VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Ústav matematiky

ŘEŠENÍ DIFERENČNÍCH ROVNIC A JEJICH VZTAH S TRANSFORMACÍ Z

SOLUTION OF DIFFERENCE EQUATIONS AND RELATION WITH Z-TRANSFORM

TEZE DIZERTAČNÍ PRÁCE

Ing. Jaroslav Klimek

Obor: Matematika v elektroinženýrství

Školitel: Prof. RNDr. Josef Diblík, DrSc.

KLÍČOVÁ SLOVA

diferenční rovnice, vlastní vektor, transformace Z, implementace v programu Matlab, Putzerův algoritmus, Weyrova maticová metoda

KEYWORDS

difference equation, eigenvector, Z-transform, implementation in Matlab program, Putzer algorithm, Weyr's matrix method

Dizertační práce je uložena na oddělení vědy a výzkumu, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické v Brně, Technická 10, 616 00 Brno.

OBSAH

ÚVOD 4

1 DOSAVADNÍ VÝVOJ A STAV PROBLEMATIKY 5
1.1 Transformace $\mathcal{Z}$ 5
1.2 Diskrétní analogie Putzerova algoritmu 7
1.3 Princip Weyrovy maticové metody 9
1.4 Známý postup řešení pomocí Weyrovy teorie 11

2 CÍLE DIZERTAČNÍ PRÁCE 11

3 DISKRÉTNÍ SYSTÉM A VLASTNÍ VEKTORY 12
3.1 Homogenní systém rovnic s konstantními koeficienty 12
3.2 Nehomogenní systém rovnic s konstantními koeficienty 15
3.3 Násobnost kořene a vliv nulit na tvar řešení 17
3.4 Implementace algoritmu v programu Matlab 17

4 APLIKACE TEORIE 19
4.1 Konfrontace tří metod 19

ZÁVĚR 25

LITERATURA 27

CURRICULUM VITAE 29

ÚVOD

Každý fyzikální děj či proces musí být v technice nějakým způsobem matematicky popsán. Diferenční rovnice obvykle popisují vývoj určitého jevu v průběhu času. Tento jev nazveme signálem. Zpracování signálů je součástí různých úloh nejen z oborů technických a přírodních věd, ale používá se i v lékařství, ekonomice a statistice. V dnešní době nabývá na významu zpracování signálů v diskrétní podobě, tedy posloupností, neboť většina aplikací užívá technologií zpracování signálů s diskrétním časem i pro zpracování signálů s časem spojitým. V některých aplikacích plyne diskrétní charakter signálu z příslušné fyzikální či matematické formulace úlohy, v jiných je důsledkem diskretizace spojitého signálu. Činnost a vlastnosti diskrétních soustav, které zpracovávají diskrétní signály, jsou často vyjádřeny a popsány diferenčními rovnicemi. Tyto rovnice řešíme metodami diferenčního počtu nebo pomocí funkcionálních transformací posloupností.

Jednou z cest je tvorba od základu nových algoritmů. Další možností je užití vazby s již známými matematickými postupy. Diferenční rovnice často představují analogii diferenciálních rovnic, které se používají k popisu činnosti spojitých systémů (o možnosti přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální je napsáno například v [3]). Teorie diferenciálních rovnic je velmi dobře propracována, a proto je zřejmé, že nové přístupy v oblasti řešení diferenčních rovnic hledají inspiraci také v již vytvořených postupech a algoritmech u diferenciálních rovnic. Výše zmíněná analogie obou oblastí (diferenciálních a diferenčních rovnic) se může objevit jen do určité míry nebo může být úplná, což bylo také jednou z hlavních motivací této práce.

Diferenční rovnice mohou být různého řádu, který se stanoví jako maximální rozdíl v posunutí argumentu. Každá rovnice vyššího řádu (jde o řád dva a více) se dá převést na systém rovnic prvního řádu. Toto je velmi důležitá vlastnost diferenčních rovnic, s jejíž pomocí lze kteroukoliv diferenční rovnici druhého a vyššího řádu řešit pomocí algoritmu pro řešení soustavy diferenčních rovnic.

Disertační práce se věnuje především řešení lineárních diferenčních rovnic, se kterými lze matematicky pracovat, protože jejich teorie je nejlépe propracovaná.

Tato práce zmiňuje a opírá se o výsledky a teorii některých známých matematických osobností. Eduard Weyr působil v oboru matematiky ve druhé polovině devatenáctého století a zabýval se teorií prvořadých útvarů, křivek druhého stupně, ploch a také diferenciálním počtem. V teorii diferenciálních rovnic byla Eduardem Weyrem vyvinuta metoda řešení soustavy diferenciálních rovnic pomocí vlastních vektorů. Otakar Borůvka se stal známou osobností matematického světa během dvacátého století. Do historie matematiky se zapsal popisem algoritmu nalezení minimální kostry grafu. Dále se zabýval studiem algebry a po druhé světové válce i diferenciálními rovnicemi. Podle [1], kde je Weyrova metoda detailně vysvětlena, lze uvedený postup použít obdobně i pro řešení soustavy diferenčních rovnic, což bylo jednou z motivací této práce.

1 DOSAVADNÍ VÝVOJ A STAV PROBLEMATIKY

V této kapitole bude popsán princip řešení diferenčních rovnic pomocí transformace $\mathcal{Z}$ a diskrétní obdoby Putzerova algoritmu. Ve třetí části bude pak naznačen postup Weyrovy metody pomocí vlastních vektorů, která se sice používá v oblasti diferenciálních rovnic, ale její popis je pro další postup důležitý.

1.1 Transformace $\mathcal{Z}$

Transformace $\mathcal{Z}$ je často používaná metoda při řešení diferenčních rovnic vyšších řádů v inženýrské praxi. Tato metoda spočívá v nalezení obrazu diferenční rovnice v transformované oblasti, čímž převedeme členy se zpožděnými argumenty na členy se stejným argumentem a získáme algebraickou rovnici. Vyjádřením neznámé obdržíme obraz řešení a originální tvar řešení získáme pomocí zpětné transformace $\mathcal{Z}$. Výhodou této metody je ten fakt, že původní diferenční rovnici převedeme do snadno řešitelné podoby. Nevýhodou mohou být příliš složité výrazy obrazu získaného řešení, jejichž zpětná transformace je případně velmi komplikovaná. Srozumitelný matematický popis této metody lze najít například v [7] nebo [9].

Transformace $\mathcal{Z}$ posloupnosti $x(n)$, která je identicky nulová pro záporná celá čísla (tedy $x(n) = 0$ pro $n = -1, -2, \ldots$), je definována

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i}, \tag{1}$$

kde z je komplexní číslo. Zadaná posloupnost $x(n)$ se nazývá předmětem transformace $\mathcal{Z}$ a komplexní funkce $X(z)$ obrazem transformace $\mathcal{Z}$. V definici se předpokládá konvergence uvedené řady pro $|z| > R > 0$, kde R je dostatečně velké číslo.

Inverzní transformaci $\mathcal{Z}$ značíme

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(n)$$

a lze ji provést více způsoby. První možností je jednoduše rozvinout obraz $X(z)$ do nekonečné mocninné řady s kvocientem z^{-1} v jejím oboru konvergence:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$$

pro $|z| > R$. Potom ze srovnání s rovnicí (1) vyplývá, že

$$x(n) = a_n,$$

kde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pokud je obraz $X(z)$ dán ve tvaru racionální lomené funkce

$$X(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

kde $g(z)$ a $h(z)$ jsou polynomy s proměnnou z, potom jednoduchým dělením polynomů obdržíme rozvoj $X(z)$ v mocninnou řadu s kvocientem z^{-1}.

Další variantou je metoda parciálních zlomků, která se používá v případě, že transformací $\mathcal{Z}$ obdržíme obraz $X(z)$ ve tvaru racionální lomené funkce proměnné z, analytické v nekonečnu [7], ve tvaru

$$X(n) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}, \ m \leq n. \tag{2}$$

Kořeny polynomu v čitateli nazýváme nulovými body, kořeny polynomu ve jmenovateli póly. Pokud $X(z)$ ve tvaru (2) rozložíme do parciálních zlomků,

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) + X_3(z) + \ldots,$$

pak podle [7] díky linearitě inverzní transformace $\mathcal{Z}$ dostaneme

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z)\} + \mathcal{Z}^{-1}\{X_2(z)\} + \mathcal{Z}^{-1}\{X_3(z)\} + \ldots.$$

Předměty dílčích funkcí hledáme podle slovníku transformace $\mathcal{Z}$.

Třetím způsobem je použití inverzní integrální metody. Vynásobíme-li obě strany rovnice (1) výrazem z^{n-1}, obdržíme

$$X(z) z^{n-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{n-i-1},$$

což je rozvoj výrazu $X(z)z^{n-1}$ do Laurentovy řady kolem bodu $z = 0$. Potom lze obraz $X(z)$ transformovat zpět podle formule

$$x(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z, \tag{3}$$

kde C je jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná a po částech hladká křivka, která obsahuje uvnitř oblasti, kterou ohraničuje, všechny singulární body integrandu. K výpočtu integrálů typu (3) lze použít residuovou větu

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z = \sum \mathrm{res} X(z) z^{n-1}.$$

Za předpokladu, že

$$X(z) z^{n-1} = \frac{g(z)}{h(z)},$$

uvažujeme při výpočtu residuí dva případy:

- pokud má polynom $h(z)$ jednoduché kořeny, je residuum v pólu prvního řádu z_i

$$\mathrm{res}\ \frac{g(z)}{h(z)}\bigg|_{z=z_i} = \lim_{z \to z_i} \left[(z - z_i) \frac{g(z)}{h(z)} \right],$$

- v případě vícenásobného kořene polynomu h(z) o násobnosti r, je residuum v pólu z_i řádu r

$$\operatorname{res} \left.\frac{g(z)}{h(z)}\right|_{z=z_i} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z\to z_i} \left[(z-z_i)^r \frac{g(z)}{h(z)}\right].$$

1.2 Diskrétní analogie Putzerova algoritmu

Je na místě připomenout, matice reálných čísel $\mathbf{A} = (a_{ij})$ o rozměru $k \times k$ má reálné nebo komplexní vlastní číslo λ takové, že $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$ pro některé nenulové $\xi \in \mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}$ značí množinu komplexních čísel. Ekvivalentně lze tento vztah zapsat jako

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = 0. \tag{4}$$

Rovnice (4) má nenulové řešení x právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

nebo

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\lambda^1 + a_k = 0. \tag{5}$$

Rovnice (5) se nazývá *charakteristickou rovnicí* matice $\mathbf{A}$, jejíž kořeny λ se nazývají *vlastními čísly* matice $\mathbf{A}$. Pokud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, pak lze napsat rovnici (5) jako

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j) = 0.$$

Věta 1 *Každá matice vyhovuje své charakteristické rovnici, tedy*

$$p(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{k}(\mathbf{A} - \lambda_j I) = 0,$$

nebo

$$\mathbf{A}^k + a_1\mathbf{A}^{k-1} + a_2\mathbf{A}^{k-2} + \cdots + a_k\mathbf{I} = 0.$$

Nechť $\mathbf{A}$ je matice reálných čísel o rozměru $k \times k$. Matice $\mathbf{A}^n$ lze reprezentovat ve tvaru

$$\mathbf{A}^n = \sum_{j=1}^{s} u_j(n)\mathbf{M}(j-1), \tag{6}$$

kde $u_j(n)$ jsou skalární funkce a

$$\mathbf{M}(j) = (\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})\mathbf{M}(j-1),\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{I} \tag{7}$$

nebo

$$\mathbf{M}(j+1) = (\mathbf{A} - \lambda_{j+1}\mathbf{I})\mathbf{M}(j),\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{I}.$$

Iteracemi lze ukázat, že

$$\mathbf{M}(n) = (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{n-1}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$$

anebo v kratší formě

$$\mathbf{M}(n) = \prod_{j=1}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}). \tag{8}$$

Podle Cayley-Hamiltonova teorému je

$$\mathbf{M}(k) = \prod_{j=1}^{k} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) = 0.$$

A následně, $\mathbf{M}(n) = 0$ pro všechna $n \geq k$. Formuli (6) lze přepsat jako

$$\mathbf{A}^n = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) \mathbf{M}(j-1). \tag{9}$$

Pokud je dosazeno $n = 0$ do formule (9), lze obdržet

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} = u_1(0)\mathbf{I} + u_2(0)\mathbf{M}(1) + \cdots + u_k(0)\mathbf{M}(k-1). \tag{10}$$

Rovnice (10) je splněna, pokud

$$u_1(0) = 1 \text{ and } u_2(0) = u_3(0) = \cdots = u_k(0) = 0. \tag{11}$$

Z formule (9) je

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)\mathbf{M}(j-1) = \mathbf{A}\mathbf{A}^n \\ &= \mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{k} u_j(n)\mathbf{M}(j-1) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n)\mathbf{A}\mathbf{M}(j-1). \end{aligned}$$

Substitucí $\mathbf{A}\mathbf{M}(j-1)$ z rovnice (7) lze dostat

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)\mathbf{M}(j-1) = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) \left(\mathbf{M}(j) + \lambda_j \mathbf{M}(j-1) \right). \tag{12}$$

Srovnáním koeficientů $\mathbf{M}(j)$, $1 \leq j \leq k$, v rovnici (12), a uplatněním podmínky (11), lze dostat

$$\left. \begin{aligned} u_1(n+1) &= \lambda_1 u_1(n), & u_1(0) &= 1, \\ u_j(n+1) &= \lambda_j u_j(n) + u_{j-1}(n), & u_j(0) &= 0, j = 2, 3, \ldots, k. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Řešení rovnic (13) jsou dána

$$u_1(n) = \lambda_1^n, \quad u_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} u_{j-1}(i), \quad j = 2, 3, \dots, k. \tag{14}$$

Rovnice (8) a (14) dohromady tvoří algoritmus pro výpočet matice $\mathbf{A}^n$, který se nazývá *Putzerův algoritmus*. Existují také jiné postupy na určení matice $\mathbf{A}^n$, které jsou příkladně popsány například v [8].

1.3 Princip Weyrovy maticové metody

Algoritmus vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic je uveden například v [16]. Nyní bude stručně uveden princip Weyrovy teorie, jejíž popis je zmíněn v [1] nebo [2], případně v [5].

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice komplexních čísel rozměru m, λ jedno z jejích vlastních čísel a h hodnost matice $\mathbf{A}$. Potom číslo

$$\nu = m - h$$

nazýváme nulitou matice $\mathbf{A}$. Předpokládejme vlastní číslo λ s násobností k. Potom vytvořené posloupnosti matic

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^0 = \mathbf{I},\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^1 = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I},\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2,\ \dots,\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^p,$$

odpovídá posloupnost hodností

$$h_0 > h_1 > h_2 > \dots > h_p$$

a posloupnost nulit

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_p = k,$$

kde p vyhovuje podmínce

$$h_p = m - k.$$

Nechť

$$\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0,\ \sigma_2 = \nu_2 - \nu_1,\ \dots,\ \sigma_p = \nu_p - \nu_{p-1}$$

jsou charakteristiky matice $\mathbf{A}$ odpovídající vlastnímu číslu λ, splňující nerovnosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p$. Lze ukázat, že existuje systém nenulových vektorů

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{v}_{s1}, \dots, \mathbf{v}_{s\sigma_p}, & s = 1, 2, \dots, p, \\
\mathbf{v}_{s\sigma_p+1}, \dots, \mathbf{v}_{s\sigma_{p-1}}, & s = 1, 2, \dots, p-1, \\
\mathbf{v}_{s\sigma_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{s\sigma_{p-2}}, & s = 1, 2, \dots, p-2, \\
\vdots & \vdots \\
\mathbf{v}_{s\sigma_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{s\sigma_1}, & s = 1
\end{array}$$

Tabulka 1: Systém vektorů odpovídajících příslušnému vlastnímu číslu λ.

$\mathbf{v}_{11}$	$\mathbf{v}_{12}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{1\sigma_p}$	$\mathbf{v}_{1,\sigma_p+1}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{1,\sigma_{p-1}}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{1\sigma_2}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{1\sigma_1}$
$\mathbf{v}_{21}$	$\mathbf{v}_{22}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{2\sigma_p}$	$\mathbf{v}_{2,\sigma_p+1}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{2,\sigma_{p-1}}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{2\sigma_2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\mathbf{v}_{p-1,1}$	$\mathbf{v}_{p-1,2}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{p-1,\sigma_p}$	$\mathbf{v}_{p-1,\sigma_p+1}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{p-1,\sigma_{p-1}}$				
$\mathbf{v}_{p1}$	$\mathbf{v}_{p2}$	$\dots$	$\mathbf{v}_{p\sigma_p}$							

příslušející vlastnímu číslu λ, který se skládá z $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p = k$ lineárně nezávislých vektorů. Tyto vektory jsou určeny charakteristikami matice $\mathbf{A}$ a jsou rozmístěny v tabulce o p řádcích a σ_1 sloupcích (viz tabulka 1).

Počet vektorů v každém řádku je určen příslušnou charakteristikou $(\sigma_s, s = 1, 2, \ldots, p)$, tedy v j-tém řádku tabulky 1 je celkem σ_j vektorů. Každý sloupec tabulky 1 je řetězcem zobecněných vlastních vektorů, odpovídajícím zobecněnému vlastnímu vektoru, kterým sloupec končí.

Nejprve se tedy určí poslední (nenulový) vektor v každém sloupci podle vztahu

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j \mathbf{v}_{js} = \mathbf{0}, \tag{15}$$

kde $j = 1, 2, \ldots, p$ a $s \in \{\sigma_{j+1}+1, \sigma_{j+1}+2, \ldots, \sigma_j\}$. V případě, že je voleno $j = p$, položíme $\sigma_{p+1} = 0$. Pokud $\sigma_{j+1} > \sigma_j$, vztah (15) není definován.

Následně se určí všechny předcházející vektory v každém sloupci. Pro každou hodnotu dvojice indexů (j, s), $j \in \{2, 3, \ldots, p\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \ldots, \sigma_j\}$ se najdou řetězce netriviálních vektorů pomocí vztahů

$$\mathbf{v}_{l-1,s} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{ls}, \tag{16}$$

kde $l = j, j-1, \ldots, 2$. Pokud $j = p$, pak $\sigma_{p+1} = 0$.

Nyní nechť existuje soustava lineárních homogenních diferenciálních rovnic v maticové podobě

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \tag{17}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice koeficientů rozměru $m \times m$ a $\mathbf{y}(t)$ je vektor řešení, který tvoří m-rozměrný vektorový prostor. Bází tohoto prostoru je fundamentální systém řešení, který je tvořen množinou m řešení $\mathbf{y}_1(t)$, $\mathbf{y}_2(t)$, …, $\mathbf{y}_p(t)$. Obecné řešení je potom dáno lineární kombinací fundamentálního systému řešení. Pokud je λ libovolné k-násobné vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a tabulka 1 obsahuje odpovídající systém vektorů, pak vlastnímu číslu λ odpovídá k řešení systému (17) ve tvaru

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{1s}(t) &= \mathbf{v}_{1s}\mathrm{e}^{\lambda t}, \\
\mathbf{y}_{2s}(t) &= (\mathbf{v}_{1s}t + \mathbf{v}_{2s})\mathrm{e}^{\lambda t}, \\
&\ \vdots \\
\mathbf{y}_{js}(t) &= \left(\mathbf{v}_{1s}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \mathbf{v}_{2s}\frac{t^{j-2}}{(j-2)!} + \cdots + \mathbf{v}_{j-1,s}t + \mathbf{v}_{js}\right)\mathrm{e}^{\lambda t},
\end{aligned}$$

pro každou dvojici indexů (j, s), $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $s \in \{\sigma\sigma_j\}$. Fundamentální systém řešení je sjednocení všech množin lineárně nezávislých řešení odpovídajících všem kořenům charakteristické rovnice.

1.4 Známý postup řešení pomocí Weyrovy teorie

Řešení diskrétního systému s konstantními koeficienty pomocí Weyrovy teorie se již zabýval Jiří Čermák v polovině 20. století v [4], kde fundamentální systém soustavy (20) byl nalezen ve tvaru

$$\mathbf{y}_{js} = \Bigg(\mathbf{v}_{js} + \mathbf{v}_{j+1,s}\frac{n}{1!} + \mathbf{v}_{j+2,s}\frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + \\ + \mathbf{v}_{p,s}\frac{n(n-1)\ldots(n-(p-j-1))}{(p-j)!}\Bigg)\lambda^n \quad (18)$$

pro $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $s \in \{1, 2, \ldots, \sigma_{p-j+1}\}$ a

$$\mathbf{y}_{js} = \mathbf{v}_{js}\lambda^n \quad (19)$$

pro $j = p$, $s \in \{1, 2, \ldots, \sigma_1\}$. Formule použité k výpočtu systému vektorů v (18), (19) jsou podle [4] následující:

$$\frac{1}{\lambda}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{js} = \mathbf{0}$$

pro $j = p$ a

$$\frac{1}{\lambda}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{js} = \mathbf{v}_{j+1,s}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, p-1$. V obou případech $s = 1, 2, \ldots, \sigma_{p-j+1}$.

2 CÍLE DIZERTAČNÍ PRÁCE

Potřeba nového algoritmu pro řešení soustavy diferenčních rovnic je hlavní hnací silou této dizertační práce. Analogie Weyrovy metody pro řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty může skrývat výhody v podobě schopného algoritmu. Proto byly formulovány následující cíle dizertační práce:

- Vytvoření a popsání analogie Weyrovy metody s použitím teorie řešení systému lineárních homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty pomocí vlastních vektorů.

- Rozšíření použití algoritmu i k řešení systému lineárních nehomogenních diferenčních rovnic.

- Aplikace algoritmu v programovém prostředí Matlab s využitím nástroje pro práci se symbolickou matematikou. Program Matlab se věnuje především řešení diferenciálních rovnic, a proto posílení programového vybavení účinným algoritmem pro řešení systému diferenčních rovnic bude přínosem. Budou navrženy některé funkce pro výpočet řešení diferenčních rovnic, které implementují uvedený algoritmus. Protože s rostoucím řádem diferenční rovnice také vzrůstá obtížnost implementace funkce pro řešení této diferenční rovnice, budou navrženy funkce pro řešení lineárních homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty druhého a třetího řádu.

Protože je vhodné teoretický základ aplikovat na praktický příklad, bude metoda vlastních vektorů vystavena konfrontaci s dalšími dvěma postupy a bude názorně ukázáno, že užitím všech tří metod vede ke stejnému výsledku.

3 DISKRÉTNÍ SYSTÉM A VLASTNÍ VEKTORY

V této kapitole bude ukázán analogický případ Weyrovy metody pro lineární diskrétní systém. Základem pro výpočet řešení bude tabulka vlastních vektorů tabulka 1 uvedena v kapitole 1.3.

3.1 Homogenní systém rovnic s konstantními koeficienty

Nechť je dána soustava lineárních homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n), \tag{20}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice konstant rozměru $m \times m$ a $\mathbf{y}(n)$ je vektor řešení.

V tomto případě jsou vektory z tabulky 1 počítány podle odlišných vztahů než (15), (16). Nejdříve musí být určen první nenulový vektor v každém sloupci tabulky podle vztahu

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{js} = \mathbf{0}, \tag{21}$$

kde $j = 1$ a $s \in \{1, 2, \dots, \sigma_j\}$. Následně jsou vypočítány další vektory v každém sloupci podle formule

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{js} = \lambda\left(\frac{\mathbf{v}_{1s}}{(j-1)!} + \frac{\mathbf{v}_{2s}}{(j-2)!} + \dots + \frac{\mathbf{v}_{j-2,s}}{2!} + \mathbf{v}_{j-1,s}\right), \tag{22}$$

kde $j \in \{2, 3, \dots, p\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, \sigma_j\}$.

Věta 2 *Systém všech lineárně nezávislých řešení, která odpovídají libovolnému k-násobnému vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{A}$, je tvořen k řešeními* (20) *ve tvaru*

$$\mathbf{y}_{js}(n) = \left(\mathbf{v}_{1s}\,\frac{n^{j-1}}{(j-1)!} + \mathbf{v}_{2s}\,\frac{n^{j-2}}{(j-2)!} + \dots + \mathbf{v}_{j-1,s}n + \mathbf{v}_{j,s}\right)\lambda^n, \tag{23}$$

pro každou dvojici indexů (j, s), kde $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ a $s \in \{1, 2, \dots, \sigma_j\}$.

Důkaz. V důkazu bude proveden pomocí vztahů (21), (22) pouze pro vektory v prvním sloupci v tabulce 1, proto se předpokládá index $s = 1$. Výpočet vektorů v dalších sloupcích tabulky 1 lze dokázat analogicky. Pokud $j = \{1, 2, \dots, p-1, p\}$ a λ je jedno z vlastních čísel matice $\mathbf{A}$, pak podle vztahu (22) vlastnímu číslu λ odpovídá systém vektorů

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{11} &= \mathbf{0}, && (24)\\
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{21} &= \lambda\mathbf{v}_{11}, && (25)\\
&\vdots\\
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{p-1,1} &= \lambda\left(\frac{\mathbf{v}_{11}}{(p-2)!} + \frac{\mathbf{v}_{21}}{(p-3)!} + \dots + \frac{\mathbf{v}_{p-3,1}}{2!} + \mathbf{v}_{p-2,1}\right), && (26)\\
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{p1} &= \lambda\left(\frac{\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!} + \frac{\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!} + \dots + \frac{\mathbf{v}_{p-2,1}}{2!} + \mathbf{v}_{p-1,1}\right). && (27)
\end{aligned}
$$

Systémy (24)–(27) lze vyjádřit v ekvivalentním tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{v}_{11} &= \lambda\mathbf{v}_{11}, && (28)\\
\mathbf{A}\mathbf{v}_{21} &= \lambda\left(\mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_{21}\right), && (29)\\
&\vdots\\
\mathbf{A}\mathbf{v}_{p-1,1} &= \lambda\left(\frac{\mathbf{v}_{11}}{(p-2)!} + \frac{\mathbf{v}_{21}}{(p-3)!} + \dots + \frac{\mathbf{v}_{p-3,1}}{2!} + \mathbf{v}_{p-2,1} + \mathbf{v}_{p-1,1}\right), && (30)\\
\mathbf{A}\mathbf{v}_{p1} &= \lambda\left(\frac{\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!} + \frac{\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!} + \dots + \frac{\mathbf{v}_{p-2,1}}{2!} + \mathbf{v}_{p-1,1} + \mathbf{v}_{p1}\right). && (31)
\end{aligned}
$$

Nechť $j = 1$. Podle vztahu (23) platí

$$\mathbf{y}_{11}(n) = \mathbf{v}_{11}\lambda^n. \tag{32}$$

Dosazením do (20) a úpravou pomocí vztahu (28) lze dokázat, že

$$\mathbf{y}_{11}(n+1) = \mathbf{v}_{11}\lambda^{n+1} = \lambda\mathbf{v}_{11}\lambda^n = \mathbf{A}\mathbf{v}_{11}\lambda^n = \mathbf{A}\mathbf{y}_{11}(n).$$

Vektor (32) je tedy jedním z řešení systému (20).
Nechť $j = 2$. Podle vztahu (23),

$$\mathbf{y}_{21}(n) = \left(\mathbf{v}_{11}n + \mathbf{v}_{21}\right)\lambda^n. \tag{33}$$

Analogickým dosazením vektoru (33) do (20) a úpravou podle (28), (29) lze získat:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{21}(n+1) &= \Big(\mathbf{v}_{11}(n+1) + \mathbf{v}_{21}\Big)\lambda^{n+1} = \left(\lambda\mathbf{v}_{11}n + \lambda\mathbf{v}_{11} + \lambda\mathbf{v}_{21}\right)\lambda^n =\\
&= \left(\mathbf{A}\mathbf{v}_{11}n + \mathbf{A}\mathbf{v}_{21}\right)\lambda^n = \mathbf{A}\left(\mathbf{v}_{11}n + \mathbf{v}_{21}\right)\lambda^n = \mathbf{A}\mathbf{y}_{21}(n).
\end{aligned}
$$

Vektor (33) je tedy také jedním z řešení systému (20).
Nyní bude uvažován případ, kdy $j = p$. Potom by měl být vektor

$$\mathbf{y}_{p1}(n) = \left(\mathbf{v}_{11}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + \mathbf{v}_{21}\frac{n^{p-2}}{(p-2)!} + \cdots + \mathbf{v}_{p-1,1}n + \mathbf{v}_{p1}\right)\lambda^n$$

jedním z řešení systému (20):

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p1}(n+1) &= \Bigg(\mathbf{v}_{11}\frac{(n+1)^{p-1}}{(p-1)!} + \mathbf{v}_{21}\frac{(n+1)^{p-2}}{(p-2)!} + \cdots + \mathbf{v}_{p-1,1}(n+1) \\
&\quad +\mathbf{v}_{p1}\Bigg)\lambda^{n+1} \\
&= \Bigg(\lambda\mathbf{v}_{11}\frac{(n+1)^{p-1}}{(p-1)!} + \lambda\mathbf{v}_{21}\frac{(n+1)^{p-2}}{(p-2)!} + \cdots + \lambda\mathbf{v}_{p-1,1}(n+1) \\
&\quad +\lambda\mathbf{v}_{p1}\Bigg)\lambda^n \\
&= \Bigg[\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!}\Bigg[n^{p-1} + \binom{p-1}{1}n^{p-1-1} + \binom{p-1}{2}n^{p-1-2} + \cdots \\
&\quad +\binom{p-1}{p-2}n + \binom{p-1}{p-1}\Bigg] + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!}\Bigg[n^{p-2} + \binom{p-2}{1}n^{p-2-1} \\
&\quad +\binom{p-2}{2}n^{p-2-2} + \cdots + \binom{p-2}{p-3}n + \binom{p-2}{p-2}\Bigg] + \cdots \\
&\quad +\lambda\mathbf{v}_{p-1,1}(n+1) + \lambda\mathbf{v}_{p1}\Bigg]\lambda^n \\
&= \Bigg[\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!}\Bigg(n^{p-1} + (p-1)n^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2}n^{p-3} + \cdots \\
&\quad +(p-1)n + 1\Bigg) + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!}\Bigg(n^{p-2} + (p-2)n^{p-3} \\
&\quad +\frac{(p-2)(p-3)}{2}n^{p-4} + \cdots + (p-2)n + 1\Bigg) + \cdots \\
&\quad +\lambda\mathbf{v}_{p-1,1}(n+1) + \lambda\mathbf{v}_{p1}\Bigg]\lambda^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg[n^{p-1}\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!} + n^{p-2}\left(\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}(p-1)}{(p-1)!} + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!}\right) + \cdots \\
&\quad + n\left(\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}(p-1)}{(p-1)!} + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}(p-2)}{(p-2)!} + \cdots + \lambda\mathbf{v}_{p-1,1}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!} + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!} + \cdots + \lambda\mathbf{v}_{p-1,1} + \lambda\mathbf{v}_{p1}\right)\Bigg]\lambda^n \\
&= \Bigg[\lambda\mathbf{v}_{11}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + (\lambda\mathbf{v}_{11} + \lambda\mathbf{v}_{21})\frac{n^{p-2}}{(p-2)!} + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}}{(p-2)!} + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}}{(p-3)!} + \cdots + \lambda\mathbf{v}_{p-1,1}\right)n \\
&\quad + \left(\frac{\lambda\mathbf{v}_{11}}{(p-1)!} + \frac{\lambda\mathbf{v}_{21}}{(p-2)!} + \cdots + \lambda\mathbf{v}_{p-1,1} + \lambda\mathbf{v}_{p1}\right)\Bigg]\lambda^n.
\end{aligned}
$$

Úprava pomocí vztahů (28)–(31) ukáže, že

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p1}(n+1) &= \left(\mathbf{A}\mathbf{v}_{11}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + \mathbf{A}\mathbf{v}_{21}\frac{n^{p-2}}{(p-2)!} + \cdots + \mathbf{A}\mathbf{v}_{p-1,1}n + \mathbf{A}\mathbf{v}_{p1}\right)\lambda^n \\
&= \mathbf{A}\left(\mathbf{v}_{11}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + \mathbf{v}_{21}\frac{n^{p-2}}{(p-2)!} + \cdots + \mathbf{v}_{p-1,1}n + \mathbf{v}_{p1}\right)\lambda^n \\
&= \mathbf{A}\mathbf{y}_{p1}(n).
\end{aligned}
$$

Věta 2 je dokázána. Ke každému vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ existuje odpovídající množina řešení. Počet těchto řešení se vždy rovná násobnosti příslušného vlastního čísla. Obecnému řešení systému (20) odpovídá maticový zápis

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{C}, \tag{34}$$

kde $\mathbf{\Phi}(n)$ je tzv. fundamentální matice řešení a $\mathbf{C}$ je vektor libovolných konstant, které lze určit podle počáteční podmínky

$$\mathbf{y}(n_0) = \mathbf{y}_0. \tag{35}$$

Postup řešení včetně důkazu lze najít v [10] anebo stručný popis taktéž v [12].

3.2 Nehomogenní systém rovnic s konstantními koeficienty

V případě nehomogenního systému lze určit partikulární řešení podle následující věty.

Věta 3 *Nechť je dán nehomogenní systém vycházející z předchozího homogenního systému* (20) *ve tvaru*

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{g}(n) \tag{36}$$

s počáteční podmínkou (35). *Potom partikulární řešení systému* (36) *má tvar*

$$\mathbf{y}(n, n_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{y}_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \mathbf{\Phi}(n + n_0 - r - 1)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{g}(r). \tag{37}$$

Důkaz. Podle [7] lze určit řešení nehomogenního systému (36) podle vztahu

$$\mathbf{y}(n, n_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{A}^{n-n_0}\mathbf{y}_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-r-1}\mathbf{g}(r). \tag{38}$$

Obecné řešení (34) homogenního systému (20) v počátečním bodě n_0 je

$$\mathbf{y}(n_0) = \mathbf{\Phi}(n_0)\mathbf{C}.$$

Násobením zleva maticí $\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)$ lze zjistit, čemu se rovná vektor konstant $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{\Phi}(n_0)\mathbf{C}$$

a po úpravě

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}. \tag{39}$$

Dosazením vektoru konstant (39) do obecného řešení homogenního systému (34) lze dostat rovnici

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{y}_0. \tag{40}$$

Protože podle [7] platí pro partikulární řešení homogenní soustavy (20) vztah

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}^{n-n_0}\mathbf{y}_0, \tag{41}$$

porovnáním rovnic (40) a (41) lze zjistit, že

$$\mathbf{\Phi}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0) = \mathbf{A}^{n-n_0}. \tag{42}$$

Protože je potřeba najít také vyjádření $\mathbf{A}^{n-r-1}$, lze podle rovnosti

$$n - n_0 = n - r - 1 \quad \rightarrow \quad n = n + n_0 - r - 1$$

nahradit n v mocnině matice $\mathbf{A}^{n-n_0}$ výrazem $n + n_0 - r - 1$. Výsledkem této operace je pak výraz

$$\mathbf{A}^{n-r-1} = \mathbf{\Phi}(n + n_0 - r - 1)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0). \tag{43}$$

S použitím nalezených mocnin (42), (43) matice $\mathbf{A}$ lze nyní vztah (38) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}(n, n_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{y}_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \mathbf{\Phi}(n + n_0 - r - 1)\mathbf{\Phi}^{-1}(n_0)\mathbf{g}(r).$$

Věta 3 je dokázána.

Za povšimnutí stojí vztah (42), který umožňuje určení mocniny matice $\mathbf{A}^n$, jejíž nalezení pomocí vztahu (9) je podstatou například již dříve uvedené diskrétní obdoby Putzerova algoritmu. Pokud $n_0 = 0$, má rovnice (42) tvar

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(0).$$

3.3 Násobnost kořene a vliv nulit na tvar řešení

V případě, že charakteristická rovnice systému má m navzájem různých reálných kořenů

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \tag{44}$$

a m odpovídajících (nenulových) vlastních vektorů

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \tag{45}$$

je konstrukce obecného řešení soustavy rovnic (20) jednoduchá a platí: Má-li matice $\mathbf{A}$ celkem m navzájem různých vlastních čísel (44), kterým odpovídají vlastní vektory (45), potom vektorové funkce

$$\mathbf{v}_1\lambda_1^n, \mathbf{v}_2\lambda_2^n, \ldots, \mathbf{v}_m\lambda_m^n$$

tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic (20). Obecné řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{y}(n) = K_1\mathbf{v}_1\lambda_1^n + K_2\mathbf{v}_2\lambda_2^n + \ldots + K_m\mathbf{v}_m\lambda_m^n,$$

kde $K_1, K_2, \ldots, K_m$ jsou libovolné konstanty.

Konstrukce fundamentálního systému řešení je komplikovanější v případě, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice násobné. Vlastnímu číslu λ násobnosti s odpovídá s lineárně nezávislých řešení. V případě, že je násobné vlastní číslo komplexní, tj. $\lambda = \alpha + \mathrm{j}\beta$, kde j je komplexní jednotka a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bude komplexně sdružené číslo $\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{j}\beta$ také vlastním číslem stejné násobnosti. Existuje-li komplexní řešení $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n)$ soustavy (20), lze obdržet dvě reálná řešení $\mathbf{y}_1(n)$, $\mathbf{y}_2(n)$ pomocí vzorců

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(n) &= \operatorname{Re}\mathbf{y}(n) \\ \mathbf{y}_2(n) &= \operatorname{Im}\mathbf{y}(n), \end{aligned}$$

kde **Re** značí reálnou část a **Im** imaginární část komplexního řešení $\mathbf{y}(n)$.

Jiný pohled na konstrukci systému řešení nabízí tzv. nulity ν, které byly představeny již dříve v této práci. V případě s-násobného kořene charakteristické rovnice mohou vlastní vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_s$ tvořit tzv. řetězec vlastních vektorů, kdy z výchozího vlastního vektoru $\mathbf{v}_1$, který odpovídá vlastnímu číslu λ, dostáváme vektor $\mathbf{v}_2$ až posléze $\mathbf{v}_s$. Délka tohoto řetězce vlastních vektorů odpovídající danému vlastnímu číslu je rovna jeho násobnosti. Hodnota nulity ν tak udává počet lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{v}_1$, které mohou být případně dále řetězeny. Detailnější rozbor řetězení vektorů a jeho možné varianty jsou popsány například v [13].

3.4 Implementace algoritmu v programu Matlab

Jednou z motivací disertační práce byla i snaha uplatnit teoretické poznatky a implementovat zjištěný postup v nějakém technickém řešení. Teorie, která byla uvedena v předchozí kapitole 3.1, je součástí algoritmu pro výpočet řešení, který byl implementován v programovacím prostředí Matlab. Samotný program Matlab v základní instalaci neobsahuje vhodné nástroje a k výpočtu je potřeba použít modul pro počítání se symbolickou matematikou – Symbolic Math Toolbox, po vložení příkazu a spuštěním výpočtu proběhne řešení podle navrženého algoritmu a program Matlab vrátí obecné řešení zadané soustavy diferenčních rovnic. Pro zjednodušení byl postup aplikován na lineární homogenní diferenční rovnice druhého a třetího řádu.

3.4.1 Popis implementace algoritmu

Pro řešení lineárních homogenních diferenčních rovnic druhého a třetího řádu byly navrženy čtyři funkce v programu Matlab. Prvním úkolem byla implementace postupu odvozeného od Weyrovy metody pro systém lineárních homogenních diferenčních rovnic. Vznikly tak funkce *vypocet2.m* a *vypocet3.m*. Obecně lze obě funkce rozdělit do třech částí.

V první části funkce zpracovává zadané vstupní argumenty, které jsou tvořeny koeficienty matice $\mathbf{A}$ systému (20) a provádí následující operace:

- sestavení matice koeficientů $\mathbf{A}$ systému rovnic ze vstupních argumentů,
- uložení rozměrů matice do proměnných, resp. do proměnné, neboť uvažujeme pouze čtvercové matice $\mathbf{A}$,
- vytvoření jednotkové matice $\mathbf{I}$,
- vytvoření vektoru kořenů charakteristické rovnice,
- stanovení násobnosti k jednotlivých kořenů λ.

Ve druhé části jsou dále zpracovávány vektory násobností a kořenů charakteristické rovnice získané v prvním kroku. Zde začíná vlastní implementace postupu odvozeného od Weyrovy metody a pro každý kořen charakteristické rovnice jsou provedeny tyto postupy:

- zjištění exponentu matice $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ takového, kdy hodnost takto umocněné matice je rovna nule,
- vytvoření posloupnosti hodností,
- vytvoření posloupnosti nulit,
- vytvoření posloupnosti charakteristik,
- sestavení tabulky vektorů podle 1,
- výpočet vektorů podle sestavené tabulky,
- sestavení řešení (kombinace vektorů) pro daný kořen charakteristické rovnice.

Ve třetí části funkce je vypsáno symbolické řešení zadaného systému rovnic a výsledky jsou formátovány názorným způsobem.

Druhým úkolem bylo vytvořit funkce *difrov2.m* a *difrov3.m*. Navržené funkce pracují v podstatě pouze s koeficienty diferenční rovnice druhého nebo třetího řádu a jejich účelem je převod diferenční rovnice druhého nebo třetího řádu na systém dvou nebo tří rovnic prvního řádu. Vstupní argumenty funkce převede na koeficienty systému dvou rovnic prvního řádu (a11, a12, a21, a22) nebo tří rovnic prvního řádu (a11, a12, a13, a21, a22, a23, a31, a32, a33). Takto získané koeficienty jsou vstupními argumenty předchozích funkcí *vypocet2.m* a *vypocet3.m*, které již byly popsány dříve.

Implementaci provázely nepříjemné situace, problémy vznikaly zejména vlivem kvantování a zaokrouhlování číselných hodnot, například při výpočtu determinantů. Dále vznikala s rostoucím řádem soustavy řada krajních situací, které způsobovaly pád programu, a proto bylo třeba všechny krajní situace nalézt a ošetřit příslušnými pravidly.

4 APLIKACE TEORIE

Jak lze dospět ke stejnému řešení diferenční rovnice pomocí transformace $\mathcal{Z}$ a některým známým diskrétním postupem je uvedeno například v [14]. V této kapitole bude představena aplikace a výsledky navrženého algoritmu, který byl popsán v předchozí kapitole 3. Jednodušší případ použití postupu s vlastními vektory a jeho srovnání s jinou diskrétní metodou na názorném příkladě lze nalézt například v [15]. Zajímavé srovnání metody vlastních vektorů a transformace $\mathcal{Z}$ při výpočtu proudové odezvy v obvodu RLC zde nemohlo být uvedeno díky svému rozsahu, avšak lze ho najít například v [11].

4.1 Konfrontace tří metod

Uvedený postup řešení nehomogenního systému bude nyní vysvětlen na příkladě a srovnán s výsledky, které byly získány jinými postupy (viz [6]).
Je dána lineární nehomogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty

$$y(n+2) - 1,25(y+1) + 0,78125y(n) = x(n+2) - x(n). \qquad (46)$$

Předpokládá se, že posloupnost $\{x(n)\}$ je posloupnost charakterizující jednotkový impuls, tj. $x(n) = \delta(n)$, kde $\delta(0) = 1$ a $\delta(n) = 0$ pro $n \neq 0$. Za podmínky, že systém byl pro $n < 0$ v klidu (kauzální systém), tj. při nulové přirozené odezvě, je zřejmé, že platí $y(n) = 0$ pro $n = -1, -2, -3, \ldots$. V případě dosazení za $n = -2$ do rovnice (46) lze dostat

$$y(0) - 1,25y(-1) + 0,78125y(-2) = x(0) - x(-2). \qquad (47)$$

Protože jsou známy hodnoty $y(-1) = 0$, $y(-2) = 0$, $x(-2) = 0$ a $x(0) = 1$, ze vztahu (47) vyplývá hodnota $y(0) = 1$. V případě dosazení $n = -1$ do rovnice

(46) lze dostat

$$y(1) - 1,25y(0) + 0,78125y(-1) = x(1) - x(-1). \tag{48}$$

Protože podle podmínky kauzality je $y(-1) = 0$, dále platí $x(1) = 0$, $x(-1) = 0$ a právě zjištěná hodnota je $y(0) = 1$, lze nalézt ze vztahu (48) hodnotu $y(1) = 1,25y(0) = 1,25$. Dvě počáteční podmínky tedy jsou

$$y(0) = 1,\ y(1) = 1,25. \tag{49}$$

Zavedením proměnných $Y_1(n)$, $Y_2(n)$, kde

$$\begin{aligned} y(n) &= Y_1(n), \\ y(n+1) &= Y_1(n+1) = Y_2(n), \\ y(n+2) &= Y_2(n+1), \end{aligned}$$

lze zadanou rovnici převést na systém dvou lineárních homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty ve tvaru

$$\begin{aligned} Y_1(n+1) &= Y_2(n), \\ Y_2(n+1) &= -0,78125Y_1(n) + 1,25Y_2(n) + x(n+2) - x(n), \end{aligned}$$

jehož počáteční podmínky jsou

$$Y_1(0) = 1,\ Y_2(0) = 1,25.$$

Tomuto systému odpovídá systém homogenních rovnic, který má podobu

$$\begin{aligned} Y_1(n+1) &= Y_2(n), \\ Y_2(n+1) &= -0,78125Y_1(n) + 1,25Y_2(n), \end{aligned}$$

jehož řešením pomocí metody vlastních vektorů (užitím nových funkcí v Matlabu) lze dostat vektor

$$\mathbf{y}_H(n) = \begin{pmatrix} Y_1(n) \\ Y_2(n) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0,8839^n \left[C_1 \cos(0,7854n) + C_2 \sin(0,7854n)\right] \\ 0,8839^n \left[\left(\frac{5}{8}C_1 + \frac{5}{8}C_2\right)\cos(0,7854n) + \left(-\frac{5}{8}C_1 + \frac{5}{8}C_2\right)\sin(0,7854n)\right] \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{y}_H(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{C}, \tag{50}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(n) &= \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}, \\
\Phi_{11} &= 0,8839^n \cos(0,7854n), \\
\Phi_{12} &= 0,8839^n \sin(0,7854n), \\
\Phi_{21} &= 0,8839^n \left[\frac{5}{8}\cos(0,7854n) - \frac{5}{8}\sin(0,7854n)\right], \\
\Phi_{22} &= 0,8839^n \left[\frac{5}{8}\cos(0,7854n) + \frac{5}{8}\sin(0,7854n)\right], \\
\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dosazením počátečních podmínek (49) do (50) lze získat

$$\begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Odtud lze zjistit, čemu je roven vektor konstant $\mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Dosazením počátečních podmínek lze dostat konstanty C_1, C_2:

$$\begin{aligned}
C_1 &= Y_1(0) = 1, \\
C_2 &= -Y_1(0) + \frac{8}{5}\, Y_2(0) = -1 + \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4} = -1 + 2 = 1.
\end{aligned}$$

Homogenní řešení rovnice (46) $y_H(n)$ má tvar

$$y_H(n) = Y_1(n) = 0,8839^n \big[\cos(0,7854n) + \sin(0,7854n)\big]. \tag{51}$$

Podle vztahu (37) lze v tomto případě určit partikulární řešení vztahem

$$\mathbf{y}_P(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \mathbf{\Phi}(n-r-1)\mathbf{\Phi}^{-1}(0)\mathbf{g}(r),$$

kde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(n-r-1) &= 0,8839^{n-r-1}\begin{pmatrix} \Phi_{11}(n-r-1) & \Phi_{12}(n-r-1) \\ \Phi_{21}(n-r-1) & \Phi_{22}(n-r-1) \end{pmatrix}, \\
\Phi_{11}(n-r-1) &= \cos\bigl(0,7854(n-r-1)\bigr), \\
\Phi_{12}(n-r-1) &= \sin\bigl(0,7854(n-r-1)\bigr), \\
\Phi_{21}(n-r-1) &= \frac{5}{8}\Bigl[\cos\bigl(0,7854(n-r-1)\bigr) - \sin\bigl(0,7854(n-r-1)\bigr)\Bigr], \\
\Phi_{22}(n-r-1) &= \frac{5}{8}\Bigl[\cos\bigl(0,7854(n-r-1)\bigr) + \sin\bigl(0,7854(n-r-1)\bigr)\Bigr], \\
\mathbf{\Phi}^{-1}(0) &= 0,8839^{0}\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \frac{5}{8}(\cos 0 - \sin 0) & \frac{5}{8}(\cos 0 + \sin 0) \end{pmatrix}^{-1}, \\
\mathbf{g}(r) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x(r+2) - x(r) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Úpravami lze dostat

$$
\mathbf{y}_P(n) = \sum_{r=0}^{n-1} 0,8839^{n-r-1}\cdot
$$

$$
\cdot\begin{pmatrix} \frac{8}{5}\bigl[x(r+2)-x(r)\bigr]\sin\bigl[0,7854(n-r-1)\bigr] \\ \frac{8}{5}\bigl[x(r+2)-x(r)\bigr]\frac{5}{8}\Bigl(\cos\bigl[0,7854(n-r-1)\bigr] + \sin\bigl[0,7854(n-r-1)\bigr]\Bigr) \end{pmatrix}
$$

$$
= 0,8839^{n-1}\begin{pmatrix} -\frac{8}{5}\sin\bigl[0,7854(n-1)\bigr] \\ -\cos\bigl[0,7854(n-1)\bigr] - \sin\bigl[0,7854(n-1)\bigr] \end{pmatrix}.
$$

Partikulární řešení $y_P(n)$ je tedy rovno prvnímu prvku vektoru $\mathbf{y}_P(n)$ a má tvar

$$
y_P(n) = -\frac{8}{5}\,0,8839^{n-1}\sin\bigl[0,7854(n-1)\bigr]. \tag{52}
$$

Celkové řešení rovnice (46) je dáno součtem řešení (51) a (52):

$$
y(n) = y_H(n) + y_P(n) =
$$

$$
= 0,8839^{n}\bigl[\cos(0,7854n) + \sin(0,7854n)\bigr] - \frac{8}{5}\,0,8839^{n-1}\sin(0,7854n - 0,7854)
$$

a po úpravě

$$
y(n) = 0,8839^{n}\bigl[2,28\cos(0,7854n) - 0,28\sin(0,7854n)\bigr].
$$

V případě pravé strany uvedené v rovnici (46) je odezva systému popsaného touto rovnicí

$$
y(n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \le -1 \\ y_H(0) = 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0,8839^{n}\bigl[2,28\cos(0,7854n) - 0,28\sin(0,7854n)\bigr] & \text{pro } n \ge 1 \end{cases}
$$

V článku [6] je stejná rovnice řešena transformací $\mathcal{Z}$ a metodou konstrukce řešení pomocí součtu vhodného řešení odpovídající homogenní rovnice a některého partikulárního řešení nehomogenní rovnice (metodou variace konstant). Po transformaci $\mathcal{Z}$ rovnice (46), kdy $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z)$, lze dostat

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 1,25zY(z) + 1,25zy(0) + 0,78125Y(z) \\ = z^2X(z) - z^2 - X(z),$$

odkud po úpravě

$$Y(z) = \frac{z^2-1}{z^2-1,25z+0,78125}X(z)+ \\ + \frac{1}{z^2-1,25z+0,78125}\left[(z^2-1,25z)y(0)+zy(1)-z^2\right] = \\ = Y_P(z)+Y_H(z),$$

kde $Y_H(z)$ odpovídá obrazu homogenního řešení $y_H(n)$ a $Y_P(z)$ odpovídá obrazu partikulárního řešení $y_P(n)$ rovnice (46). Zpětnou transformací je pak získáno řešení $y(n)$, pro které platí:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \leq -1 \\ 1 & \text{pro } n = 0 \\ 2,2971 \cdot 0,8839^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4} + 0,1222\right) & \text{pro } n \geq 1 \end{cases}$$

Druhým postupem v [6] je metoda variace konstant, která určuje řešení rovnice (46) jako součet řešení homogenní rovnice a některého partikulárního řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y(n) = y_H(n) + y_P(n).$$

Homogenní řešení bylo určeno ve tvaru

$$y_H(n) = \frac{p_1^{n+1}}{p_1-p_2} - \frac{p_2^{n+1}}{p_1-p_2}$$

a partikulární řešení ve tvaru

$$y_P(n) = \frac{p_2^{n-1}-p_1^{n-1}}{p_1-p_2},$$

kde $p_{1,2} = 0,625 \pm \mathrm{j}0,625$ jsou komplexně sdružená čísla. Hledané řešení rovnice (46) je

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \leq -1 \\ y_H(0) = 1 & \text{pro } n = 0 \\ \dfrac{p_1^{n+1}}{p_1-p_2} - \dfrac{p_2^{n+1}}{p_1-p_2} + \dfrac{p_2^{n-1}-p_1^{n-1}}{p_1-p_2} & \text{pro } n \geq 1 \end{cases}$$

Lze snadno dokázat, že získaná řešení uvedenými třemi metodami jsou shodná. Pro čísla $p_{1,2}$ platí:

$$\begin{aligned}
p_{1,2} &= A \pm \mathrm{j}B = \sqrt{A^2+B^2}\left[\cos\left(\arctan\frac{B}{A}\right) \pm \mathrm{j}\sin\left(\arctan\frac{B}{A}\right)\right] = \\
&= \rho(\cos\varphi \pm \mathrm{j}\sin\varphi), \\
\rho &= |p_1| = |p_2| = \sqrt{0,625^2 + 0,625^2} \doteq 0,8839, \\
\varphi &= \arctan\frac{0,625}{0,625} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \doteq 0,7854.
\end{aligned}$$

Potom podle metody variace konstant platí

$$\begin{aligned}
y_H(n) = \frac{p_1^{n+1}}{p_1-p_2} - \frac{p_2^{n+1}}{p_1-p_2} &= \\
&= \frac{\rho^{n+1}\Big[\cos\big(\varphi(n+1)\big) + \mathrm{j}\sin\big(\varphi(n+1)\big)\Big]}{A+\mathrm{j}B-(A-\mathrm{j}B)} \\
&\quad - \frac{\rho^{n+1}\Big[\cos\big(\varphi(n+1)\big) - \mathrm{j}\sin\big(\varphi(n+1)\big)\Big]}{A+\mathrm{j}B-(A-\mathrm{j}B)} = \\
= \frac{\rho^{n+1}\Big[\sin\big(\varphi n+\varphi)\big)\Big]}{B} &= \frac{\rho}{B}\rho^n\big[\sin(\varphi n)\cos\varphi + \cos(\varphi n)\sin\varphi\big] = \\
&= \frac{0,8839}{0,625}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,0,8839^n\big[\cos(0,7854n)+\sin(0,7854n)\big] = \\
&= 0,8839^n\big[\cos(0,7854n)+\sin(0,7854n)\big],
\end{aligned}$$

čímž bylo dosaženo stejného výsledku jako metodou vlastních vektorů v (51). Stejně tak pro partikulární řešení platí:

$$\begin{aligned}
y_P(n) = \frac{p_2^{n-1} - p_1^{n-1}}{p_1-p_2} &= \\
&= \frac{\rho^{n-1}\Big[\cos\big(\varphi(n-1)\big) - \mathrm{j}\sin\big(\varphi(n-1)\big)\Big]}{A+\mathrm{j}B-(A-\mathrm{j}B)} \\
&\quad - \frac{\rho^{n-1}\Big[\cos\big(\varphi(n-1)\big) + \mathrm{j}\sin\big(\varphi(n-1)\big)\Big]}{A+\mathrm{j}B-(A-\mathrm{j}B)} = \\
= -\frac{\rho^{n-1}\Big[\sin\big(\varphi(n-1)\big)\Big]}{B} &= \frac{-1}{0,625}\,0,8839^{n-1}\sin\big[0,7854(n-1)\big] = \\
&= -\frac{8}{5}\,0,8839^{n-1}\sin\big[0,7854(n-1)\big]. \qquad (53)
\end{aligned}$$

V tomto případě jsou opět partikulární řešení (52) a (53) shodná. Je zřejmé, že celková řešení $y(n)$ dosažená pomocí metody vlastních vektorů a metody variace konstant jsou shodná. Nyní zbývá jen ukázat, že se také shodují s celkovým řešením získané transformací $\mathcal{Z}$ v případě $n \geq 1$. Nezbývá, než upravit výsledek získaný transformací $\mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} y(n) &= 2,2971 \cdot 0,8839^n \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 0,1222\right) = \\ &= 2,2971 \cdot 0,8839^n \big[\cos(0,7854n)\cos 0,1222 - \sin 0,1222 \sin(0,7854n)\big] = \\ &= 0,8839^n \big[2,2971 \cos(0,7854n)\cos 0,1222 - 2,2971 \sin 0,1222 \sin(0,7854n)\big] = \\ &= 0,8839^n \big[2,28 \cos(0,7854n) - 0,28 \sin(0,7854n)\big]. \end{aligned}$$

Nyní se celková řešení $y(n)$ získaná všemi třemi metodami shodují.

ZÁVĚR

Cílem této disertační práce bylo osvětlení některých principů v oboru diferenčních rovnic a představení metody řešení diferenčních rovnic pomocí vlastních vektorů. Práce byla tématicky a logicky rozdělena do několika částí.

Jednou z motivací bylo použít již známý postup pro řešení rovnic diferenciálních a pokusit se pro něj odvodit variantu pro diferenční rovnice. Obor diferenciálních rovnic je dnes již poměrně dobře zmapován a popsán, a tak se nabízí více možností pro tvorbu nových způsobů řešení diferenčních rovnic, které jsou čím dál více v kurzu díky rozvoji číslicové techniky. Existují postupy, které byly pro diferenční rovnice převzaty v plné míře z rovnic diferenciálních, nicméně ne vždy to jde tak snadno a tato práce toho byla důkazem. Záměrem bylo tudíž upozornit na rozdíl mezi diferenciálními a diferenčními lineárními soustavami a možné východisko pro řešení problematiky soustav diferenčních rovnic větších dimenzí.

Ústřední myšlenka této práce byla vnuknuta prací Otakara Borůvky, který poukázal na metodu řešení systému diferenciálních rovnic pomocí vlastních vektorů, jejíž propagátorem byl původně Eduard Weyr. Tato metoda byla v této práci popsána a její modifikací byl vytvořen postup pro řešení diferenčních rovnic. Nejdříve bylo odvozeno a dokázáno řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty (publikováno v [10]). Následně byla pak tato teorie rozšířena o řešení nehomogenních lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Bylo zjištěno, že systémy (21)-(22) pro výpočet řetězců vlastních vektorů u diferenčních rovnic jsou odlišné od systémů (15)-(16) u rovnic diferenciálních, což bylo také ukázáno v kapitole 3. Postup řešení u diferenčních rovnic je také ovlivněn nulitami, které významně ovlivňují a komplikují sestavování řetězců vlastních vektorů.

Teoretická výhoda tohoto algoritmu plyne z toho, že řeší soustavu diferenčních rovnic a tímto postupem lze řešit diferenční rovnice libovolného řádu díky faktu, že diferenční rovnici lze převést na systém rovnic prvního řádu.

Aby byla otestována robustnost navrženého algoritmu, byl tento postup vystaven konfrontaci s jinými známými postupy a metodami. Především byl algoritmus porovnán s všeobecně známou transformací $\mathcal{Z}$ a také jiným diskrétním algoritmem pro řešení diferenčních rovnic, a sice diskrétní obdobou Putzerova algoritmu, který byl často používán k porovnání, zda nově navržený postup dává skutečně správné výsledky.

Aplikace algoritmu v programu Matlab je v současnosti dokončena pro řešení systému lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty nejvýše řádu tři. Vytvořený program využívá standardní funkce Matlabu a také některé funkce nástroje pro práci se symbolickou matematikou. Navržené funkce umožňují výpočet řešení a jeho výpis v názorné podobě po zadání koeficientů do argumentu příslušné funkce.

V praktické části se disertace také zabývala ukázáním postupu na příkladě diferenční rovnice. Bylo také názorně ukázáno, že výsledek získaný dříve popsaným algoritmem je shodný s výsledky získanými dalšími dvěma metodami a že navržený algoritmus lze zařadit jako rovnocenného konkurenta mezi další známé metody. Na příkladě řešení obvodu RLC (publikováno v [11] a v plné verzi dizertační práce) bylo graficky demonstrováno srovnání přesnosti metod transformace $\mathcal{Z}$ a metody vlastních vektorů. Obě tyto diskrétní metody pak byly vystaveny konfrontaci se spojitým případem, který reprezentuje teoreticky přesné výsledky v daném obvodu. Při použití dostatečně jemného kroku dávají metoda použití transformace $\mathcal{Z}$ a metoda vlastních vektorů výsledky s přibližně stejnou chybovostí.

Disertační práce nabízí některé možnosti, jak by se dala zde započatá teorie dále rozvinout. Především návrh funkcí v programu Matlab nabízí možnosti tvorby funkcí pro řešení diferenčních rovnic vyšších řádů a především pak také zahrnutí nehomogenních lineárních diferenčních rovnic do implementace.

Dalším krokem by také mohlo být zvolení takového příkladu diferenční rovnice, jejíž řešení by ukázalo plnou sílu metody vlastních vektorů. Existují případy, se kterými si transformace $\mathcal{Z}$ dokáže poradit jen velmi těžce, a především transformace obrazu výsledku řešení zpět do originální oblasti může být hodně obtížné.

Algoritmus s použitím vlastních vektorů, prezentovaný v této dizertační práci, byl také součástí řešení grantového projektu FRVŠ 2961/2006/G1 s názvem „Algoritmus pro řešení diferenčních rovnic (inovace výuky předmětů doktorského studia)“, ve kterém byl postup začleněn do osnovy některých matematických předmětů doktorského studia na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií v Brně.

LITERATURA

[1] BORŮVKA, O. *Diferenciálne rovnice*. Vysokoškolské učebné texty. Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta. Slovenské pedagogické nakladatelstvo Bratislava, 1961.

[2] BORŮVKA, O. Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systému diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty [online]. Časopis pro pěstování matematiky, volume 79, issue 2, 1954, p. 151–155 [cit. 2011-03-10]. Dostupné z <http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/117115>.

[3] ČERMÁK, J. Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální [online]. *Časopis pro pěstování matematiky,* volume 81, issue 2, 1956, p. 224–228 [cit. 2006-09-20]. Dostupné z <http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/117190>.

[4] ČERMÁK, J. On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients [online]. *Annales Polonici Mathematici*, volume 1, 1954 [cit. 2006-04-10]. p. 195–202. Dostupné z <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/apm/apm1/apm1119.pdf>.

[5] DIBLÍK, J., BAŠTINEC, J., HLAVIČKOVÁ, I. *Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice.* 1. vyd. Brno: Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT Brno, 2005. s. 1-–174. ISBN MAT502.

[6] DIBLÍK, J., SMÉKAL, Z. O řešení diferenční rovnice $y(n+2) - 1,25(y+1) + 0,78125y(n) = x(n+2) - x(n)$. *Elektrorevue - časopis pro elektroniku* [online]. 2005 [cit. 2011-03-30]. Dostupné z <http://www.elektrorevue.cz/clanky/05007/index.html>. ISSN 1213-1539.

[7] ELAYDI, S. N. *An Introduction to Difference Equations*, Second Edition. New York: Springer - Verlag, 1999. ISBN 0-387-98830-0.

[8] KALAS, J. Výpočet matice A^k. In *XXIV International Colloquium.* Brno, 2006.

[9] KELLEY, W. G., PETERSON, A. C. *Difference equations: An Introduction with Applications*, Second Edition. Academic Press, San Diego, 2000. 403 p. ISBN 0-12-403330-X.

[10] KLIMEK, J. An algorithm for the construction of the fundamental system of solutions for the linear discrete systems with constant coefficients. In *CDDEA '06 Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2006*. Tatra Mountains Mathematical Publications, 2007, vol. 38, p. 101–109. ISSN 1210-3195.

[11] KLIMEK, J., DIBLÍK, J. Řešení sériového obvodu RLC. *Elektrorevue - časopis pro elektroniku* [online]. 2007 [cit. 2011-03-30]. Dostupné z <http://www.elektrorevue.cz/cz/clanky/power-electronics-1/0/reseni-serioveho-obvodu-rlc-1-1/>. ISSN 1213-1539.

[12] KLIMEK, J. Method of Generalized Eigenvectors in Linear Discrete Systems with Constant Coefficients. In *Proceedings of the 12th Conference Student EEICT 2006,* Volume 3. Brno: Ing. Zdeněk Novotný, CSc., 2006. p. 107–111. ISBN 80-214-3162-8.

[13] KLIMEK, J. Konstrukce řešení systému diferenčních rovnic vlastními vektory. *Elektrorevue - časopis pro elektroniku* [online]. 2006 [cit. 2007-01-30]. Dostupné z <http://www.elektrorevue.cz/clanky/06023/index.html>. ISSN 1213-1539.

[14] KLIMEK, J., DIBLÍK, J., SMÉKAL, Z. Solution of the Difference equation. In *Proceedings of the 11th Conference Student EEICT 2005,* Volume 3. Brno: Ing. Zdeněk Novotný, CSc., 2005. p. 483–487. ISBN 80-214-2890-2.

[15] KLIMEK, J., DIBLÍK, J. Konstrukce obecného řešení systému dvou diskrétních rovnic metodou vlastních vektorů. 4. matematický workshop. Brno: FAST VUT, 2005. s. 31. ISBN 80-214-2998-4.

[16] KUBEN, J. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vojenská akademie Brno, 2000.

CURRICULUM VITAE

Jméno: **Ing. Jaroslav Klimek**
Narozen: 23.1.1981 v Přílepích
Kontakt: jaroslav.klimek@centrum.cz

Vzdělání

2004 – dnes	Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky, doktorské studium, nejdříve obor Teleinformatika, pak přechod na obor Matematika v elektroinženýrství
1999 – 2004	Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, magisterské studium, obor Elektronika a sdělovací technika, Diplomová práce: Odstranění praskání gramofonové desky pomocí waveletové analýzy
1995 – 1999	Gymnázium Ladislava Jaroše, Holešov

Praxe

2007 – dnes	CN Resources International (CZ) a.s., Praha, zaměstnán jako tester aplikací a test analytik

Jazyky

Angličtina, němčina

Účast na řešení projektů

V rámci doktorského studia jsem se podílel na řešení těchto projektů:

FRVŠ 2961/2006/G1	Algoritmus pro řešení diferenčních rovnic (inovace výuky předmětů doktorského studia) - řešitel

Pedagogické aktivity

Po celou dobu prezenční části doktorského studia (2004 – 2007) jsem se podílel na výuce předmětů Matematický seminář, Matematika 1 a Matematická analýza.