



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

**STUDIUM VÍROVÝCH STRUKTUR VZNIKAJÍCÍCH
VE VÍROVÉM GENERÁTORU**

STUDY OF VORTICAL STRUCTURES GENERATED BY A SWIRL GENERATOR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MICHAELA KURKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. ONDŘEJ URBAN

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Studentka: **Michaela Kurková**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Ondřej Urban**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Studium vírových struktur vznikajících ve vírovém generátoru

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Ke studiu chování takzvaného vírového copu, se kterým se v praxi setkáváme u vodních turbín, se často používají jednodušší zařízení, takzvané vírové generátory. Na odboru fluidního inženýrství byl jeden takový navržen a zrealizován, k dispozici je i velké množství dat z provedených CFD výpočtů. Při postprocessingu takových dat jsou klíčové metody počítačové vizualizace proudění.

Cíle bakalářské práce:

- řešerše se zaměřením na popis chování vírového copu v turbínách nebo vírových generátorech, ať už pozorovaného experimentálně, nebo simulovaného pomocí CFD
- analýza dodaných dat z CFD simulací a zdokumentování vybraných jevů pomocí vhodných metod počítačové vizualizace proudění, případně srovnání s podobnými pozorováními zdokumentovanými v literatuře

Seznam doporučené literatury:

ČASTULÍKOVÁ, V. Metody počítačové vizualizace proudění. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 48 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Ondřej Urban.

SKRIPKIN, S., M. TSOY, S. SHTORK a K. HANJALIĆ. Comparative analysis of twin vortex ropes in laboratory models of two hydro-turbine draft-tubes. Journal of Hydraulic Research. 54(4), 450-460.

MORELAND, K. The ParaView Tutorial: Version 5.6.2 [online]. [cit. 2019-09-26]. Dostupné z: <https://www.paraview.org/paraview-downloads/download.php?submit=Download&version=v5.6&type=data&os=Sources&downloadFile=ParaViewTutorial-5.6.2.pdf>

PETZ, C. a kol. Global Modes in a Swirling Jet Undergoing Vortex Breakdown [online]. [cit. 2019-0-26]. Dostupné z: <http://berndnoack.com/publications/Petz2010aps.PDF>

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá studiem vírových struktur ve vírovém generátoru. Teoretická část je zaměřena na rešerši experimentálních a numerických studií vírového copu. Dále obsahuje stručný přehled metod identifikace vírů. Druhá část práce je věnována studiu vírových struktur zachycených pomocí CFD simulací. Metody identifikace vírů jsou vzájemně porovnány na příkladu vírového copu.

Klíčová slova

Vírový cop, vírový generátor, vířivé proudění, vizualizace proudění

Abstract

This bachelor's thesis deals with the study of vortical structures generated by a swirl generator. The theoretical part is focused on the description of experimental and numerical studies of the vortex rope phenomenon. This part also includes a brief overview of vortex identification methods. The second part is dedicated to the study of vortical structures captured by CFD simulations. The vortex identification methods are compared on an example of the vortex rope.

Key Words

Vortex rope, swirl generator, swirling flow, flow visualization

Bibliografická citace

KURKOVÁ, Michaela. *Studium vírových struktur vznikajících ve vírovém generátoru*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 65 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Ondřej Urban.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem Studium vírových struktur vznikajících ve vírovém generátoru vypracovala samostatně pod vedením Ing. Ondřeje Urbana s využitím svých znalostí a uvedených zdrojů.

V Brně dne 26.06.2020

Michaela Kurková

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu své práce Ing. Ondřeji Urbanovi za odborné vedení, cenné rady, trpělivost a čas strávený konzultacemi. Děkuji také za poskytnutá data a možnost účastnit se experimentů, které mi pomohly k pochopení studované problematiky. Děkuji také svým přátelům a rodině za podporu.

Obsah

Úvod.....	10
1 Základy teorie vířivého proudění	11
1.1 Metody popisu kontinua.....	11
1.2 Vířivost.....	12
1.3 Intenzita víru a cirkulace rychlosti	13
1.4 Helmholtzovy věty	13
2 Dosavadní poznatky z oblasti zkoumání vírového copu	17
2.1 Vírový cop.....	17
2.2 Experimentální pozorování a CFD simulace	18
2.3 Kritéria pro identifikaci jader vírů	25
2.3.1 Q kritérium	26
2.3.2 Δ kritérium	27
2.3.3 λ_2 kritérium.....	28
2.3.4 Helicita	29
2.3.5 Ljapunovův exponent.....	29
2.3.6 M_z kritérium.....	30
3 Software použitý k postprocessingu dat CFD výpočtů	33
4 Metody vyhodnocování derivací diskrétních dat	35
4.1 Výpočet derivací na základě izoparametrických tvarových funkcí	35
4.2 Výpočet derivací metodou Green–Gauss node-based (GGNB).....	37
4.3 Srovnání metod výpočtu derivací.....	39
4.3.1 Metodika srovnání.....	39
5 Studium výsledků CFD simulací.....	43
5.1 Chování vírového copu v závislosti na vírovém čísle.....	44
5.2 Srovnání metod pro identifikaci vírů	47
5.3 FTLE na příkladu vírového copu	49
5.4 Dvojitý vírový cop	51
5.5 Vývoj oblasti zpětného proudění.....	53
5.6 Celková vizualizace proudění v difuzoru.....	56
Závěr.....	58
Seznam použitých zdrojů	59
Seznam použitých symbolů	63
Seznam použitých zkratk.....	65

Úvod

Vodní elektrárny jsou významným zdrojem obnovitelné energie. Jejich nespornou výhodou a důležitou funkcí je schopnost rychlého spuštění a rychlé změny výkonu. To má význam z pohledu stabilizace elektrické sítě, v níž s rostoucím podílem solárních a větrných elektráren roste i nestálost celkové produkce. Ve velkých vodních elektrárnách je nejpoužívanější turbínou Francisova. Jestliže pracuje v optimálním bodě, rychlostní pole na výstupu má pouze relativně nízkou tangenciální složku rychlosti, dominantní je složka axiální. V případě použití turbíny mimo optimální bod dochází k nežádoucím jevům. Jedním z nich je tzv. vírový cop, který vzniká v savce turbíny důsledkem velké tangenciální složky rychlosti. Vírový cop výrazně zhoršuje dynamické vlastnosti celé soustavy, způsobuje tlakové pulzace, vibrace a hluk. Jedná se o aktuální problematiku a snahou je nejen tomuto jevu porozumět, ale následně navrhnout opatření a metody, které ho budou účinně potlačovat.

Pro experimentální modelování tohoto jevu jsou používány modely Francisovy turbíny a také vírové generátory. Experimenty bohužel neposkytují informace o kompletním tlakovém a rychlostním poli, proto jsou k výzkumu a analýze jevu využívány CFD simulace (*CFD – Computational Fluid Dynamics*). I tento přístup s sebou nese řadu omezení a je ovlivněn volbou nastavení výpočtové simulace. Výsledky těchto simulací jsou velmi obsáhlé a umožňují detailní analýzu proudění na základě rychlostního a tlakového pole a jejich změny v čase.

Jednou z metod analýzy výsledků CFD simulací je grafická vizualizace dat. Metod grafické vizualizace je celá řada. V souvislosti s prouděním jsou často využívány izoplochy určité veličiny, proudnice (případně proudoplochy), zobrazení vektorového pole, kontury apod. Jednou z metod je také objemové renderování. Tato metoda vizualizace dat je předmětem zájmu především v medicínských aplikacích, ale dá se aplikovat také v technickém oboru. Jedná se o rozsáhlou problematiku, proto bude v práci pouze představen použitý software, bez matematického pozadí.

Cílem této práce bude provést rešerši experimentálního i numerického výzkumu vírového copu, v teoretické části budou také uvedeny některé metody identifikace vírů. Dále bude provedena analýza vybraných jevů na datech z CFD výpočtů provedených na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana.

1 Základy teorie vířivého proudění

Pro vizualizaci dat a následnou interpretaci je nezbytné porozumět fundamentálním principům, které ve zkoumaném dynamickém systému probíhají. S touto motivací je v úvodní kapitole popsán používaný aparát. S ohledem na zaměření práce na vírové struktury jsou vysvětleny poznatky z teorie vířivého proudění.

1.1 Metody popisu kontinua

Kontinuum neboli spojitě prostředí je zavedeno na základě představy, že hmota těles je rozložena spojitě a silovými účinky se toto rozložení mění. Pro studium pohybu kontinua existují dvě metody – Lagrangeova a Eulerova metoda popisu kontinua. Více informací o zmíněných metodách lze nalézt v [1].

Lagrangeova metoda

Po celou dobu pohybu tekutiny je sledována určitá částice. Částice je zvolena v čase t_0 a její poloha je v tomto okamžiku určena polohovým vektorem $\mathbf{r}_0$. Rychlost a zrychlení potom získáme derivováním podle času, jak je uvedeno v rovnicích níže. Volbou příslušného polohového vektoru $\mathbf{r}_0$ lze takto popsat kinematiku všech částic ve sledované doméně. Řešení dynamiky proudění na částicové úrovni by ale bylo velice náročné.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0, \mathbf{r}_0, t) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Eulerova metoda

V případě tekutin je většinou sledován stav proudění tekutiny a jeho změny v čase. Vhodnou metodou popisu je Eulerova metoda, kdy je sledován stav tekutiny v určitém bodě sledované domény. Popis kinematiky tekutiny je pak dán vektorovým polem rychlosti. Jedná se o funkci prostoru a času.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

Změnu rychlosti částice, která se nachází v čase t v bodě s polohovým vektorem $\mathbf{r}(x, y, z)$, lze vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje, kde pro nekonečně malé změny (diferenciály) proměnných vypadávají členy vyšších řádů.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + d\mathbf{v} &= \mathbf{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) \\ &= \mathbf{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

Člen $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ popisuje počáteční rychlost částice, ostatní členy vyjadřují totální diferenciál rychlosti $d\mathbf{v}$. Zrychlení je potom dáno vydělením totálním diferenciálem času dt .

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \quad (1.6)$$

Člen $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ se nazývá lokální zrychlení, druhý člen vztahu, $(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$, je potom konvektivní zrychlení. Oba členy vyjadřují substancionální (v literatuře též označovanou jako materiálovou či speciální případ derivace totální) derivaci rychlosti podle času. Pro substancionální derivace je používáno následující značení:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (1.7)$$

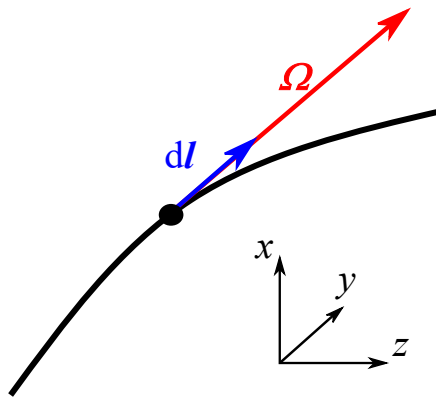
1.2 Vířivost

Obecně je pohyb tekutiny označován jako proudění a podle charakteru rychlostního pole ho lze rozdělit na laminární a turbulentní [1]. Turbulentní proudění skutečných kapalin je velmi komplexní problém dynamiky a jeho pochopení a matematický popis jsou velmi aktuálním předmětem zájmu [2]. Základní veličinou, která popisuje charakter proudění, je vektor vířivosti $\boldsymbol{\Omega}$ [3], který definován následovně:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (1.8)$$

Jestliže výsledkem je nulový vektor, pak se jedná o proudění nevířivé (potenciální). Speciálním případem nevířivého proudění je tzv. potenciální vír, kdy se částice pohybují po kružnicových trajektoriích kolem osy nazývané vírové vlákno, aniž by rotovaly kolem vlastní osy. V případě nenulového vektoru vířivosti se proudění nazývá vířivým, kdy platí, že částice kapaliny rotují kolem vlastní osy úhlovou rychlostí odpovídající polovině vířivosti.

Pomocí vektoru vířivosti jsou definovány vírové čáry. Jsou to prostorové křivky, ke kterým jsou vektory $\boldsymbol{\Omega}$ tečné.



Obr. 1.1 Vírová čára s elementárním tečným vektorem a vektorem vířivosti.

Na obrázku 1.1 je zobrazena vírová čára s naznačeným elementárním tečným vektorem $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ a vektorem vířivosti $\boldsymbol{\Omega}$ v jednom bodě. Aby byl vektor tečný ke křivce, musí platit, že je kolineární s tečným vektorem dané křivky. Pro kolineární vektory platí, že jejich vektorový součin je roven nule.

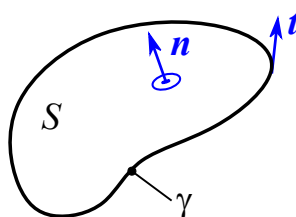
$$\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{l} = (\Omega_y dz - \Omega_z dy, \Omega_z dx - \Omega_x dz, \Omega_x dy - \Omega_y dx)^T = (0, 0, 0)^T \quad (1.9)$$

Po úpravě rovnice (1.9) dostaneme následující rovnost:

$$\frac{\Omega_x}{dx} = \frac{\Omega_y}{dy} = \frac{\Omega_z}{dz} \quad (1.10)$$

Vírové čáry jsou získány řešením výše uvedené diferenciální rovnice. Používanou numerickou metodou vhodnou k nalezení řešení je metoda Runge–Kutta vhodného řádu. Sjednocením vírových čar inicializovaných z definované křivky dostáváme vírovou plochu. Pokud je daná křivka uzavřená, jedná se o vírovou trubici.

1.3 Intenzita víru a cirkulace rychlosti



Obr. 1.2 Plocha uvnitř tekutiny s orientací vektorů $\mathbf{n}$ a $\mathbf{t}$.

Na obr. 1.2 je naznačena plocha S , jejíž hranici tvoří uzavřená křivka γ , $\mathbf{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy S a $\mathbf{t}$ představuje jednotkový tečný vektor křivky γ . S využitím Stokesovy věty platí rovnost:

$$\int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\gamma \quad (1.11)$$

kde integrál na levé straně rovnice se nazývá *intenzita víru*, integrál na pravé straně *cirkulace rychlosti* [3].

1.4 Helmholtzovy věty

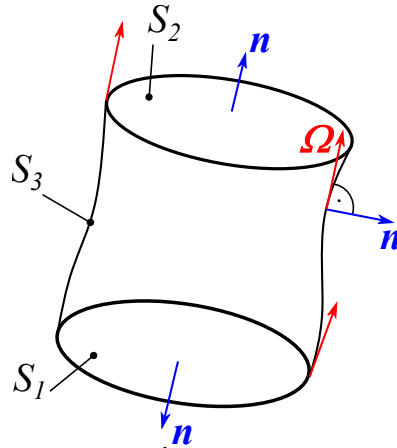
Vektorové pole vířivosti $\boldsymbol{\Omega}$ je pole nezřídlové, protože pro něj platí, že jeho divergence je rovna nule. Lze dokázat, že platí rovnost $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) = 0$, kde $\mathbf{c}$ je libovolný vektor, jehož druhé derivace podle prostorových souřadnic jsou spojitě.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (1.12)$$

Jestliže je uvažován následující integrál s uplatněním Gaussovy–Ostrogradského věty, platí:

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} dV = \oint_{\theta} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} d\theta = 0 \quad (1.13)$$

Uvažovaný objem V představuje vnitřní část určitého úseku zvolené vírové trubice, plocha θ tvoří hranici vybraného úseku. Tuto hraniční plochu lze rozdělit na vstupní plochu S_1 , výstupní plochu S_2 a plášť vírové trubice S_3 , viz obr. 1.3. Vektor $\mathbf{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy θ orientovaný ven z uvažovaného objemu.



Obr. 1.3 Úsek vírové trubice.

Z definice vírové trubice je zřejmé, že vektor Ω je tečný jejímu plášti S_3 . Protože pro skalární součin kolmých vektorů platí, že je roven nule, dostáváme rovnost:

$$\int_{S_3} \Omega \cdot \mathbf{n} \, dS_3 = 0 \quad (1.14)$$

Poté lze integrál z rovnice (1.13) zapsat pomocí dvou integrálů pro vstupní a výstupní plochu S_1 a S_2 následovně:

$$\int_{S_1} \Omega \cdot \mathbf{n} \, dS_1 + \int_{S_2} \Omega \cdot \mathbf{n} \, dS_2 = 0 \quad (1.15)$$

Z uvedené rovnosti vyplývá, že pokud je výstupní plocha S_2 menší než vstupní plocha S_1 (vírová trubice se zúží), velikosti Ω vzrostou, a naopak. O tomto hovoří 1. *Helmholtzova věta*, která říká, že intenzita víru (a tím i cirkulace rychlosti) se podél vírové trubice zachovává.

Aby vírová trubice zanikla, musela by velikost Ω být nulová, což je v rozporu se zákonem zachování intenzity víru. Tímto se zabývá 2. *Helmholtzova věta*. Ta říká, že vírová trubice nemůže v tekutině zaniknout. Může končit na hranici tekutiny (stěna nádoby, hladina), nebo tvoří uzavřenou smyčku.

Tyto dvě věty se zabývají prostorovým zachováním intenzity víru. Časovým zachováním se zabývá věta třetí, někdy označovaná jako věta *Thomsonova* [4], ke které lze dospět na základě následujících úvah.

Základní pohybovou rovnicí pro newtonovskou nestlačitelnou kapalinu je *Navierova–Stokesova rovnice*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1.16)$$

kde první člen na levé straně představuje lokální zrychlení, druhý člen konvektivní zrychlení. Celou levou stranu lze zapsat jednoduše pomocí substancionální derivace jako $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$. Na pravé straně $\mathbf{g}$ je zrychlení od objemových sil, druhý člen představuje zrychlení od tlakových sil a poslední člen vyjadřuje zrychlení od viskózních sil, kde ν značí kinematickou viskozitu.

Aplikací operátoru rotace na rovnici (1.16) je získána tzv. *transportní rovnice vířivosti* [5]. Pro lepší popis je operátor aplikován člen po členu a předpokládá se zaměnitelnost pořadí derivací ve smyslu Schwarzovy věty. Pro lokální zrychlení po aplikaci rotace platí:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \quad (1.17)$$

Konvektivní člen lze pomocí vektorové identity upravit do následujícího tvaru:

$$(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (1.18)$$

Poté je použit operátor rotace:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (1.19)$$

kde první člen na pravé straně je nulový, protože platí, že rotace gradientu libovolného skaláru je nulový vektor. Druhý člen lze pomocí vzorce pro vektorové operátory uvedeného v [6] rozepsat:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) &= \mathbf{v} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \left(\Omega_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \\ &\quad - \left(v_x \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pro popisovanou nestlačitelnou kapalinu platí, že divergence vektorového pole $\mathbf{v}$ i $\boldsymbol{\Omega}$ je rovna nule. Zbylé dva členy potom lze zjednodušeně zapsat pomocí gradientu a součinu. Pro celý konvektivní člen po aplikaci rotace potom lze psát:

$$\nabla \times ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}) = -(\nabla \mathbf{v}) \boldsymbol{\Omega} + (\nabla \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v} \quad (1.21)$$

Pro tlakový člen po aplikaci rotace je zřejmé, že je roven nule:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p = 0 \quad (1.22)$$

Pro viskózní člen po aplikaci rotace lze použít vlastnost Laplaceova operátoru uvedenou v [6], zapsáno:

$$\nabla \times \nu \Delta \mathbf{v} = \nu (\nabla \times \Delta \mathbf{v}) = \nu \Delta (\nabla \times \mathbf{v}) = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} \quad (1.23)$$

Rovnici (1.16) potom lze po aplikaci rotace a výše uvedených úpravách jednotlivých členů napsat v následujícím tvaru:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{g} + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} \quad (1.24)$$

kde lze první dva členy na levé straně opět zapsat pomocí substancionální derivace ve tvaru $\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt}$ a představují změnu vířivosti elementární částice. Třetí člen vyjadřuje vliv gradientu rychlosti, konkrétně je spojený s deformováním vírových trubic vlivem změny rychlosti ve směru vířivosti. První člen na pravé straně zahrnuje vliv vnějších objemových sil a člen $\nu \Delta \boldsymbol{\Omega}$ popisuje

difuzi vířivosti, vlastnost částic předávat si vzájemně vířivost. Dochází tak k jejímu rozptylu až k zániku víru.

Mějme model ideální kapaliny (nestlačitelná a neviskozní) a tíhové pole Země, které je potenciální ($\nabla \times \mathbf{g} = 0$). Je-li proudění za uvedené situace nevířivé, platí

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (1.25)$$

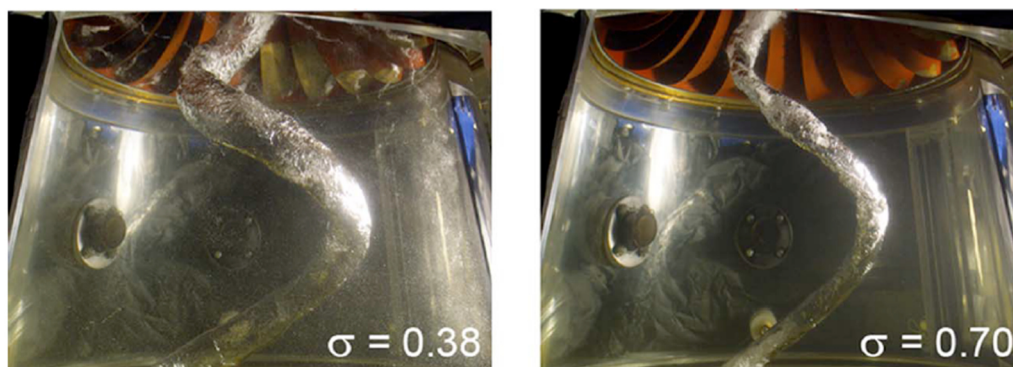
takže se v čase tato situace nezmění, popřípadě naopak vír je v takové kapalině věčný [4], což je předmětem 3. *Helmholtzovy věty*. Rovnice (1.24) pak vyjadřuje tuto větu ve zobecněném tvaru.

2 Dosavadní poznatky z oblasti zkoumání vírového copu

Tato kapitola tvoří rešeršní část práce a je věnována stručnému popisu vírového copu, experimentálním pozorováním tohoto jevu a v neposlední řadě provedeným CFD simulacím. Dále je součástí stručný popis metod používaných k identifikaci jader vírů. Literatura zabývající se problematikou vírového copu je velmi široká a prostor jí věnovaný v této práci ani zdaleka nepokrývá tento záběr. V rámci terminologie je vhodné zmínit, že v této práci se pracuje s pojmem vírový cop i v souvislosti se strukturou vznikající ve vírových generátorech, přičemž někteří autoři v takovém případě preferují označení spirální vír, avšak použití rozličných pojmů není v literatuře jednoznačně dáno.

2.1 Vírový cop

V savce Francisovy turbíny pracující mimo optimální podmínky, především v částečném zatížení, lze pozorovat tzv. vírový cop. Na obr. 2.1 je vírový cop vizualizován díky kavitaci. Tato spirální vírová struktura má negativní dopad na celou hydraulickou soustavu, protože je doprovázena tlakovými pulzacemi, vibracemi, hlukem a kavitací. Všechny tyto děje mohou způsobit závažné poškození zařízení.



Obr. 2.1 Vírový cop v savce modelu Francisovy turbíny zkoumané v rámci projektu FLINDT, σ značí Thomův kavitační součinitel. Přejato [9].

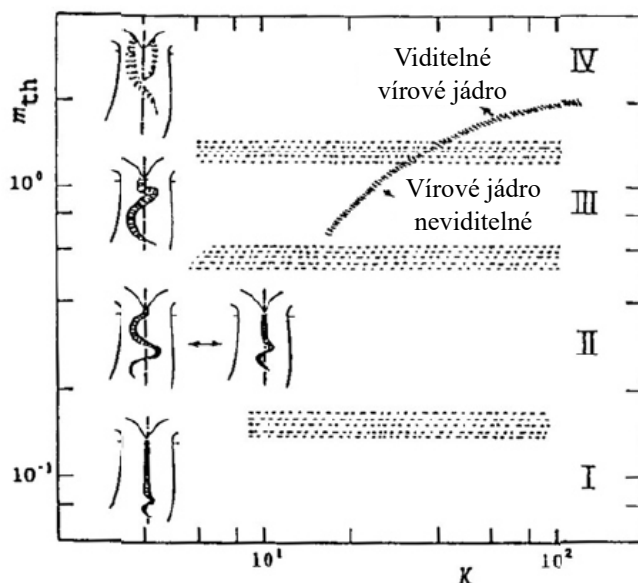
Jestliže turbína pracuje při optimálních podmínkách, tedy průtok odpovídá tzv. Q_{BEP} (*BEP – Best Efficiency Point*), na výstupu z oběžného kola převládá axiální složka rychlosti. Při snižování průtoku narůstá tangenciální složka rychlosti, která způsobuje rotaci kapaliny a vznik vírů.

Vírový cop je velmi komplexní nestabilní struktura s komplikovanou dynamikou, která je předmětem řady výzkumů. Tato problematika je také velmi aktuální z hlediska současné energetické politiky, kdy přečerpávací vodní elektrárny často slouží k regulaci elektrické sítě a používané zařízení tak často pracuje při jiných průtocích nežli návrhových.

Nishi a Liu [7] ve svém rešeršním článku shrnují některé poznatky o vírovém copu se zaměřením na tlakové pulzace. Vznik vírového copu v závislosti na charakteru proudění popisují následovně.

- s rostoucí rotací kapaliny dochází ke zpomalení proudu na ose difuzoru (popř. savky turbíny), až je axiální rychlost v této oblasti nulová (bod stagnace), popřípadě vzniká oblast zpětného proudění

- v případě, že je rotace kapaliny dostatečně velká, oblast stagnace zasahuje až ke vstupu do difuzoru (savky)
- dochází k formaci jednotlivých vírů na rozhraní oblasti stagnace a okolní rotující kapaliny, poté dojde k formaci jednotlivých vírových vláken v jednu vírovou strukturu vinoucí se kolem oblasti stagnace – vznik vírového copu
- vírový cop může být viditelný, jestliže tlak uvnitř je dostatečně nízký, aby způsobil kavitaci
- čím větší je rotace kapaliny, tím objemnější vírový cop vzniká



Obr. 2.2 Čtyři režimy vírového copu, jak je popisuje Nishi. Přejato a upraveno [7].

Na obr. 2.2 jsou znázorněny čtyři režimy výskytu vírového copu. V režimu I je vírový cop téměř přímý, na ose není bod stagnace. Režim II je charakteristický nestabilním chováním, nepravidelně se formují různé tvary vírového copu, které mezi sebou přechází, pozice bodu stagnace není ustálená. V režimu III se objevuje stabilní vírový cop a bod stagnace je lokalizován v blízkosti vstupu do difuzoru (savky). V posledním režimu IV je pozorován dvojitý vírový cop a oblast stagnace zasahuje až k náboji.

2.2 Experimentální pozorování a CFD simulace

Aby bylo možné pozorovat a studovat vírové struktury podobné těm vznikajícím v savce Francisovy turbíny pracující v částečném zatížení, jsou konstruovány tzv. vírové generátory. Konstrukce vírového generátoru je méně nákladná než využití modelu turbíny [8]. Vývoj výpočetní techniky a vznik pokročilých modelů turbulence také umožňuje přesnější numerické simulace tohoto jevu a porovnání těchto simulací s experimenty, které zase mohou být lépe zaznamenány díky pokročilým technikám, jako je LDV (*Laser Doppler Velocimetry*) nebo PIV (*Particle Image Velocimetry*) [9].

Autoři Resiga, Muntean a Tănasă [8] se při návrhu svého vírového generátoru snažili docílit odpovídajících profilů axiální a tangenciální složky rychlosti, jako tomu je v případě Francisovy turbíny zkoumané v rámci projektu FLINDT.

0 9 1 2 3

V článku [10] se autoři z rumunské univerzity zabývají turbulentním prouděním v di-

0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1

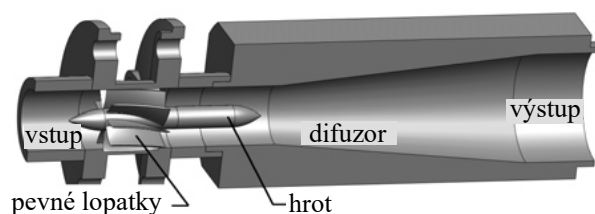
turbulentního proudění. Analýza výpočtů je zaměřena na fluktuaci tlaku a srovnání numerických simulací vůči sobě navzájem a také vůči experimentu. Vírový cop byl vizualizován pomocí kontury konstantního tlaku, v případě experimentu byl pozorovatelný díky kavitaci. Z výsledků plyne, že nejlepší shody mezi numerickými výpočty a experimentem bylo dosaženo v krčku difuzoru, kdy oba kódy dobře podchytily první harmonickou frekvenci, přitom amplitudu tlakových pulzací lépe podchytil výpočet Fluentu. Především v nejzazší části difuzoru, kde byly výsledky vyhodnocovány, jsou již znatelné rozdíly mezi oběma proběhlými výpočty, a ani jedny se navíc neshodují s experimentem. Model turbulence $k-\varepsilon$ dobře podchycuje oblast, kde je vírový cop kompaktní, avšak v rozšiřující se části difuzoru tato struktura na kompaktnosti ztrácí a dle autorů je nutné využít jiné modely turbulence (např. *LES – Large Eddy Simulation* nebo *DES – Detached Eddy Simulation*).

Byla provedena analýza generátoru popsaného výše zaměřená na rychlostní profily [11]. Srovnávány byly rychlostní profily vyplývající z návrhu generátoru s profily získanými numerickým výpočtem ve Fluentu. Předmětem zájmu byly celkem tři sekce generátoru, první před rozvaděčem kvůli kontrole vstupu, druhá za rozvaděčem a třetí na výstupu z oběžného kola. V sekci za rozvaděčem numerické výpočty velmi dobře korespondovaly s teoretickými rychlostními profily. Dle očekávání nesoulad nastal v mezní vrstvě u náboje, respektive u stěn, protože teoretické výpočty při návrhu byly provedeny pro neviskózní kapalinu. Ve třetí sekci bylo dosaženo shody u axiální složky rychlosti – deficit u náboje a nárůst u stěn. Avšak u tangenciální složky profil neodpovídal návrhovému. Příčinou rozdílů může být odtrhávání mezní vrstvy u čerpadlové části lopatek. Při výpočtu byla použita hodnota otáček volného oběžného kola zjištěná experimentálně pro průtok 30 l/s. Výsledky numerických simulací byly potvrzeny také experimentálně, kdy autoři dosahují shody rychlostního profilu u meridiánové i tangenciální složky v předem vybraném řezu.

Vírový generátor konstruovaný na UPT byl předmětem případové studie [12], která byla prezentována v rámci pátého OpenFOAM workshopu pořádaného ve švédském Göteborgu. Studie udává popis geometrie, sítě a nastavení simulace v open-source programu OpenFOAM, uvedeno je opět srovnání s experimentem.

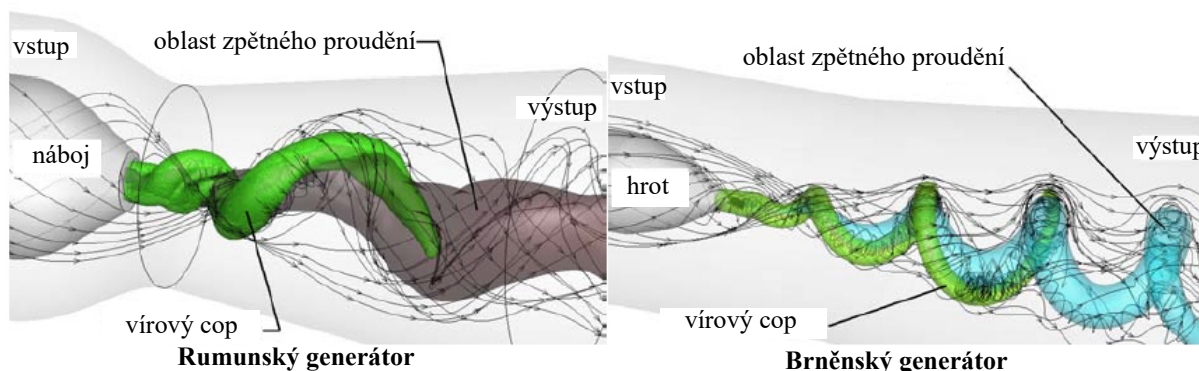
Vírové generátory konstruované na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana v Brně

V článku [13] se autoři z české a rumunské univerzity věnují srovnání dvou vírových generátorů. První z nich je popsán výše, druhý typ generátoru byl vyvinut v Brně. Skládá se z deseti pevných poměrně dlouhých lopatek. Díky tomu nedochází k separaci mezní vrstvy na jejich povrchu pro širší záběr operačních bodů, které jsou v tomto kontextu definovány průtokem v rozsahu 4–13 l/s. Průřez generátoru je zobrazen na obr. 2.4.



Obr. 2.4 Vírový generátor navržený na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana. Přejato a upraveno [13].

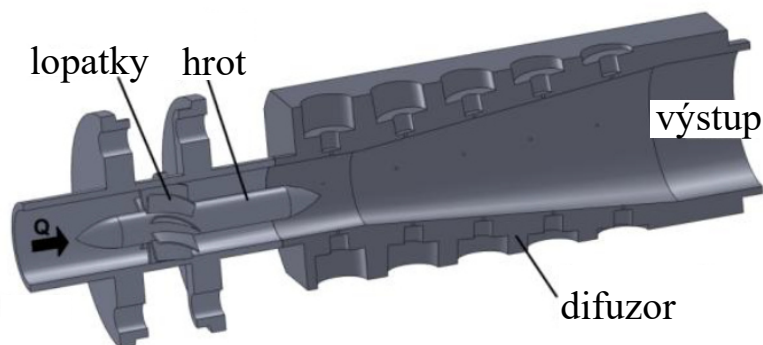
Tvar vírového copu je u každého z generátorů odlišný, protože generátory se liší hodnotou vírového čísla¹ na vstupu do difuzoru (rumunský generátor 0,581, český generátor 0,122). Vírový cop vznikající v českém generátoru je tenčí a také stoupání šroubovice je menší, naopak vírový cop v rumunském generátoru je masivnější s větším stoupáním, což koresponduje s větší hodnotou vírového čísla u rumunského generátoru. Rozdíl ve tvaru vírového copu je vidět na obr. 2.5.



Obr. 2.5 Srovnání tvaru vírového copu v rumunském a českém generátoru. Cop vizualizován izoplochou tlaku. Zobrazen také region zpětného proudění. Přejato a upraveno [13].

Struktura v rumunském generátoru také vykazuje nestabilnější chování, než je tomu u českého. Numerické simulace byly srovnány s experimenty a dosáhly dobré shody v predikci frekvence rotace vírového copu – rozdíl pouze 6 %. Také profily axiální a tangenciální složky rychlosti odpovídají experimentálně zjištěným. Rozdíl v profilech je patrný u tangenciální složky mimo osu difuzoru.

Na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana byl také zkonstruován generátor s modifikovanými parametry oproti výše zmíněnému. Schéma je na obr. 2.6. Oproti generátoru na obr. 2.4 je vidět rozdíl v lopatkách. Byl upraven úhel lopatek, výsledkem čehož je proudění s větším podílem tangenciální složky. Vírové číslo pak dosahuje podobných hodnot jako rumunský generátor. Analýze experimentů a numerických simulací se ve své dizertační práci věnuje Štefan [14].



Obr. 2.6 Vírový generátor z Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana s upravenou geometrií. Přejato a upraveno [14].

¹ Autoři využívají definice vírového čísla založené na podílu toku tangenciální složky hybnosti v axiálním směru ku toku axiální složky hybnosti v axiálním směru. Matematický zápis je dán vztahem (5.1).

Jiné CFD simulace a experimentální pozorování vírového copu

Dizertační práce Skotáka [15] zkoumá spirální vírové struktury vznikající v modelu savky Francisovy turbíny. První část je věnována analýze provedených experimentů. Autor provedl rozdělení pracovní oblasti turbíny podle charakteru vírových struktur, které se vyskytovaly v přímé části savky. Charakter vírové struktury je v tomto případě definován počtem vírových vláken (jedno, dvě, případně tři vlákna), smyslem precese (ve směru, nebo proti směru otáčení kola) a typem vírového jádra. Je popsán rozdíl mezi dvěma typy vírů pozorovaných v režimu s vyššími jednotkovými otáčkami než optimálními. První typ víru má tvar šroubovice a koná precesní pohyb ve směru rotace oběžného kola. Tento typ víru skokově přechází ve druhý typ, který má vyšší frekvenci precese a vyšší stoupání než původní vír.

Druhá část práce je zaměřena na metody CFD modelování proudění v savce. Nejdříve jsou testovány různé modely turbulence a je vyhodnocena jejich schopnost podchytit vírové struktury typické pro savku Francisovy turbíny. Tyto výpočty proběhly pro přímou část savky. Následně byl proveden výpočet pro kolenovou savku, přičemž na základě předchozích výpočtů byl zvolen neviskózní model proudění. Dalším krokem byla analýza vlivu odlišných rychlostních profilů na vstupu savky. Pro tyto výpočty byly použity dva modely turbulence – Realizable $k-\epsilon$ model a RSM (Reynolds Stress equation Model). Rozbor výsledků je zaměřen na model RSM. Použitá výpočetní síť i model turbulence dokáží zachytit vliv odlišných okrajových podmínek. Autor dále analyzuje příčné a podélné tlakové pulzace. Práce předkládá úvod do metodiky nastavení výpočtu a jasně popisuje rozdíly způsobené použitím odlišných modelů turbulence.

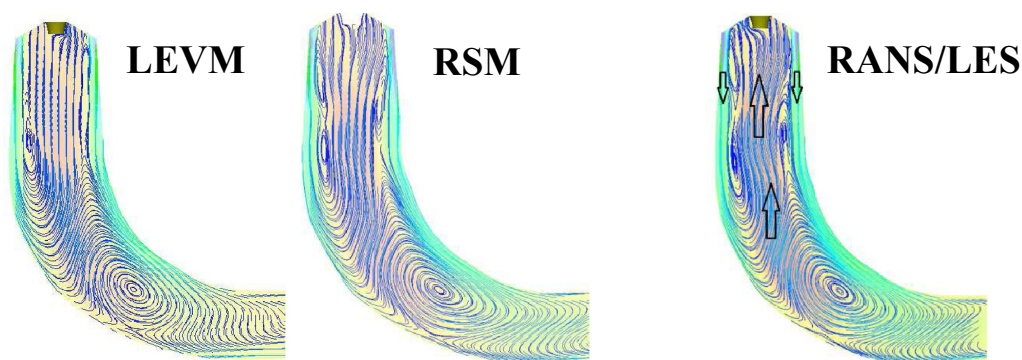
Autoři článku [16] ze slovinského Turboinštitutu provedli řadu simulací modelu Francisovy turbíny s různými modely turbulence a také s vícefázovým modelem, kde byla uvažována kavitace. V případě numerických řešení bez kavitace se dařilo dobře predikovat frekvenci rotace vírového copu, větší odchylky byly u amplitudy. Výpočet byl realizován pro několik operačních bodů a výsledky odpovídají trendu, že čím větší je zavíření, tím mohutnější vírový cop vzniká. V úvodu svého příspěvku autoři diskutují o vhodnosti různých modelů turbulence k řešení dané problematiky. Dobrého podchycení vírového copu je dosaženo s využitím RSM, případně LES modelů turbulence. Naproti tomu model Realizable $k-\epsilon$ byl pro tento případ příliš disipativní.

Příspěvek [17] se zabýval studiem formace a vývoje vírového copu. Použitý generátor byl konstrukčně podobný generátoru z UPT. Pomocí magnetické vazby mezi elektromotorem vně generátoru a oběžným kolem bylo umožněno měnit otáčky oběžného kola. Experiment byl proveden pro průtok $Q = 80 \text{ m}^3/\text{h}$ a pro rozsah otáček od 0 do 1000 ot./min. Proudění v difuzoru koresponduje s režimy vírového copu, jak je popisuje Nishi, viz obr. 2.2. Při otáčkách přibližně 450 ot./min se vířivost proudění blíží nule a v difuzoru není pozorována struktura vírového copu. Autorům se podařilo zachytit formaci tzv. vírového kroužku (obr. 2.7). Tato struktura může způsobit velké tlakové pulzace, pokud dochází ke kolizím se stěnou difuzoru.



Obr. 2.7 Vírový kroužek. Přejato a upraveno [17].

Článek [18] shrnuje CFD výpočty pro model Francisovy turbíny, který je předmětem zkoumání projektu Francis-99. Pro několik operačních bodů tohoto modelu byla zpracována experimentální studie [19]. Data z ní byla použita pro validaci provedených výpočtů. Geometrie modelu turbíny je k dispozici na webové stránce projektu Francis-99, viz [20]. Uvažovaný průtok odpovídá pouze 35 % Q_{BEP} . Autoři se zaměřili na srovnání tří různých modelů turbulence – LEVM (Linear Elliptical relaxation eddy-Viscosity Model), RSM a hybridní RANS/LES model. V prezentovaných výsledcích není pozorován vírový cop. Modely RSM a RANS/LES dobře zachycují koherentní vírové struktury, které obklopují oblast zpětného proudění uprostřed savky. Na obr. 2.8 jsou vizualizovány časově středované proudnice v rovině symetrie savky. U modelu LEVM je patrný rozdíl v proudnicích v horní části savky oproti zbylým dvěma modelům, které se pro daný typ výpočtu jeví jako vhodnější.



Obr. 2.8 Časově středované proudnice v rovině symetrie savky, pozadí kolorováno podle axiální složky rychlosti (modrá pro směr dolů po červenou směrem nahoru – znázorněno šipkami ve třetím obrázku). Přejato a upraveno [18].

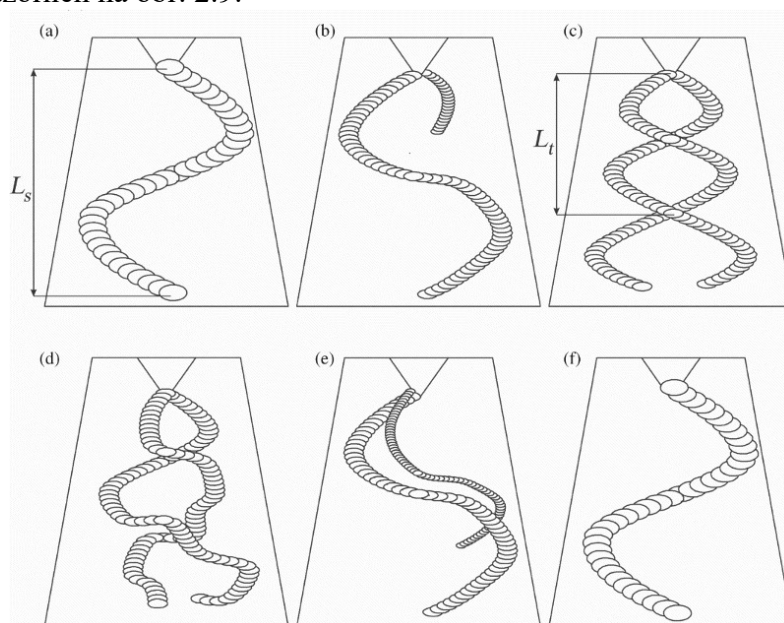
Fenomén dvojitého vírového copu

Experimentální studie [21] je zaměřená na chování dvojitého vírového copu pro případ modelu kolenové a přímé savky pro rozsah Reynoldsova čísla 10^5 – $5 \cdot 10^5$. Režim proudění byl zvolen tak, aby odpovídal proudění v částečném zatížení s vírovým číslem $S_g = 1,1$. Autoři v tomto případě využívají definice vírového čísla, která je založena na geometrii vírového generátoru.

$$S_g = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - (d_1/d_2)^3}{1 - (d_1/d_2)^2} \right) \tan \varphi \quad (2.1)$$

kde d_1 je vnitřní průměr, d_2 vnější průměr generátoru (označení průměrů je na obr. 2.3) a φ je úhel sklonu lopatky. V případě modelu kolenové savky byl použit generátor s pevnými lopatkami. Tento typ generátoru umožňuje kontrolu intenzity víření, ale není umožněno docílit deficitu tlaku u náboje, jak tomu je u reálné turbíny. U modelu přímé savky (difuzoru) byl použit typ vírového generátoru, který byl vyvinut na rumunské univerzitě (popsán výše).

Téměř v celém zkoumaném rozsahu Reynoldsova čísla byl pro oba modely savky pozorován přechod jednoho vírového copu ve dvojité a naopak. V modelu kolenové savky je dle pozorování autorů dvojitý vírový cop méně stabilní, avšak je lépe vizualizovaný pro menší průtoky. Vizualizace v případě modelu kolenové savky bylo docíleno vstříkáváním malého množství vzduchových bublinek do proudění. V případě difuzoru byl vírový cop vizualizován díky kavitaci, které bylo dosaženo snížením tlaku v okruhu. Proudění v modelech savek bylo snímáno vysokorychlostními kamerami. Výsledné snímky byly následně zpracovány a autoři předkládají schéma přechodu jednoho vírového copu ve dvojité a naopak. Cyklus transformace vírového copu je znázorněn na obr. 2.9.



Obr. 2.9 Transformace jednoho vírového copu ve dvojité a zpět v jednotlivých fázích. Přejato [21].

V určitém časovém bodě se vírový cop stává tenčím a v opačné fázi je iniciován druhý vírový cop (obr. 2.9b), který se během několika period zformuje do typického spirálního tvaru. Obě vlákna rotují shodnou úhlovou rychlostí. V této fázi (obr. 2.9c) je nemožné identifikovat původní vírový cop a nově zformovaný. Pravidelná dvojité šroubovice vírového copu je narušována nestabilitami proudění, proto tato struktura nemá dlouhého trvání. Dochází k poruchám symetrie a následně k rozpadu struktury. Jedno vlákno dvojitého vírového copu nabírá na síle na úkor druhého (obr. 2.9e), není zachována ani opačná fáze vláken. Následně dojde k úplnému sloučení a vzniká jeden vírový cop s původní frekvencí a tvarem.

Z analýzy snímků a naměřených frekvencí autoři dokázali shrnout dílčí poznatky o dvojitém vírovém copu. Vlastní frekvence dvojitého vírového copu je odlišná od vlastní frekvence jednoho copu, tyto dvě struktury mají také odlišná stoupání. Pro dvojité vírový cop platí, že má nižší stoupání. Z hlediska doby trvání je dominantní strukturou jeden vírový cop. Autoři uvádí, že stabilita dvojitého vírového copu pravděpodobně závisí na vírovém čísle, průtoku a tlaku v okruhu.

2.3 Kritéria pro identifikaci jader vírů

Víry se vyskytují v přírodě a také jsou běžným jevem v inženýrské praxi. Obecně je zažita intuitivní představa víru (např. víry na hladině řeky, tornádo), avšak není zavedena obecně platná definice víru. Nabízí se spousta otázek. Jaké jsou hranice této struktury? Jaké jsou vlastnosti víru? Aby bylo možné tyto struktury popsat, je nutné umět je rozpoznat na základě fyzikálních veličin. Za těmito účely byly popsány metody pro identifikaci jader vírů.

Některé z těchto metod jsou založeny na gradientu rychlosti. Mezi tyto metody patří Q kritérium, Δ kritérium nebo λ_2 kritérium [22]. Tyto metody jsou tzv. galileovskými invariantními, tj. identifikované víry jsou nezávislé na translačním pohybu pozorovatele. Tenzor gradientu rychlosti $\nabla \mathbf{v}$ lze rozložit na symetrickou ($\mathbf{S}$) a antisymetrickou ($\mathbf{P}$) část²:

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{S} + \mathbf{P} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2} \quad (2.4)$$

Tenzor $\mathbf{S}$ je spojen s rychlostí deformace elementárních částic (tenzor rychlosti deformace). Antisymetrická část $\mathbf{P}$ souvisí s jejich rotací (tenzor vířivosti).

Definice některých kritérií vychází z řešení problému vlastních hodnot $\nabla \mathbf{v}$. Vlastní čísla λ_i jsou získána řešením charakteristické rovnice. Pro přehlednost je značeno $\lambda_i = \lambda$. Symbol $\mathbf{I}$ představuje jednotkovou matici o stejných rozměrech jako $\mathbf{A}$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

² V literatuře [22], [23] je pro antisymetrickou část tenzoru $\nabla \mathbf{v}$ používán symbol $\mathbf{\Omega}$, který byl již v předcházejících kapitolách použit pro označení vektoru vířivosti. Z toho důvodu bylo použito označení $\mathbf{P}$.

Pomocí Sarrusova pravidla je determinant vyjádřen mnohočlenem:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda \right) \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \lambda \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \lambda \right) + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ & - \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \lambda \right) - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda \right) \\ & - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Po roznásobení a úpravách lze charakteristickou rovnici tenzoru gradientu rychlosti psát jako následující polynom:

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (2.7)$$

kde I_{1-3} jsou invarianty tenzoru gradientu rychlosti a jsou dány následujícími vztahy.

$$I_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ & - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} I_3 = & \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ & - \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ & = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pro nestlačitelnou kapalinu platí $I_1 = 0$. Ze vztahu pro třetí invariant je patrné, že platí $I_3 = \det(\nabla \mathbf{v})$. Značení λ_{1-3} představuje vlastní čísla tenzoru $\nabla \mathbf{v}$, která jsou získána řešením charakteristické rovnice (2.7).

Dále rozepsaná kritéria nejsou zdaleka všechna publikovaná, souhrn kritérií lze nalézt např. v článku [23]. Jednou z možností identifikace víru je vířivost, která sama o sobě není objektivní metodou. Dá se však ukázat, že objektivní je její odchylka od střední průřezové hodnoty. Autor Kolář [22] popisuje trojitou dekompozici relativního pohybu v blízkosti bodu na tzv. efektivní smyk, zbytkovou rotaci (z níž plyne zbytková vířivost) a zbytkovou deformaci. Víř pak definuje jako souvislou oblast, kde je nenulová velikost zbytkové vířivosti. Tím řeší známý problém, že vířivost je nenulová nejen ve vírech, ale i v místech, kde dochází pouze ke smyku (např. mezní vrstva). Dalším z mnoha kritérií je tzv. Swirling strength, které identifikuje vír na základě imaginárních vlastních hodnot tenzoru gradientu rychlosti.

2.3.1 Q kritérium

Q kritérium identifikuje víry nestlačitelné tekutiny jako oblasti, kde norma tenzoru vířivosti přesahuje nad normou tenzoru rychlosti deformace [24]. Zkoumaný parametr Q je druhý inva-

riant tenzoru gradientu rychlosti, jak je popsán v rovnici (2.9). Pro jádra víru platí $Q > 0$. S využitím rozkladu tenzoru gradientu rychlosti $\mathbf{A}$ na symetrickou a antisymetrickou část lze Q kritérium psát:

$$Q = \frac{1}{2}(\|\mathbf{P}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2) > 0 \quad (2.11)$$

kde dvojité rovné závorky značí Frobeniovu normu matice. Pro libovolnou matici $\mathbf{G}$ je Frobeniova norma definována následovně:

$$\|\mathbf{G}\| = [\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)]^{1/2} \quad (2.12)$$

Přičemž značení tr je stopa matice, představující součet prvků na hlavní diagonále.

Zdroj [23] uvádí výpočet normalizované hodnoty Q kritéria, která je obvykle používána ve tvaru:

$$Q_n = \sqrt{\frac{Q}{Q_{\max}}} \quad (2.13)$$

V rovnici výše Q_n představuje normalizovanou hodnotu Q kritéria a $Q_{\max}$ je maximální hodnota kritéria v doméně, která je předmětem zájmu.

2.3.2 Δ kritérium

Jako víry jsou dle Δ kritéria identifikované oblasti, pro které platí, že dvě vlastní čísla $\nabla \mathbf{v}$ jsou komplexní [25]. Definice kritéria vychází z diskriminantu pro kubickou rovnici. Je uvažována kubická rovnice s neznámou λ v obecném tvaru s koeficienty k_{1-4} :

$$k_1\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_3\lambda + k_4 = 0 \quad (2.14)$$

Pro diskriminant kubické rovnice platí vztah:

$$D = 18k_1k_2k_3k_4 - 4k_2^3k_4 + k_2^2k_3^2 - 4k_1k_3^3 - 27k_1^2k_2^2 \quad (2.15)$$

Pro nestlačitelnou kapalinu se tvar charakteristické rovnice (2.7) redukuje na následující podobu:

$$-\lambda^3 - I_2\lambda + I_3 = 0 \quad (2.16)$$

Pokud má kubická rovnice dva komplexní kořeny, její diskriminant je záporný. Po aplikaci této úvahy a vztahu pro diskriminant (2.15) na charakteristickou rovnici platí nerovnost:

$$D = -4I_2^3 - 27I_3^2 < 0 \quad (2.17)$$

V souladu s konvenčním značením platí $I_2 = Q$, respektive $I_3 = R$. Výše uvedená nerovnost je upravena do následujícího tvaru, který je matematickým předpisem Δ kritéria.

$$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 > 0 \quad (2.18)$$

Z definice kritéria je zřejmé, že Q kritérium je restriktivnější než Δ kritérium [23].

2.3.3 λ_2 kritérium

Přístup λ_2 kritéria vychází z předpokladu, že v jádru víru je minimum tlaku. Pokud je uvažováno skalární pole tlaku p , potom matice druhých parciálních derivací (tzv. Hessova matice) obsahuje informaci o lokálním minimu tohoto pole. Jestliže jsou dvě vlastní čísla Hessovy matice tlaku kladná, pak existuje řez, ve kterém je daný bod lokálním minimem tlaku [26]. Formální definice kritéria uvažuje řešení vlastních hodnot matice $\mathbf{S}^2 + \mathbf{P}^2$.

Vlastní čísla jsou seřazena tak, aby platilo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Víř je identifikován jako oblast, kde jsou dvě vlastní čísla tenzoru $\mathbf{S}^2 + \mathbf{P}^2$ záporná, čili musí platit $\lambda_2 < 0$.

Princip kritéria vychází z Navierovy–Stokesovy rovnice dané vztahem (1.16), přičemž není uvažováno zrychlení od vnějších objemových sil. Na tuto rovnici je aplikován operátor gradient:

$$\nabla \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla((\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla(\nabla p) + \nu \nabla(\Delta \mathbf{v}) \quad (2.19)$$

Na druhý člen na levé straně je aplikován vztah pro gradient uvedený v [6], platí:

$$\nabla((\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v})(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla(\nabla \mathbf{v}))\mathbf{v} \quad (2.20)$$

Gradient rychlosti lze zapsat jako součet symetrické a antisymetrické části. S uplatněním této skutečnosti a po elementárních úpravách za předpokladu zaměnitelnosti pořadí derivací má rovnice (2.19) níže uvedený tvar.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{S} + \mathbf{P}) + (\mathbf{S} + \mathbf{P})(\mathbf{S} + \mathbf{P}) + (\nabla \mathbf{S} + \nabla \mathbf{P})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\nabla p) + \nu \Delta(\mathbf{S} + \mathbf{P}) \quad (2.21)$$

Po dalších úpravách a vhodném uspořádání lze rovnici psát v podobě:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{S})\mathbf{v} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{P}^2 - \nu \Delta \mathbf{S} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{P})\mathbf{v} + \mathbf{P}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{P} - \nu \Delta \mathbf{P} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla(\nabla p) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Členy druhé závorky na levé straně odpovídají transportní rovnici vířivosti. Na začátku úvah nebylo bráno v potaz zrychlení od vnějších objemových sil, vzhledem k čemuž je celá závorka rovna nule. Potom dostáváme rovnici ve tvaru:

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{P}^2 - \nu \Delta \mathbf{S} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\nabla p) \quad (2.23)$$

Člen $\nabla(\nabla p)$ představuje zmiňovanou Hessovu matici tlaku. Kritérium λ_2 nezohledňuje vliv viskozity a člen materiálové derivace tenzoru rychlosti deformace. Poté již kritérium dostává

podobu uvedenou v úvodu kapitoly. Kvůli zápornému znaménku na pravé straně jsou požadována dvě záporná vlastní čísla $S^2 + P^2$. Článek [22] uvádí, že obecně existence lokálního minima není dostatečná ani nezbytná podmínka existence víru. V práci [15] autor demonstruje odlišnou polohu jádra víru a minima tlaku, přitom jádro víru definuje jako oblast s velmi malou hodnotou tangenciální složky rychlosti.

2.3.4 Helicita

V dynamice tekutin je pro ideální kapalinu definována hustota helicity H_d jako skalární součin rychlosti a vířivosti:

$$H_d = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.24)$$

Helicita je definována jako objemový integrál hustoty helicity H_d . Jedná se o metodu, která je snadno interpretovatelná. Velkých hodnot nabývá v případě velké velikosti rychlosti a vířivosti, přičemž úhel mezi těmito vektory je minimální. Znaménko určuje smysl rotace. Tato metoda není založena na gradientu rychlosti, jak tomu bylo u předchozích zmíněných kritérií.

Normalizovaná helicita H_n představuje kosinus úhlu, který svírají vektory $\mathbf{v}$ a $\boldsymbol{\Omega}$ [23].

$$H_n = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{|\mathbf{v}| |\boldsymbol{\Omega}|} \quad (2.25)$$

Jádra víru jsou identifikovaná jako oblasti, kde absolutní hodnota H_n nabývá maximálních hodnot (z vlastností funkce kosinus je zřejmé, že maximální absolutní hodnota je jedna). Ze vztahu (2.25) je patrné, že definice kritéria nezahrnuje některé speciální případy, např. hodnota jmenovatele je rovna nule [23].

2.3.5 Ljapunovův exponent

Ljapunovovy exponenty jsou spojeny původně s teorií dynamických systémů. V souvislosti s tzv. lagrangeovskými koherentními strukturami u nestacionárního proudění se zavádí Ljapunovův exponent v konečném čase (FTLE – *Finite-time Lyapunov Exponent*). FTLE pro 3D proudění popisuje autor Haller na základě geometrického pohledu [27]. Koherentní struktury jsou detekovány z trajektorií částic. V každém bodě prostoru zkoumané domény je Ljapunovův exponent skalár, který udává míru rozbíhavosti částic inicializovaných v blízkosti daného bodu.

Výhodou popisované metody je její objektivita. Výsledek je nezávislý na translaci i rotaci souřadného systému, ale je ovlivněn nastavením výpočtu (volba snímků, volba integračního úseku) a následnou interpretací dosažených výsledků. Kritéria založená na gradientu rychlostního pole jsou oproti tomu pouze galileovskými invariantní, takže v různě rotujících vztažných soustavách vychází různě.

Je uvažována částice, která se v čase t_0 nachází na pozici $\mathbf{x}_0$. Jestliže se tato částice v čase t přemístí na pozici $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t)$, pak platí:

$$\frac{d\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t), t) \quad (2.26)$$

Pro zjednodušení je dále značeno $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$. Výše uvedený vztah je v podstatě zobrazení, které každé trojici $t_0, \mathbf{x}_0, t$ přiřadí bod $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t)$.

$$\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t) \quad (2.27)$$

Nyní jsou uvažovány dva počáteční body $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}$. Jejich polohy po aplikování výše uvedeného zobrazení jsou:

$$\begin{aligned}\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t) \\ \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) &= \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.28)$$

Pomocí Taylorova rozvoje pak pro rozdíl poloh lze psát:

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \nabla\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} + \mathcal{O}(|d\mathbf{x}|^2) \quad (2.29)$$

Pro nekonečně malé $d\mathbf{x}$ platí uvedená lineární aproximace přesně. Velikost $\Delta\mathbf{x}(t)$ je vyjádřena následujícím vztahem:

$$|\Delta\mathbf{x}(t)| = \sqrt{d\mathbf{x} \cdot \left[\left(\nabla\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \right)^T \left(\nabla\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \right) d\mathbf{x} \right]} \quad (2.30)$$

Označme $\mathbf{D} = \left(\nabla\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \right)^T \left(\nabla\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \right)$, kde $\mathbf{D}$ je Cauchyho–Greenův deformační tenzor. Je hledána maximální hodnota $|\Delta\mathbf{x}(t)|$, a pro tu platí, že směr $d\mathbf{x}$ je stejný jako směr vlastního vektoru tenzoru $\mathbf{D}$, který náleží největšímu vlastnímu číslu $\lambda_{\max}$.

$$\max_{d\mathbf{x}} |\Delta\mathbf{x}(t)| = \sqrt{\lambda_{\max}} |d\mathbf{x}_{\lambda_{\max}}| \quad (2.31)$$

kde $d\mathbf{x}_{\lambda_{\max}}$ značí diferenciál ve směru vlastního vektoru příslušícímu vlastnímu číslu $\lambda_{\max}$. Pro značení $T = t - t_0$ lze výše uvedený vztah přepsat do tvaru:

$$\max_{d\mathbf{x}} |\Delta\mathbf{x}(t)| = e^{\sigma_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)|T|} |d\mathbf{x}_{\lambda_{\max}}| \quad (2.32)$$

kde $\sigma_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$ je největší Ljapunovův exponent pro integrační úsek T . Položme do rovnosti pravé strany rovnice (2.31) a (2.32) a vyjádříme největší Ljapunovův exponent:

$$\sigma_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \ln \sqrt{\lambda_{\max}} \quad (2.33)$$

Uvedená formulace FTLE byla popsána na základě článku [28]. Integrační úsek T je uveden v absolutní hodnotě. Při dopředné integraci je T kladné a FTLE udává míru rozbíhavosti trajektorií. Pokud jsou hledány sbíhající se trajektorie, je uvažována integrace „v čase zpět“ a T má zápornou hodnotu. Tato interpretace je založena na geometrii trajektorií, fyzikální interpretace je stále oblastí zájmu.

2.3.6 M_Z kritérium

Autor Haller se ve svém článku [29] zabýval objektivní definicí víru. Výstupem jeho práce je M_Z kritérium, které k vírovým strukturám přistupuje novým způsobem. Stejně jako FTLE se jedná o objektivní kritérium. Předpokladem formulace je nestlačitelná kapalina.

Je uvažována trajektorie s počátečním bodem $\mathbf{x}_0$ v čase 0. Pro nekonečně malý přírůstek dt času t lze psát:

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, dt) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0)dt \quad (2.34)$$

Pro trajektorii z bodu $x_0 + \xi$ analogicky platí:

$$x(x_0 + \xi, dt) = x_0 + \xi + v(x_0 + \xi, 0)dt \quad (2.35)$$

Rovnice od sebe odečteme:

$$x(x_0 + \xi, dt) - x(x_0, dt) = \xi + [v(x_0 + \xi, 0) - v(x_0, 0)]dt \quad (2.36)$$

Pro levou stranu rovnice platí, že se jedná o součet $\xi + d\xi$. Člen v hranaté závorce na pravé straně lze pro ξ blížící se k nule zapsat jako $\nabla v(x_0, 0)\xi$. Potom lze vyjádřit $\frac{d\xi}{dt}$:

$$\frac{d\xi}{dt} = \nabla v(x_0, 0)\xi \quad (2.37)$$

Tato diferenciální rovnice určuje, zda se trajektorie, které jsou od sebe v čase 0 posunuté o nekonečně malé ξ , budou v čase přibližovat, oddalovat, nebo zachovávat stejnou vzdálenost.

Dále je dána tzv. Ljapunovova funkce, pro kterou vzhledem k (2.3) a (2.37) platí:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \frac{d|\xi|^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\xi^T \xi)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi^T}{dt} \xi + \xi^T \frac{d\xi}{dt} \right) = \xi^T S \xi \quad (2.38)$$

Pro tenzor rychlosti deformace S nestlačitelné kapaliny platí, že má nulovou stopu, tj. součet prvků na hlavní diagonále je roven nule. Pak pro vlastní hodnoty tenzoru S musí platit, že alespoň jedna je kladná a alespoň jedna záporná (kromě případu, kdy jsou všechny hodnoty na hlavní diagonále rovny nule). Pro vlastní čísla s_i uvažujeme seřazení:

$$\text{sign } s_1 = \text{sign } s_2 \neq \text{sign } s_3, |s_1| \geq |s_2| \quad (2.39)$$

Nyní hledejme, pro jaké ξ je Ljapunovova funkce $\mathcal{V}$ nulová (tj. trajektorie se od sebe v daném okamžiku nevzdalují, ani se k sobě nepřibližují). Uvažujeme vektor ξ v bázi jednotkových vlastních vektorů e_i příslušejících vlastním hodnotám s_i , kde η_{1-3} jsou konstanty:

$$\xi = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3 \quad (2.40)$$

Dosadíme-li tento tvar do pravé strany předpisu Ljapunovovy funkce (2.38), dostáváme:

$$(\eta_1 e_1^T + \eta_2 e_2^T + \eta_3 e_3^T) S (\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3) = 0 \quad (2.41)$$

Výraz je následně roznásoben a upraven. Při úpravách jsou uvažovány následující platné skutečnosti: $S e_i = s_i e_i$, $e_i^T e_i = 1$, $e_i^T e_j = e_j^T e_i$, $e_i e_j = 0$ pro $i \neq j$, $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

$$\eta_3^2 = -\eta_1^2 \frac{s_1}{s_3} + \eta_2^2 \left(1 + \frac{s_1}{s_3} \right) \quad (2.42)$$

Jedná se o rovnici eliptického kuželu v souřadném systému η_1, η_2, η_3 . Autor kritéria tento kužel označuje písmenem Z. Na základě uvedených předpokladů musí platit, že $\frac{s_1}{s_3} \in (-1; -0,5)$.

Následujícím vztahem je dána matice M :

$$M = (\nabla v)^T S + S \nabla v + \frac{DS}{Dt} \quad (2.43)$$

Matice M je symetrická matice, pro niž platí $\text{tr}(M) = 2\|S\|^2 \geq 0$, kde $\|S\|^2 = \sum_{i,j} S_{ij}^2$. Jestliže je stopa matice kladná, pak musí být alespoň jeden diagonální prvek kladný. Matice M je proto buď pozitivně definitní, pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Ljapunovova funkce $\mathcal{V}$ je derivována podle času a je použita rovnost (2.37):

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \xi^T (\nabla v)^T S \xi + \xi^T \frac{DS}{Dt} \xi + \xi^T S \nabla v \xi = \xi^T M \xi \quad (2.44)$$

M_Z kritérium definuje vír jako soubor trajektorií, které po celou dobu prochází oblastí, kde je M_Z indefinitní. Více informací k definici kritéria a její zdůvodnění lze nalézt v původním článku autora Hallera [29]. K ověření, zda je M na eliptickém kuželu Z indefinitní, se používá funkce značená $m(\alpha)$. Předpis funkce vychází z pravé strany rovnice (2.44). Je hledáno minimum výrazu $\xi^T M \xi$ pro $\xi = E\eta$, kde $E = (e_1, e_2, e_3)$ a $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$. Pro funkci $m(\alpha)$ platí:

$$m(\alpha) = \xi^T M \xi = \eta^T E^T M E \eta \quad (2.45)$$

Je-li $\min(m(\alpha)) < 0$, pak je M na eliptickém kuželu Z indefinitní. Tvar funkce $m(\alpha)$ uvedený v původním článku [29] vychází z parametrické rovnice elipsy pro souřadnici $\eta_3 = \sqrt{a(1-a)}$, kde $a = -\frac{s_1}{s_3}$. Odvození spočívá v úpravě rovnice eliptického kuželu na rovnici elipsy závislé na hodnotě souřadnice η_3 . Ukazuje se ovšem, že znaménko minima funkce $m(\alpha)$ na této souřadnici nezávisí, proto ji bylo možné vhodně zvolit. Je použito značení $\widehat{M} = E^T M E$. Funkce má pak následující tvar:

$$\begin{aligned} m(\alpha) = & (1-a)\widehat{M}_{11} \cos^2 \alpha + a\widehat{M}_{22} \sin^2 \alpha + a(1-a)\widehat{M}_{33} \\ & + \sqrt{a(1-a)}(2\sqrt{1-a}\widehat{M}_{13} \cos \alpha + 2\sqrt{a}\widehat{M}_{23} \sin \alpha \\ & + \widehat{M}_{12} \sin 2\alpha) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Pro zvolený časový interval je pak vyhodnocováno, kolik procent času stráví sledovaná částice v oblasti, kde je M_Z indefinitní. Tato relaxace dříve zmíněné definice víru se v praxi používá z důvodu značných numerických chyb plynoucích z množství a charakteru operací, které je nutné provést.

3 Software použitý k postprocessingu dat CFD výpočtů

Vizualizace je zaměřena na grafické vyobrazení vědeckých dat tak, aby bylo možné porozumět zkoumaným jevům, vyvozovat závěry a správně interpretovat dosažené výsledky. Tento přístup k datům se zdá velmi intuitivní. Na rozdíl od experimentů nám počítačová vizualizace umožňuje zobrazit veličiny a vztahy, které jsou během experimentů pouze těžko pozorovatelné (např. jsou založeny na určité matematické operaci a lidský zrak a mozek nejsou schopné takové filtrace reality). Aby měly vizualizace svou vypovídající hodnotu a nejednalo se pouze o líbivý obrázek, je nutné porozumět základním principům počítačové vizualizace [30]. Základní koncepty počítačové vizualizace jsou popsány v bakalářské práci Častulíkové [31]. Úvod do vizualizace proudění je také popsán v publikaci [32] zaměřené na extrakci vírových jader pomocí metod počítačové vizualizace a různých kritérií identifikaci vírů.

The Visualization Toolkit

The Visualization Toolkit (VTK) je objektově orientovaný open-source software určený k vizualizaci numerických dat a celkovému postprocessingu. Jeho vývoj začal již v roce 1993. V roce 1998 byla založena společnost Kitware a díky velkému množství vývojářů, kteří se na projektu podíleli, byl vytvořen nástroj k datové vizualizaci s nepřeberným množstvím funkcí a rozsáhlou komunitou [33]. VTK je tvořen knihovnami tříd, které jsou napsané v jazyce C++, zdrojové kódy jsou dostupné v repozitáři [34]. Nespornou výhodou nástroje je jeho nezávislost na platformě, jeho použití je možné na operačních systémech na bázi Linuxu, Windows i Mac, což pokrývá naprostou většinu uživatelů.

S knihovnami lze pracovat přímo pomocí jazyka C++, jestliže uživatel dobře zná strukturu a propojení jednotlivých objektů VTK. Jednou z možností je také ovládání pomocí jazyka Python, který je mezi uživateli oblíbený díky své jednoduchosti a uživatelské přívětivosti. V neposlední řadě je tu možnost využít některé grafické uživatelské rozhraní (*GUI – Graphic User Interface*).

ParaView

Jedním z GUI je open-source aplikace *ParaView* [35], která nabízí interaktivní a uživatelsky přívětivé prostředí pro práci s daty. *ParaView* bylo vyvinuto pod záštitou Kitware. Kromě interaktivního rozhraní lze využít i zadávání příkazů v implementovaném příkazovém řádku Pythonu, kde také lze spustit celý skript. *ParaView* lze dobře použít na osobním počítači pro práci s menším objemem dat, stejně tak je to nástroj používaný pro vizualizaci velmi objemných datasetů s využitím serverů (možnost mít data na jednom serveru s tím, že vizualizace probíhá na jiném serveru s výkonnějším hardwarem). *ParaView* umožňuje používání tzv. filtrů, renderování vizualizací, export obrázků a disponuje řadou dalších funkcí.

Výše popsané nástroje slouží k vizualizaci dat nejen z oblasti CFD simulací, ale jedná se o programy, které nachází uplatnění v celé řadě oborů (medicína, geografie, strukturální výpočty) [35]. O možnostech a limitech vizualizace dat pomocí VTK, respektive *ParaView*, je možné získat informace v uživatelském manuálu VTK [36], respektive *ParaView* [37], popřípadě lze nahlédnout do zdrojových kódů [34]. V rámci této práce byly vytvořeny vizualizace v programu *ParaView*.

Blender

Blender je open-source software, který umožňuje tvorbu pokročilých vizualizací, animací a editaci videa. Historie programu sahá do roku 1995, kdy byl vyvinut pod hlavičkou animačního studia NeoGeo [38]. Od té doby probíhá neustálý vývoj nástroje. Přívětivé uživatelské rozhraní umožňuje řadu přizpůsobení a nastavení pro pohodlné ovládání. Je možné využít integrovaný textový editor pro psaní skriptu v jazyce Python a jeho následné spuštění v Blenderu. Důležitou součástí je komunita, díky které je k dispozici velké množství výukového materiálu a návodů pro práci s programem. Blender umožňuje export a import různých datových formátů, což umožňuje využití napříč obory, mj. k vizualizaci vědeckých dat. Jedná se o komplexní nástroj, který primárně slouží k tvorbě animací a uměleckých děl, ale také umožňuje tvorbu vizuálně působivých obrázků reprezentujících vědecká data.

4 Metody vyhodnocování derivací diskretních dat

Pro vyhodnocení jevů a struktur vznikajících v doméně je často nezbytné stanovit derivace veličin, jejichž hodnoty byly získány na základě CFD simulace. V literatuře je popsána řada metod, kterými mohou být derivace vyhodnoceny.

4.1 Výpočet derivací na základě izoparametrických tvarových funkcí

Data získaná CFD výpočtem se ukládají v diskretních bodech, dle nastavení výpočtu mohou být data ukládána v uzlech buňky, popřípadě ve středu buňky. Často je však nutné informace znát i v jiných bodech, např. z důvodů vizualizace, kdy není žádoucí vidět ostré přechody ve znázornění veličin mezi jednotlivými buňkami, ale preferovány jsou hladké postupné přechody. Ke stanovení hodnot veličin mimo diskretní datové body se využívá interpolačních funkcí.

VTK využívá izoparametrických interpolačních funkcí [36], pro které platí, že počet funkcí je shodný s počtem uzlů konkrétního typu elementu. Tvar konkrétních funkcí se odvíjí od typu buněk. K interpolaci dat z uzlu buňky do jakéhokoliv bodu p uvnitř buňky je třeba mít následující informace:

- hodnoty veličiny v každém uzlu buňky
- souřadnice bodu p v přirozeném souřadném systému konkrétní buňky
- typ buňky, tedy i tvar izoparametrických funkcí

Pod pojmem přirozený souřadný systém se myslí takové obecné souřadnice, po jejichž transformaci na pravoúhlou (ortogonální) soustavu se daný geometrický útvar zobrazí na jednoduchý základní tvar, např. obecný trojúhelník se zobrazí na rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o délce ramen rovné jedné, přičemž počátek přirozeného souřadného systému leží ve vrcholu nad přeponou a osy splývají s rameny. Pokud pro daný bod p známe přirozené souřadnice (r, s, t) , lze hodnotu veličiny u v tomto bodě vyjádřit lineární kombinací hodnot v uzlech buňky:

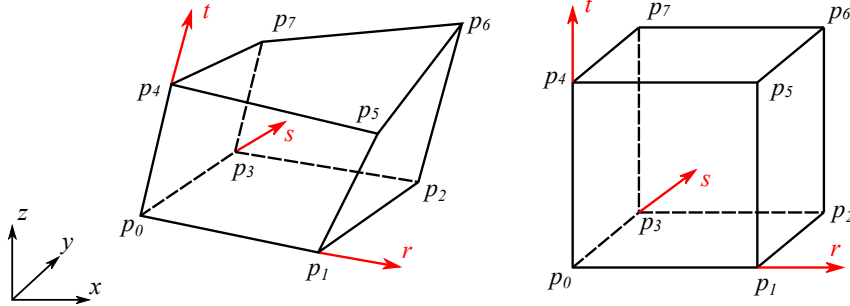
$$u(r, s, t) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i(r, s, t) u_i \quad (4.1)$$

kde n je počet vrcholů buňky, u je hodnota veličiny v bodě p , u_i je hodnota veličiny u v i -tém uzlu, W_i je tzv. tvarová (bázová) funkce. Tvarové funkce mají takový tvar, aby splňovaly následující podmínky:

$$W_i = 1, W_{j \neq i} = 0 \text{ pro } p \equiv p_i \quad (4.2)$$

$$\sum W_i = 1, \quad 0 \leq W_i \leq 1 \text{ na intervalu } r, s, t \in \langle 0; 1 \rangle \quad (4.3)$$

Hexahedrální buňka



Obr. 4.1 Přirozený souřadný systém hexahedrální buňky, vpravo jeho transformace na ortogonální soustavu.

Na obr. 4.1 je znázorněna transformace hexahedrální buňky z kartézského systému (x, y, z) do přirozeného souřadného systému (r, s, t) . Jednotlivé souřadné osy jsou zarovnány s příslušnými stranami a po transformaci na ortogonální soustavu dostáváme krychli [39].

Pro takto transformovanou buňku dle dokumentace VTK [36] platí následující tvarové funkce:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= (1-r)(1-s)(1-t) \\
 W_1 &= r(1-s)(1-t) \\
 W_2 &= rs(1-t) \\
 W_3 &= (1-r)s(1-t) \\
 W_4 &= (1-r)(1-s)t \\
 W_5 &= r(1-s)t \\
 W_6 &= rst \\
 W_7 &= (1-r)st
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Polohu obecného bodu p daného v přirozeném souřadném systému (r, s, t) lze v globálním kartézském souřadném systému (x, y, z) vyjádřit vztahem analogickým ke vztahu (4.1):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n-1} W_i \mathbf{x}_i \tag{4.5}$$

kde $\mathbf{x}$ představuje vektor souřadnic bodu p v globálním kartézském systému a $\mathbf{x}_i$ značí vektor souřadnic vrcholu p_i v globálním kartézském systému. Pro výpočet parciální derivace veličiny $u(r, s, t)$ platí (analogické vztahy platí pro zbylé parciální derivace):

$$\frac{\partial u(r, s, t)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \tag{4.6}$$

Stejně tak lze vyjádřit parciální derivaci veličiny $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \tag{4.7}$$

Hledané derivace lze zapsat do vektoru $\mathbf{z}^T = [\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}]$. Derivováním vztahu (4.1) získáme vektor $\mathbf{b}^T = [\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}]$. Vztah mezi vektory je dán transformační maticí:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Maticový zápis daný rovnicí (4.9) představuje soustavu rovnic, jejímž řešením jsou hledané derivace.

$$\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{z} \quad (4.9)$$

4.2 Výpočet derivací metodou Green–Gauss node-based (GGNB)

Jedna z možností vyhodnocování derivací na diskretní síti vychází z Gaussovy–Ostrogradského věty (v anglicky psané literatuře často označované jako „Green–Gauss Theorem“). Postup výpočtu je popsán na základě [40] a [41].

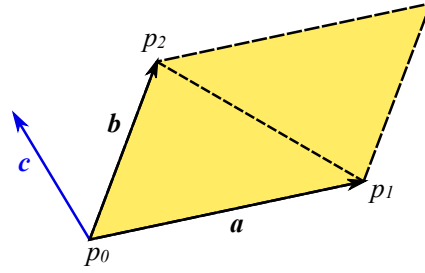
$$\int_V \nabla u \, dV = \oint_{\theta} u \mathbf{n} \, d\theta \quad (4.10)$$

kde ∇u je gradient skalární veličiny u , V je objem elementu, $\mathbf{n}$ představuje jednotkový vnější normálový vektor a θ značí plochu ohraničující element. V případě diskretní sítě lze teorém aproximovat v následujícím tvaru:

$$\nabla u = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{n}_i S_i \quad (4.11)$$

V rovnici (4.11) u_i značí hodnotu veličiny u platnou pro i -tou stěnu elementu, N je počet stěn (v případě hexahedrální buňky $N = 6$). Hodnota u_i je určena jako průměr hodnot veličiny v uzlech tvořících příslušnou stěnu. Označení $\mathbf{n}_i$ potom představuje jednotkový vnější normálový vektor příslušné stěny a S_i je obsah stěny.

Parametry buňky, kterými jsou S_i , $\mathbf{n}_i$ a její objem V , lze určit na základě následujících úvah. Polyedrická buňka je tvořena polygonálními stěnami, které formují uzavřený objem. K výpočtu obsahu a jednotkového normálového vektoru obecného polygonu může být použita triangulace, kdy je útvar rozdělen na trojúhelníky, pro které je vypočítán jejich obsah a příslušný normálový vektor. K výpočtu obsahu i normálového vektoru je využito vlastností vektorového součinu, viz obr. 4.2.



Obr. 4.2 Geometrická interpretace vektorového součinu.

Vektory a , b jsou určeny vrcholy trojúhelníku p_{0-2} , žlutá plocha představuje velikost vektorového součinu vektorů a a b , plocha trojúhelníku je potom polovina plochy rovnoběžníku. Vektor c znázorňuje výsledný vektor vektorového součinu. Platí pro něj, že je kolmý na vektory a , b a jeho orientace je dána pravidlem pravé ruky. Jde tedy přímo o normálový vektor příslušící trojúhelníku p_{0-2} , a aby se jednalo o vektor jednotkový, musí být vydělen svou velikostí.

Pro výpočet celkového obsahu stěny S_i a jejího jednotkového normálového vektoru n_i platí následující vztahy. Indexy j značí jednotlivé trojúhelníky, na které byla příslušná stěna triangulací rozdělena.

$$S_i = \sum_j S_j \quad (4.12)$$

$$n_i = \frac{\sum_j n_j S_j}{S_i} \quad (4.13)$$

Pro stanovení objemu buňky je použito následujícího vztahu, který vychází z Gaussovy–Ostrogradského věty, jak je uvedeno níže.

$$V = \int_V 1 \, dV = \int_V \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{x}) \, dV = \oint_{\theta} \frac{1}{3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\theta \quad (4.14)$$

Aproximace pro polyedr s N stěnami má pak následující tvar, přičemž $\mathbf{x}_{T_i}$ značí těžiště stěny.

$$V = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{T_i} \cdot \mathbf{n}_i S_i \quad (4.15)$$

Analogicky jako normálový vektor celé stěny lze určit těžiště polygonální stěny, kdy je těžiště dílčích trojúhelníků vypočítáno jako aritmetický průměr souřadnic vrcholů daného trojúhelníku.

$$\mathbf{x}_{T_i} = \frac{\sum_j \mathbf{x}_{T_j} S_j}{S_i} \quad (4.16)$$

Z hlediska přesnosti umožňuje tato metoda přesný výpočet derivací lineární funkce nezávisle na síti, má tedy zaručenou přesnost 1. řádu. Za určitých okolností (zejména pro uniformní síť)

vyjde nejvyšší chybový člen v Taylorově rozvoji nulový, takže je možné dosáhnout i přesnosti 2. řádu [41].

Kromě GGNB metody existuje i metoda Green–Gauss cell-based (GGCB). GGCB vychází z dat uložených ve středech buněk a stěnová hodnota veličiny u_i je určena jako aritmetický průměr hodnot platných pro střed dvou buněk, které sdílí danou stěnu. Tento přístup nezohledňuje geometrické vlastnosti buněk a nedosahuje takové přesnosti jako GGNB, popřípadě metoda LSCB (least squares cell-based). Všechny zmíněné metody jsou základními metodami výpočtu gradientů v komerčním CFD řešiči Ansys Fluent 18.1 [41].

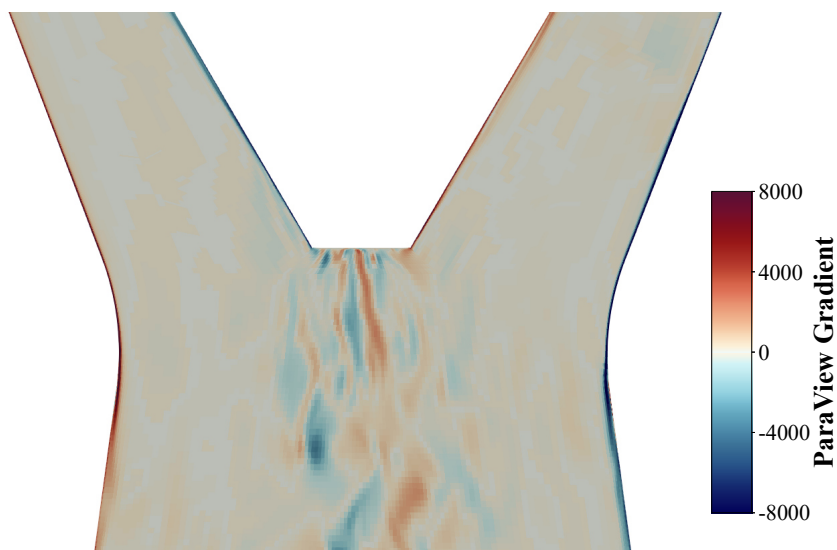
4.3 Srovnání metod výpočtu derivací

Výše byly popsány dva přístupy k výpočtům derivací dat v diskrétních bodech. Na vstupu u obou metod jsou data definována v uzlech, výstupem jsou data platná pro středy buněk. Na testovacím vzorku dat byly obě metody aplikovány (výpočet proběhl v programu Matlab) a srovnány jejich výsledky. Dále byly srovnány dva možné přístupy výpočtu derivací v prostředí ParaView.

Jednou z možností je filtr *Compute Derivatives*, který je přístupný pouze pro data v uzlech (point data) a výstupem jsou data platná pro středy buněk. Pokud jsou výstupem CFD výpočtu data ve středech buněk (element data), je třeba je nejdříve přepočítat do uzlů. V ParaView je k dispozici filtr *Cell Data to Point Data*. Filtr provede váženou interpolaci dat ze středů buněk do uzlů. Druhou možností výpočtu derivací je filtr *Gradient of Unstructured DataSet*. Pro tento filtr platí, že pokud jsou na vstupu point data, výstupem opět budou data v uzlech, naopak pro cell data jsou vypočítány hodnoty derivací platné pro střed buněk [36].

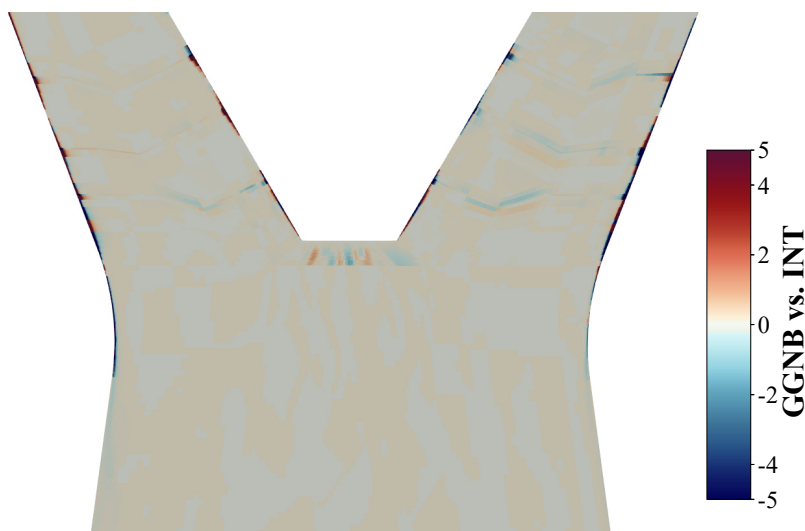
4.3.1 Metodika srovnání

Derivace byly počítány pro složku rychlosti ve směru z podle x . Na obrázcích jsou zobrazeny rozdíly mezi metodou založenou na interpolačních funkcích (zkráceno na INT) a GGNB. Dále je zobrazeno srovnání metod s výstupy ParaView a poté srovnání metod ParaView vůči sobě navzájem. Geometrie a síť buněk testovacích dat jsou totožné s těmi, které byly použity při výpočtu CFD simulací, jimiž se zabývá následující kapitola.



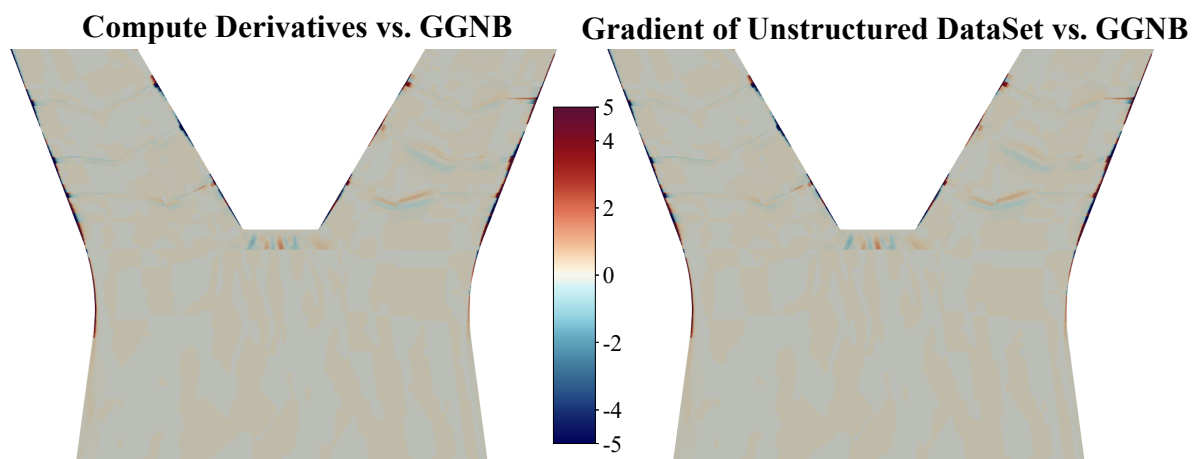
Obr. 4.3 Derivace složky rychlosti.

Na obrázku 4.3 je rozložení hodnot derivace spočítané filtrem *Gradient of Unstructured DataSet*. Barevná škála byla upravena za účelem lepší názornosti, samotný rozsah hodnot je pak od cca $-25\,000$ do $23\,000$.



Obr. 4.4 Rozdíl GGNB a INT metody výpočtu derivací u složky rychlosti ve směru z .

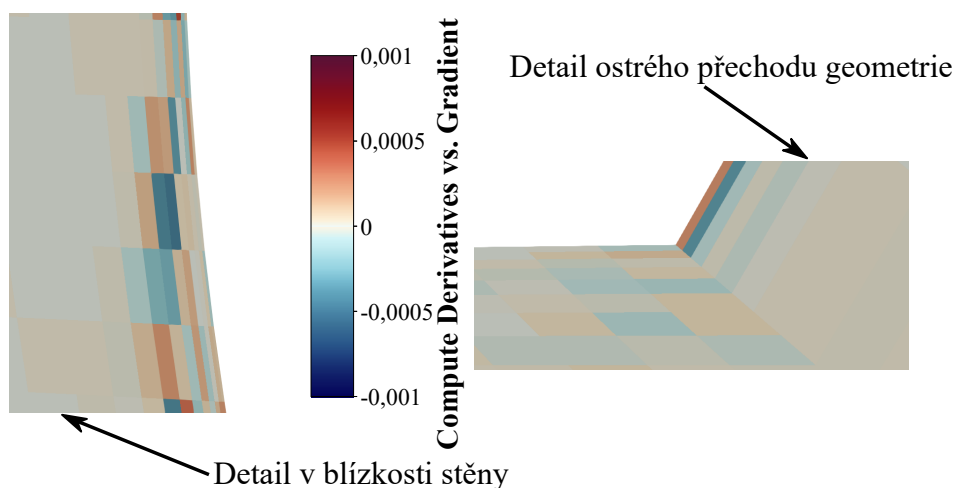
Na obr. 4.4 je patrné, že největší rozdíl mezi metodami GGNB a INT je v blízkosti stěn vírového generátoru a dále v prostoru v blízkosti náboje. V těchto místech jsou buňky použité sítě zploštělé a výrazněji ovlivněné zakřivením stěn než ve zbytku domény, což numericky ovlivňuje výpočet objemu buněk, který má přímý vliv na stanovení derivací metodou GGNB. Dá se také ukázat, že pro rovnoběžnostěny vedou GGNB a INT na stejné výsledky. V prostoru pod nábojem je také patrný ostrý přechod, odhalující dekompozici domény pro účely tvorby sítě. Velmi podobné rozložení rozdílů je potom při srovnávání metody GGNB vůči metodám ParaView, viz obr. 4.5.



Obr. 4.5 Rozdíl GGNB vůči ParaView.

Dle očekávání s výsledky z ParaView nejlépe koresponduje metoda založená na interpolačních funkcích (INT). Přestože filtr *Compute Derivatives* i *Gradient of Unstructured DataSet* jsou založeny na stejném principu, lze mezi výsledky pozorovat drobné rozdíly (obr. 4.6). Jedná

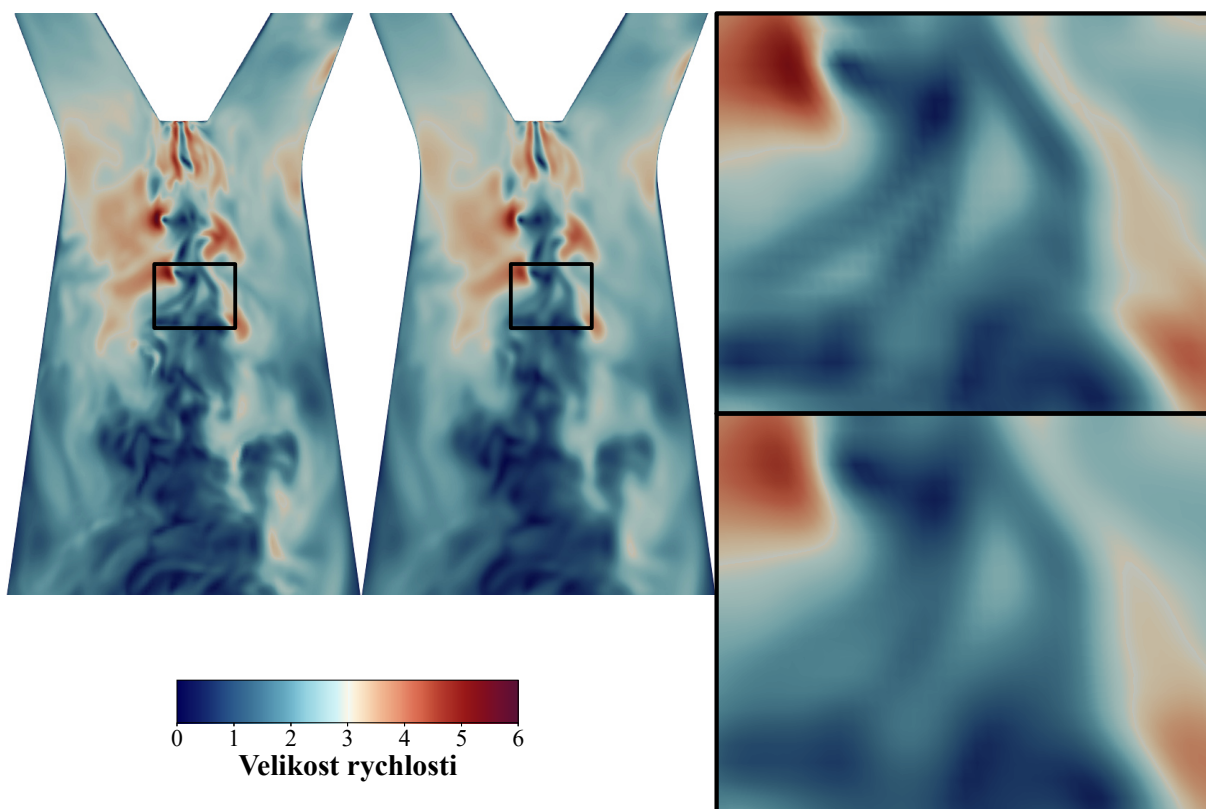
se zejména o oblasti u stěn generátoru s jemnou sítí kvůli podchycení jevů v mezní vrstvě, případně ostré přechody geometrie generátoru.



Obr. 4.6 Rozdíl mezi filtry *Compute Derivatives* a *Gradient of Unstructured DataSet* v ParaView – derivace složky rychlosti ve směru osy z podle x .

Lepší shody bylo dosaženo při použití filtru *Gradient of Unstructured DataSet*, kdy byly rozdíly v podstatě nulové. Rozdíl oproti filtru *Compute Derivatives* potom logicky odpovídá rozdílu mezi samotnými filtry v ParaView tak, jak je zobrazeno na obr. 4.6.

Z provedeného srovnání se jeví jako vhodná varianta k dalším početním operacím funkce ParaView *Gradient of Unstructured DataSet* bez povolené možnosti *Faster Aproximation* v případě práce s daty v uzlech. Možnost *Faster Aproximation* urychluje samotný výpočet, protože dochází k vyhodnocení pouze jedné hodnoty gradientu na buňku, a to ve středu buňky. Získané výsledky jsou pak interpolovány do uzlů. Pokud je tato možnost vypnuta, filtr *Gradient of Unstructured DataSet* vyhodnotí gradient pro každý vrchol buňky zvlášť. Protože jeden vrchol může sdílet více buněk, finální hodnota gradientu se získá průměrem hodnot z jednotlivých buněk.

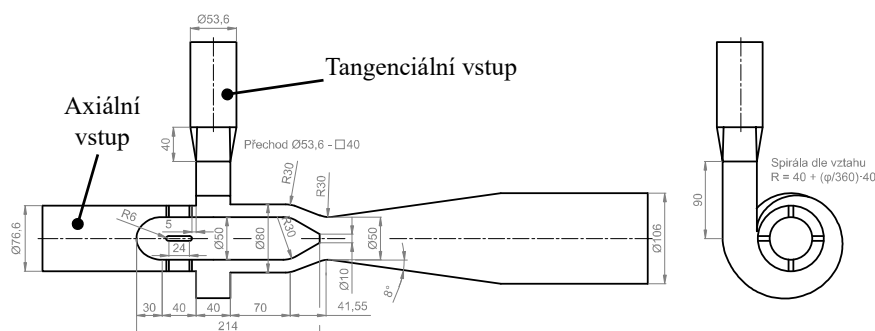


Obr. 4.7 Vliv numerické difuze na zobrazení dat.

Z hlediska vizualizace dat je důležitá také numerická difuze, v jejímž důsledku dochází ke ztrátě některých detailních informací. Na obr. 4.7 je znázorněn vliv numerické difuze. Vlevo je zobrazena velikost rychlosti, data byla ve formátu point data. Vpravo je zobrazena stejná velikost rychlosti potom, co byly celkem třikrát po sobě aplikovány filtry *Point Data to Cell Data* a následně *Cell Data to Point Data*. Vzniklý obraz působí rozmazaněji a řada detailů zaniká. Na vliv tohoto jevu je třeba pamatovat při matematických operacích s daty a jejich následné vizualizaci. Několikanásobné interpolaci dat je vhodné se vyvarovat, aby dosažené výsledky byly co nejméně zkreslené numerickou difuzí.

5 Studium výsledků CFD simulací

V předcházejících kapitolách byly sumarizovány poznatky související s vířivým prouděním a vírovým copem. Aplikace teorie byla provedena na datech, která byla získána CFD výpočty v komerčním řešiči Ansys Fluent 18.1 provedených na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana v Brně.



Obr. 5.1 Schéma geometrie vírového generátoru použitého při CFD výpočtech. Přejato a upraveno [42].

Obr. 5.1 představuje geometrii použitého vírového generátoru. Generátor je opatřen axiálním a tangenciálním vstupem. Poměrem průtoků na jednotlivých vstupech je řízeno vířivé proudění difuzorem. Celkový průtok byl při simulacích s proměnnými okrajovými podmínkami uvažován konstantní. Základní nastavení výpočtů společné pro všechny simulace je uvedeno v tabulce 5.1.

Tab. 5.1 Parametry výpočtu společné pro všechny simulace. Informace poskytnuté vedoucím práce Ing. Ondřejem Urbanem.

Nastavení simulací	
Počet buněk sítě	~7 mil.
Materiál	voda
Hustota [kg/m ³]	998,2
Dynamická viskozita [Pa·s]	0,00103

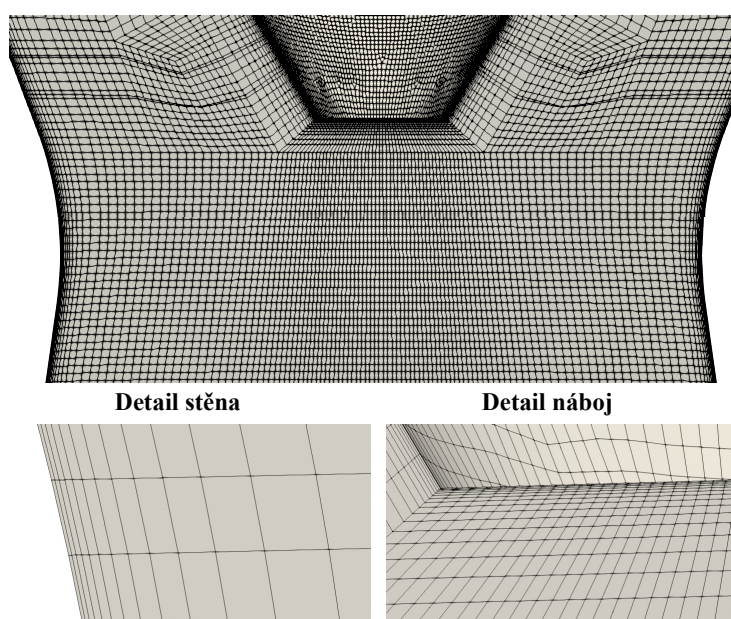
V následujících podkapitolách jsou popsány jevy pozorované na výsledcích simulací s modelem turbulence SBES (Stress-Blended Eddy Simulation). Základní nastavení výpočtu je uvedeno v následující tabulce. Označení POP značí proměnnou okrajovou podmínku, číslo potom udává číslo simulace. POP-1 zachycuje proudění od poměru průtoků 40:60 (tangenciální:axiální) až po poměr 83:17. Simulace POP-2 pokrývá rozsah poměrů 20:80 až 50:50.

Tab. 5.2 Nastavení SBES simulací s proměnnou okrajovou podmínkou. Informace poskytnuté vedoucím práce Ing. Ondřejem Urbanem.

Simulace	Okrajové podmínky		Δt
	Vstup	Stěna	Výstup
POP-1	$Q_{m(ax)} = 3 - \frac{2}{1,1} t$ kg/s	D_h = průměr potrubí	$p = 0$ Pa $D_h = 0,106$ m $I = 10$ %
	$Q_{m(tan)} = 2 + \frac{2}{1,1} t$ kg/s	$I = 5$ %	
POP-2	$Q_{m(ax)} = 4 - \frac{0,5}{1,1} t$ kg/s	D_h = průměr potrubí	$I = 10$ %
	$Q_{m(tan)} = 1 + \frac{0,5}{1,1} t$ kg/s	$I = 5$ %	
Modely turbulence			
k - ω SST, Stress-Blended Eddy Simulation, WALE subgrid-scale model			

Metody řešení a nastavení řešiče	
Sdružení tlaku a rychlosti	PISO
Gradientsy	LSCB
Tlak	PRESTO!
Hybnost	Bounded central differencing
Přechody	Second order implicit
Turbulentní kinetická energie	Second order upwind
Turbulentní disipace	Second order upwind
Iterací/časový krok	10 (15 pro POP-2)

Použitá síť je v difuzoru konformní a kompletně hexahedrální. Zjemnění sítě směrem ke stěnám bylo děláno tak, aby parametr $wall\ y^+$ nepřekročil hodnotu 5. Ukázka použité sítě je na obr. 5.2.



Obr. 5.2 Ukázka použité sítě difuzoru.

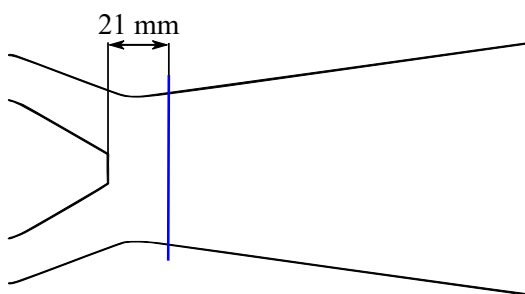
5.1 Chování vírového copu v závislosti na vírovém čísle

Na základě SBES simulací s proměnnou okrajovou podmínkou je popsán vývoj a chování vírového copu v závislosti na vírovém čísle.

Vírové číslo Sr bylo stanoveno na základě vztahu (5.1). Rovina řezu, kde bylo Sr vyhodnocováno, je naznačena na obr. 5.3.

$$Sr = \frac{1}{R} \frac{\int_S r |v_\varphi v_z| dS}{\int_S v_z^2 dS} \quad (5.1)$$

kde R je poloměr daného horizontálního řezu, v_φ je obvodová složka rychlosti, v_z je složka rychlosti ve směru osy z , r představuje radiální souřadnici a S je plocha daného řezu. Vírová čísla byla vyhodnocena pomocí dostupných filtrů v ParaView pro konkrétní snímky. Snímky byly voleny přednostně s ohledem na zobrazované struktury, avšak pokrývají celý rozsah Sr .



Obr. 5.3 Naznačení roviny řezu pro vyhodnocení hodnot vírového čísla Sr . Je označena vzdálenost od náboje, v souřadném systému geometrie vírového generátoru odpovídá hodnotě $z = 145$ mm.

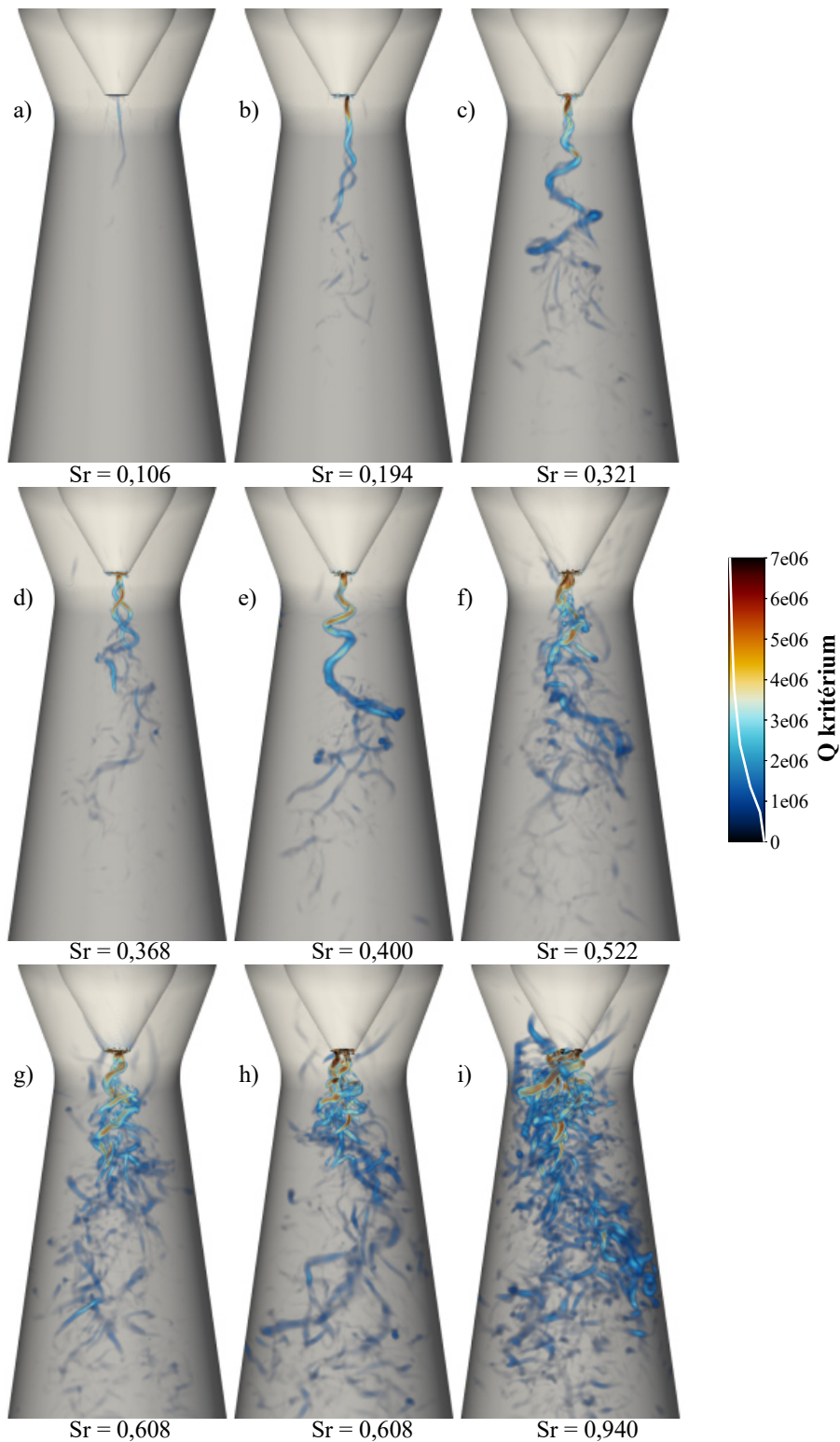
Vizualizace je kromě numerické difuze zatížena autorovým pohledem na zkoumanou problematiku (nastavení rozsahu, volba barevné škály, nastavení průhlednosti a kamery). Tyto skutečnosti do jisté míry ovlivňují prezentaci informací, zvláště u kvalitativního popisu.

Obr. 5.4 dokumentuje vývoj vírového vlákna v závislosti na Sr . Nejdříve se objevuje slabé přímé vírové vlákno, s rostoucím vírovým číslem se stává výraznějším a lze pozorovat mírný ohyb vlákna. Při dalším nárustu Sr má vírové jádro tvar šroubovice typický pro vírový cop. Tvar vírového copu je ovlivňován oblastí stagnace, resp. oblastí zpětného proudění. Tato oblast vzniká níže v difuzoru a s rostoucí intenzitou rotace kapaliny roste její objem a dochází k jejímu posunu směrem k náboji. Vírové jádro kopíruje tvar této oblasti a formuje tak svou podobu. Může docházet k přímé interakci, kdy se část vírového copu dostane přímo do oblasti stagnace (zpětného proudění) a celá struktura se deformuje.

Pro hodnotu vírového čísla 0,368 je jasně patrný dvojitý vírový cop. S rostoucím Sr je cop opět tvořen jediným vírovým vláknem. Transformace jednoduchého vírového copu ve dvojitý je dokumentována pro absolutní změnu vírového čísla menší než 0,1. Tato nestabilita koresponduje s dříve popsaným fenoménem dvojitého vírového copu (viz kap. 2.2, obr. 2.9). Na obrázku 5.4f) již není samostatné vírové vlákno, jako je tomu na předchozích snímcích. Dle barevné škály (odstíny okrové pro větší hodnoty Q kritéria) je zřetelné dominantní vírové vlákno ve tvaru šroubovice v centrální části difuzoru obklopené menšími víry po celé své délce.

Pro $Sr = 0,608$ je těsně pod nábojem vidět vírové vlákno stáječící se do typického tvaru, mimo to je vidět řada menších vírů, které jsou výraznější než na předchozím snímku. Je patrné, že pro vyšší hodnoty vírového čísla není formován jednotný vírový cop, ale struktura tvaru šroubovice konající precesní pohyb je složená z menších vírů. Dochází k interakci vírů navzájem a přeměna copu se stává komplexnější. Také na prostředním snímku 5.4h) je pod nábojem odlišena dvojitá šroubovice, ale záhy přechází do neuspořádané struktury.

V kapitole 2.1 byl popsán vývoj a režimy vírového copu, jak je definuje Nishi. V rámci zkoumání výsledků CFD simulací lze pozorovat jisté podobnosti, ale i určité odlišnosti. Při pozorování snímků na obr. 5.4 je patrné, že vírový cop zaujímá větší celkový objem. V tomto případě se jeví jako problematická definice objemu vírového copu na základě hodnot Q kritéria. Nishi při svém popisu vycházel z experimentálních pozorování, kdy je vírový cop viditelný díky kavituujícímu jádru. Ovšem i k popisu experimentů je potřeba mít přístup k řadě důležitých informací, které pozorovatelné jevy ovlivňují (např. tlak v experimentální trati). Kromě nestabilního jednoho vírového vlákna jsou v difuzoru pozorovány přechody mezi dvěma propletenými vírovými jádry zpět na jedno. Přechod přímého vírového jádra do tvaru šroubovice je v souladu s popsánými režimy (obr. 2.2).



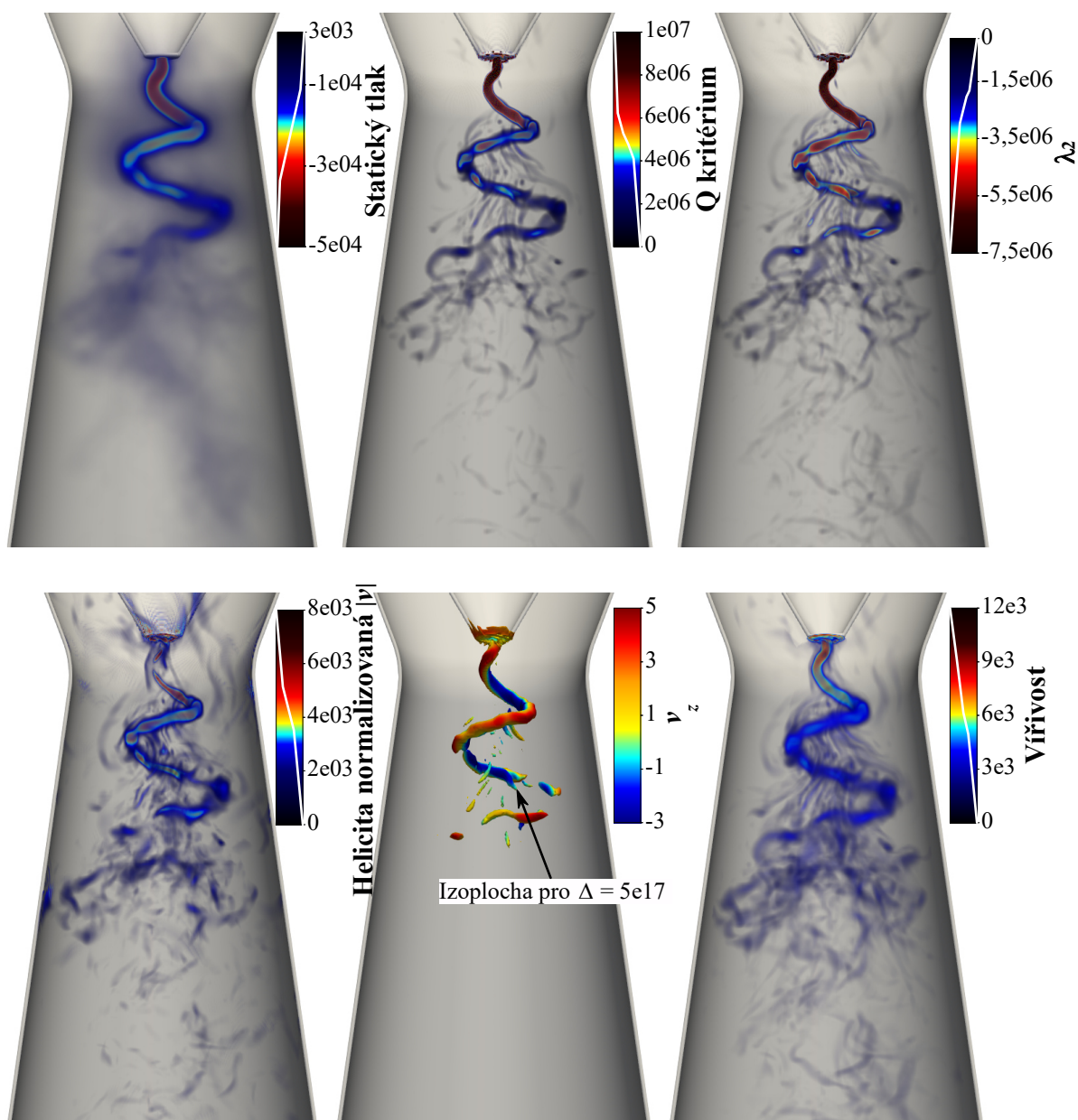
Obr. 5.4 Vývoj vírového copu v difuzoru během simulací s proměnnou okrajovou podmínkou (lineární změna poměru axiálního a tangenciálního průtoku na vstupu, celkový průtok konstantní). Vírové jádro detekováno hodnotou Q kritéria, vizualizováno pomocí objemového renderování, bílá lomená čára označuje nastavení průhlednosti.

5.2 Srovnání metod pro identifikaci vírů

Na vybraném snímku byly použity metody identifikace vírů, které byly popsány v kapitole 2.3. K demonstraci kritérií byl zvolen snímek s pravidelným vírovým copem ve tvaru šroubovice, jedná se o snímek z SBES simulace s proměnnou okrajovou podmínkou, jak je zmíněno v předcházející kapitole. Na obr. 5.5 je vírový cop nejdříve vizualizován pomocí tlaku. Tento obrázek lze považovat za určitou referenční informaci o pozici a tvaru vírového copu. Kromě Δ kritéria byly všechny metody zobrazeny pomocí objemového renderování a vhodného nastavení barevné škály a průhlednosti. Hodnoty Δ kritéria dosahovaly příliš vysokých hodnot, z toho důvodu je u této metody použita vizualizace pomocí izoplochy určité hodnoty parametru Δ .

Výpočet Q kritéria je umožněn přímo v programu ParaView. Filtr *Gradient Of Unstructured DataSet* má v nabídce nastavení možnost *Compute QCriterion*. Pro výpočet λ_2 , Δ kritéria a helicity byl použit plugin *VCG Vortex Criteria*. Tento plugin je spolu s dalšími součástí balíčku pluginů pro ParaView, který vytvořila a publikovala skupina zabývající se počítačovou vizualizací z univerzity v Heidelbergu [43]. Tento balíček je k dispozici pouze pro linuxovou distribuci ParaView ve verzi 5.6.0. Ze stejného balíčku byl použit také filtr pro výpočet FTLE. Kritérium M_Z bylo vyhodnoceno pomocí filtrů ParaView a programovatelných filtrů pomocí skriptů v jazyce Python.

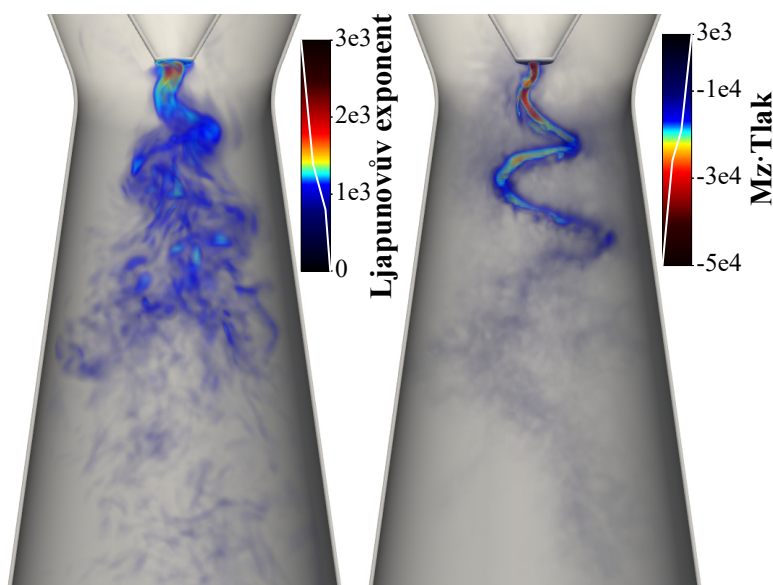
Na obr. 5.5 lze vidět, že Q kritérium společně s λ_2 ostře vymezuje vírové jádro oproti vizualizaci copu na základě minimálních hodnot tlaku. V případě normalizované helicity bylo potřeba využít jiného druhu normalizace, aby došlo k primárnímu zvýraznění vírového copu. Při uvažování vztahu (2.25) nebyl vírový cop dostatečně zvýrazněn, proto byla hustota helicity H_d normalizována velikostí rychlosti. Normalizace volená tímto způsobem umožní zvýraznění vírového copu a potlačí vliv struktur, kde velikost vířivosti dosahuje nižších hodnot. Z obrázku je ale jasně patrné, že tento přístup nepodchycuje vírové jádro stejně dobře jako Q nebo λ_2 kritérium. Část vírového copu těsně pod nábojem není tímto přístupem dobře zachycena a celý vírový cop působí méně kompaktním dojmem, než tomu je u předchozích zmíněných metod. Na předposledním snímku na obr. 5.5 je vidět tvar vírového copu na základě Δ kritéria. V definici kritéria se vyskytuje třetí mocnina parametru Q , nabývá tak velmi vysokých hodnot. Z izoplochy konstantní hodnoty Δ kritéria je vidět tvar vírového copu, který souhlasí s kritérii Q a λ_2 (resp. s tvarem daným minimální hodnotou statického tlaku). Definice Δ kritéria obsahuje parametr Q , proto chybí motivace využít v případě vírového copu Δ kritérium namísto Q . Z obr. 5.4 a 5.5 je vidět velmi dobré zachycení struktur Q kritériem, vypočítané hodnoty se také lépe vizualizují než vysoké hodnoty Δ kritéria. Na obr. 5.5 byla izoplocha Δ kritéria obarvena dle rychlosti ve směru z . Záporné hodnoty ukazují, že vírový cop kopíruje oblast zpětného proudění. Naopak hodnoty zobrazeny žlutě až červeně indikují kladnou rychlost ve směru z . Jedná se o oblasti blíže stěnám difuzoru, kde má proudění kladnou složku axiální rychlosti. Tento způsob vizualizace může přinést přidanou hodnotu právě v informaci o jiné veličině díky barevné škále. Objemové renderování zase umožňuje pozorovat rozložení hodnot vizualizované veličiny v prostoru, třeba na příkladu λ_2 je vidět prudká změna hodnot na hranici vírového copu. Na posledním snímku na obr. 5.5 je vírový cop vizualizován pomocí vířivosti, která ale nabývá vysokých hodnot také v mezní vrstvě. Na uvedeném snímku proto byla mezní vrstva manuálně odstraněna. Jiným řešením může být trojitá dekompozice, kterou popisuje autor Kolář [22].



Obr. 5.5 Srovnání metod identifikace vírů na vybraném snímku. Metody jsou vizualizovány objemovým renderováním, kromě Δ kritéria, kde je použita izoplocha konstantní hodnoty. Bílá lomená čára označuje funkci průhlednosti (nalevo neprůhledné, napravo průhledné).

Na obr. 5.6 jsou zobrazeny zbylé ze studovaných metod – Ljapunův exponent a M_Z kritérium. Při výpočtu FTLE pomocí filtru z balíku [43] je třeba zadat integrační úsek T a zvolit velikost kroku pro numerický výpočet. Velikost kroku byla zvolena 0,0001 s, což je velikost časového kroku mezi uloženými snímky z dané SBES simulace. Zvolený časový úsek byl -0,0005 s, kde znaménko mínus vyjadřuje zpětnou integraci. Ljapunův exponent na obr. 5.6 představuje přitahující struktury. Na druhém snímku na obr. 5.6 je vizualizováno modifikované M_Z kritérium. Samotné M_Z kritérium nenese informaci o intenzitě vírů, takže vírový cop je na vizualizacích zahalen množstvím vírů, které jej obklopují. Z toho důvodu byla hodnota M_Z vynásobena hodnotou statického tlaku, kdy objektivita kritéria zůstává zachována. Samotné

M_Z kritérium nabývá hodnot z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Předpokladem modifikace byla detekce vírového jádra v oblastech s minimem statického tlaku. Kriteriační parametr $M_Z \cdot p$ vykazuje ostřejší hranice vírového jádra než samotný tlak. Trajektorie byly sledovány po dobu 0,002 s, což odpovídá dvaceti časovým krokům, pro které bylo vyhodnoceno, zda je matice M na eliptickém kuželu indefinitní. Parametr M_Z pak udává podíl z časového intervalu, kdy byla tato podmínka splněna.



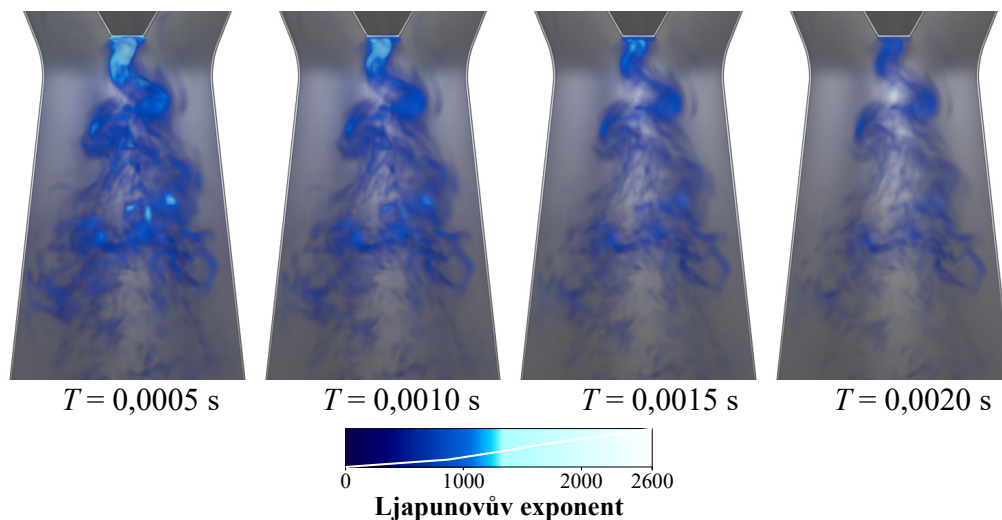
Obr. 5.6 Ljapunovův exponent a modifikované M_Z kritérium. Ljapunovův exponent představuje přitahující strukturu pro nastavení výpočtu s časovým intervalem 0,0005 s a krokem 0,0001 s. Modifikované M_Z bylo vyhodnoceno pro časový úsek 0,002 s.

Ljapunovův exponent udává informaci o sbíhajících se a rozbíhajících se trajektoriích, ale nejedná se o podmínku existence víru. Z obr. 5.6 je vidět spirálovitá struktura vírového copu, ale oproti jiným kriteriačním parametrům je mohutnější a celkově méně přesně definuje vírový cop. Pro zobrazení Ljapunovova exponentu byla odstraněna mezní vrstva, protože v její oblasti Ljapunovův exponent také vykazoval vysoké hodnoty, což znesnadňovalo vizualizaci.

5.3 FTLE na příkladu vírového copu

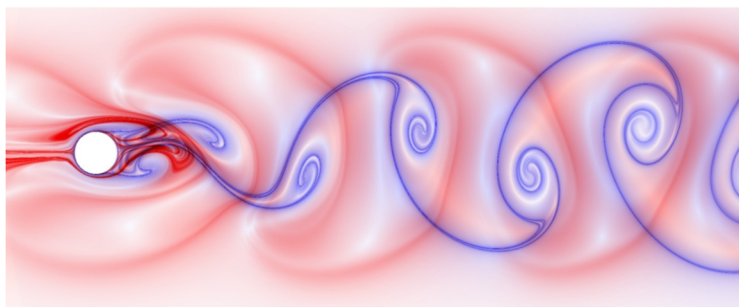
V předchozí kapitole byl pouze uveden příklad Ljapunovova exponentu pro určité nastavení výpočtu. Avšak nastavení parametrů ovlivňuje vizualizované výsledky. V této kapitole je uvedena krátká diskuze nad možnými vlivy nastavení parametrů – délka časového intervalu a směr integrace. Délka kroku je pro všechny případy stejná: 0,0001 s.

Na obr. 5.7 jsou vidět lagrangeovské koherentní struktury pro různou velikost časového úseku T . Rozsah hodnot byl volen podle nejmenšího časového úseku. I tak můžeme pozorovat, že maximálních hodnot nabývá Ljapunovův exponent pouze pod nábojem a nejedná se o větší souvislou oblast. Pro všechny časové úseky je možné pozorovat stejnou spirální strukturu, která ztrácí na intenzitě, také důsledkem nastavení barevné škály a rozsahu. Tento aspekt nemusí být nutně negativní. Oblast pod nábojem se díky tomu stává přehlednější a lépe se detekují jednotlivé koherentní struktury než u kratších časových úseků.



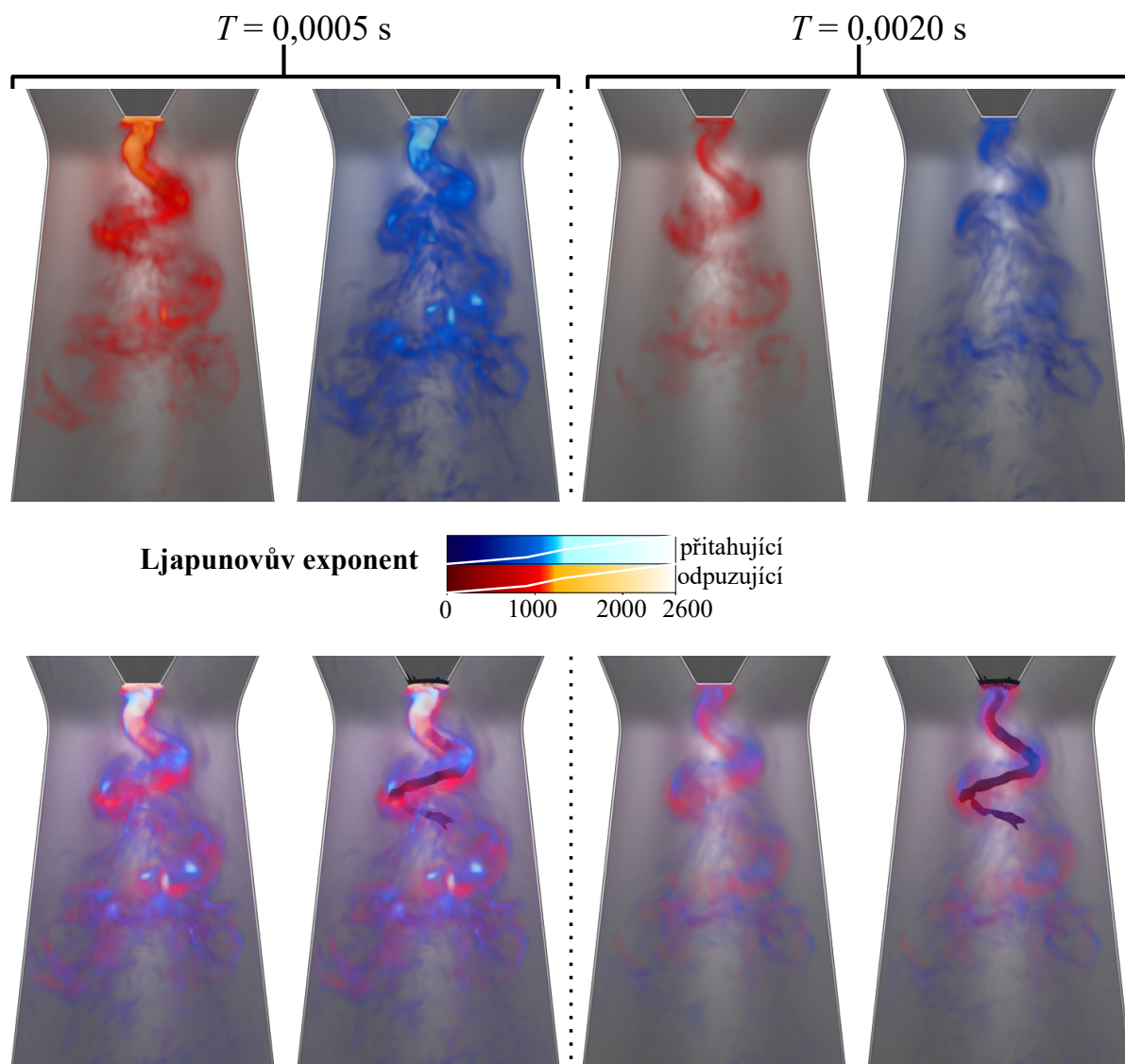
Obr. 5.7 Ljapunovův exponent pro různé časové intervaly T . Přitahující struktury, integrace s časovým krokem 0,0001 s pro všechny velikosti časového intervalu. Minimální hodnoty průhledné, maximální neprůhledné, funkci průhlednosti znázorňuje bílá lomená čára.

Zatím byly diskutovány především přitahující koherentní struktury v souvislosti s vírovým copem. Avšak i odpuzující struktury poskytují informaci o daném proudění. Autoři Kasten a kol. [44] na příkladu Kármánovy vírové stezky představují algoritmus lokalizovaného FTLE. Jedná se o neustálené 2D proudění a algoritmus FTLE jasně detekuje přitahující a odpuzující struktury (obr. 5.8). Tento fakt je motivací ke studiu vztahu přitahujících a odpuzujících struktur u vírového copu.



Obr. 5.8 Ljapunovův exponent na příkladu Kármánovy vírové stezky. Červeně odpuzující struktury, modře přitahující. Přejato [44].

Na obr. 5.9 v druhém řádku jsou společně zobrazeny přitahující a odpuzující struktury na příkladu vírového copu. Pro doplnění je zobrazena také izoplocha Q kritéria. Přitahující a odpuzující struktury mají velmi podobný tvar a jejich vzájemné „posunutí“ v prostoru je lépe vidět, když jsou obě struktury vykresleny do jednoho obrázku. Barvy použité pro společné vykreslení jsou stejné jako barvy pro samostatné přitahující a odpuzující struktury, ale protože dochází k vzájemnému překrývání struktur, mísí se i barvy vykreslené objemovým renderováním (výsledkem jsou odstíny fialové). Izoplocha Q kritéria pomáhá lépe identifikovat rozložení přitahujících a odpuzujících struktur v prostoru.



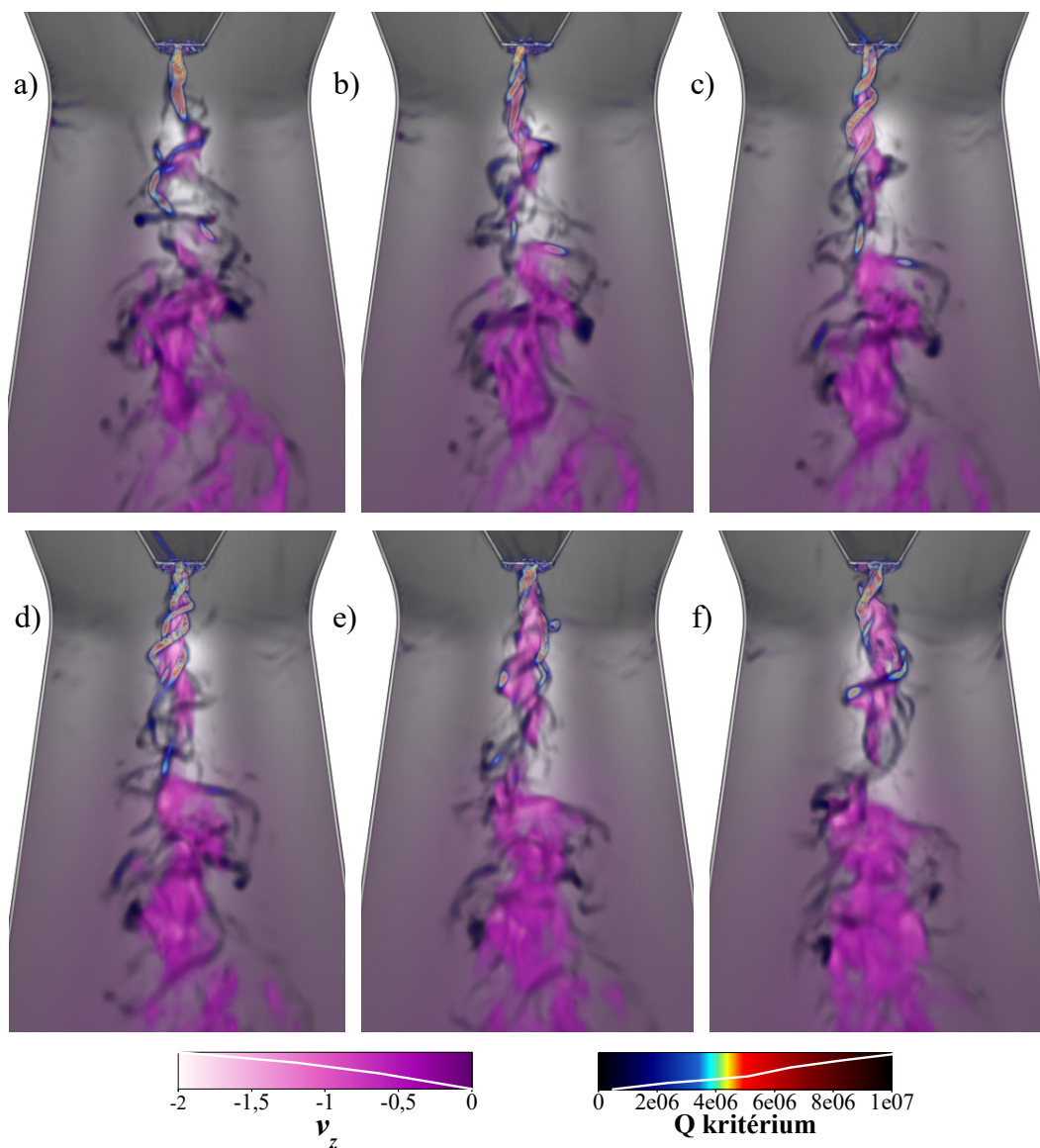
Obr. 5.9 Ljapunův exponent pro dopřednou (červeně) a zpětnou (modře) integraci pro dva různé časové intervaly T . V horní části obrázku vizualizováno samostatně, v dolní části jsou přitahující i odpuzující struktury společně, navíc doplněny izoplochou Q kritéria pro hodnotu $3 \cdot 10^6$.

5.4 Dvojitý vírový cop

V kapitole 5.1 byl zmíněn výskyt dvojitého vírového copu, ale samotným transformacím dvojitého copu nebyla věnována zvláštní pozornost. V této kapitole je zdokumentován vývoj dvojitého vírového copu. Byla snaha zvolit snímky tak, aby byl vidět vývoj jednoho cyklu dvojitého copu. Kromě vírových vláken je vizualizována oblast zpětného proudění. Tato oblast má také spirální tvar, avšak mnohem méně pravidelný než vírový cop.

Na obr. 5.10a) je vidět pod nábojem jedno vírové jádro, v další části difuzoru jsou vidět další vírová jádra. Nejedná se o tak jednotnou strukturu, jak tomu je na snímku 5.4e) nebo 5.5. Oblast zpětného proudění je nejrozvinutější v nižší části difuzoru, k oblasti vírového jádra zasahuje minimálně. Na dalším snímku jsou již jasně patrná dvě vzájemně propletená vírová vlákna, která se nachází v těsné blízkosti. Region zpětného proudění je posunut blíže k náboji.

Na snímcích 5.10c) a 5.10d) lze pozorovat rozvinutý dvojitý vírový cop. Obě vlákna těsně obepínají oblast zpětného proudění, která zasahuje téměř až k náboji. Poslední dva snímky dokumentují rozpad dvojitého vírového copu. Je třeba mít na paměti, že okrajové podmínky jsou proměnné, pravděpodobně proto je také rozpad dvojitého vírového copu velmi dynamický. Celá struktura se rozpadá na menší víry a až s postupem času dochází k opětovnému ustálení na určité formě. V této fázi je také možné pozorovat průnik vírových vláken s oblastí zpětného proudění.

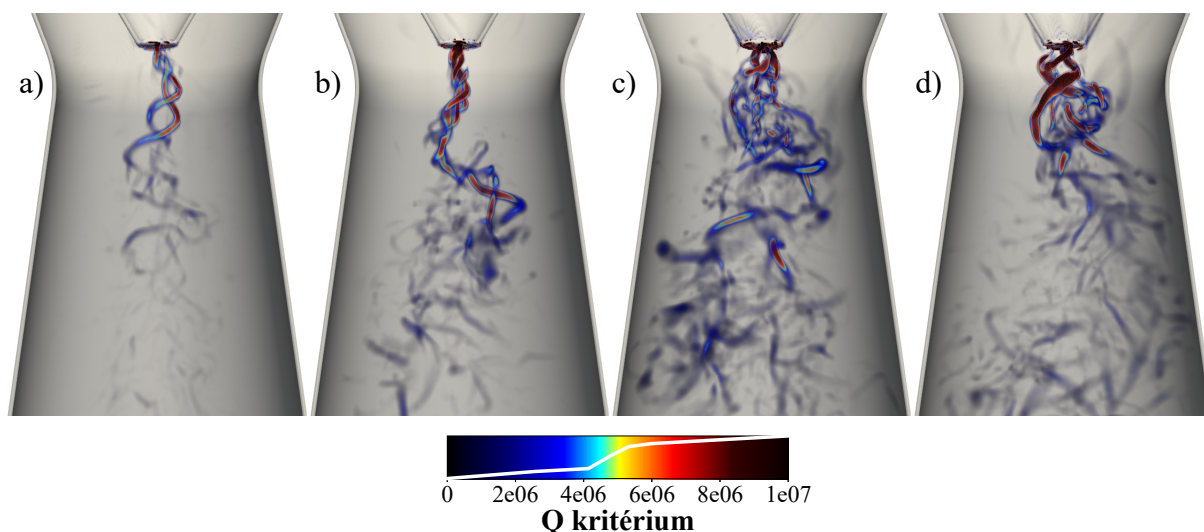


Obr. 5.10 Dvojitý vírový cop vizualizovaný pomocí Q kritéria. V odstínech růžové zobrazena oblast zpětného proudění, zobrazeny hodnoty v_z v rozsahu $\langle -2; 0 \rangle$. Velikost časového intervalu mezi snímky a) až f) je 0,0119 s.

Dvojitý vírový cop je pozorován v téměř celém rozsahu vírového čísla, první náznak je patrný na obr. 5.4b). Výše byl popsán časový vývoj tohoto jevu na jednom konkrétním příkladu. S rostoucí vířivostí proudění se také mění charakter dvojitého vírového copu.

Kromě dvou dominantních vírových vláken lze na některých snímcích pozorovat tři oddělená výraznější vírová jádra. Různé obdoby dvojitého vírového copu jsou zobrazeny

na obr. 5.11. Na snímku 5.11a) jsou dvě vírová vlákna ve vzájemném propletení, jedná se o jediné výraznější vírové struktury v difuzoru. Snímek 5.11b) zachycuje zajímavou strukturu. Pod nábojem jsou v těsné blízkosti dvě vírová vlákna. Níže je připleteno třetí a současně celá struktura vykazuje mírně spirální tvar. Tři vírová vlákna těsně pod nábojem jsou zobrazena na snímku 5.11c). Vlákna jsou krátká ve srovnání s těmi na obr. 5.11a) nebo 5.10d). Může se jednat o vliv regionu zpětného proudění, který se s rostoucím Sr posouvá blíže k náboji, tím ovlivňuje také pohyb jednotlivých vírových jader. Na snímku 5.11d) jsou dvě výrazná vírová jádra a v prostoru mezi nimi se nachází shluk menších vírů.

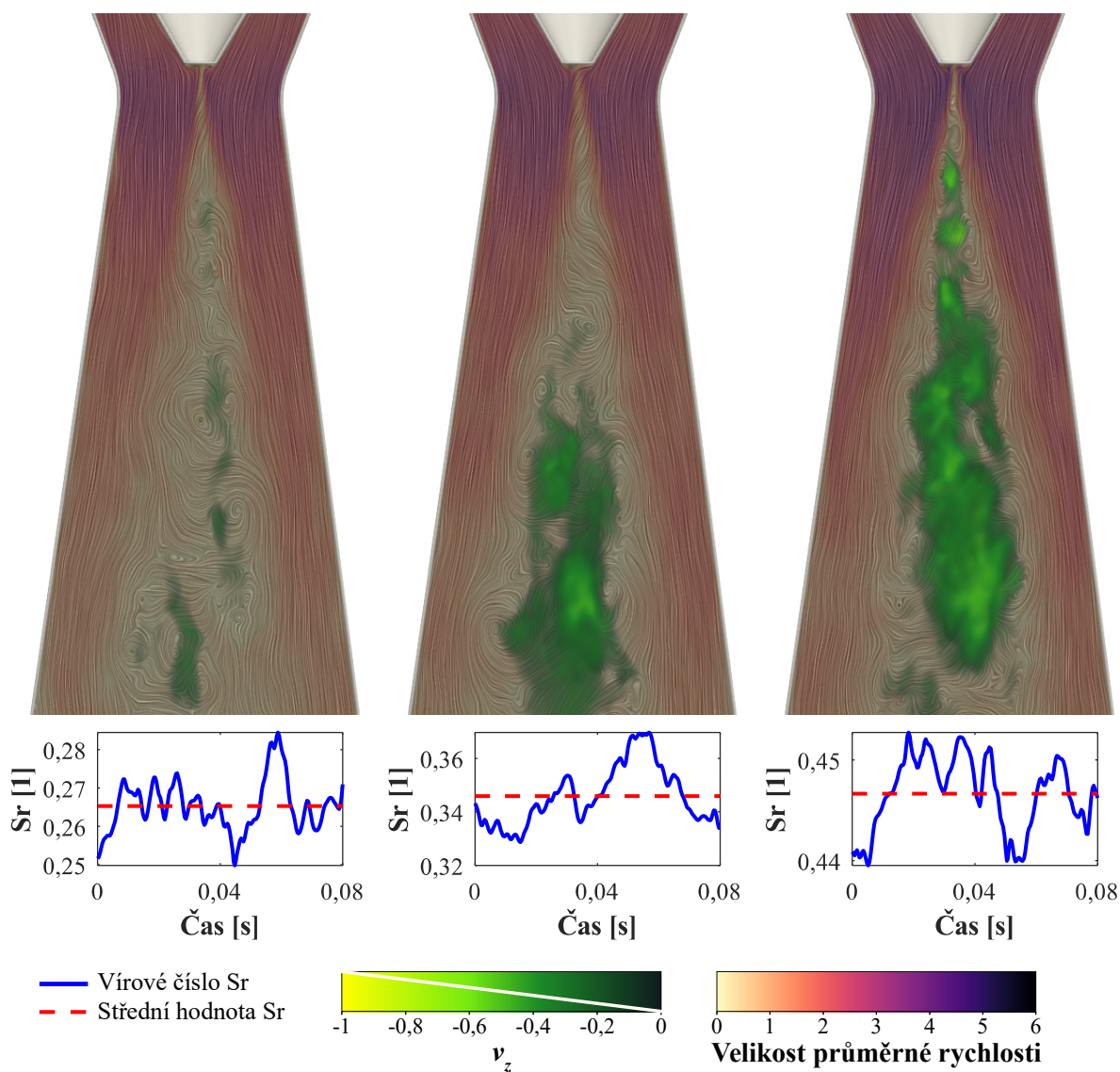


Obr. 5.11 Výběr různých variant dvojitého vírového copu pozorovaného ve výsledcích CFD simulací. Snímky jsou řazeny dle rostoucího vírového čísla.

Společným rysem pozorovaných vírových struktur je jejich umístění v blízkosti náboje. Nedochází k jejich rozvoji níže v difuzoru. Také jejich časová proměnlivost je velká. Struktura jako celek koná precesní pohyb v difuzoru. Během toho dochází k zániku a vzniku nových vírových jader. Pro nižší vírová čísla je stabilnější vírovou strukturou jednotný vírový cop, pro vyšší se stabilnější stává dvojitý vírový cop. V případě zkoumaného generátoru je tomu tak zhruba od hodnoty $Sr = 0,7$. Toto pozorování je v souladu s charakterizací vírového copu dle Nishiho (viz obr. 2.2). Q kritérium zachycuje i malé turbulentní víry, ale dominantní vírová vlákna jsou na většině snímků rozeznatelná.

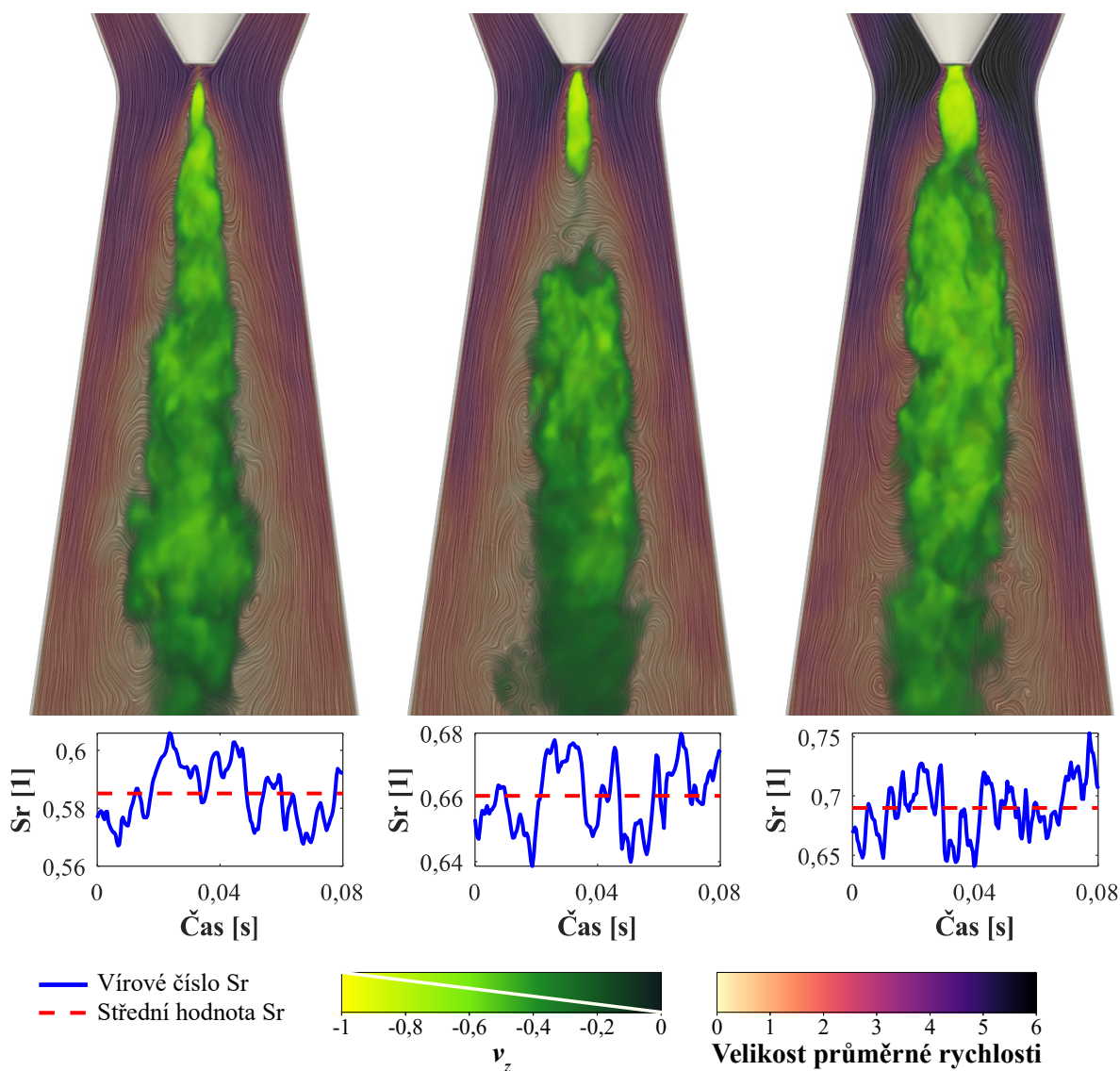
5.5 Vývoj oblasti zpětného proudění

V kapitole 5.1 byla zmíněna oblast zpětného proudění v souvislosti s tvarem vírového copu, v části 5.4 je oblast zpětného proudění vizualizována na příkladu dvojitého vírového copu. Tato podkapitola je věnována studiu oblasti zpětného proudění v závislosti na vírovém čísle Sr . Je zobrazena časově středovaná oblast zpětného proudění, vždy pro časový úsek dlouhý 0,08 s. Po tomto časovém úseku bylo vyhodnocováno vírové číslo, které je zobrazeno formou grafu pod příslušným snímkem (viz obr. 5.12 a 5.13). V grafech je vidět fluktuace vírového čísla, které bylo vyhodnocováno pro stejný řez jako v kapitole 5.1 (znázorněno na obr. 5.2). Snímky byly doplněny zobrazením pole rychlosti metodou LIC (*Linear Integral Convolution*), díky čemuž je ve střední části difuzoru vidět zavíření.



Obr. 5.12 Časově středovaná oblast zpětného proudění zobrazená metodou objemového renderování. V řezu doplněno LIC rychlosti. Pod jednotlivými snímky je v grafu zobrazen časový vývoj vírového čísla.

Na prvním snímku na obr. 5.12 jsou vidět první fragmenty oblasti zpětného proudění, ještě není zformována kompaktní oblast. Na okamžitých snímcích lze oblast zpětného proudění při nižších vírových číslech také pozorovat, ale časovým středováním je získána představa o celkovém vývoji zpětného proudění v čase oproštěná o okamžité fluktuace. Při nárůstu vírového čísla má již oblast ucelený tvar, který vzniká v nižší části difuzoru. S dalším nárůstem Sr se celá oblast posouvá směrem k náboji, kde může docházet k interakci s vírovým copem.



Obr. 5.13 Časově středovaná oblast zpětného proudění – pokračování.

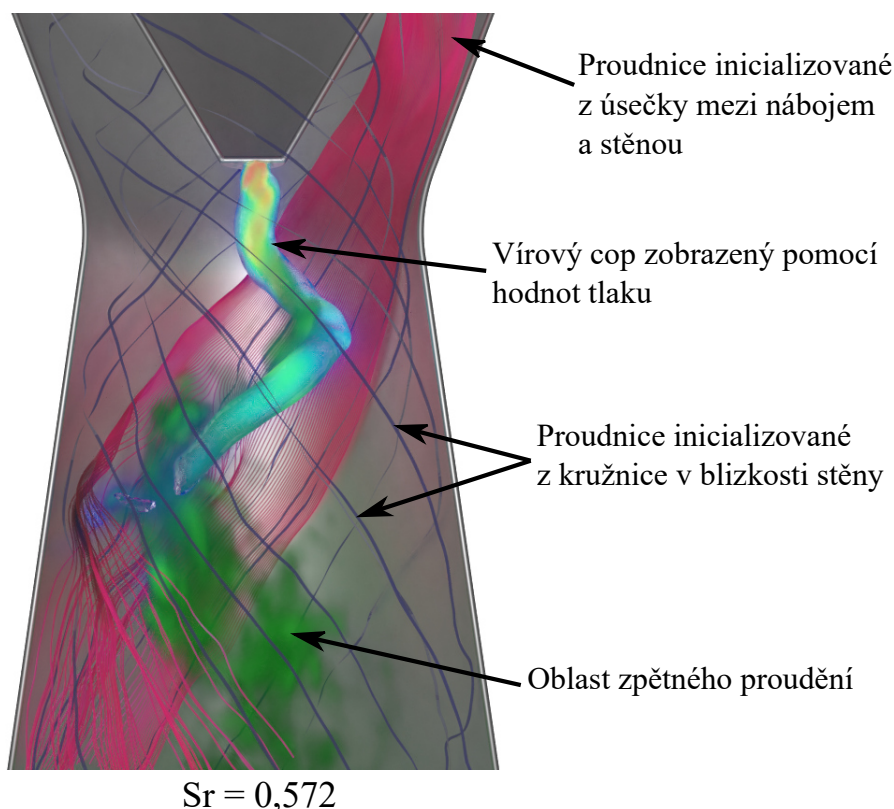
Na obr. 5.13 je pokračování vývoje oblasti zpětného proudění. Na prvním snímku oblast zasahuje téměř k náboji, kde také axiální rychlost dosahuje největších záporných hodnot. Oblast zabírá střední část difuzoru a má kónický tvar. Na dalším snímku je vidět rozpad souvislé oblasti na dvě. Menší se nachází těsně pod nábojem, objemnější oblast pak níže v difuzoru. Na posledním snímku je opět souvislá oblast, která nabyla na objemu také ve vyšší části difuzoru. Svým tvarem spíše připomíná spíše elipsoid než kužel, jak tomu bylo u nižších hodnot Sr . Barevná škála je u všech snímků stejná a byla volena tak, aby při nižších hodnotách Sr byla oblast pozorovatelná a stejně tak, aby neztrácela na přehlednosti u vyšších Sr . Hodnoty časově středované rychlosti v_z u prostředního snímku na obr. 5.13 dosahují -2,29 m/s, u posledního snímku na téměř obrázku až -2,9 m/s. Naopak u prvního snímku na obr. 5.12 je dle barevné škály vidět, že se hodnoty pohybují především v intervalu $\langle -0,2; 0 \rangle$ m/s.

Ze zobrazení pole rychlosti pomocí LIC je také patrný rozvoj zavíření v prostoru difuzoru. Pro rostoucí vírové číslo jsou zavířené struktury pozorovatelné blíže ke stěně difuzoru a také v blízkosti náboje. Barevné tónování řezu informuje o rostoucí velikosti průměrné rychlosti u stěn difuzoru.

5.6 Celková vizualizace proudění v difuzoru

Na následujících obrázcích je zobrazeno proudění v difuzoru pro různá vírová čísla. Vizualizace byly vytvořeny v programu Blender na základě vstupů získaných z programu ParaView. Kromě samotného copu byla snaha naznačit také celkový charakter proudění.

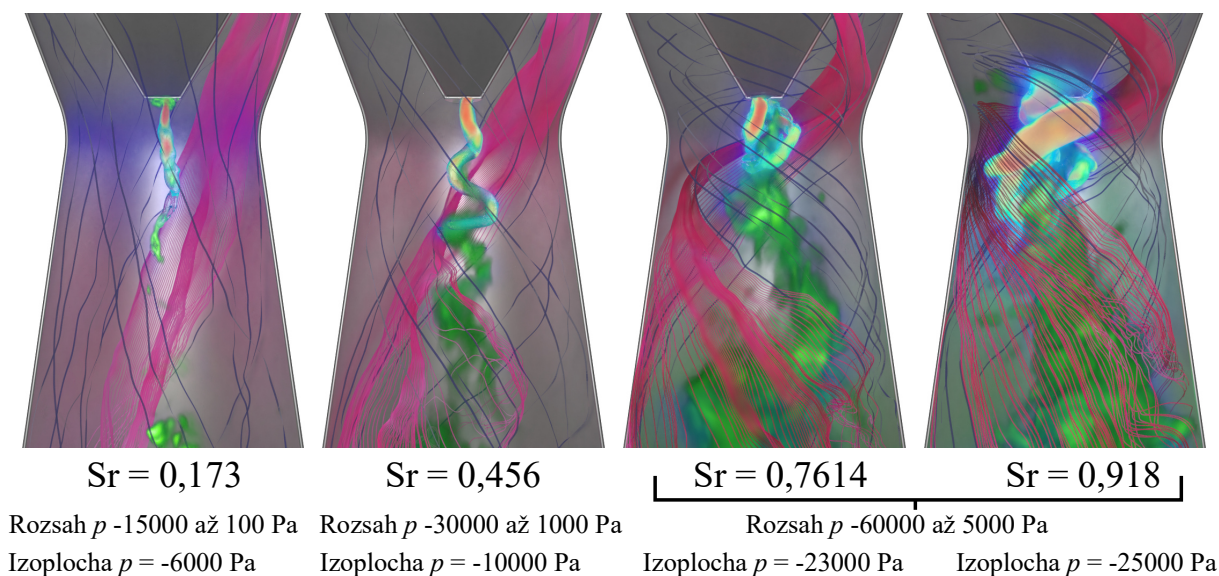
Na obr. 5.14 je popis jednotlivých vizualizovaných struktur. Úsečka, ze které jsou inicializovány růžové proudnice, byla volena tak, aby dobře dokumentovala proudění a současně aby proudnice co nejméně překrývaly oblast vírového copu z daného pohledu. Tmavě modré proudnice popisují proudění tekutiny blíže u stěn, jsou tak dobrým ukazatelem celkového zavíření.



Obr. 5.14 Vizualizace proudění v difuzoru s vysvětlivkami jednotlivých objektů. Vírový cop je zdůrazněn izoplochou statického tlaku pro hodnotu $-17\,000\text{ Pa}$. Nižší hodnoty tlaku v odstínech oranžové až červené, s rostoucím tlakem přecházející přes zelenou do modré celkový rozsah pro tlak $-60\,000\text{ Pa}$ až $5\,000\text{ Pa}$.

Pro všechny snímky byla použita stejná úsečka a kružnice pro inicializaci proudnic. Pro kvalitní zobrazení vírového copu bylo třeba měnit rozsahy tlaků a také hodnotu zvýrazňující izoplochy tlaku. Tyto rozdíly komplikují přímou porovnatelnost snímků, ale bez optimalizování rozsahů by snímky nebyly dostatečně přehledné k popisu jevů. Objemové renderování a následné prolínání s izoplochou tlaku v programu Blender zkresluje podání barev, proto není zobrazena barevná škála. Vždy platí, že nižší hodnoty tlaku jsou v odstínech červené až oranžové

a s rostoucím tlakem přechází přes žlutou a zelenou do modré. S rostoucím tlakem současně klesá průhlednost. U jednotlivých snímků je uveden příslušný rozsah tlaku.



Obr. 5.15 Vizualizace proudění v difuzoru pro různá vírová čísla. Odstíny červené až oranžové značí nižší hodnoty statického tlaku, přes žlutou a zelenou přechází do modré pro vyšší hodnoty.

Na obr. 5.15 jsou výše popsanou metodou zobrazeny struktury pro různé hodnoty vírového čísla. Na prvním snímku je díky proudnicím vidět pouze mírná rotace kapaliny v difuzoru. Vírový cop je téměř přímý a oblast zpětného proudění se teprve formuje. Aby byla oblast zpětného proudění patrná, je vykreslena pro rozsah hodnot axiální rychlosti od -0,5 do 0 m/s. U ostatních snímků zachycuje oblast zpětného proudění hodnoty -4,8 až 0 m/s. Na dalších snímcích je vidět vliv rostoucí tangenciální složky rychlosti a také pokles tlaku v jádru vírového copu. Třetí snímek hodnotou vírového čísla spadá do hodnot, které jsou vykresleny na posledním snímku zpětného proudění na obr. 5.13. Je dobře pozorovatelný rozdíl mezi zobrazením okamžitého stavu zpětného proudění a středované hodnoty. Modré proudnice na prvním snímku obr. 5.15 jsou téměř axiální, zatímco na posledním snímku se obtáčí kolem náboje a následně kolem oblasti s vírovým copem a regionem zpětného proudění, která zasahuje až téměř ke stěně difuzoru.

Použitá metoda vizualizace má řadu omezení, které byly diskutovány, ale poskytuje komplexní náhled na proudění v difuzoru oproti samotnému zobrazení tlaku (popř. jiného zvoleného kritéria). Program Blender umožňuje vykreslení více struktur pomocí objemového renderování. V programu ParaView dochází k nežádoucím artefaktům v oblastech, kde se vykreslované objekty prolínají.

Závěr

Cílem této práce bylo provést literární rešerši z oblasti zkoumání vírového copu a dále zdokumentovat vybrané vírové struktury na dodaných datech. Úvodní kapitola práce byla věnována stručnému úvodu do teorie vířivého proudění. Na ni navázala rešeršní část, která dokumentuje publikované výsledky jak z experimentálního výzkumu, tak z numerických simulací vírového copu. Součástí rešerše je i popis vybraných metod pro identifikaci vírů.

Třetí kapitola představuje programy, které byly použity pro tvorbu vizualizací. Nemá být věnován prostor popisu ovládání programů, bylo pouze odkázáno na zdroje, kde se s ovládáním a principy lze seznámit. Výhodou vybraného softwaru je open-source distribuce a jejich velmi široké možnosti uplatnění. K tvorbě vizualizací v této práci byly použity verze ParaView 5.8 a ParaView 5.6, dále verze programu Blender 2.82a.

Dále byla pozornost věnována metodám vyhodnocování derivací na diskrétních datech. Dvě z používaných metod byly podrobně popsány a otestovány. Testování algoritmů proběhlo v programu Matlab R2019. V této kapitole byl také popsán vliv numerické difuze, který hraje roli při postprocessingu dat.

Poslední kapitola byla věnována vlastnímu studiu výsledků CFD simulací. Zkoumaná data zachycují neustálé proudění v difuzoru s proměnnou okrajovou podmínkou. Vývoj copu je zdokumentován v závislosti na vírovém čísle. Metody pro identifikaci vírů popsané v teoretické části byly aplikovány na příkladu vírového copu. Zvláštní pozornost byla věnována Ljapunovovu exponentu a jeho vztahu k vířivému proudění v difuzoru. V případě Ljapunovova exponentu se nejedná o kritérium existence víru jako takové, namísto toho tato veličina podává objektivní informace o dění v rychlostním poli z pohledu volby souřadného systému. I tak je stále do jisté míry zatížena subjektivitou autora, který ovlivňuje výsledek volbou vstupních parametrů (mj. doba integrace, diskretizace času). U Ljapunovova exponentu byl zdokumentován komplementární vztah přitahujících a odpuzujících struktur. V budoucnu je možné se na tento jev více zaměřit a pokusit se vysvětlit jeho význam. Byl popsán výskyt dvojitého vírového copu, který je nepravidelně pozorován v téměř celém rozsahu vírových čísel, který CFD simulace pokrývají. Dvojitý vírový cop se stává dominantní při vyšších hodnotách vírových čísel, což koresponduje s jevy popsanými v literatuře. Další provedené vizualizace zachycují vývoj oblasti zpětného proudění v difuzoru s rostoucí tangenciální složkou rychlosti. Byly také navrženy celkové vizualizace, které nesou informaci o vývoji proudění nejen v oblasti, kde se vyskytuje vírový cop, ale také o míře zavíření proudu vstupujícího do difuzoru, díky vhodně zvoleným proudnicím. Použití objemového renderování pro vykreslení kritérií pro identifikaci vírového copu a oblasti zpětného proudění dává daleko lepší představu o rozložení hodnot příslušné skalární veličiny v prostoru než pouhé izoplochy, které jsou převládající metodou používanou v literatuře.

Práce představuje úvodní poznatky a kvalitativní popis vývoje a transformací vírového copu zachyceného SBES simulacemi. Navazující práce by se mohla věnovat hlubší fyzikální interpretaci jevu vírového copu a jeho matematickému popisu. V úvodu práce bylo zmíněno, že jsou hledány a vyvíjeny metody účinného potlačení vírového copu. Cesta k nim vede přes porozumění dynamice vírového copu. Jaký vliv mají různé změny okrajových podmínek, případně geometrie? Otázkou je také vhodná dekompozice proudění na dílčí složky, které by byly dobře interpretovatelné a nebylo jich nutné brát v potaz mnoho, což by mohlo otevřít cestu ke zjednodušeným matematickým modelům.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ŠOB, F. *Hydromechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o, 2002, 238 s. ISBN 80-214-2037-5.
- [2] URUBA, V. *Turbulence*. 2. přeprac. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2014, 130 s. ISBN 8001056007.
- [3] BRDIČKA, M. *Mechanika kontinua*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959, 718 s.
- [4] BAJER, J. *Mechanika 3*. 2. rozš. a dopl. vyd. Olomouc: Vladimír Chlup, 2012, 542 s. ISBN 978-80-903958-5-5.
- [5] BRENNEN, C. *Internet Book on Fluid Dynamics* [online]. 2006 [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <http://brennen.caltech.edu/FLUIDBOOK/basicfluiddynamics/equationsofmotion/vorticitytransport.pdf>
- [6] REKTORYS, K. a kol. *Přehled užití matematiky*. 2. oprav. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1968, 1136 s.
- [7] NISHI, M. a S. LIU. An Outlook on the Draft-Tube-Surge Study. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*. 2013, **6**(1), 33–48. DOI: 10.5293/IJFMS.2013.6.1.033. ISSN 1882-9554.
- [8] SUSAN-RESIGA, R., S. MUNTEAN a C. TĂNASĂ. Hydrodynamic Design and Analysis of a Swirling Flow Generator. *4th German-Romanian Workshop on Turbomachinery Hydrodynamics*. Stuttgart, 2008.
- [9] CIOCAN, G., M. ILIESCU, T. CONG VU, B. NENNEMANN a F. AVELLAN. Experimental Study and Numerical Simulation of the FLINDT Draft Tube Rotating Vortex. *Journal of Fluids Engineering*. 2007, **129**(2), 146–158. DOI: 10.1115/1.2409332. ISSN 0098-2202.
- [10] MUNTEAN, S., H. NILSSON a R. SUSAN-RESIGA. 3D Numerical Analysis of the Unsteady Turbulent Swirling Flow in a Conical Diffuser using Fluent and OpenFoam. *3rd LAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*. Brno, 2009.
- [11] MUNTEAN, S., A. BOSIÖC, R. STANCIU, C. TĂNASĂ a R. SUSAN-RESIGA. 3D Numerical Analysis of a Swirling Flow Generator. *4-th International Meeting on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*. Bělehrad, 2011.
- [12] PETIT, O., A. BOSIÖC, H. NILSSON, S. MUNTEAN a R. SUSAN-RESIGA. A swirl generator case study for OpenFOAM. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2010, **12**. DOI: 10.1088/1755-1315/12/1/012056. ISSN 1755-1307.

- [13] ŠTEFAN, D., P. RUDOLF, S. MUNTEAN a R. SUSAN-RESIGA. Structure of flow fields downstream of two different swirl generators. *Engineering Mechanics*. 2013, **20**(5), 339–353. ISSN 1805-4633.
- [14] ŠTEFAN, D. *Study of the Dissipation in Spiraling Vortical Structures*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. Vedoucí dizertační práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [15] SKOTÁK, A. *Vírové struktury v savce vodní turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2004. Vedoucí dizertační práce prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [16] JOŠT, D. a A. LIPEJ. Numerical prediction of the vortex rope in the draft tube. *3rd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*. Brno, 2009.
- [17] SKRIPKIN, S., M. TSOY, P. KUIBIN a S. SHTORK. Vortex rope instabilities in a model of conical draft tube. *EPJ Web of Conferences*. 2017, **159**. DOI: 10.1051/epj-conf/201715900048. ISSN 2100-014X.
- [18] GAVRILOV, A., A. SENTYABOV, A. DEKTEREV a K. HANJALIĆ. Vortical structures and pressure pulsations in draft tube of a Francis-99 turbine at part load: RANS and hybrid RANS/LES analysis. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. Elsevier, 2017, **63**(2), 158–171. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2016.05.007. ISSN 0142-727X.
- [19] TRIVEDI, C., M. J. CERVANTES a O. G. DAHLAUG. Experimental and numerical studies for a high head Francis turbine at several operating points. *Journal of Fluids Engineering*. 2013, **135**(11). DOI: 10.1115/1.4024805. ISSN 0098-2202.
- [20] Francis-99 workshops. *Lulea University of Technology* [online]. [cit. 2020-04-15]. Dostupné z: <https://www.ltu.se/research/subjects/Stromningslara/Konferenser/Francis-99>
- [21] SKRIPKIN, S., M. TSOY, S. SHTORK a K. HANJALIĆ. Comparative analysis of twin vortex ropes in laboratory models of two hydro-turbine draft-tubes. *Journal of Hydraulic Research*. Taylor & Francis, 2016, **54**(4), 450–460. DOI: 10.1080/00221686.2016.1168325. ISSN 0022-1686.
- [22] KOLÁŘ, V. Vortex identification: New requirements and limitations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. Elsevier, 2007, **28**(4), 638–652. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.03.004. ISSN 0142-727X.
- [23] ZHANG, Y., K. LIU, H. XIAN a X. DU. A review of methods for vortex identification in hydroturbines. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2018, **81**(2), 1269–1285. DOI: 10.1016/j.rser.2017.05.058. ISSN 1364-0321.

- [24] HUNT, J. C. R., A. A. WRAY a P. MOIN. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *Center for turbulence research report CTR-S88*. 1988, 193–208.
- [25] CHONG, M. S., A. E. PERRY a B. J. CANTWELL. A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. American Institute of Physics, 1990, **2**(5), 765–777. DOI: 10.1063/1.857730. ISSN 0899-8213.
- [26] JEONG, J. a F. HUSSAIN. On the identification of a vortex. *Journal of fluid mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, **285**, 69–94. DOI: 10.1017/S0022112095000462. ISSN 0022-1120.
- [27] HALLER, G. Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Elsevier, 2001, **149**(4), 248–277. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00199-8. ISSN 0167-2789.
- [28] SHADDEN, S., F. LEKIEN a J. MARSDEN. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Elsevier, 2005, **212**(3-4), 271–304. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.007. ISSN 0167-2789.
- [29] HALLER, G. An objective definition of a vortex. *Journal of fluid mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005, **525**, 1–26. DOI: 10.1017/S0022112004002526. ISSN 0022-1120.
- [30] JOHNSON, C. Top scientific visualization research problems. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 2004, **24**(4), 13–17. DOI: 10.1109/MCG.2004.20. ISSN 0272-1716.
- [31] ČASTULÍKOVÁ, V. *Metody počítačové vizualizace proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. Vedoucí bakalářské práce Ing. Ondřej Urban.
- [32] ROTH, M. *Automatic extraction of vortex core lines and other line-type features for scientific visualization*. Hartung-Gorre Verlag, 2000. DOI: 10.3929/ethz-a-004016407. ISBN 3896495828.
- [33] VTK – The Visualization Toolkit [online]. [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://vtk.org/about/>
- [34] VTK GitLab [online]. [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://gitlab.kitware.com/vtk/vtk/-/tree/master>
- [35] ParaView [online]. [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://www.paraview.org/overview/>

- [36] SCHROEDER, W., K. MARTIN a B. LORENSEN. *The Visualization Toolkit* [online]. 4th ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR, c2006 [cit. 2020-01-09]. ISBN 978-1-930934-19-1. Dostupné z: <https://raw.githubusercontent.com/lorensen/VTKExamples/master/src/VTKBookLaTeX/VTKTextBook.pdf>
- [37] AYACHIT, U. a kol. *The ParaView Guide: Community Edition* [online]. Kitware, c2020 [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://www.paraview.org/paraview-downloads/download.php?submit=Download&version=v5.8&type=data&os=Sources&downloadFile=ParaViewGuide-5.8.0.pdf>
- [38] *Blender 2.83 Reference Manual — Blender Manual* [online]. [cit. 2020-04-25]. Dostupné z: <https://docs.blender.org/manual/en/dev/>
- [39] ZIENKIEWICZ, O. C., R. TAYLOR a J. Z. ZHU. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Seventh edition. Amsterdam: Elsevier; Butterworth-Heinemann, 2013, 714 s. ISBN 978-1-85617-633-0.
- [40] SOZER, E., C. BREHM a C. KIRIS. Gradient Calculation Methods on Arbitrary Polyhedral Unstructured Meshes for Cell-Centered CFD Solvers. *NASA Center for AeroSpace Information (CASI). Conference Proceedings* [online]. Hampton: NASA/Langley Research Center, 2014 [cit. 2020-01-19]. Dostupné z: <http://search.proquest.com/docview/2128349779/>
- [41] MISHRIKY, F. a P. WALSH. Towards Understanding The Influence of Gradient Reconstruction Methods on Unstructured Flow Simulation. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*. Toronto: Canadian Society for Mechanical Engineering, 2017, **41**(2), 169–179. DOI: 10.1139/tcsme-2017-1012. ISSN 0315-8977.
- [42] URBAN, O. a P. RUDOLF. POD analysis of a vortex rope with transient boundary conditions. In: *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. Institute of Physics Publishing, 2019, **405**. DOI: 10.1088/1755-1315/405/1/012034. ISSN 1755-1315.
- [43] ParaView Plugins – Visual Computing Group – Heidelberg University. *VCG – Visual Computing Group – Heidelberg University* [online]. Heidelberg [cit. 2020-06-11]. Dostupné z: <https://vcg.iwr.uni-heidelberg.de/plugins/>
- [44] KASTEN, J., C. PETZ, I. HOTZ, B. NOACK a H. HEGE. Localized Finite-time Lyapunov Exponent for Unsteady Flow Analysis. *VMV*. 2009, s. 265–274. ISBN: 978-3-9804874-8-1

Zdroje obrázků

U převzatých obrázků je zdroj uveden v popisku. V ostatních případech jsou obrázky původní.

Seznam použitých symbolů

Symbol	Jednotka	Význam
a	[1]	poměr vlastních čísel definovaný ve výpočtu M_Z kritéria
$\mathbf{a}$	[m/s ²]	zrychlení
$\mathbf{A}$	[1/s]	označení tenzoru gradientu rychlosti
$\mathbf{b}$	–	vektor derivací obecné funkce u v přirozeném souřadném systému
$\mathbf{c}$	–	obecná vektorová veličina
D	–	diskriminant
D_h	[m]	hydraulický průměr
$\mathbf{D}$	[1]	Cauchyho–Greenův deformační tenzor
d	[m]	průměr
$d\mathbf{l}$	[m]	elementární tečný vektor křivky
$\mathbf{e}_i$	–	jednotkový vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu s_i
$\mathbf{E}$	–	matice vlastních vektorů $\mathbf{e}_i$
$\mathbf{g}$	[m/s ²]	zrychlení od objemových sil
$\mathbf{G}$	–	obecná matice
H_d	[m/s ²]	hustota helicity
H_n	[1]	normalizovaná helicity
I	[1]	intenzita turbulence
$\mathbf{I}$	–	jednotková matice
I_{1-3}	–	invarianty tenzoru gradientu rychlosti
$\mathbf{J}$	–	transformační matice mezi vektory $\mathbf{z}$ a $\mathbf{b}$
k_{1-4}	–	koefficienty obecné kubické rovnice
$m(\alpha)$	–	funkce, na jejímž základě je vyhodnocováno M_Z kritérium
$\mathbf{M}$	[1/s ²]	Cotterova–Livlinova derivace tenzoru rychlosti deformace
$\widehat{\mathbf{M}}$	[1/s ²]	transformace tenzoru $\mathbf{M}$ do souřadného systému s bází tvořenou vlastními vektory tenzoru rychlosti deformace
M_Z	[1]	kritériální parametr M_Z kritéria
$\mathbf{n}$	–	jednotkový normálový vektor
N	–	počet stěn buňky
p	–	označení bodu uvnitř buňky sítě
p	[Pa]	tlak
$\mathbf{P}$	[1/s]	antisymetrická složka tenzoru gradientu rychlosti (tenzor vířivosti)
Q	[m ³ /s]	objemový průtok
Q	[1/s ²]	kritériální parametr Q kritéria
Q_m	[kg/s]	hmotnostní průtok
Q_n	[1]	normalizovaná hodnota Q kritéria
$\mathbf{r}$	[m]	polohový vektor
r	[m]	radiální souřadnice
R	–	označení pro invariant I_3 tenzoru gradientu rychlosti
R	[m]	poloměr horizontálního řezu pro vyhodnocení vírového čísla Sr
s_i	[1/s]	vlastní čísla tenzoru rychlosti deformace $\mathbf{S}$

Symbol	Jednotka	Význam
S	$[m^2]$	plocha
$\mathbf{S}$	$[1/s]$	symetrická složka tenzoru gradientu rychlosti (tenzor rychlosti deformace)
S_g	$[1]$	vírové číslo založené na geometrii vírového generátoru
S_r	$[1]$	vírové číslo na základě poměru toků složek hybnosti
t	$[s]$	čas
$\mathbf{t}$	–	jednotkový tečný vektor
T	$[s]$	integrační úsek v čase
u	–	obecná skalární funkce
$\mathbf{v}$	$[m/s]$	rychlost
v_φ	$[m/s]$	obvodová složka rychlosti
V	$[m^3]$	objem
W_i	–	tvarové funkce
Z	–	eliptický kužel M_Z kritéria
$\mathbf{x}$	$[m]$	poloha obecného bodu v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_0$	$[m]$	poloha počátečního bodu
$\mathbf{x}_T$	$[m]$	poloha těžiště stěny buňky
$\mathbf{z}$	–	vektor derivací obecné funkce u v globálním souřadném systému
α	$[1]$	obecný úhel
γ	–	označení křivky
Δ	$[1/s^6]$	kritériální parametr Δ kritéria
η_{1-3}	–	souřadnice v souřadném systému s bází tvořenou vlastními vektory tenzoru rychlosti deformace
θ	–	hraniční plochy prostorové domény
λ_i	–	vlastní čísla matice
λ_2	$[1/s^2]$	kritériální parametr λ_2 kritéria
ν	$[m^2/s]$	kinematická viskozita
$\boldsymbol{\xi}$	$[m]$	vektor posunutí polohy daného bodu vůči bodu $\mathbf{x}_0$
ρ	$[kg/m^3]$	hustota
σ	$[1]$	Thomův kavitační součinitel
$\sigma_{t_0}^t$	$[1/s]$	největší Ljapunovův exponent
φ	$[1]$	úhel sklonu lopatky
$\varphi_{t_0}^t$	–	zobrazení přiřazující částici identifikované v čase t_0 její polohu v čase t
$\boldsymbol{\Omega}$	$[1/s]$	vířivost
$\mathcal{O}$	–	Landauova notace
$\mathcal{V}$	–	Ljapunovova funkce

Seznam použitých zkratek

Zkratka	Význam
BEP	Best Efficiency Point
CFD	Computational Fluid Dynamics
DES	Detached Eddy Simulation
FLINDT	FLow INvestigation in a Francis Draft Tube
FOAM	Field Operation And Manipulation
FTLE	Finite-Time Lyapunov Exponent
GGCB	výpočet derivací metodou Green–Gauss Cell-Based
GGNB	výpočet derivací metodou Green–Gauss Node-Based
GUI	Graphical User Interface
INT	výpočet derivací na základě INTerpolačních funkcí
LDV	Laser Doppler Velocimetry
LES	Large Eddy Simulation
LEVM	Linear Elliptical relaxation eddy Viscosity Model
LIC	Linear Integral Convolution
LSCB	výpočet derivací metodou Least Squares Cell-Based
RANS	Reynolds-Averaged Navier–Stokes equations
PISO	Pressure-Implicit with Splitting of Operators
PIV	Particle Image Velocimetry
PRESTO!	PREssure STaggering Option
POP	Proměnná Okrajová Podmínka
RSM	Reynolds Stress equation Model
SBES	Stress-Blended Eddy Simulation
SST	Shear-Stress Transport
UPT	Universitatea Politehnica Timișoara
VCG	Visual Computing Group
VTK	The Visualization Toolkit
WALE	Wall-Adapting Local Eddy viscosity model