázek 5.39: Porovnání zdravé (modrá) a stenotické varianty karotidy (červená), kde oblast největšího zúžení je z hlediska hemodynamiky důsledkem nepříznivých WSS.

Jedná se o totožné obrázky, kde pouze pro ilustraci jsou vpravo zvýrazněny obrysy pro obě varianty. Geometrie zdravé karotidy, na které byla provedena numerická simulace, je uměle vytvořena ze stenotické varianty. Je tudíž možné, že jsou výsledky ovlivněny i tímto faktem a závěry by se tak při užití reálných geometrií mohly lišit. K největší zhoršení průchodnosti však dochází přesně v místě, které bylo přes periodu zatěžováno nepříznivými WS nejdéle.

Kapitola 6

Závěr

Pro pochopení tak komplexní kapaliny jako je krev je důležité nahlédnout do její struktury a kompozice, od které se odvíjí ne-newtonské chování krve. Tím se zabývá druhá kapitola, kde je kladen důraz na erytrocyty, poněvadž zastupují podstatný objem krve. Nejen kvůli těmto krvinkám, ale také proteinům plazmy, se krev řídí zejména smykovým řídnutím. To je důsledkem shlukování erytrocytů do válečkovitých struktur zvaných „rouleaux“.

Tvorba a zánik těchto struktur úzce souvisí s prouděním krve, které má kvůli srdci pulsující charakter. Proto úvod kapitoly č. 3 je věnován právě základním rovnicím hydrodynamiky, jejichž znalost je výpočtovém modelování proudění (CFD) zásadní. Kvůli těmto pulsacím se v poddajných cévách šíří tlaková vlna, která se směrem k perifériím utlumuje. Nicméně stěny cév mají také složitou strukturu, ze které plynou materiálové vlastnosti jako anizotropie, hyperelasticita a viskoelasticita. Avšak tyto jevy se např. z důvodu malé roztažitelnosti cév zanedbávají a nemají většinou markantní vliv na proudění, kterým se tato práce zabývá. Nestacionarita proudění krve hraje důležitou roli a ovlivňuje místa, kde je možný výskyt nefyziologických jevů (ateroskleróza). Lokalizačním faktorem těchto jevů je v hemodynamice smykové napětí WSS a z něho plynoucí veličiny ($TAWSS$ a OST). Při laminárním proudění newtonské kapaliny lze pulsující povahu s uvážením přímého ideálně tuhého potrubí odvodit analyticky (Womersleyho řešení). S těmito striktními předpoklady je oblast využití velmi omezená ale metoda může být vhodná například pro okrajové podmínky v CFD výpočtu.

Kapitola č. 4 vymezuje všechny typy ne-newtonského chování krve a jejich matematické modely. Pozornost je věnována především nejužívanějším viskózním modelům, které se uplatňují i v komerčních systémech jako je ANSYS® Fluent®.

Praktická část 5 nejprve porovnává experimentální měření pomocí „particle image velocimetry“ (PIV) s numerickou simulací. Jedná se o pulsující proudění newtonské kapaliny v ideálně tuhé (skleněné) přímé trubici. Na základě rozporů v literatuře je využito jak laminárního, tak turbulentního modelu pro nízká Re . V porovnání sledovaného bodu v polovině trubice a středu jejího průřezu je shoda laminárního a turbulentního modelu SST $k-\omega$ pomocí korelačního koeficientu r_k přibližně stejná ($r_k = 0,9967$ a $r_k = 0,997$). Kvalitativní shoda byla provedena pomocí rychlostních profilů v jednotlivých časových okamžicích, kde se SST $k-\omega$ model shodoval lépe. U laminárního modelu setrvaly pozůstatky paraboly, což ve výsledku ovlivnilo i menší shodu rychlostí v jednom bodě. Pozornost byla soustředěna také na odtržení mezní vrstvy při časově proměnném tlakovém gradientu, které v obou numerických simulacích nastalo ve stejném okamžiku. Navzdory tomu u PIV bylo pozorováno se zpožděním 0,1 s. V závislosti na zmiňované nepřesnosti u PIV metody, zejména v oblasti stěn, nemusí být tento fenomén zachycen správně. Na stejnou geometrii byl následně využit

newtonský a ne-newtonský model krve (Carreau) s turbulentním modelem pro nízká Re . Jelikož se jedná o relativně velký průměr přímé trubice, není zde ne-newtonský vliv tak markantní jako by mohl být u menších nebo složitějších geometrií. S užitím turbulentního a Carreau modelu nastávají odchylky od teoretické křivky, které v určitých místech nadhodnocují viskozitu (až o 69 %). To způsobuje větší odpor proti pohybu kapaliny a tak menší rychlost v daném bodě. Proto byla také vybrána oblast největšího zúžení (za náhlým zúžením) a prozkoumáno, zdali na tyto odchylky má vliv míra turbulence. Při největší turbulentní kinetické energii k byla četnost odchýlení větší. Viskozita se ve středu trubice lišila o 30% a s radiální souřadnicí se toto odchýlení snižovalo. Avšak v bodě zpětného proudění s nejnižší k byl opět pozorován nárůst od teoretické křivky. Tudíž není možné přisuzovat tyto odchylky pouze z hlediska míry turbulence.

Na základě interpolovaného tlakového gradientu z numerické simulace bylo provedeno i Womersleyho analytické řešení laminárního proudění v přímé trubici (kapalina s konstantní viskozitou). Ovšem kvůli velmi oscilujícímu gradientu bylo dosaženo shody s PIV pouze v určité části periody. Bylo také zachyceno zpětné proudění ve stejném časovém okamžiku jako u numerické simulace. Analytické řešení Womersleyho rychlostních profilů je možné využít například pro časově proměnné okrajové podmínky v CFD.

Závěrem je uskutečněn výpočet na zdravé specifické karotidě pacienta, přes kterou krev proudí do mozku. Tato geometrie byla vytvořena uměle na základě stenotické varianty. Jako vstupní okrajová podmínka byla zvolena hmotnostní průtoková vlna z článku [51]. Na výstupy jednotlivých větví arterie byl použit pouze konstantní tlak. Kvůli těmto výstupním okrajovým podmínkám bylo zkontrolováno v jakém poměru se rozdělují průtoky do jednotlivých větví. V porovnání s výsledky na základě MRI z článku [26], se tyto poměry průtoků velmi přibližují realitě. Obecně je tato arterie, zejména na interní větvi, náchylná na tvorbu aterosklerózy, kvůli které dochází ke stenóze (zúžení) a zhoršení průchodnosti tepny. V tomto případě se jedná o zdravou karotidu a cílem je z hlediska hemodynamiky predikovat výskyt možných nefyziologických míst, které jsou příčinou zmíněného onemocnění. Tyto místa byly analyzovány pomocí WSS , kde za citlivé oblasti se považují hodnoty v rozmezí $\pm 0,4$ Pa. Za celou periodu je tak vymezena oblast zdravé karotidy, jedná se o vnější ICA bezprostředně za bifurkací, která byla za periodu nejdéle namáhána nepříznivými WSS . Následně v porovnání se stenotickou variantou je největší kontrakce zaznamenána přesně ve zmíněném místě.

Seznam použitých zdrojů

- [1] AL ROUBAIE, S., JAHNSEN, E. D., MOHAMMED, M., HENDERSON TOTH, C. a JONES, E. A. Rheology of embryonic avian blood. *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology*. 2011, roč. 301, č. 6, s. 2473–2481. ISSN 03636135.
- [2] ALRASHEED, E. Solution of Bessel Differential Equation of Order Zero. 2016, March, s. 1–6.
- [3] ANSYS®. *ANSYS Fluent Theory Guide: Pressure-Based Solver; Pressure-Velocity Coupling; Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ Model*. 15. vyd. 2013. ANSYS, Inc.
- [4] ANTIGA, L. a STEINMAN, D. A. Rethinking turbulence in blood. *Biorheology*. 2009, roč. 46, č. 2, s. 77–81. ISSN 0006355X.
- [5] ANTON PAAR. How to define viscosity. *Viscosity and Viscometry* [online]. 2018. Aktualizováno 5. 1. 2020 [cit. 29. února 2020]. Dostupné z: <https://wiki.anton-paar.com/en/basic-of-viscometry/>.
- [6] BALLERMANN, B. J., DARDIK, A., ENG, E. a LIU, A. Shear stress and the endothelium. *Kidney International*. Elsevier. 1998, roč. 54, s. S100–S108.
- [7] BESSONOV, N., SEQUEIRA, A., SIMAKOV, S., VASSILEVSKII, Y. a VOLPERT, V. Methods of Blood Flow Modelling. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2016, roč. 11, č. 1, s. 1–25. ISSN 17606101.
- [8] BRDIČKA, M. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická ; roč. 110, č. spisu 503. ISBN 80-200-1344-X.
- [9] BRUST, M., AOUEANE, O., THIÉBAUD, M., FLORMANN, D., VERDIER, C. et al. The plasma protein fibrinogen stabilizes clusters of red blood cells in microcapillary flows. *Scientific Reports*. 2014, roč. 4, s. 1–6. ISSN 20452322.
- [10] BUREAU, M., HEALY, J., BOURGOIN, D. a JOLY, M. Rheological hysteresis of blood at low shear rate. *Biorheology*. IOS Press. 1980, roč. 17, 1-2, s. 191–203.
- [11] CEBRAL, J. R., YIM, P. J., LÖHNER, R., SOTO, O. a CHOYKE, P. L. Blood flow modeling in carotid arteries with computational fluid dynamics and MR imaging. *Academic Radiology*. 2002, roč. 9, č. 11, s. 1286–1299. ISSN 10766332.
- [12] DANTZIG, J. A. a TUCKER, C. L. *Modeling in materials processing*. Cambridge university press, 2001.

- [13] ETHIER, C. R. a SIMMONS, C. A. *Introductory Biomechanics*. Illustrated edition. Cambridge University Press - M.U.A, 2007. Cambridge texts in biomedical engineering. ISBN 0521841127.
- [14] FATAHIAN, E., KORDANI, N. a FATAHIAN, H. A review on rheology of non-Newtonian properties of blood. *IJUM Engineering Journal*. 2018, roč. 19, č. 1, s. 237–250. ISSN 22897860.
- [15] FEDOSOV, D. A., PAN, W., CASWELL, B., GOMPPER, G. a KARNIADAKIS, G. E. Predicting human blood viscosity in silico. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2011, roč. 108, č. 29, s. 11772–11777. ISSN 0027-8424.
- [16] FUAT, Y. a MEHMET YASAR, G. A critical review on blood flow in large arteries, relevance to blood rheology, viscosity models, and physiologic conditions. *Korea-Australia Rheology Journal*. 2008, roč. 20, č. 4, s. 197–211.
- [17] GALDI, G., RANNACHER, R., ROBERTSON, A. a TUREK, S. *Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation*. Birkhäuser Basel, 2008. Oberwolfach Seminars. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=fA3IBAAQBAJ>. ISBN 9783764378066.
- [18] GASPAR ROSAS, A. a THURSTON, G. Erythrocyte aggregate rheology by transmitted and reflected light. *Biorheology*. IOS Press. 1988, roč. 25, č. 3, s. 471–487.
- [19] GERHART, P. M., GERHART, A. L. a HOCHSTEIN, J. I. *Munson's fundamentals of fluid mechanics*. Global edition. USA: Wiley, [ne před 2017]. ISBN 978-1-119-24898-9.
- [20] GIJSEN, F. J., ALLANIC, E., VAN DE VOSSE, F. N. a JANSSEN, J. D. The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Unsteady flow in a 90curved tube. *Journal of Biomechanics*. 1999, roč. 32, č. 7, s. 705–713. ISSN 00219290.
- [21] HOSKINS, P. R., LAWFORD, P. V. a DOYLE, B. J. Cardiovascular Biomechanics. *Cardiovascular Biomechanics*. 2017, roč. 2018, s. 1–462.
- [22] JAŠÍKOVÁ, A. D., KOTEK, M., MALÍK, M., PRIMAS, J. a KOPECKÝ, V. Research report GACČ R nr . 17-19444S Interaction of heterogeneous liquid with flexible wall. č. 17.
- [23] KOHÚT, J. *Prvky snižující tlak v potrubních systémech*. 2018. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojíního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Daniel Himr, Ph.D.
- [24] LEE, B. K., XUE, S., NAM, J., LIM, H. a SHIN, S. Determination of the blood viscosity and yield stress with a pressure- scanning capillary hemorheometer using constitutive models. *Korea Australia Rheology Journal*. 2011, roč. 23, č. 1, s. 1–6. ISSN 1226119X.
- [25] MALEK, A. M., ALPER, S. L. a IZUMO, S. Hemodynamic shear stress and its role in atherosclerosis. *Journal of the American Medical Association*. 1999, roč. 282, č. 21, s. 2035–2042. ISSN 00987484.

- [26] MARSHALL, I., PAPATHANASOPOULOU, P. a WARTOLOWSKA, K. Carotid flow rates and flow division at the bifurcation in healthy volunteers. *Physiological Measurement*. 2004, roč. 25, č. 3, s. 691–697. ISSN 09673334.
- [27] MARTIN, D. M., MURPHY, E. A. a BOYLE, F. J. Computational fluid dynamics analysis of balloon-expandable coronary stents: Influence of stent and vessel deformation. *Medical Engineering and Physics*. 2014, roč. 36, č. 8, s. 1047–1056. ISSN 18734030.
- [28] McDONALD, D. A. The relation of pulsatile pressure to flow in arteries. *The Journal of Physiology*. 1955, roč. 127, č. 3, s. 533–552. ISSN 14697793.
- [29] McLACHLAN, N. *Bessel Functions for Engineers*. Clarendon Press, 1961. Oxford engineering science series. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=7XpGAAAYAAJ>.
- [30] MULLAN, E., WESTWOOD, P. a CHAMBERS, C. *Maths in Action - Advanced Higher Mathematics 2*. Nelson Thornes, 2014. Level 2. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=0pI2qaUTYuUC>. ISBN 9780174315421.
- [31] NAGESWARAN TAMIL ALAGAN. *Textured insert for improved heat extraction in combination with high-pressure cooling in turning of superalloys*. 2017. 1–83 s. ISBN 9789187531637.
- [32] QUARTERONI, A., FORMAGGIA, L. a VENEZIANI, A. *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system*. 2009. 1–512 s. ISBN 9788847011519.
- [33] RANNACHER, R. a SEQUEIRA, A. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics: Dedicated to Giovanni Paolo Galdi on the Occasion of His 60th Birthday*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [34] ROJAS, H. A. Numerical implementation of viscoelastic blood flow in a simplified arterial geometry. *Medical Engineering and Physics*. 2007, roč. 29, č. 4, s. 491–496. ISSN 13504533.
- [35] RUDOLF, P. *Turbulence: Near wall modeling*. Brno, Fakulta strojního inženýrství. Přednášky z akad. r. 2019/2020.
- [36] SCHULTZ, M. P., FINLAY, J. A., CALLOW, M. E. a CALLOW, J. A. Three models to relate detachment of low form fouling at laboratory and ship scale. *Biofouling*. 2003, roč. 19, SUPPL., s. 17–26. ISSN 08927014.
- [37] SKOPALOVÁ, K. *Vlastní a vynucené kmitání kapaliny v rotačně symetrické oblasti*. 2017. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce prof. Ing. František Pochylý, CSc. ISBN 9780750668477.
- [38] STALDER, A. F., FRYDRYCHOWICZ, A., RUSSE, M. F., KORVINK, J. G., HENNIG, J. et al. Assessment of flow instabilities in the healthy aorta using flow-sensitive MRI. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*. 2011, roč. 33, č. 4, s. 839–846. ISSN 10531807.

- [39] TACMINA. *Precision Pump Technology: Working Principle of Diaphragm Pumps* [online]. [cit. 2020-06-08]. Dostupné z: <https://www.tacmina.com/learn/basics/01.html>.
- [40] TAN, F. P., SOLOPERTO, G., BASHFORD, S., WOOD, N. B., THOM, S. et al. Analysis of flow disturbance in a stenosed carotid artery bifurcation using two-equation transitional and turbulence models. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2008, roč. 130, č. 6, s. 1–12. ISSN 01480731.
- [41] TESCH, K. on Invariants of Fluid Mechanics Tensors. *Task Quarterly*. 2013, roč. 174, č. 3, s. 223–230.
- [42] TOLOUI, M., FIROOZABADI, B. a SAIDI, M. S. A numerical study of the effects of blood rheology and vessel deformability on the hemodynamics of carotid bifurcation. *Scientia Iranica*. Elsevier B.V. 2012, roč. 19, č. 1, s. 119–126. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1016/j.scient.2011.12.008>. ISSN 10263098.
- [43] TROJAN, S. *Lékařská fyziologie*. 4. vyd. přepr. a dopl. Praha: Grada Publishing, 2003. ISBN 8024705125.
- [44] VLČEK, P. *Modelování turbulentního proudění: Boussinesquova hypotéza* [online]. Technická zpráva. Technická 4, 166 07 Praha 6: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní. [cit. 2020-06-09]. Dostupné z: <http://chps.fsfd.cvut.cz/pt/2013/>.
- [45] VOSSE, F. van de. Cardiovascular Fluid Mechanics lecture notes 8W090. 2009.
- [46] VOSSE, F. N. V. D. a STERGIOPOULOS, N. Pulse Wave Propagation in the Arterial Tree. s. 467–499.
- [47] WIKIPEDIE. In the neck. *Common Carotid Artery* [online]. Červen 2020. Revidováno 12. 4. 2020. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Common_carotid_artery.
- [48] WOMERSLEY, J. R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *The Journal of Physiology*. mar 1955, roč. 127, č. 3, s. 553–563. ISSN 14697793.
- [49] XIANG, J., TREMMEL, M., KOLEGA, J., LEVY, E. I., NATARAJAN, S. K. et al. Newtonian viscosity model could overestimate wall shear stress in intracranial aneurysm domes and underestimate rupture risk. *Journal of NeuroInterventional Surgery*. 2012, roč. 4, č. 5, s. 351–357. ISSN 17598478.
- [50] XU, D., WARNECKE, S., SONG, B., MA, X. a HOF, B. Transition to turbulence in pulsating pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 2017, roč. 831, September, s. 418–432. ISSN 14697645.
- [51] ZHANG, Y., FURUSAWA, T., SIA, S. F., UMEZU, M. a QIAN, Y. Proposition of an outflow boundary approach for carotid artery stenosis CFD simulation. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2013, roč. 16, č. 5, s. 488–494. ISSN 10255842.
- [52] ŠTIGLER, J. *Teorie hydraulických strojů: Mezní vrstva* [online]. [cit. 2020-06-09]. Dostupné z: <https://eu.fme.vutbr.cz/pro-studenty-podpora-vyuky-teorie-hydraulickych-stroju>.

Seznam použitých zkratek a symbolů

Symbol/zkratka	Název	Jednotka
$\Gamma_{k,\omega}$	efektivní difusivita k a ω	Pa·s
Δp	tlakový gradient (rozdíl tlaku mezi dvěma body)	Pa
Δp_i	interpolovaný tlakový gradient	Pa
α	bezrozměrné Womersleyho číslo	-
α^*	koefficient tlumící μ_t	-
$\alpha_{0,\infty}^*; \beta_i; a_1$	konstantní hodnoty SST k - ω	-
$\dot{\gamma}_{(a,b)}$	smyková rychlost	s ⁻¹
$\dot{\gamma}_{max}$	maximální hodnota smykové rychlosti	s ⁻¹
$\dot{\gamma}_c$	charakteristická smyková rychlost	s ⁻¹
δ	tloušťka mezní vrstvy	m
δ_0	rozdíl fází θ_0 a $\theta_0(y)$	°
δ_s	Stokesova tloušťka mezní vrstvy	mm
ϵ_0	fáze měnící se napříč potrubím	°
$\theta_0; \theta_0(y)$	fáze Besselových funkcí	°
λ	součinitel tření potrubí	-
λ_k	časová konstanta	s
λ_r	relaxační doba	s
μ	dynamická viskozita	Pa·s
μ^*	bezrozměrná forma viskozity	-
μ_0	viskozita při $\dot{\gamma} \rightarrow 0$	Pa·s
μ_N	konstantní newtonská viskozita	Pa·s
μ_{ef}	efektivní viskozita	Pa·s
μ_t	turbulentní viskozita	Pa·s
$\mu\dot{\gamma}$	viskozita při $\dot{\gamma}$	Pa·s
μ_∞	viskozita při $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$	Pa·s
ν	kinematická viskozita	m ² ·s ⁻¹
ρ	hustota tekutiny	kg·m ⁻³
$\sigma_{k,\omega}$	Prandtlůva bezrozměrná čísla	-
$(\sigma_{rz})_j$	smykové napětí j-tého Maxwellova elementu	Pa
$\sigma_{\omega,2}; Re_t; R_k$	konstantní hodnoty SST k - ω	-
$\tau_{(a,b)}$	smykové napětí	Pa
τ_{max}	maximální smykové napětí	Pa
$\boldsymbol{\tau}$	deviační tenzor napětí	Pa
τ_s	smykové napětí působící na stěnu	Pa
$\boldsymbol{\tau}_t$	tenzor Reynoldsových napětí	Pa

Symbol/zkratka	Název	Jednotka
τ_y	kritické smykové napětí	Pa
ω	úhlová rychlost - kapitola 3.3	s^{-1}
ω	míra disipace turbulence - kapitola 5.1.3	s^{-1}
$\phi_{(n)}$	fáze tlakového gradientu	°
∇	nabla - vektor parciálních derivací ($\frac{\partial}{\partial x_i}$)	-
∇p	gradient např. tlaku, v ESS - ($\frac{\partial p}{\partial x_i}$)	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$
$\nabla \cdot \mathbf{v}$	divergence, v ESS - ($\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$)	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
A	konstantní hodnota tlaku	mPa
C	integrační konstanta	-
$C_{1,2}$	integrační konstanty	-
D	průměr	m
D	tenzor rychlosti deformace	s^{-1}
D_h	hydraulický průměr definován jako S/O	m
D_ω	„cross-diffusion term“	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-2}$
De	Debořino bezrozměrné číslo	-
E	modul pružnosti	Pa
$F(\dot{\gamma})$	smykově závislá funkce	-
$F_{1,2}$	„blending“ funkce kapitola - 5.1.3	-
$F_{1,2,3}$	síly působící na válcovitý element - kapitola 3.2	N
$\tilde{G}_k$	k generována středními rychlostními gradienty	$\text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$
H	hematokrit	%
H_t	hematokrit do 50%	%
H_{tc}	kritická hodnota hematokritu	%
I	intenzita turbulence	-
II_τ	druhý invariant τ	Pa
$I_D; II_D; III_D$	první až třetí invariant $\mathbf{D}$	$s^{-1}; s^{-2}; s^{-3}$
J_0	Besselova funkce prvního druhu a nultého řádu	-
$K_{1,2}$	konstanty pro řešení diferenciálních rovnice	-
L	délka přímého potrubí	m
MV	mezní vrstva	-
M'_0	amplituda axiální rychlosti u	-
$M_0; M_0(y)$	amplituda Besselových funkcí	-
M_n	amplituda tlak. gradientu	Pa
O	obvod	m
OSI	oscilační smykový index	-
Q	objemový průtok	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Q_m	hmotnostní průtok	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
R	vnitřní poloměr trubice	m
$RANS$	Reynoldsovy střed. Navier-Stokesovi rovnice	-
Re	bezrozměrné podobnostní číslo	-
Re_{max}	maximální Re_p v časovém úseku	-
Re_p	Re s prostorovým průměrováním rychlosti přes D	-
$Re_{p,t}$	časově průměrované Re_p	-
S	povrch/průřez	m^2
S_d	velikost rychlosti deformace	s^{-1}
S_k	uživatelé definovaný člen	$\text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$
S_ω	uživatelé definovaný člen	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-2}$

Symbol/zkratka	Název	Jednotka
$T_{(0)}$	perioda	s
$TAWSS$	časově průměrovaný WSS	Pa
V	objem	m ³
U	maximální rychlost	m·s ⁻¹
U_{∞}	rychlost v neovlivněné oblasti viskózními silami	m·s ⁻¹
WSS	smykové napětí působící na stěny	Pa
We	Weissenbergovo bezrozměrné číslo	-
Y_k	disipace k způsobená turbulencí	Pa·s ⁻¹
Y_0	Besselova funkce druhého druhu a nultého řádu	-
$\mathbf{a}$	vektor zastupující účinek vnějších sil	m·s ⁻²
$a_n; b_n$	koeficienty Fourierovy řady	Pa
c	konstanta Cassonova modelu	Pa·s
e	Eulerovo číslo	-
f	frekvence	s ⁻¹ ; Hz
g	gravitační zrychlení	m·s ⁻²
h	výška	m
h_0	podíl amplitud $M_0(y)$ a M_0	-
i	imaginární jednotka	-
k	turbulentní kinetická energie	m ² ·s ⁻²
$k_{1,2,3}$	konstanty plynoucí z vlastností proteinů plazmy	-
k_f	faktor konzistence	Pa·s ⁿ
k_r	relativní drsnost potrubí	-
k_v	výška povrchových nerovností vnitřního povrchu trubky	m
l	délka válcovitého elementu	m
m	počet vzorků závislých na t_k	-
n	řád Fourierovy řady	-
n_B	řád Besselových funkcí	-
$n_k; a$	materiálové konstanty krve	-
n_p	počet jednotek	-
n_t	index toku	-
$p_{(1,2)}$	tlak (v místě 1 nebo 2)	Pa
p_t	složka transmuralního tlaku - periodicky proměnný tlak	Pa
p_0	složka transmuralního tlaku nezávislá na čase	Pa
p_i	tlak v místě i	Pa
p_{tr}	transmurální tlak	Pa
p^*	bezrozměrný tlak	-
$\hat{p}$	amplituda tlaku	Pa
r_k	Pearsonův korelační koeficient	-
$r_{1,2}$	radiální souřadnice (bodu 1 nebo 2 od středu trubice)	m
$r; z; \theta$	souřadnice pro cylindrický souřadný systém	m, m, °
t	čas	s
t_c	charakteristická doba	s
t_k	časový krok	s
t_m	maximální tloušťka erytrocytu	m
u	axiální rychlost	m·s ⁻¹
$u^*; r^*; t^*$	bezrozměrné veličiny pro rychlost, poloměr a čas	-
u^+	bezrozměrná rychlost	-
u_{τ}	rychlost tření	m·s ⁻¹

Symbol/zkratka	Název	Jednotka
v_p	průměrná rychlost kapaliny přes průměr potrubí	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\mathbf{v}$	vektor rychlosti	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\bar{\mathbf{v}}$	středovaný $\mathbf{v}$	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
x, y	pozorované hodnoty x a y (korelační koeficient)	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\bar{x}, \bar{y}$	výběrový průměr x a y (korelační koeficient)	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
y	bezrozměrná radiální vzdálenost	-
y^+	bezrozměrná vzdálenost	-
$\hat{u}$	amplituda axiální rychlosti	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\hat{u}^p$	parikulární řešení diferenciální rovnice	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\hat{u}^p$	homogenní řešení diferenciální rovnice	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Přílohy

Tabulky

$$J_0(zi^{\frac{3}{2}}) = M_0(z)e^{i\theta_0(z)}$$

z	$M_0(z)$	$\theta_0(z)$ [°]	z	$M_0(z)$	$\theta_0(z)$ [°]
0,000	1,000	0,000	1,9	1,189	47,880
0,050	1,000	0,040	1,950	1,208	50,080
0,100	1,000	0,140	2,000	1,229	52,290
0,150	1,000	0,320	2,100	1,274	56,740
0,200	1,000	0,570	2,200	1,325	61,220
0,250	1,000	0,900	2,300	1,381	65,710
0,300	1,000	1,290	2,400	1,443	70,190
0,350	1,000	1,750	2,500	1,511	74,650
0,400	1,000	2,290	2,600	1,586	79,090
0,450	1,001	2,900	2,700	1,666	83,500
0,500	1,001	3,580	2,800	1,754	87,870
0,550	1,001	4,330	2,900	1,849	92,210
0,600	1,002	5,150	3,000	1,950	96,520
0,650	1,003	6,040	3,100	2,059	100,790
0,700	1,004	7,010	3,200	2,176	105,030
0,750	1,005	8,040	3,300	2,301	109,250
0,800	1,006	9,140	3,400	2,434	113,430
0,850	1,008	10,31	3,500	2,576	117,600
0,900	1,010	11,55	3,600	2,728	121,750
0,950	1,013	12,86	3,700	2,889	125,870
1,000	1,016	14,23	3,800	3,061	129,990
1,050	1,019	15,66	3,900	3,244	134,100
1,100	1,023	17,16	4,000	3,439	138,190
1,150	1,027	18,72	4,500	4,618	158,590
1,200	1,032	20,34	5,000	6,231	178,930
1,250	1,038	22,02	5,500	8,447	199,280
1,300	1,044	23,75	6,000	11,50	219,620
1,350	1,051	25,54	7,000	21,55	260,290
1,400	1,059	27,37	8,000	40,82	300,920
1,450	1,067	29,260	9,000	77,96	341,520
1,500	1,077	31,190	10,00	149,8	382,100
1,550	1,087	33,160	11,00	289,5	422,660
1,600	1,098	35,170	12,00	561,8	463,220
1,650	1,111	37,220	14,00	2,137	544,320
1,700	1,124	39,300	16,00	8,217	625,400
1,750	1,139	41,410	18,00	31,85	706,460
1,800	1,154	43,540	20,00	124,2	787,520
1,850	1,171	45,700	25,00	3809	990,150
1,900	1,189	47,880	30,00	119200	1192,750
1,950	1,208	50,080	35,00	3786000	1395,350
2,000	1,229	52,290	40,00	121500000	1597,940
2,100	1,274	56,740	45,00	3929000000	1800,530

Tabulka 1: Konstanty pro analytické řešení v sekci 5.2 [29].