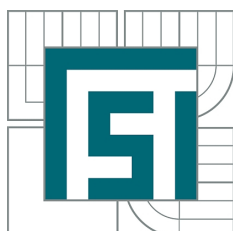


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# TEORIE ŘÍZENÍ ROBOTICKÉHO HADA S VÍCE NEŽ TŘEMI ČLÁNKY

CONTROL THEORY OF ROBOTIC SNAKES WITH MORE THAN THREE LINKS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

MARTIN TEJKAL

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Mgr. JAROSLAV HRDINA, Ph.D.

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Martin Tejkal

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Teorie řízení robotického hada s více než třemi články**

v anglickém jazyce:

### **Control Theory of robotic snakes with more than three links**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Popsání neholonomní kinematiky čtyřčlankového robotického hada. Nalezení příslušných řídicích distribucí. Nalezení obalu Lieovy algebry a diskuze lokální říditelnosti. Návrh na realizaci pohybů neležících v řídicí distribuci. Diskuze změny řízení způsobenou přidáním pátého (obecně dalšího) článku.

Cíle bakalářské práce:

Nastudování základů neholonomní mechaniky. Použití příslušného aparátu pro řízení zvoleného mechanismu.

Seznam odborné literatury:

[1] Mathematical Introduction to Robotic Manipulation by R. M. Murray, Z. X. Li, and S. S. Sastry (CRC Press, 1994) ([http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki/index.php/Main\\_Page](http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki/index.php/Main_Page))

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 19.11.2014

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá teorií řízení robotického mechanismu simulujícího pohyb hada. Z hlediska teorie řízení se jedná o neholonomní systém, jehož říditelnost je určena vektorovými poli. V práci je provedeno odvození vstupních vektorových polí pomocí soustavy neholonomních rovnic a dalších vektorových polí nezbytných k řízení, pomocí operace Lieovy závorky, aplikované na vektorová pole vstupní. Tato vektorová pole jsou dále zkoumána v konkrétních bodech konfiguračního prostoru. V závěru je provedena diskuze, jak se změní popisný aparát přidáním jednoho, nebo obecného počtu článků.

## Summary

The subject of this Bachelor's thesis is control theory of mechanism that simulates snake's movement. From a viewpoint of control theory the robot is classified as nonholonomic system, controllability of which is determined by vector fields. Based on nonholonomic constrain a set of input vector fields is obtained from a system of nonholonomic equations. The other vector fields that are necessary for controllability of the system are derived from the set of input vector fields by application of Lie bracket operation on two input fields. This set of vector fields is further analysed in particular points of the configuration space. Finally we discuss changes that need to be done in order to describe a mechanism created by adding one, or more new links.

## Klíčová slova

teorie řízení, neholonomní systém, Lieova algebra, mobilní robot, robotický had

## Keywords

control theory, nonholonomic system, Lie algebra, mobile robot, robotic snake

TEJKAL, M. *Teorie řízení robotického hada s více než třemi články*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 44 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Teorie řízení robotického hada s více než třemi články vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Martin Tejkal



Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem, kteří mi jakkoliv pomohli při tvorbě této práce. Především pak doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi Ph. D. za příkladné vedení práce, četné rady a připomínky.

Martin Tejkal



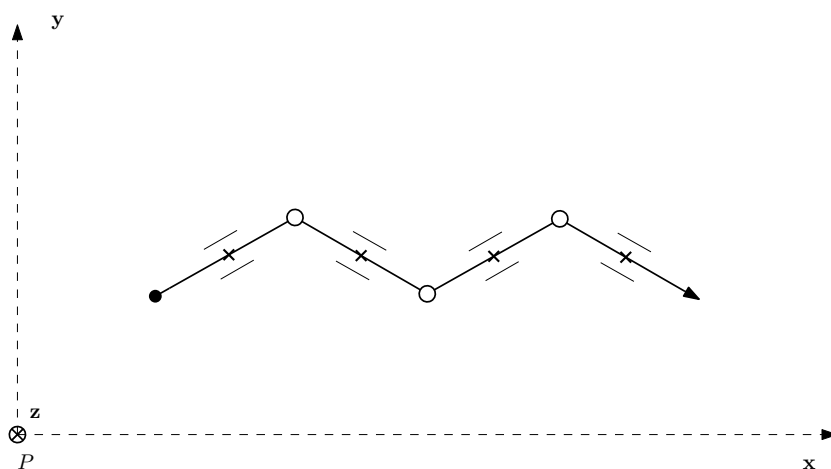
# Obsah

|                                                 |           |
|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>Úvod</b>                                     | <b>12</b> |
| <b>1 Matematické základy</b>                    | <b>14</b> |
| 1.1 Shodnosti euklidovských prostorů . . . . .  | 14        |
| 1.2 Metoda pohyblivého repéru . . . . .         | 18        |
| <b>2 Diferenciální kinematika</b>               | <b>23</b> |
| 2.1 Holonomní rovnice . . . . .                 | 23        |
| 2.2 Podmínka, neholonomní rovnice . . . . .     | 24        |
| 2.3 Řešení soustavy . . . . .                   | 26        |
| 2.4 Interpretace řešení, příklady . . . . .     | 28        |
| <b>3 Teorie řízení</b>                          | <b>31</b> |
| 3.1 Lieovy závorky . . . . .                    | 31        |
| 3.2 Řízení ve zvolených konfiguracích . . . . . | 33        |
| <b>4 Přidání dalších článků</b>                 | <b>37</b> |
| <b>Závěr</b>                                    | <b>41</b> |
| <b>Literatura</b>                               | <b>43</b> |
| <b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>        | <b>44</b> |

# Úvod

V současné době se ve strojírenské praxi, ale i v mnoha jiných oblastech lidské činnosti, například ve zdravotnictví, nebo v armádě, běžně využívá robotických systémů. Mezi hlavní přednosti robotů patří schopnost přesně vykonávat určené úkoly, nebo operovat v prostředí, které je pro člověka nebezpečné, nebo z různých důvodů nepřístupné, ať už se jedná trosky budovy, nebo lidské tělo.

Tato práce se bude zabývat konkrétním typem robota, a to robotickým hadem. Jak již z názvu vyplývá, jedná se o robotický systém, který svou funkcí simuluje pohyb skutečného živočicha, tedy hada. Nejprve si stručně popíšeme mechanismus a funkci prvků, kterými je tvořen. Další poznatky k tomuto tématu je možné najít například v [6]. Schématicky je mechanismus vyobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 1: Schéma mechanismu

Podélné čáry symbolizují články hada, kružnice mezi jednotlivými články mají význam kloubů. Hlava hada je označena šipkou, koncový bod ocasu hada je označený plným černým kruhem. Uprostřed každého článku je schématicky naznačeno kolečko. Jeho poloha na článku je určena křížkem.

Z obrázku je patrné, že mechanismus je tvořen čtyřmi články. Každý článek nese právě jedno kolečko, které se v obecném případě může nacházet kdekoliv na článku. Ve své práci se budu zabývat pouze mechanismem, jehož kolečka se nacházejí právě uprostřed článku. Kolečka nejsou poháněná, jsou pasivní. Jednotlivé články jsou spojeny klouby, které umožňují natáčení kolem  $z$ -ových os lokálních souřadných systémů s počátky v každém kloubu. Tyto osy jsou rovnoběžné s osou  $z$  globálního souřadného systému (viz Obrázek 1). V kloubech se nacházejí servomotory. Řízením pohybu servomotorů dochází k natáčení článků a tím i k pohybu mechanismu. Uvidíme, že vhodnou posloupností natočení článků jsme schopni docílit toho, aby se mechanismus přesunul z místa A do místa B v prostoru, změnil svoje natočení vůči globálnímu systému souřadnic, nebo např. změnil vzájemné uspořádání článků.

Obsáhlejší část práce potom bude sestávat z matematického popisu říditelnosti robota. Pro tyto účely nejprve zadefinujeme některé nezbytné pojmy, především z oblasti lineární algebry, následně pak bude řešena *dopředná kinematická úloha*, jejíž cílem je stanovit soustavu rovnic, která určuje polohu koncového členu mechanismu, v našem případě polohu

hlavy hada v čase, při znalosti polohy hnacích částí mechanismu. Pro řešení této úlohy využijeme metodu pohyblivého repéru.

Robotický had je *neholonomní* systém. Tedy, zjednodušeně řečeno systém, jehož celkový počet stupňů volnosti není roven dimenzi konfiguračního prostoru. Z neholonomie systému plyne podmínka, kterou využijeme v dalším postupu řešení pro určení soustavy neholonomních rovnic. Nalezení řešení soustavy je prvním krokem k řízení robota. Řešení získáme ve tvaru vektorových polí. Mechanický význam jednotlivých prvků řešení bude interpretován na příkladech. Aplikací operace Lieovy závorky na řešení soustavy dostaneme nová vektorová pole. Říditelnost mechanismu je plně určena Lieovou algebrou říditelnosti, v následujícím textu se tedy budeme zabývat tím, jak ze vstupních vektorových polí a polí získaných operací Lieovy závorky vybrat množinu, která bude tvořit bázi výše zmíněné algebry říditelnosti. K těmto účelům využijeme pojmu báze Phillipa Halla. Diskutovaná vektorová pole budeme analyzovat v konkrétních konfiguracích mechanismu a na základě získaných poznatků se pokusíme stanovit bázi algebry říditelnosti, která bude v jistém ohledu nejlepší.

Poslední kapitola se bude zabývat tím, jak se změní popisný aparát, rozšíříme-li mechanismus o jeden článek. Tyto úvahy se v samém závěru pokusíme zobecnit pro případ mechanismu rozšířeného o obecný počet článků.

# 1. Matematické základy

V následující kapitole zdefinujeme některé nezbytné pojmy, se kterými budeme v dalším textu pracovat. Tato kapitola čerpá především z [1], [2], kde lze najít i některé důkazy k větám, které v kapitole nebyly provedeny, dále pak z [3], částečně také z [4]. Podkapitola Metoda pohyblivého repéru potom vychází z [5].

## 1.1. Shodnosti euklidovských prostorů

Před tím, než začneme uvažovat o pohybu hada je vhodné si rozmyslet, kde se mechanismus bude pohybovat. Pro naše úvahy budeme využívat Euklidovský prostor, avšak začneme nejprve obecnější definicí prostoru metrického.

### Definice 1.1. Metrický prostor

Pod pojmem metrický prostor rozumíme dvojici  $(X, \rho)$ , kde  $X$  je neprázdná množina a  $\rho$  je funkce  $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , splňující  $\forall x, y, z \in X$ :

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y, \\ \rho(x, y) &= \rho(y, x), \\ \rho(x, z) &\leq \rho(x, y) + \rho(y, z).\end{aligned}$$

**Poznámka:** Funkci nazýváme metrika, nebo vzdálenost. Podmínky, které musí metrika splňovat, se po řadě nazývají *axiom totožnosti*, *symetrie* a *trojúhelníková nerovnost*.

### Definice 1.2. Vektorový prostor

Komutativní grupa  $(V, +)$  spolu s operací  $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$  se nazývá *vektorový prostor nad reálnými čísly*  $\mathbb{R}$ , jestliže pro každé prvky  $\mathbf{v} \in V$  a  $r \in \mathbb{R}$  platí  $r \cdot \mathbf{v} = r\mathbf{v} \in V$  a dále pro každé  $\mathbf{u} \in V$ ,  $\mathbf{v} \in V$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  platí:

$$\begin{aligned}r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \\ (r + s) \cdot \mathbf{u} &= r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}, \\ (rs) \cdot \mathbf{u} &= r \cdot (s \cdot \mathbf{u}), \\ 1 \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Dále se již budeme zabývat speciálním případem metrického prostoru, a to prostorem Euklidovským.

### Definice 1.3. Euklidovský prostor

Mějme množinu:

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n\}$$

spolu s funkcí  $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$  definovanou:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

kde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  a  $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ . Potom dvojici  $(X, \rho)$  nazýváme *n - rozměrný euklidovský prostor*.

Dokažme nyní, že se skutečně jedná o metrický prostor.

**Věta 1.4.** *Euklidovský prostor  $(X, \rho)$  z definice 1.3 je metrickým prostorem.*

*Důkaz. 1.*  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Nejprve, nechť  $\rho(x, y) = 0$ , potom platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = 0,$$

neboli

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0.$$

Potom zřejmě také platí

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0.$$

Díky druhé mocnině musí platit  $(x_i - y_i)^2 \geq 0$  pro  $1 \leq i \leq n$ . Odtud plyne, že pro splnění rovnice musí platit

$$(x_i - y_i)^2 = 0 \Rightarrow x_i - y_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i,$$

pro  $1 \leq i \leq n$ . Tedy  $x = y$ .

Opačně, nechť platí  $x = y$ , potom

$$\rho(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} = 0.$$

**2.**  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

Nechť

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((-1) \cdot (y_i - x_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (-1)^2 \cdot (y_i - x_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = \rho(y, x). \end{aligned}$$

Pro důkaz třetího axiomu metrického prostoru využijeme Minkowského nerovnosti (viz [4]).

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{1/p}.$$

Jestliže dosadíme  $a_i = x_i - y_i$ ,  $b_i = y_i - z_i$  a  $p = 2$ , dostaneme přímo trojúhelníkovou nerovnost pro Euklidovský prostor:

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Tím je věta dokázána. □

**Definice 1.5. Afinity prostor**

Standardní afinity prostor  $\mathcal{A}_n$  je množina všech bodů v  $\mathbb{R}^n$  označovaná jako  $\mathcal{A}_n$  spolu s operací  $+$  :  $\mathcal{A}_n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ , kterou k bodu  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$  a vektoru  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{V}$  přiřadíme bod

$$A + \mathbf{v} = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathcal{A}_n.$$

Tato operace splňuje následující tři vlastnosti:

1.  $A + \mathbf{o} = A$  pro všechny body  $A \in \mathcal{A}_n$  a nulový vektor  $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $A + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (A + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  pro všechny vektory  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  a body  $A \in \mathcal{A}_n$ .
3. Pro každé dva body  $A, B \in \mathcal{A}_n$  existuje právě jeden vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  takový, že  $A + \mathbf{v} = B$ . Značíme jej  $B - A$  nebo také  $\overrightarrow{AB}$ .

Vektorový prostor  $\mathbb{R}^n$  nazýváme *zaměření* standardního afinityho prostoru  $\mathcal{A}_n$ .

**Definice 1.6. Lineární nezávislost vektorů**

Bud'  $\mathbb{V} = (V, +)$  vektorový prostor a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Řekneme, že vektor  $\mathbf{v} \in V$  se lineárně vyjadřuje vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ , nebo je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ , jestliže existují reálná čísla  $r_1, \dots, r_k$  tak, že platí

$$\mathbf{v} = r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_k \mathbf{v}_k.$$

Vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  se nazývají lineárně závislé, jestliže existují reálná čísla  $r_1, \dots, r_k$ , z nichž aspoň jedno je různé od nuly tak, že platí

$$r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o}.$$

V opačném případě jsou vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  lineárně nezávislé.

**Definice 1.7. Báze vektorového prostoru**

Bud'  $\mathbb{V} = (V, +)$  vektorový prostor a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Soustava vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  se nazývá báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ , jestliže vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou lineárně nezávislé a každý vektor  $\mathbf{v} \in V$  se lineárně vyjadřuje vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

**Definice 1.8.** Nechť  $\mathbb{V} = (V, +)$  je vektorový prostor,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  prvky z  $V$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Množinu všech lineárních kombinací vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  označíme  $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ , tj.

$$L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \{r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_k \mathbf{v}_k : r_i \in \mathbb{R}, \text{ kde } 1 \leq i \leq k\}.$$

Množina  $L$  je podprostor vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ , který se nazývá *podprostor generovaný vektory*  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

**Věta 1.9.** Bud'  $\mathbb{V} = (V, +)$  vektorový prostor a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) nechť jsou prvky z  $V$ . Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

1. Soustava vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  je báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ .
2. Vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  tvoří maximální lineárně nezávislou soustavu vektorů prostoru  $\mathbb{V}$ .
3. Každý vektor  $\mathbf{v} \in V$  lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{v} = r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_k \mathbf{v}_k,$$

kde  $r_1, \dots, r_k$  jsou reálná čísla.

Čísla  $r_1, \dots, r_k$  se nazývají *souřadnice vektoru*  $\mathbf{v}$  vzhledem k bázi  $\alpha = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$  a píšeme  $[v]_\alpha = (r_1, \dots, r_k)^T$ .

*Důkaz.* Nejprve předpokládejme, že platí (1.) a nechť  $\mathbf{v} \in V$ . Pak  $\mathbf{v} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ , tudíž existují reálná čísla  $r_1, \dots, r_k$  s vlastností  $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k$ . Položme  $r = -1$ . Pak  $r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k + r\mathbf{v} = \mathbf{o}$ , tudíž vektory  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou lineárně závislé. Platí tedy (2.).

Nyní předpokládejme, že platí (2.) a nechť  $\mathbf{v} \in V$ . Pak vektory  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou lineárně závislé, tudíž existují reálná čísla  $r, r_1, \dots, r_k$  z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že  $r\mathbf{v} + r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$ . Jestliže  $r = 0$ , máme  $r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k + r\mathbf{v} = \mathbf{o}$ , což dává spor, protože vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou lineárně nezávislé. Dostáváme  $r \neq 0$ , odkud plyne

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{r}(r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k) \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k).$$

Nakonec předpokládejme, že platí obě podmínky (1.) i (2.) a nechť  $\mathbf{v} \in V$ . Protože  $V = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  existují reálná čísla  $r_1, \dots, r_k$ , tak, že  $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k$ . Máme ukázat jednoznačnost reálných čísel  $r_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Předpokládejme, že  $s_1, \dots, s_k$  jsou reálná čísla s vlastností  $\mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1 + \dots + s_k\mathbf{v}_k$ . Pak

$$\mathbf{o} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (r_1 - s_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (r_k - s_k)\mathbf{v}_k.$$

Protože vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou lineárně nezávislé, máme  $r_i - s_i = 0$  pro každé  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), tudíž  $r_1 = s_1, \dots, r_k = s_k$ . Tím je věta dokázána.  $\square$

Význam bodů 1. a 2. věty 1.9 je, že pojem báze vektorového prostoru je ekvivalentní pojmu maximální nezávislé soustavy vektorů. Bez důkazu uvedeme následující větu.

### **Věta 1.10. Základní věta o bázích vektorového prostoru**

Předpokládejme, že  $\mathbb{V} = (V, +)$  je vektorový prostor, který má bázi  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Pak platí:

1. Z vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ), takových, že  $V = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l)$  lze vybrat bázi vektorového prostoru  $\mathbb{V}$  (tudíž  $k \leq l$ ).
2. Je-li  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_h$  ( $h \in \mathbb{N}$ ) báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ , pak  $h = k$ . Tedy všechny báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$  mají stejný počet prvků.
3. Každou soustavu  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$  ( $s \in \mathbb{N}$ ) lineárně nezávislých vektorů vektorového prostoru  $\mathbb{V}$  lze doplnit na bázi tohoto prostoru. Tudíž  $s \leq k$  a existují  $\mathbf{x}_{s+1}, \dots, \mathbf{x}_k \in V$  tak, že  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  je báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ .

### **Definice 1.11. Lineární transformace**

Zobrazení  $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  nazveme lineární transformací na  $\mathbb{V}$  jestliže pro každé prvky  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  platí:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \\ T(r \cdot \mathbf{u}) &= r \cdot T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Bez důkazu připomeneme, že na vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^n$  jsou lineární transformace realizovány maticemi  $n \times n$ .

### **Definice 1.12. Matice transformace**

Nechť  $\mathbb{V}$  je vektorový prostor nad reálnými čísly a  $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  lineární transformace

vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ , pak pro pevně zvolenou bázi  $\mathcal{B}$  prostoru  $\mathbb{V}$  říkáme, že matice  $[T]_{\mathcal{B}}$  je matice lineární transformace v bázi  $\mathcal{B}$  právě tehdy, když

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Definici matice transformace zobecníme tak, že na  $\mathbb{V}$  zvolíme dvě báze  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$  a zavedeme matici  $[T]_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  splňující:

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}.$$

Na vstupu máme tedy vektor  $\mathbf{v}$  v souřadnicích báze  $\mathcal{C}$ , který zleva násobíme maticí transformace  $[T]_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ .

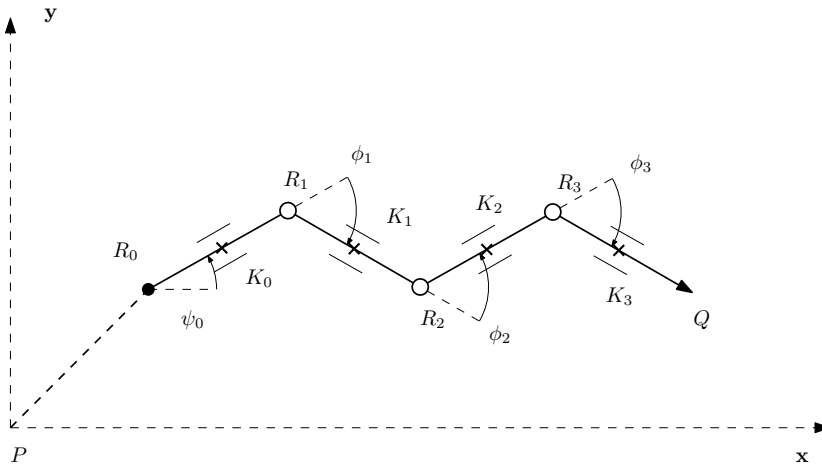
**Poznámka 1.13.** Připomeňme ještě bez důkazu, že sloupce matice transformace  $[T]_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  z definice 1.12 jsou tvořeny vektory báze  $\mathcal{C}$  vyjádřené v souřadnicích báze  $\mathcal{B}$ .

**Poznámka 1.14.** Dále budeme uvažovat speciální případ matice transformace, kdy transformací je identita. Tuto matici transformace nazveme *matice přechodu*.

## 1.2. Metoda pohyblivého repéru

Metoda pohyblivého repéru slouží k popisu robotického systému, tvořeného kinematickými prvky, které jsou pohyblivými klouby spojeny v kinematické dvojice a řetězce. Tento postup budeme v následujícím odstavci aplikovat na náš systém robotického hada.

**Definice 1.15.** Nechť  $P_i \in \mathcal{A}_3$  a  $\mathcal{B} = \{x_i, y_i, z_i\}$  je báze vektorového prostoru, potom řekneme, že  $B_i = (P_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$  je repérem v afinním prostoru  $\mathcal{A}_3$ .



Obrázek 1.1: Metoda pohyblivého repéru

Zvolíme označení repérů:

$$B_G = (P, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G), \quad B_0 = (R_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0), \quad B_1 = (R_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1),$$

$$B_2 = (R_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2), \quad B_3 = (R_3, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_3),$$

kde  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^3$ . Písmeny  $R_i$  budeme označovat počáteční body repérů  $B_i$ . Úhel  $\psi_0$  je úhel natočení repéru  $B_0$  vůči repéru  $B_G$ , a tedy i úhel natočení celého systému vůči

globálnímu systému souřadnic. Úhel  $\phi_i$  je úhel vzájemného natočení článku vůči článku sousedícímu. Písmeny  $K_i$  budeme označovat body, ve kterých se nacházejí kolečka.

Budeme uvažovat obecnou délku článků mezi dvěma uzly  $l_i$ . Dále uvažujeme, že všechny články jsou stejně dlouhé:  $l_i = l$  pro  $i = 1$  až 4. V našem kinematickém řetězci se vyskytují pouze cylindrické kinematické dvojice, které vyjadřují otočení kolem osy  $z$ , proto volíme  $\mathbf{z}_i = \mathbf{z} = (0, 0, 1)^T$ .

Z důvodu zjednodušení budeme v dalším textu využívat pro vyjádření goniometrických funkcí  $\sin$  a  $\cos$  zkrácený zápis písmeny  $s$  a  $c$ , tedy  $s(\alpha) = \sin(\alpha)$  a obdobně  $c(\alpha) = \cos(\alpha)$ . Matici přechodu  $[A]_{B_i \rightarrow B_{i-1}}$  budeme zkráceně označovat  $\mathbf{A}_{i \rightarrow i-1}$ . Tedy matice přechodu mezi pootočenými bázemi jsou v našem případě:

$$\mathbf{A}_{3 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} c(\phi_3) & -s(\phi_3) & 0 \\ s(\phi_3) & c(\phi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} c(\phi_2) & -s(\phi_2) & 0 \\ s(\phi_2) & c(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{0 \rightarrow G} = \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Písmenem  $Q$  označujeme řízený bod (hlavu hada), písmeny  $R_i$ , kde  $0 \leq i \leq 3$ , označujeme počátky souřadných systémů jednotlivých repérů. Polohou bodu  $Q$  (hlavy) v souřadném systému  $B_i$  chápeme vektor  $[R_i Q]_{B_i}$ . Konkrétně v souřadném systému  $B_3$  je poloha určena vektorem

$$[R_3 Q]_{B_3} = (l, 0, 0)^T.$$

Nyní vyjádříme polohu  $[R_2 Q]_{B_2}$  v repéru  $B_2$ :

$$[R_2 Q]_{B_2} = [R_2 R_3]_{B_2} + [R_3 Q]_{B_2} = (l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{3 \rightarrow 2}(l, 0, 0)^T.$$

Potom vyjádříme polohu  $[R_1 Q]_{B_1}$  v repéru  $B_1$ :

$$[R_1 Q]_{B_1} = [R_1 R_2]_{B_1} + [R_2 R_3]_{B_1} + [R_3 Q]_{B_1} = (l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1}(l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{A}_{3 \rightarrow 2}(l, 0, 0)^T.$$

Pak polohu  $[R_0 Q]_{B_0}$  v repéru  $B_0$ :

$$[R_0 Q]_{B_0} = [R_0 R_1]_{B_0} + [R_1 R_2]_{B_0} + [R_2 R_3]_{B_0} + [R_3 Q]_{B_0} = (l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}(l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1}(l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{A}_{3 \rightarrow 2}(l, 0, 0)^T.$$

A konečně polohu  $[PQ]_{B_G}$  v globálním repéru  $B_G$ :

$$[PQ]_{B_G} = [PR_0]_{B_G} + [R_0 R_1]_{B_G} + [R_1 R_2]_{B_G} + [R_2 R_3]_{B_G} + [R_3 Q]_{B_G} = (x_0, y_0, z_0)^T + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}(l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G} \mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}(l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G} \mathbf{A}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1}(l, 0, 0)^T + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G} \mathbf{A}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{A}_{3 \rightarrow 2}(l, 0, 0)^T.$$

Když pak poslední rovnost rozepíšeme maticově, dostaneme:

$$[PQ]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_2) & -s(\phi_2) & 0 \\ s(\phi_2) & c(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_2) & -s(\phi_2) & 0 \\ s(\phi_2) & c(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \quad \begin{pmatrix} c(\phi_3) & -s(\phi_3) & 0 \\ s(\phi_3) & c(\phi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Výše uvedená rovnost je vyjádřením polohy bodu  $Q$  hlavy hada vůči počátku globálního souřadného systému  $P$ . Vyjdeme z této myšlenky a pomocí metody pohyblivého repéru vyjádříme polohu jednotlivých koleček vůči  $P$  v souřadnicích  $B_G$ . Body, v nichž se nachází jednotlivá kolečka, označíme písmeny  $K_i$  pro  $0 \leq i \leq 3$ . V dalším využijeme skutečnosti, že se kolečka nacházejí uprostřed článků, tedy jejich vzdálenost od jednotlivých kloubů bude  $\frac{l}{2}$ . Pro kolečko  $K_0$ , které se nachází na posledním článku dostáváme:

$$[PK_0]_{B_G} = [PR_0]_{B_G} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}[R_0K_0]_{B_0}.$$

Když tuto rovnost vyjádříme maticově, dostaneme:

$$[PK_0]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Provedeme násobení matice  $\mathbf{A}_{0 \rightarrow G}$  a vektoru  $[R_0K_0]_{B_0}$  a dostaneme:

$$[PK_0]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} c(\psi_0) \\ s(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obdobně budeme postupovat pro kolečko  $K_1$  nacházející se na předposledním článku. Jeho poloha vůči  $P$  bude:

$$[PK_1]_{B_G} = [PR_0]_{B_G} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}[R_0R_1]_{B_0} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}[R_1K_1]_{B_1}.$$

Když tuto rovnost vyjádříme maticově, dostaneme:

$$\begin{aligned}
[PK_1]_{B_G} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

V rovnosti opět provedeme násobení:

$$[PK_1]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0)c(\phi_1) - s(\psi_1)s(\phi_1) & -c(\psi_0)s(\phi_1) - s(\psi_0)c(\phi_1) & 0 \\ s(\psi_0)c(\phi_1) + c(\psi_0)s(\phi_1) & -s(\psi_1)s(\phi_1) + c(\psi_0)c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro další úpravu využijeme goniometrických vzorců:

$$c(\alpha + \beta) = c(\alpha)c(\beta) - s(\alpha)s(\beta) \quad (1.1)$$

a

$$s(\alpha + \beta) = s(\alpha)c(\beta) + c(\alpha)s(\beta). \quad (1.2)$$

Po aplikaci goniometrických vzorců 1.1, 1.2 a roznásobení dostáváme:

$$[PK_1]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} c(\psi_0) \\ s(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} c(\psi_0 + \phi_1) \\ s(\psi_0 + \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro kolečko  $K_2$  dostáváme:

$$[PK_2]_{B_G} = [PR_0]_{B_G} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}[R_0 R_1]_{B_0} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}[R_1 R_2]_{B_1} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}\mathbf{A}_{2 \rightarrow 1}[R_2 K_2]_{B_2}.$$

Rovnost opět rozepíšeme maticově:

$$[PK_2]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_2) & -s(\phi_2) & 0 \\ s(\phi_2) & c(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnost opět roznásobíme a za využití goniometrických vzorců 1.1 a 1.2 dostáváme:

$$[PK_2]_{B_G} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} c(\psi_0) \\ s(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} c(\psi_0 + \phi_1) \\ s(\psi_0 + \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A konečně pro kolečko  $K_3$ , které se nachází na prvním článku mechanismu máme:

$$[PK_3]_{B_G} = [PR_0]_{B_G} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}[R_0 R_1]_{B_0} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}[R_1 R_2]_{B_1} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}\mathbf{A}_{2 \rightarrow 1}[R_2 R_3]_{B_2} + \mathbf{A}_{0 \rightarrow G}\mathbf{A}_{1 \rightarrow 0}\mathbf{A}_{2 \rightarrow 1}\mathbf{A}_{3 \rightarrow 2}[R_3 K_3]_{B_3}.$$

Jestliže rovnost přepíšeme maticově dostaneme:

$$\begin{aligned}
[PK_3]_{B_G} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_2) & -s(\phi_2) & 0 \\ s(\phi_2) & c(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} c(\psi_0) & -s(\psi_0) & 0 \\ s(\psi_0) & c(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_1) & -s(\phi_1) & 0 \\ s(\phi_1) & c(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\phi_2) & -s(\phi_2) & 0 \\ s(\phi_2) & c(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} c(\phi_3) & -s(\phi_3) & 0 \\ s(\phi_3) & c(\phi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dále budeme postupovat analogicky jako v předchozích případech a po roznásobení a aplikací vzorců 1.1 a 1.2 dostaneme:

$$\begin{aligned}
[PK_3]_{B_G} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} c(\psi_0) \\ s(\psi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} c(\psi_0 + \phi_1) \\ s(\psi_0 + \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Získané vztahy vyjadřují polohu bodu  $i$  - tého kolečka vzhledem ke globálnímu souřadnému systému. Naší úlohou je zabývat se teorií řízení pohybu mechanismu v rovině, výsledné výrazy jsou ve tvaru, ve kterém je  $z$  - ová souřadnice vždy nulová, výsledné rovnice můžeme zjednodušeně zapsat v  $\mathbb{R}^2$  následujícím způsobem:

$$[PK_0]_{B_G} = (x_{0K}, y_{0K}) = (x_0, y_0)^T + \frac{l}{2}(c(\psi_0), s(\psi_0))^T. \quad (1.3)$$

$$[PK_1]_{B_G} = (x_{1K}, y_{1K}) = (x_0, y_0)^T + l(c(\psi_0), s(\psi_0))^T + \frac{l}{2}(c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1))^T. \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
[PK_2]_{B_G} &= (x_{2K}, y_{2K}) = (x_0, y_0)^T + l(c(\psi_0), s(\psi_0))^T + l(c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1))^T \\
&\quad + \frac{l}{2}(c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2))^T.
\end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
[PK_3]_{B_G} &= (x_{3K}, y_{3K}) = (x_0, y_0)^T + l(c(\psi_0), s(\psi_0))^T + l(c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1))^T \\
&\quad + l(c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2))^T \\
&\quad + \frac{l}{2}(c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3))^T.
\end{aligned} \quad (1.6)$$

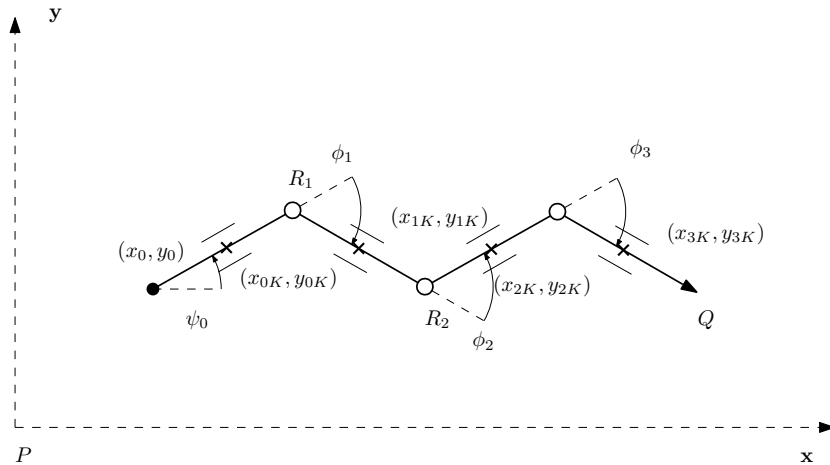
Tyto rovnice nazveme *holonomními rovnicemi* robotického systému. V následujícím textu s nimi budeme nadále pracovat.

## 2. Diferenciální kinematika

Teoretické podklady pro tuto kapitolu vztahující se k neholonomním mechanismům je možné najít v [1]. Více k teorii řešení soustavy lineárních rovnic je možné nalézt např. v [2].

### 2.1. Holonomní rovnice

Pro následující výpočty provedeme další zjednodušení. Budeme uvažovat, že délka článku je  $l = 2$ .



Obrázek 2.1: Mechanismus

Zopakujeme, že vyjádření polohy jednotlivých koleček v čase vzhledem k hlavě hada vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
 (x_{0K}, y_{0K}) &= (x_0, y_0) + (c(\psi_0), s(\psi_0)), \\
 (x_{1K}, y_{1K}) &= (x_0, y_0) + 2(c(\psi_0), s(\psi_0)) + (c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1)), \\
 (x_{2K}, y_{2K}) &= (x_0, y_0) + 2(c(\psi_0), s(\psi_0)) + 2(c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1)) \\
 &\quad + (c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)), \\
 (x_{3K}, y_{3K}) &= (x_0, y_0) + 2(c(\psi_0), s(\psi_0)) + 2(c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1)) + 2(c(\psi_0 + \phi_1 \\
 &\quad + \phi_2), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)) + (c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)).
 \end{aligned}$$

Časovou derivací polohy kolečka získáme vektor rychlosti kolečka:

$$\begin{aligned}
 (\dot{x}_{0K}, \dot{y}_{0K}) &= (\dot{x}_0, \dot{y}_0) + \dot{\psi}_0(-s(\psi_0), c(\psi_0)), \\
 (\dot{x}_{1K}, \dot{y}_{1K}) &= (\dot{x}_0, \dot{y}_0) + 2\dot{\psi}_0(-s(\psi_0), c(\psi_0)) + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)(-s(\psi_0 + \phi_1), c(\psi_0 + \phi_1)), \\
 (\dot{x}_{2K}, \dot{y}_{2K}) &= (\dot{x}_0, \dot{y}_0) + 2\dot{\psi}_0(-s(\psi_0), c(\psi_0)) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)(-s(\psi_0 + \phi_1), c(\psi_0 + \phi_1)) \\
 &\quad + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)(-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)), \\
 (\dot{x}_{3K}, \dot{y}_{3K}) &= (\dot{x}_0, \dot{y}_0) + 2\dot{\psi}_0(-s(\psi_0), c(\psi_0)) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)(-s(\psi_0 + \phi_1), c(\psi_0 + \phi_1)) \\
 &\quad + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)(-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)) \\
 &\quad + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3)(-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3), c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)).
 \end{aligned}$$

V dalším budeme také využívat normálové vektory koleček, které získáme ze směrových vektorů, které vypadají následovně,

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_0 &= (c(\psi_0), s(\psi_0)), \\ \mathbf{s}_1 &= (c(\psi_0 + \phi_1), s(\psi_0 + \phi_1)), \\ \mathbf{s}_2 &= (c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)), \\ \mathbf{s}_3 &= (c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3), s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)).\end{aligned}$$

Z nich odvozené normálové vektory mají tedy tento tvar,

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_0 &= (-s(\psi_0), c(\psi_0)), \\ \mathbf{n}_1 &= (-s(\psi_0 + \phi_1), c(\psi_0 + \phi_1)), \\ \mathbf{n}_2 &= (-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2), c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)), \\ \mathbf{n}_3 &= (-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3), c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)).\end{aligned}$$

## 2.2. Podmínka, neholonomní rovnice

Pro každé kolečko požadujeme, aby nedocházelo k jeho smýkání. Vektor rychlosti pohybu kolečka musí být vždy kolmý k normálovému vektoru kolečka. Podmínku matematicky zapíšeme s pomocí skalárního součinu. Označme  $\mathbf{v}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$  rychlost  $i$  - tého kolečka a  $\mathbf{n}_i = (n_{ix}, n_{iy})$   $i$  - tý normálový vektor. Potom platí:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i = \dot{x}_i n_{ix} + \dot{y}_i n_{iy} = 0. \quad (2.1)$$

Dosazením do rovnice (2.1) pro kolečko posledního článku získáváme:

$$(\dot{x}_0 - \dot{\psi}_0 s(\psi_0))(-s(\psi_0)) + (\dot{y}_0 + \dot{\psi}_0 c(\psi_0))c(\psi_0) = 0,$$

roznásobením potom dostaneme:

$$-\dot{x}_0 s(\psi_0) + \dot{\psi}_0 s^2(\psi_0) + \dot{y}_0 c(\psi_0) + \dot{\psi}_0 c^2(\psi_0) = 0.$$

Pro úpravu získaného výrazu využijeme goniometrické jedničky:

$$c^2(\alpha) + s^2(\alpha) = 1. \quad (2.2)$$

Po úpravě získáme:

$$-\dot{x}_0 s(\psi_0) + \dot{y}_0 c(\psi_0) + \dot{\psi}_0 = 0. \quad (2.3)$$

Dosazením do rovnice (2.1) pro druhé kolečko získáváme:

$$\begin{aligned}(\dot{x}_0 - 2\dot{\psi}_0 s(\psi_0) - 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)s(\psi_0 + \phi_1))(-s(\psi_0 + \phi_1)) \\ + (\dot{y}_0 + 2\dot{\psi}_0 c(\psi_0) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\psi_0 + \phi_1))c(\psi_0 + \phi_1) = 0.\end{aligned}$$

Provedeme roznásobení:

$$\begin{aligned}-\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1) + 2\dot{\psi}_0 s(\psi_0)s(\psi_0 + \phi_1) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)s^2(\psi_0 + \phi_1) \\ + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1) + 2\dot{\psi}_0 c(\psi_0)c(\psi_0 + \phi_1) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c^2(\psi_0 + \phi_1).\end{aligned}$$

Zde se pro další úpravy využije goniometrického vzorce:

$$c(\alpha - \beta) = c(\alpha)c(\beta) + s(\alpha)s(\beta) \quad (2.4)$$

a goniometrické jedničky. S pomocí vzorců (2.2) a (2.4) získáváme:

$$-\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1) + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1) + 2\dot{\psi}_0 c(\phi_1) + \dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 = 0. \quad (2.5)$$

Obdobně pro třetí kolečko:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_0 - 2\dot{\psi}_0 s(\psi_0) - 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)s(\psi_0 + \phi_1) - (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2))(-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)) \\ + (\dot{y}_0 + 2\dot{\psi}_0 c(\psi_0) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\psi_0 + \phi_1) \\ + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2))(c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)) = 0. \end{aligned}$$

Po roznásobení:

$$\begin{aligned} -\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + 2\dot{\psi}_0 s(\psi_0)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)s(\psi_0 + \phi_1)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)s^2(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + 2\dot{\psi}_0 c(\psi_0)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\psi_0 + \phi_1)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)c^2(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) = 0. \end{aligned}$$

Využijeme vzorec (2.2) a (2.4) a dostáváme:

$$\begin{aligned} -\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + 2\dot{\psi}_0 c(\phi_1 + \phi_2) + \\ 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\phi_2) + \dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A pro čtvrté kolečko:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_0 - 2\dot{\psi}_0 s(\psi_0) - 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)s(\psi_0 + \phi_1) - 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ - (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3))(-s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)) \\ + (\dot{y}_0 + 2\dot{\psi}_0 c(\psi_0) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\psi_0 + \phi_1) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ + (\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3))(c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)) = 0. \end{aligned}$$

Po roznásobení:

$$\begin{aligned} -\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + 2\dot{\psi}_0 s(\psi_0)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)s(\psi_0 + \phi_1)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + ((\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3))s^2(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + 2\dot{\psi}_0 c(\psi_0)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\psi_0 + \phi_1)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + ((\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3))c^2(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = 0. \end{aligned}$$

S využitím vzorce (2.2) a (2.4) dostáváme:

$$\begin{aligned} -\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + 2\dot{\psi}_0 c(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1)c(\phi_2 + \phi_3) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)c(\phi_3) + \dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.3. Řešení soustavy

Na získané rovnice 2.3, 2.5, 2.6, 2.7 můžeme nahlížet při konkrétní volbě  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_0, x_0, y_0$  jako na soustavu čtyř lineárních rovnic o šesti neznámých. Z rovnic tedy vyjádříme neznámé derivace úhlů natočení jednotlivých článků  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$  a derivaci úhlu celkového natočení  $\dot{\psi}_0$  v závislosti na zbylých dvou neznámých, derivacích polohy  $\dot{x}$  a  $\dot{y}$ . Dostáváme tak soustavu rovnic:

$$\dot{\psi}_0 = \dot{x}_0 s(\psi_0) - \dot{y}_0 c(\psi_0),$$

$$\dot{\psi}_0(2c(\phi_1) + 1) + \dot{\phi}_1 = \dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1) - \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1),$$

$$\dot{\psi}_0(2c(\phi_1 + \phi_2) + 2c(\phi_2) + 1) + \dot{\phi}_1(2c(\phi_2) + 1) + \dot{\phi}_2 = \dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) - \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2),$$

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_0(2c(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + 2c(\phi_2 + \phi_3) + 2c(\phi_3) + 1) + \dot{\phi}_1(2c(\phi_2 + \phi_3) + 2c(\phi_3) + 1) \\ &+ \dot{\phi}_2(2c(\phi_3) + 1) + \dot{\phi}_3 = \dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) - \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3). \end{aligned}$$

Tuto soustavu budeme dále nazývat *soustava neholonomních rovnic*. Soustavu můžeme zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2c(\phi_1) + 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2c(\phi_1 + \phi_2) + 2c(\phi_2) + 1 & 2c(\phi_2) + 1 & 1 & 0 \\ 2c(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + 2c(\phi_2 + \phi_3) + 2c(\phi_3) + 1 & 2c(\phi_2 + \phi_3) + 2c(\phi_3) + 1 & 2c(\phi_3) + 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s(\psi_0) & -c(\psi_0) \\ s(\psi_0 + \phi_1) & -c(\psi_0 + \phi_1) \\ s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) & -c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) & -c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix},$$

nebo

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 2c(\dots) + 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 2c(\dots) + 2c(\dots) + 1 & 2c(\dots) + 1 & 1 & 0 & c_1 & c_2 \\ 2c(\dots) + 2c(\dots) + 2c(\dots) + 1 & 2c(\dots) + 2c(\dots) + 1 & 2c(\dots) + 1 & 1 & d_1 & d_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = 0,$$

kde písmeny  $a_1$  až  $d_1$  (resp.  $a_2$  až  $d_2$ ) jsou označeny koeficienty nacházející se u  $\dot{x}_0$  (resp.  $\dot{y}_0$ ).

Hodnost matice soustavy rovnic je  $r(A) = 4$ , hodnost rozšířené matice soustavy je  $r(\bar{A}) = 4$  a počet neznámých  $n = 6$ , tedy  $r(A) = r(\bar{A}) < n$  a podle Frobeniovy věty (viz [2]) platí, že soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na  $n - r(A) = 2$  parametrech. Zavedeme parametrizaci  $\dot{x}_0 = r$  a  $\dot{y}_0 = s$  a soustavu vyřešíme vůči neznámým  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3, \dot{\psi}_0$ . Jestli vyřešenou soustavu opět vyjádříme maticově, získáváme:

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & f_1 & f_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g_1 & g_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k_1 & k_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = 0,$$

kde písmeny  $f_1$  až  $k_1$  (resp.  $f_2$  až  $k_2$ ) jsou označeny koeficienty nacházející se u  $\dot{x}_0$  (resp.  $\dot{y}_0$ ).

Řešení můžeme zapsat vektorově ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = r \cdot \mathbf{g}_1 + s \cdot \mathbf{g}_2,$$

kde:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} s(\psi_0) \\ -2c(\phi_1)s(\psi_0) + s(\psi_0 + \phi_1) - s(\psi_0) \\ 4c(\phi_1)c(\phi_2)s(\psi_0) - 2s(\psi_0 + \phi_1)c(\phi_2) + 2c(\phi_1)s(\psi_0) \\ -2c(\phi_1 + \phi_2)s(\psi_0) - s(\psi_0 + \phi_1) + s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ -4c(\phi_1)c(\phi_2)s(\psi_0) + 4c(\phi_2 + \phi_3)c(\phi_1)s(\psi_0) + 4c(\phi_3)s(\psi_0 + \phi_1)c(\phi_2) \\ +4c(\phi_3)c(\phi_1 + \phi_2)s(\psi_0) - 8c(\phi_3)c(\phi_2)c(\phi_1)s(\psi_0) - 2c(\phi_3)s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ -2c(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)s(\psi_0) + 2s(\psi_0 + \phi_1)c(\phi_2) + 2c(\phi_1 + \phi_2)s(\psi_0) \\ -s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) + s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_0) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} c(\psi_0) \\ 2c(\phi_1)c(\psi_0) - c(\psi_0 + \phi_1) + c(\psi_0) \\ -4c(\phi_1)c(\phi_2)c(\psi_0) + 2c(\psi_0 + \phi_1)c(\phi_2) - 2c(\phi_1)c(\psi_0) \\ +2c(\phi_1 + \phi_2)c(\psi_0) + c(\psi_0 + \phi_1) - c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ 2c(\phi_1)c(\psi_0) - c(\psi_0 + \phi_1) + c(\psi_0) \\ 4c(\phi_1)c(\phi_2)c(\psi_0) - 4c(\phi_2 + \phi_3)c(\phi_1)c(\psi_0) - 4c(\phi_3)c(\psi_0 + \phi_1)c(\phi_2) \\ -4c(\phi_3)c(\phi_1 + \phi_2)c(\psi_0) + 8c(\phi_3)c(\phi_2)c(\phi_1)c(\psi_0) + 2c(\phi_3)c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) \\ +2c(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)c(\psi_0) - 2s(\psi_0 + \phi_1)c(\phi_2) - 2c(\phi_1 + \phi_2)c(\psi_0) \\ +c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2) - c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_0) \\ c(\psi_0) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

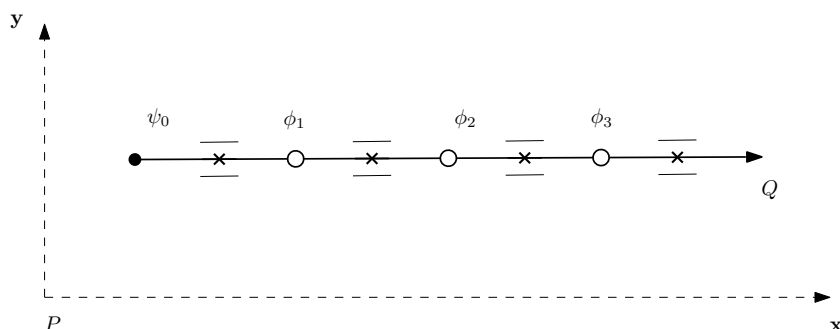
Vektorová pole  $g_1$  a  $g_2$  budeme nazývat *vstupní vektorová pole*.

Řešení soustavy bylo nalezeno s pomocí software Maple 17. Soubor `Solve_system.mw` s řešením se nachází na CD v příloze.

## 2.4. Interpretace řešení, příklady

V této kapitole bude provedena interpretace řešení systému rovnic na příkladech. Budeme předpokládat, že se mechanismus hada nachází v konkrétní pozici, určené úhly natočení jednotlivých článků vůči sobě navzájem  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  a úhlem celkového natočení mechanismu  $\psi_0$ . Tyto hodnoty dosadíme do obecného řešení soustavy rovnic. Vyčíslením řešení získáme hodnoty, kterých musí  $\dot{\psi}_0, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$  a  $\dot{\phi}_3$  nabývat, aby se celý mechanismus pohyboval ve směru daného vstupního vektorového pole. Pro jednoduchost ve všech příkladech platí  $x_0 = y_0 = 0$ .

**Příklad 2.1.** V prvním příkladu budeme uvažovat, že se mechanismus nachází v pozici vyznačené na obrázku (2.2).



Obrázek 2.2: Natočení článků mechanismu v prostoru v příkladu 3.1

Všechny jeho články leží v jedné přímce, proto úhly natočení jednotlivých článků vůči sobě mají hodnoty:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0.$$

Dále je z obrázku patrné, že se mechanismus nachází v pozici rovnoběžné s osou  $x$ , tedy pro úhel celkového natočení  $\psi_0$  platí:

$$\psi_0 = 0.$$

Po dosazení úhlů  $\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  do řešení soustavy dostáváme:

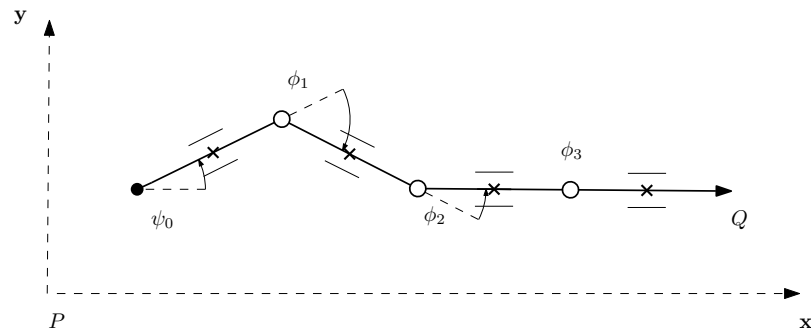
$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = t \cdot \mathbf{g}_1 + u \cdot \mathbf{g}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Získaný výsledek můžeme interpretovat následujícím způsobem. Vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  určují dva samostatné, nezávislé pohyby bodu hlavy hada. Vektor  $\mathbf{g}_1$  pohyb podél osy  $x$  a  $\mathbf{g}_2$  pohyb

podél osy  $y$ . Tedy, například, chceme-li mechanismus rozpohybovat určitou rychlostí podél osy  $y$ , bude parametr  $t = 0$  a  $\dot{\psi}_0, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$  budou rovny prvním čtyřem souřadnicím vektoru  $\mathbf{g}_2$ .

V prvním příkladu si můžeme povšimnout ještě jedné zajímavé skutečnosti. Pokud chceme, aby se mechanismus v daném uspořádání (viz 2.2) pohyboval kupředu podél osy  $x$ , bude  $u = 0$  a dostáváme, že vektor řešení je roven pouze vektoru  $\mathbf{g}_1$ , který má však na pozicích hodnot  $\dot{\psi}_0, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$  a  $\dot{\phi}_3$  nuly. To by znamenalo, že chceme-li pohybovat mechanismem v tomto uspořádání podél osy  $x$ , nesmíme články vůči sobě natáčet. Tento závěr je zřejmě v rozporu s principem funkce robotického hada, vzhledem k tomu, že nebudeme-li pohybovat klouby, nebude se pohybovat ani celý mechanismus.

**Příklad 2.2.** Ve druhém příkladu budeme uvažovat, že se mechanismus nachází v pozici uvedené na obrázku (2.3).



Obrázek 2.3: Natočení článků mechanismu v prostoru v příkladu 3.2

První dva jeho články leží v přímce, třetí je vůči druhému natočen o určitý úhel a čtvrtý vůči třetímu také. Výpočet je proveden pro následující hodnoty úhlů natočení jednotlivých článků:

$$\phi_1 = -\frac{\pi}{3}, \phi_2 = \frac{\pi}{6}, \phi_3 = 0.$$

Dále budeme uvažovat, že úhel celkového natočení  $\psi_0$  nabývá hodnoty:

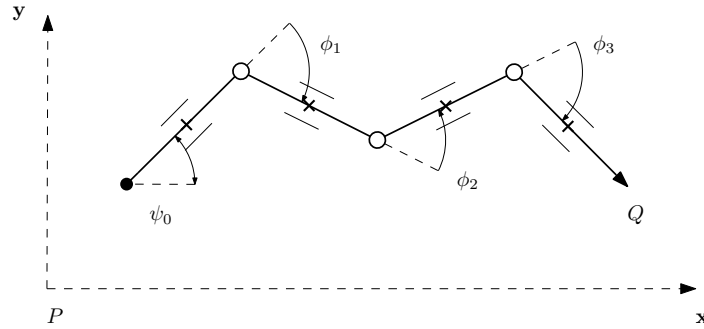
$$\psi_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Po dosazení úhlů  $\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  do řešení soustavy dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = t \cdot \mathbf{g}_1 + u \cdot \mathbf{g}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0.500 \\ -1.500 \\ 1.866 \\ -1.732 \\ 1.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -0.866 \\ 0.866 \\ 0.500 \\ -1.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}.$$

Interpretace výsledku je obdobná jako v příkladu (2.1) s tím rozdílem, že pro toto výchozí uspořádání mechanismu nedochází ke vzniku singularit, které by byly v rozporu s principem funkce robotického hada.

**Příklad 2.3.** V tomto příkladu budeme uvažovat, že se mechanismus nachází v pozici uvedené na obrázku (2.4).



Obrázek 2.4: Natočení článků mechanismu v prostoru v příkladu 3.3

Každé dva sousedící články svírají nenulový úhel a úhel celkového natočení mechanismu vůči souřadnému systému je taktéž nenulový. Výpočet je proveden pro následující hodnoty úhlů vzájemného natočení jednotlivých článků:

$$\phi_1 = -\frac{5\pi}{12}, \phi_2 = \frac{\pi}{3}, \phi_3 = -\frac{5\pi}{12}.$$

a pro úhel celkového natočení mechanismu:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Po dosazení úhlů  $\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  do řešení soustavy dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = t \cdot \mathbf{g}_1 + u \cdot \mathbf{g}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0.707 \\ -1.573 \\ 0.866 \\ 0.966 \\ 1.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0.207 \\ 1.500 \\ -1.259 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}.$$

I v tomto případě můžeme řešení interpretovat obdobně jako v příkladě (2.1). Podobně jako u příkladu (2.2), ani zde nevznikají žádné singularity.

## 3. Teorie řízení

Tato kapitola vychází převážně z knihy [1], kde lze nalézt mnoho podrobností k teorii Lieových algeber. Významným zdrojem informací se stala taktéž publikace [7].

### 3.1. Lieovy závorky

Označme  $G = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$  množinu vstupních vektorových polí, získaných řešením soustavy rovnic 2.3, 2.5, 2.6, 2.7. Potom platí, že říditelnost symetrických afinních systémů je úplně určena Lieovou algebrou říditelnosti, což je nejmenší Lieova algebra, která obsahuje  $G$ . Lieovu algebru říditelnosti budeme označovat symbolem  $\mathcal{G}$  a získáme ji pomocí operace Lieovy závorky.

**Definice 3.1.** Nechť  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  jsou vektorová pole na  $\mathcal{A}_n$ , potom operaci  $[\cdot, \cdot] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definovanou podle předpisu:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](q) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q} \mathbf{f}(q) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q} \mathbf{g}(q), \quad (3.1)$$

nazveme Lieova závorka vektorových polí.

**Věta 3.2. Vlastnosti Lieovy závorky vektorových polí:**

Nechť  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  a  $\mathbf{h}$  jsou vektorová pole na  $\mathcal{A}_n$ , pak operace Lieovy závorky má následující vlastnosti:

1. *Antisymetrie:*

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}].$$

2. *Jakobiho identita:*

$$[\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{h}]] + [\mathbf{h}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] + [\mathbf{g}, [\mathbf{h}, \mathbf{f}]] = 0.$$

Nyní vysvětlíme algoritmus výpočtu Lieových závorek pomocí předpisu 3.1 pro vektorová pole dimenze  $n = 6$ . Pro tyto účely budeme uvažovat vektorová pole  $\mathbf{t}, \mathbf{u}$  na  $\mathcal{A}_6$ :

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix},$$

jejichž souřadnice jsou funkcemi proměnných  $\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, x_0$  a  $y_0$ .

Nejprve vyčíslíme jedno vektorové pole na funkcích druhého:

$$\mathbf{t}(u_i) = t_1 \frac{\partial u_i}{\partial \psi_0} + t_2 \frac{\partial u_i}{\partial \phi_1} + t_3 \frac{\partial u_i}{\partial \phi_2} + t_4 \frac{\partial u_i}{\partial \phi_3} + t_5 \frac{\partial u_i}{\partial x_0} + t_6 \frac{\partial u_i}{\partial y_0}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(t_i) = u_1 \frac{\partial t_i}{\partial \psi_0} + u_2 \frac{\partial t_i}{\partial \phi_1} + u_3 \frac{\partial t_i}{\partial \phi_2} + u_4 \frac{\partial t_i}{\partial \phi_3} + u_5 \frac{\partial t_i}{\partial x_0} + u_6 \frac{\partial t_i}{\partial y_0}. \quad (3.3)$$

Jednotlivé souřadnice vektorového pole  $\mathbf{v} = [\mathbf{t}, \mathbf{u}]$  získáme podle předpisu 3.1 jako rozdíl výrazů  $\mathbf{t}(u_i)$  a  $\mathbf{u}(t_i)$ , tedy  $\mathbf{v}_i = \mathbf{t}(u_i) - \mathbf{u}(t_i)$  pro  $1 \leq i \leq 6$ . Výsledné vektorové pole  $\mathbf{v}$  pak vypadá následovně:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(u_1) - \mathbf{u}(t_1) \\ \mathbf{t}(u_2) - \mathbf{u}(t_2) \\ \mathbf{t}(u_3) - \mathbf{u}(t_3) \\ \mathbf{t}(u_4) - \mathbf{u}(t_4) \\ \mathbf{t}(u_5) - \mathbf{u}(t_5) \\ \mathbf{t}(u_6) - \mathbf{u}(t_6) \end{pmatrix}.$$

Tímto způsobem získáme z  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  vektorové pole  $\mathbf{g}_3 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ , dále potom  $\mathbf{g}_4 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3]$  a  $\mathbf{g}_5 = [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$  a nakonec  $\mathbf{g}_6 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_4]$ ,  $\mathbf{g}_7 = [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_4]$ ,  $\mathbf{g}_8 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_5]$  a  $\mathbf{g}_9 = [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_5]$ . Tato vektorová pole budeme nazývat *výsledkem operace Lieova závorka*.

Dalším krokem k řízení mechanismu je sestavit bázi algebry říditelnosti z množiny vektorových polí  $B = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_7, \mathbf{g}_8, \mathbf{g}_9\}$ . V důsledku platnosti vlastností Lieovy závorky (viz 3.2) se však může stát, že některá pole z množiny  $B$  budou lineárně závislá. Abychom vybrali šestici lineárně nezávislých polí, budeme při výběru postupovat tak, aby vzniklá množina byla tzv. *báze Phillipa Halla*. Než se pustíme do samotné definice báze P. Halla, zadefinujme si nejprve, co rozumíme pod pojmem *délky* na vstupních vektorových polích a výsledcích operace Lieova závorka.

**Definice 3.3.** Mějme množinu vstupních vektorových polí  $G = \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ . Pojem délky na vstupních vektorových polích a výsledcích operace Lieova závorka zadefinujeme rekursivně následujícím způsobem:

$$|\mathbf{g}_i| = 1,$$

pro  $\mathbf{g}_i \in G$  a dále

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

kde  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  jsou výsledky Lieovy závorky, nebo vstupní vektorová pole.

### Definice 3.4. Báze Phillipa Halla

Nechť  $\mathcal{G}$  je Lieova algebra říditelnosti generovaná prvky  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ , potom bázi Phillipa Halla nazveme lineárně uspořádanou podmnožinu  $\mathcal{H} = \{I_j\}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) množiny  $\mathcal{G}$ , která splňuje následující podmínky:

1. Jestliže  $|\mathbf{g}_i| < |\mathbf{g}_j|$  pak  $\mathbf{g}_i \prec \mathbf{g}_j$ .
2. Pro  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\} \subset \mathcal{G}$  položíme  $\mathbf{g}_1 \prec \mathbf{g}_2 \prec \dots \prec \mathbf{g}_m$ .
3. Každý prvek  $\mathbf{g}_k \in \mathcal{H}$ , pro který platí  $|\mathbf{g}_k| = 2$  je tvořený Lieovou závorkou prvků  $[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j]$ , kde  $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \in \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$  a platí  $\mathbf{g}_i \prec \mathbf{g}_j$ .
4. Prvek  $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$ , pro který platí  $|\mathbf{g}_i| \geq 3$ , náleží do  $\mathcal{H}$ , jestliže  $\mathbf{g}_i = [\mathbf{g}_{i_1}, [\mathbf{g}_{i_2}, \mathbf{g}_{i_3}]]$ , kde  $\mathbf{g}_{i_1}, \mathbf{g}_{i_2}, \mathbf{g}_{i_3} \in \mathcal{H}$  a je splněno: (i)  $[\mathbf{g}_{i_2}, \mathbf{g}_{i_3}] \in \mathcal{H}$ , (ii)  $\mathbf{g}_{i_2} \prec \mathbf{g}_{i_3}$ , (iii)  $\mathbf{g}_{i_2} \prec \mathbf{g}_{i_1}$ , nebo  $\mathbf{g}_{i_2} = \mathbf{g}_{i_1}$  a (iv)  $\mathbf{g}_{i_1} \prec [\mathbf{g}_{i_2}, \mathbf{g}_{i_3}]$ .

Nyní si bez důkazu uvedeme následující větu, převzatou z publikace [1].

**Věta 3.5.** Množina vektorů  $\mathcal{H}$  splňující definici 3.4 tvoří bázi algebry říditelnosti  $\mathcal{G}$ .

Snadno se vidí, že platí následující tvrzení:

**Tvrzení 3.6.** Vektorové pole  $\mathbf{g}_8 = [\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]]]$  není prvkem báze Phillipa Halla podle definice 3.4.

*Důkaz.* Předpokládejme, že vektorové pole je prvkem báze Phillipa Halla pole podle definice 3.4. Na základě podmínky (iii) v 4. bodě definice máme  $\mathbf{g}_{i_2} \prec \mathbf{g}_{i_1}$ . V případě  $\mathbf{g}_8$  je  $\mathbf{g}_{i_2} = \mathbf{g}_2$  a  $\mathbf{g}_{i_1} = \mathbf{g}_1$ . Platí tedy  $\mathbf{g}_2 \prec \mathbf{g}_1$ . Podle 1. však máme  $\mathbf{g}_1 \prec \mathbf{g}_2$ , dostáváme tedy spor s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.  $\square$

**Tvrzení 3.7.** *Pro vektorové pole  $\mathbf{g}_8$  platí  $-\mathbf{g}_8 = \mathbf{g}_7$ .*

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} -\mathbf{g}_8 &= -[\mathbf{g}_1[[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]\mathbf{g}_2]] = -[[[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] + [[\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]], \mathbf{g}_2]] = \\ &= -[[\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]], \mathbf{g}_2] = [\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]]] = \mathbf{g}_7. \end{aligned}$$

$\square$

Ukázali jsme, že vektorové pole  $\mathbf{g}_8$  je násobkem vektorového pole  $\mathbf{g}_7$ . Snadno by se ověřilo, že všechny ostatní prvky množiny  $B$  již definici 3.4 vyhovují.

## 3.2. Řízení ve zvolených konfiguracích

V této části bude v konkrétních bodech konfiguračního prostoru provedeno vyčíslení vektorových polí  $\mathbf{g}_3$ ,  $\mathbf{g}_4$ ,  $\mathbf{g}_5$  a všech variant pole vzniklého Lieovou závorkou vstupních vektorových polí a vektorových polí  $\mathbf{g}_4$  a  $\mathbf{g}_5$ .

Ačkoliv jsme v předchozím odstavci dokázali, že pole  $\mathbf{g}_8$  netvoří bázi Phillipa Halla a pro konstrukci báze algebry říditelnosti  $\mathcal{G}$  jej nebudeme využívat, je v tomto odstavci provedeno jeho vyčíslení, a to především proto, abychom mohli pozorovat platnost tvrzení 3.7 na příkladech.

Výpočet výše uvedených Lieových závorek a jejich následné vyčíslení v konkrétních bodech konfiguračního prostoru bylo provedeno za pomoci software Maple 17. Soubory `Lie_Brackets_Ex_1`, `Lie_Brackets_Ex_2`, `Lie_Brackets_Ex_3` s výpočty se nachází na CD v příloze.

**Příklad 3.8.** Nejprve budeme opět uvažovat nejjednodušší příklad mechanismu v pozici, kdy všechny jeho články leží na jedné přímce. Toto uspořádání bylo vyobrazeno na obr. (2.2).

Jak již bylo řečeno dříve, úhly natočení jednotlivých článků vůči sobě mají v tomto případě hodnoty:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,$$

pro úhel celkového natočení  $\psi_0$  platí:

$$\psi_0 = 0$$

a  $x_0 = y_0 = 0$ . Po dosazení úhlů  $\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  do obecného předpisu vektorových polí vypočtených Lieovou závorkou dostáváme tyto hodnoty konkrétního vektoru vektorového pole  $\mathbf{g}_3$ :

$$\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} -1.000 \\ 0.000 \\ 4.000 \\ -8.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}.$$

Dále potom hodnoty dvou vektorů vektorových polí  $\mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5$ :

$$\mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -2.000 \\ -2.000 \\ -2.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_5 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}.$$

A konečně čtyři vektory vektorových polí  $\mathbf{g}_6, \mathbf{g}_7, \mathbf{g}_8, \mathbf{g}_9$ :

$$\mathbf{g}_6 = \begin{pmatrix} -1.000 \\ 4.000 \\ -4.000 \\ 4.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_7 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_8 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_9 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -4.000 \\ 48.000 \\ 128.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}.$$

Získané vektory uspořádáme do matice následujícím způsobem:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_7, \mathbf{g}_8, \mathbf{g}_9),$$

tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.000 & -1.000 & -1.000 & 1.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \\ 0.000 & 2.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 4.000 & 0.000 & 0.000 & -4.000 \\ 0.000 & -2.000 & 4.000 & -2.000 & 0.000 & -4.000 & 0.000 & 0.000 & 48.000 \\ 0.000 & 2.000 & -8.000 & -2.000 & 0.000 & 4.000 & 0.000 & 0.000 & 128.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice  $\mathbf{Q}$  je rovna dimenzi Lieovy algebry říditelnosti  $h(\mathbf{Q}) = 6$ . Matici  $\mathbf{Q}$  budeme dále zkoumat, a to následujícím způsobem. Budeme postupně vytvářet podmatice matice  $\mathbf{Q}$  tak, že vynecháme vždy  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{Q}$  (vektor  $\mathbf{g}_i$ ). Vzniklou matici označíme  $\mathbf{Q}_i$ , kde  $i$  je číslo vynechaného sloupce, a budeme zkoumat její hodnost. Jestliže bude hodnost matice  $\mathbf{Q}_i$  nižší nežli hodnost matice  $\mathbf{Q}$ , znamená to, že vynechané vektorové pole  $\mathbf{g}_i$  nelze v bázi algebry říditelnosti nahradit ostatními vektorovými poli  $\mathbf{g}_j$ . Výpočtem jsme získali následující hodnosti podmatic  $\mathbf{Q}_i$ :

$$\mathbf{Q}_1 = 5, \mathbf{Q}_2 = 5, \mathbf{Q}_3 = 5, \mathbf{Q}_4 = 5, \mathbf{Q}_5 = 6, \mathbf{Q}_6 = 5, \mathbf{Q}_7 = 6, \mathbf{Q}_8 = 6, \mathbf{Q}_9 = 5.$$

Z vypočtených hodnotí je zřejmé, že v daném uspořádání mechanismu musí být Lieova algebra říditelnosti generována vektorovými poli  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6$  a  $\mathbf{g}_9$ . Tento závěr je pozoruhodný a poukazuje na zvláštnost této konfigurace mechanismu.

**Příklad 3.9.** V druhém příkladu budeme uvažovat uspořádání vyobrazené na obrázku (2.3). Hodnoty úhlů vzájemného natočení článků vůči sobě jsou:

$$\phi_1 = -\frac{\pi}{3}, \phi_2 = \frac{\pi}{6}, \phi_3 = 0,$$

úhel celkového natočení systému má hodnotu:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{6}$$

a  $x_0 = y_0 = 0$ . Vektory získané dosazením výše uvedených úhlů do obecných předpisů vektorových polí dále budeme zapisovat do matice  $\mathbf{Q}$  obdobně, jako v předchozím příkladu.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_7, \mathbf{g}_8, \mathbf{g}_9),$$

tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.500 & -0.866 & -1.000 & 0.866 & 0.500 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \\ -1.500 & 0.866 & -2.000 & -3.464 & -6.000 & 5.500 & 9.526 & -9.526 & 15.500 \\ 1.866 & 0.500 & 5.598 & 1.366 & 5.964 & 10.129 & -27.874 & 27.874 & -16.593 \\ -1.732 & -1.000 & -9.562 & -18.482 & 3.325 & -56.127 & 1.782 & -1.782 & 23.863 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem jsme získali následující hodnoty podmatic  $\mathbf{Q}_i$ :

$$\mathbf{Q}_1 = 5, \mathbf{Q}_2 = 5, \mathbf{Q}_3 = 6, \mathbf{Q}_4 = 6, \mathbf{Q}_5 = 6, \mathbf{Q}_6 = 6, \mathbf{Q}_7 = 6, \mathbf{Q}_8 = 6, \mathbf{Q}_9 = 6.$$

Z hodnot hodnotí podmatic plyne, že báze algebry říditelnosti musí být v této konfiguraci mechanismu nezbytně tvořena vektorovými poli  $\mathbf{g}_1$  a  $\mathbf{g}_2$ .

**Příklad 3.10.** V třetím příkladu budeme uvažovat uspořádání vyobrazené na obrázku (2.4). Hodnoty úhlů vzájemného natočení článků vůči sobě jsou:

$$\phi_1 = -\frac{5\pi}{12}, \phi_2 = \frac{\pi}{3}, \phi_3 = -\frac{5\pi}{12},$$

pro úhel celkového natočení mechanismu platí:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{4}$$

a  $x_0 = y_0 = 0$ . Obdobně jako v předchozích dvou příkladech vytvoříme z vektorových polí vyčíslených v konkrétních bodech konfiguračního prostoru matici  $\mathbf{Q}$ , která v tomto případě vypadá následovně:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1.000 & -0.866 & -1.000 & 0.707 & 0.707 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \\ -1.500 & 0.866 & -1.932 & 0.109 & -6.814 & 18.556 & 7.142 & -7.142 & 21.521 \\ 1.866 & 0.500 & 3.748 & -2.379 & 8.445 & -9.397 & -23.738 & 23.738 & -16.467 \\ -1.732 & -1.000 & -0.869 & 13.939 & -7.932 & 45.143 & 2.207 & -2.207 & 4.573 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem jsme získali tyto hodnoty podmatic  $\mathbf{Q}_i$ :

$$\mathbf{Q}_1 = 5, \mathbf{Q}_2 = 5, \mathbf{Q}_3 = 6, \mathbf{Q}_4 = 6, \mathbf{Q}_5 = 6, \mathbf{Q}_6 = 6, \mathbf{Q}_7 = 6, \mathbf{Q}_8 = 6, \mathbf{Q}_9 = 6.$$

Z hodnot hodnotí podmatic opět dostáváme, že báze algebry říditelnosti musí být v této konfiguraci mechanismu nezbytně tvořena vektorovými poli  $\mathbf{g}_1$  a  $\mathbf{g}_2$ .

Třetí příklad je z hlediska uspořádání mechanismu v prostoru nejzajímavější, a proto se jím budeme zabývat podrobněji. Provedeme diskusi možných způsobů vytvoření báze

algebry říditelnosti. Na základě dříve odvozených závěrů víme, že vektorová pole  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  jsou pro řízení nezbytná, což ale není překvapivé, a to proto, že pouze díky těmto polím je koncový bod (hlava) mechanismu schopen se pohybovat ve směru os  $x$  a  $y$ . Druhou zřejmou skutečností, která napovídá, že jsou pole  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  nepostradatelná, je, že se jedná o pole vstupní, s pomocí kterých generujeme pole ostatní. Vektorové pole  $\mathbf{g}_3$  je nepostradatelné z podobných důvodů, jako pole  $\mathbf{g}_1$  a  $\mathbf{g}_2$ . Nejedná se již sice o pole vstupní, avšak je zřejmé, že pro získání polí vyšších řádů je nutné využít právě pole  $\mathbf{g}_3$ . Z definice 3.4 potom zřejmě plyne, že vektorová pole  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  a  $\mathbf{g}_3$  musí být nezbytně obsažena v bázi Phillipa Halla. Budeme tedy vždy uvažovat takovou bázi algebry říditelnosti, která tato tři vektorová pole obsahuje. Abychom získali bázi, je nutné přidat další tři vektorová pole. Uvažujme tedy následující množiny vektorových polí:  $B_1 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_7\}$ ,  $B_2 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_7, \mathbf{g}_9\}$ ,  $B_3 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6\}$ ,  $B_4 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_7\}$ ,  $B_5 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_9\}$ . Všechny možnosti obsahující vektorové pole  $\mathbf{g}_8$  jsme v důsledku tvrzení 3.6 a 3.7 neuvažovali.

Nyní ověříme, zda v konkrétním bodě konfiguračního prostoru diskutovaném v tomto příkladu mohou tyto množiny tvořit bázi algebry říditelnosti. Nechť  $\mathbf{B}_i$  je matice  $6 \times 6$ , jejíž sloupce jsou tvořeny vektory z odpovídající množiny  $B_i$  pro  $1 \leq i \leq 5$  tak, že každý vektor z této množiny je v matici obsažen právě jednou. Budeme zkoumat hodnotu těchto matic.

Pro matici  $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_7)$  dostáváme hodnotu  $h(\mathbf{B}_1) = 6$ , pro matici  $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_7, \mathbf{g}_9)$  dostáváme hodnotu  $h(\mathbf{B}_2) = 6$ , pro  $\mathbf{B}_3 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6)$  dostáváme hodnotu  $h(\mathbf{B}_3) = 6$ , pro  $\mathbf{B}_4 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_7)$  dostáváme hodnotu  $h(\mathbf{B}_4) = 6$  a konečně pro matici  $\mathbf{B}_5 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_9)$  dostáváme taktéž  $h(\mathbf{B}_5) = 6$ .

Ověřili jsme tedy, že všechny množiny mohou v tomto konkrétním bodě konfiguračního prostoru tvořit bázi algebry říditelnosti a můžeme zvolit libovolnou z nich. Tento výsledek bylo možné očekávat.

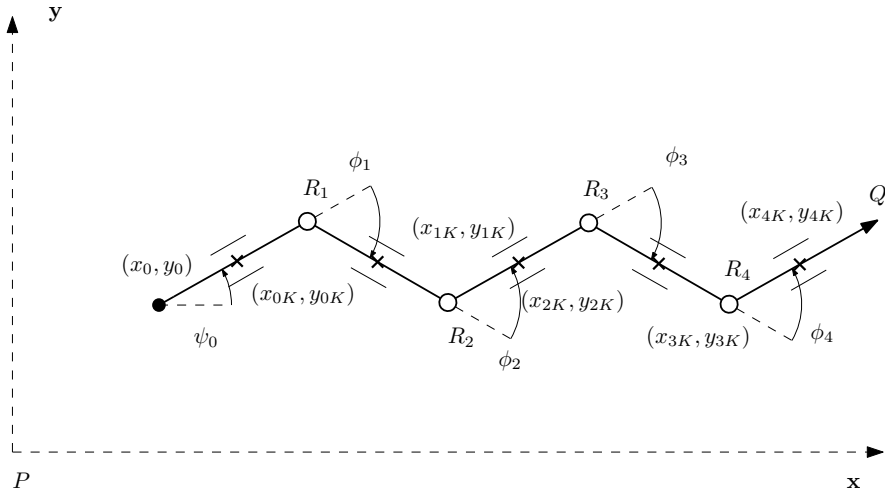
Dalším zajímavým tématem ke zkoumání by bylo určit metodu, na základě které by z množiny všech možnýchází algebry říditelnosti bylo možné vybrat takovou, která by byla jistým způsobem pro řízení nejvýhodnější. Naznačme nyní, jak bychom mohli při řešení této úlohy postupovat, uvážíme-li výsledky předchozích příkladů, především příkladu 3.8.

Hlavní myšlenkou této metody je zaručit říditelnost ve všech diskutovaných bodech konfiguračního prostoru. Příklad 3.8 je významný tím, že zkoumá mechanismus právě bodě, který je problematický. Zopakujme nyní, že výsledkem výše zmíněného příkladu je zcela konkrétní báze algebry říditelnosti, tvořená množinou vektorů  $B_5$ , která je v tomto prostorovém uspořádání mechanismu jediná možná. Jinými slovy, chceme-li zaručit říditelnost i v tomto bodě, musíme jako bázi algebry říditelnosti zvolit právě tuto bázi. Snadno by se ukázalo, že báze  $\mathcal{B}_5 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_9\}$  splňuje vlastnosti definice 3.4 a je bázi Phillipa Halla.

## 4. Přidání dalších článků

V této kapitole bude s pomocí poznatků odvozených v kapitolách předchozích provedena diskuze toho, jak se změni matematický popisný aparát, přidáme-li jeden, nebo obecný počet dalších článků.

Než přistoupíme k samotné diskusi, zavedeme jisté změny v označení. V předchozích kapitolách bylo zavedeno značení, které v dané situaci bylo logické a přispívalo k lepšímu pochopení odvozených skutečností. Pro účely této kapitoly ve stávajícím značení provedeme drobnou změnu, která nám usnadní formulaci některých závěrů. Změna bude následující. Úhel natočení mechanismu vůči globálnímu systému souřadnic budeme označovat písmenem  $\phi_0$ , platí tedy že  $\psi_0 = \phi_0$ .



Obrázek 4.1: Mechanismus s pěti články

Přidáním dalšího článku přibude další repér, který bude natočený oproti repéru předchozímu o úhel  $\phi_4$  (obr. 4.1), a páté kolečko  $K_4$ . Jestliže pomocí metody pohyblivého repéru vyjádříme polohu pátého kolečka vůči počátku globálního souřadného systému  $P$ , získáme holonomní rovnici popisující polohu pátého kolečka v čase. Dosazením do neholonomní podmínky (2.1) získáme neholonomní rovnici

$$\begin{aligned} & -\dot{x}_0 s(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \dot{y}_0 c(\psi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ & + 2\dot{\psi}_0 c(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1) c(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) c(\phi_3 + \phi_4) \\ & + 2(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3) c(\phi_4) + \dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_4 = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Z mechanismu odvození rovnic plyne následující. Stávající systém čtyř rovnic o šesti neznámých pro mechanismus hada čtyřčlánekového se pro pětičlánekového hada změni na systém pěti rovnic o sedmi neznámých, přičemž první čtyři rovnice zůstanou stejné jako v případě čtyřčlánekového hada a nová proměnná  $\phi_4$  se vyskytuje pouze v nové, páté rovnici 4.1. Tuto nově vzniklou soustavu můžeme zapsat maticově následujícím způsobem:

$$\left( \begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ m_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ n_0 & n_1 & 1 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & 1 & 0 & d_1 & d_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & 1 & e_1 & e_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\phi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = 0,$$

kde písmeny  $m, n, p, q$  s příslušnými indexy jsou označeny koeficienty, které se nacházejí u  $\dot{\phi}_0, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3, \dot{\phi}_4$  a písmeny  $a_1$  až  $e_1$  (resp.  $a_2$  až  $e_2$ ) jsou označeny koeficienty nacházející se u  $\dot{x}_0$  (resp.  $\dot{y}_0$ ). Povšimněme si nyní, jakých proměnných jsou koeficienty  $m, n, p, q$  a  $a, b$  funkcemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_0(\phi_1) & 1 & 0 & 0 \\ n_0(\phi_1, \phi_2) & n_1(\phi_1, \phi_2) & 1 & 0 \\ p_0(\phi_1, \phi_2, \phi_3) & p_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) & p_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) & 1 \\ q_0(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) & q_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) & q_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) & q_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1(\phi_0) & a_2(\psi_0) \\ b_1(\phi_0, \phi_1) & b_2(\psi_0, \phi_1) \\ c_1(\phi_0, \phi_1, \phi_2) & c_2(\psi_0, \phi_1, \phi_2) \\ d_1(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) & d_2(\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ e_1(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) & e_2(\psi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto zápisu je zřejmé, že budeme-li soustavu rovnic řešit například pomocí Gaussovy eliminační metody (dále zkráceně označované GEM), musíme nezbytně získat takové řešení, jehož jednotlivé složky budou závislé na proměnných  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} t_1(\phi_0) \\ t_2(\phi_0, \phi_1) \\ t_3(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \\ t_4(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ t_5(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1(\phi_0) \\ u_2(\phi_0, \phi_1) \\ u_3(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \\ u_4(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ u_5(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení jsme obdrželi ve tvaru vektorového pole, jehož dimenze je 7, tedy o jedna vyšší, než dimenze vektorových polí řešení pro čtyřčlankového hada. Dále můžeme na základě znalosti GEM tvrdit, že první čtyři souřadnice vektorových polí řešení soustavy rovnic pro pětičlankového hada se budou shodovat s prvními čtyřmi souřadnicemi vektorových polí řešení soustavy rovnic pro hada čtyřčlankového. Jediná změna tedy nastane v souřadnici, kterou mají vektorová pole řešení pro pětičlankového hada navíc oproti vektorovým polím řešení pro hada čtyřčlankového.

Zbývá nám rozmyslet, jaký vliv bude mít přidání dalšího članku na výpočet Lieovy závorky. Mechanismus výpočtu Lieovy závorky byl vysvětlen ve čtvrté kapitole. Nyní si tento mechanismus rozebereme znovu a budeme si při tom všimnout, jakých proměnných

jsou funkce, které ve výpočtu figurují. Nahlédněme nejprve, jak by vypadal výpočet první souřadnice. Jak už bylo dříve řečeno, první souřadnice vstupního vektorového pole je funkcí pouze jedné proměnné a to  $\phi_0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(u_1) = & t_1(\phi_0) \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_0} + t_2(\phi_0, \phi_1) \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_1} + t_3(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_2} \\ & + t_4(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_3} + t_5(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_4} + t_6 \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial x_0} + t_7 \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial y_0}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že souřadnice  $u_1$  je funkcí pouze proměnné  $\phi_0$  je zřejmé, že všechny derivace kromě  $\frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_0}$  a tedy i všechny sčítance kromě  $t_1(\phi_0) \frac{\partial u_1(\phi_0)}{\partial \phi_0}$  jsou nulové. Analogický výsledek bychom získali i v případě, kdybychom zkoumali  $\mathbf{u}(t_1)$ . Dospěli jsme tedy k následujícímu závěru. Pro první souřadnici vektorového pole vzniklého Lieovou závorkou platí:

$$(\mathbf{t}(u_1) - \mathbf{u}(t_1))(\phi_0) = z_1(\phi_0).$$

Zkusme nyní podobnou úvahu provést obecně pro  $i$  - tou souřadnici pětičlankového hada. Dostaneme následující výraz:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(u_i) = & t_1(\phi_0) \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial \phi_0} + t_2(\phi_0, \phi_1) \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial \phi_1} + t_3(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial \phi_2} \\ & + t_4(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial \phi_3} + t_5(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial \phi_4} \\ & + t_6 \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial x_0} + t_7 \frac{\partial u_i(\phi_0, \dots, \phi_{i-1})}{\partial y_0}, \end{aligned}$$

kde  $0 \leq i \leq 7$ .

Derivace podle  $x_0, y_0$  budou zřejmě nulové, jelikož z výpočtu vstupních vektorů plyne, že žádná souřadnice není funkcí těchto proměnných. Nulovost ostatních sčítanců závisí na hodnotě  $i$ , tedy na pořadí souřadnice, kterou počítáme. Z uvedeného je vidět, že  $i$  - tá souřadnice bude funkcí proměnných  $\phi_0$  až  $\phi_{i-1}$ . Tím pádem se nemůže stát, že by se nová proměnná  $\phi_4$  vyskytovala jinde, nežli v páté souřadnici nově vzniklého vektorového pole.

Na základě výsledků analýzy řešení soustavy rovnic, která byla provedena dříve v této kapitole a nyní provedené analýzy výpočtu Lieovy závorky můžeme tvrdit, že vektorová pole vzniklá Lieovou závorkou se pro pětičlankového hada budou lišit oproti vektorovým polím hada čtyřčlankového pouze v jedné souřadnici, kterou mají vektorová pole hada pětičlankového oproti čtyřčlankovému mechanismu navíc.

Na závěr této kapitoly si rozmyslíme, jak by se pro pětičlankového hada změnila báze algebry říditelnosti, stanovená v závěru příkladu 3.8. Připomeňme, že tato báze měla tvar  $\mathcal{B}_5 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6, \mathbf{g}_9\}$ . Dimenze algebry říditelnosti pro pětičlankového hada je 7. Množinu vektorů  $\mathcal{B}_5$  je tedy nezbytné rozšířit o další vektor  $\mathbf{g}_k$ , který opět získáme operací Lieovy závorky a jehož délka (viz 3.3) bude  $|\mathbf{g}_k| = 7$ . V úvahu připadají tyto možnosti:  $\mathbf{g}_{10} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_6]$ ,  $\mathbf{g}_{11} = [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_6]$ ,  $\mathbf{g}_{12} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_7]$ ,  $\mathbf{g}_{13} = [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_7]$ ,  $\mathbf{g}_{14} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_9]$ ,  $\mathbf{g}_{15} = [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_9]$ . Snadno se vidí, že vektory  $\mathbf{g}_{12}$  a  $\mathbf{g}_{14}$  nesplňují vlastnost (iii) ze 4. bodu definice 3.4 a množina  $\mathcal{B}_l = \mathcal{B}_5 \cup \{\mathbf{g}_k\}$ , pro  $k = 12, 14$ , netvoří bázi Phillipa Halla. Ostatní pole definici vyhovují, množina tvořená množinou  $\mathcal{B}_5$  a jedním z těchto polí je báze Phillipa Halla a podle věty 3.5 tvoří bázi algebry říditelnosti. Nyní zbývá pomocí hodnot matic tvořených

vektory báze ověřit, jestli všechny námi navržené báze jsou bázemi algebry říditelnosti i v singulárních bodech. Postup by byl obdobný jako v příkladě 3.8. Pro dokončení této úlohy musíme postupně dopočítat poslední složku vektorových polí a jejich závorek. Tento výpočet je přímočarý a přesně kopíruje naše předešlé úvahy, a proto jej zde již neuvádíme.

Poměrně snadno lze vidět, že všechny poznatky, které v této kapitole byly odvozeny pro pětičlankový mechanismus lze zobecnit i pro mechanismus, ke kterému přidáme libovolný počet nových článků. Tento závěr má praktický význam. Na základě předchozí diskuse je patrné, že chceme-li rozšířit mechanismus o nějaký počet článků, nemusíme znovu provádět veškeré výpočty, stačí pouze stanovit změny vzniklé přidáním nových článků.

# Závěr

V první části práce byly na základě metody pohyblivého repéru sestaveny holonomní rovnice čtyřčlankového hada, popisující polohu bodů mechanismu v závislosti na změně řídicích parametrů. Dále byla popsána neholonomní kinematika čtyřčlankového hada a stanoveny neholonomní podmínky, vedoucí na soustavu neholonomních rovnic.

Řešením neholonomní soustavy rovnic byla získána vstupní vektorová pole. Interpretace významu řešení soustavy byla provedena na příkladech. Zajímavý je především první příklad, jelikož konfigurace mechanismu zvolená v tomto příkladu, se ukázala být v jistém smyslu singulární. Z vyčíslení vektorových polí v tomto bodě konfiguračního prostoru totiž vyplynulo, že aby bylo docíleno pohybu hlavy mechanismu podél osy  $x$ , nesmí být zároveň pohybováno klouby hada. Což je v rozporu s principem funkce mechanismu.

Pomocí aplikace operace Lieovy závorky na vstupní pole byla za účelem stanovení algebry říditelnosti získána další vektorová pole. Následně byly diskutovány způsoby, jak vybrat z těchto vektorových polí množinu, která by tvořila bázi algebry říditelnosti. Byla navržena metoda, zakládající se na definici báze Phillipa Halla, která udává způsob, jakým vybírat z vektorových polí získaných způsobem popsaným výše množiny, které potom podle věty **3.5** jsou bázemi algebry říditelnosti. Na základě vlastností báze Phillipa Halla bylo následně dokázáno, že vektorové pole  $\mathbf{g}_8$  nemůže být prvkem báze P. Halla. Následně bylo s pomocí vlastností Lieovy závorky dokázáno, že je vektorové pole  $\mathbf{g}_8$  násobkem vektorového pole  $\mathbf{g}_7$ . Množina diskutovaných vektorových polí získaných Lieovou závorkou se v důsledku těchto skutečností o jedno vektorové pole zmenšila.

Následující kapitola se věnovala zkoumání řízení ve zvolených konfiguracích. Tři konfigurace zkoumané v příkladech byly vybrány proto, že se předpokládá, že tyto konfigurace jsou možné výchozí stavy, ve kterých se mechanismus bude nacházet, než bude uveden do pohybu a zároveň stavy, kterými bude při svém pohybu periodicky procházet, a do kterých se po ukončení pohybu opět vrátí. Na základě zkoumání hodnoty matice, jejíž sloupce jsou tvořeny vektorovými poli získanými řešením neholonomní soustavy a aplikací Lieovy závorky bylo stanoveno, která pole jsou v daných konfiguracích pro sestavení báze algebry říditelnosti nezbytná. Zde se opět ukázal jako nejzajímavější příklad, ve kterém se mechanismus nacházel v konfiguraci, která se ukázala být jistým způsobem singulární již při interpretaci řešení neholonomní soustavy rovnic. Algebra říditelnosti v této konfiguraci má totiž jednoznačně určenou bázi. Následně byly navrženy možné báze algebry říditelnosti, splňující definici báze Phillipa Halla. Na základě poznatků z dříve diskutovaného příkladu byla posléze z navržených bází vybrána ta, která byla pro všechny diskutované konfigurace nedegenerovaná.

Nejvýznamnějším poznatek byl odvozen v závěrečné kapitole. Bylo zjištěno, že pro pětičlankového hada se soustava neholonomních rovnic v důsledku přidání nového članku pouze rozšíří o novou pátou rovnici. Dalšími úvahami jsme postupně dospěli k tomu, že vstupní vektorová pole pětičlankového mechanismu, i pole vzniklá aplikací Lieovy závorky se budou lišit oproti mechanismu čtyřčlankovému pouze jedinou souřadnicí, která přibude právě jako důsledek rozšíření neholonomní soustavy o novou rovnici. V závěru kapitoly byla navržena vektorová pole, která je možné přidat k bázi algebry říditelnosti čtyřčlankového systému, abychom získali bázi algebry říditelnosti systému pětičlankového. Poznátka odvozená v poslední kapitole lze zobecnit pro libovolný počet nově přidávaných článků. Hlavní význam této skutečnosti spočívá v tom, že přidáme-li ke  $k$  - člankovému

systemu  $n$  nových článků, stávající návrh řízení pro  $k$  - *článekový* systém zůstává platný. Stačí ho pouze doplnit o změny vzniklé přidáním nových článků.

# Literatura

- [1] MURRAY, Richard M, Zexiang LI a Shankar SASTRY. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, c1994, xix, 456 p. ISBN 0849379814-.
- [2] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: teoretická část*. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005, 179 s. ISBN 80-214-3100-8.
- [3] SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. *Matematika drsně a svižně*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013, 773 s. ISBN 978-80-210-6307-5.
- [4] FRANČ, Jan. *Funkcionální analýza I*. 2., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014, 164 s. ISBN 978-80-214-4920-6.
- [5] HRDINA, Jaroslav. *Algebry rotací a jejich aplikace*. Kvaternion. 2014, roč. 3, č. 2, ISSN 1805-1332
- [6] LILJEBACK, Pal. *Snake robots: modelling, mechatronics, and control*. 1st ed. New York: Springer, 2012, p. cm. ISBN 9781447129950.
- [7] JEAN, Frédéric. *Control of Nonholonomic Systems: From Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning*. Vyd. 1. Springer International Publishing, 2014, 104 s. ISBN 978-3-319-08689-7

# Seznam použitých zkratek a symbolů

|                               |                                                     |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                  | množina reálných čísel                              |
| $\mathbb{N}$                  | množina přirozených čísel                           |
| $\mathbb{R}_+$                | množina reálných kladných čísel                     |
| $\mathbf{v}, \mathbf{u}$      | vektory, vektorová pole                             |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}$      | matice                                              |
| $\mathbf{B}^T$                | transponovaná matice $\mathbf{B}$                   |
| $\dot{x}$                     | časová derivace $x$                                 |
| $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ | skalární součin vektorů $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$ |