

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

KLASICKÉ A ZLOMKOVÉ MODELOVÁNÍ KMITAVÉHO POHYBU

CLASSICAL AND FRACTIONAL MODELLING OF OSCILLATORY MOTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAROMÍR HOŠEK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ KISELA, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jaromír Hošek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Klasické a zlomkové modelování kmitavého pohybu

v anglickém jazyce:

Classical and fractional modelling of oscillatory motion

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vedle klasického způsobu modelování tlumených kmitů za pomoci člene úměrného první derivaci polohy je v literatuře stále častěji diskutovanější i popis pomocí rovnic obsahujících derivace neceločíselných (tzv. zlomkových) řádů. Práce by byla zaměřena na řešení modelových příkladů pro tlumené oscilátory či jejich soustavy a na srovnání výsledků a kvalitativních vlastností řešení odpovídajících klasických a zlomkových rovnic.

Cíle bakalářské práce:

1. Formulace zlomkového modelu.
2. Srovnání klasického a zlomkového modelu tělesa v tlumeném kmitavém pohybu.
3. Řešení a srovnání klasického a zlomkového modelu dvou těles spojených pružinou v tlumivém prostředí.
4. Řešení a srovnání klasického a zlomkového modelu soustav více těles spojených pružinami v tlumivém prostředí.

Seznam odborné literatury:

1. Podlubný, I.: Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, California, 1999.
2. Kisela, T.: Fractional Differential Equations and Their Applications. Brno: VUT FSI, 2008. 50 p. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 21.11.2012

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

V této práci se zabýváme problematikou tlumených kmitů. Vedle klasického popisu za pomoci členu přímo úměrného první derivaci polohy se soustředíme na model obsahující derivaci neceločíselného řádu, tzv. zlomkový model tlumených kmitů. Chování obou modelů je studováno prostřednictvím testovacích úloh popisujících pohyb jednoho, dvou, resp. tří těles spojených pružinami. Hlavním nástrojem řešení je metoda Laplaceovy transformace. Kromě výpočetních aspektů diskutujeme i některé kvalitativní vlastnosti řešení, zvláště závislost na řádu derivace ve zlomkovém modelu a chování polohy těžiště soustavy.

Summary

In this thesis we deal with the issue of damped oscillations. Besides the classic description using member directly proportional to the first derivative position we focus on the model containing derivatives of non-integer order, so-called the fractional model of damped oscillations. The behavior of both models is studied through the test applications describing the movement of one, two, respectively three bodies connected by springs. The main tool for solving is the Laplace transform method. Besides the computational aspects we discuss some qualitative properties of solutions, especially dependence on order derivative in the fractional model and the behavior of the center of gravity system position.

Klíčová slova

Diferenciální rovnice, zlomkový kalkulus, Laplaceova transformace, tlumené kmitání

Keywords

Differential equation, fractional calculus, Laplace transform, damped oscillation

HOŠEK, J. *Klasické a zlomkové modelování kmitavého pohybu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 33 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Kisela, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Klasické a zlomkové modelování kmitavého pohybu* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Kisely, Ph.D s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jaromír Hošek

Děkuji svému školiteli Ing. Tomáši Kiselovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalařské práce, cenné rady a připomínky.

Jaromír Hošek

Obsah

1	Úvod	2
2	Matematický aparát	3
2.1	Základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)	3
2.2	Vybrané vyšší funkce	4
2.2.1	Gamma funkce	4
2.2.2	Beta funkce	5
2.2.3	Mittag-Lefflerova funkce	5
2.3	Základy teorie zlomkového kalkulu (ZK)	5
2.4	Laplaceova transformace	7
3	Fyzikální motivace úlohy	9
3.1	Klasický popis kmitání	9
3.2	Popis tlumených kmitů ZK	10
4	Modelování kmitavého pohybu	11
4.1	Kmitání hmotného bodu	11
4.1.1	Modelování obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)	11
4.1.2	Modelování zlomkovým kalkulem (ZK)	13
4.2	Kmitání a pohyb soustavy dvou hmotných bodů v prostoru	15
4.2.1	Modelování obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)	15
4.2.2	Modelování zlomkovým kalkulem (ZK)	17
4.3	Kmitání a pohyb soustavy tří hmotných bodů v prostoru	20
4.3.1	Modelování obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)	20
4.3.2	Modelování zlomkovým kalkulem (ZK)	26
5	Závěr	31
6	Seznam použitých zkratk a symbolů	33

1. Úvod

Zlomkový kalkulus je odvětví matematické analýzy zabývající se vlastnostmi derivací a integrálů neceločíselných řádů a rovnicemi obsahující zlomkovou derivaci neznámé funkce (tzn. zlomkovými diferenciálními rovnicemi, viz [6], [7]). V aplikační oblasti se zlomkový kalkulus uplatňuje např. při popisu difúze (biologie, chemie), reologii, automatizaci i pro modelování tlumení.

V této práci je uveden přehled vybraných definic a vlastností obyčejných diferenciálních rovnic a zlomkového kalkulu. Hlavní částí práce je porovnání klasického celočíselného modelu tlumeného kmitání s modelem obsahující zlomkové derivace uvedeným např. v [3]. Předmětem modelování jsou soustavy jednoho, dvou a tří těles spojených pružinami.

Práce je strukturována následovně. Ve druhé kapitole je uveden matematický aparát potřebný pro zavedení obyčejných diferenciálních rovnic, vybraných vyšších funkcí, zlomkového kalkulu a Laplaceovy transformace. Ve třetí kapitole se zaměříme na fyzikální pozadí tlumeného pohybu a na různé typy modelů tlumení, včetně modelů využívajících zlomkového kalkulu. Obsahem čtvrté kapitoly jsou výpočty vztahující se jak ke klasickému, tak i zlomkovému modelu tlumení aplikovanému na soustavy jednoho, dvou nebo tří těles.

2. Matematický aparát

Kapitola je rozdělena do čtyř částí, ve kterých postupně zavedeme hlavní matematické pojmy využívané v dalším textu. Kromě základní teorie ODR se zaměříme na vybrané vyšší funkce, tj. Gamma funkce a funkce Mittag-Lefflerova typu, a také na teorii zlomkového kalkulu a Laplaceovy transformace.

2.1. Základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)

Dříve než přistoupíme k definici ODR, uveďme nejprve definici derivace funkce [8]

DEFINICE 2.1 *Nechť funkce $f(t)$ je definována na okolí $U(t_0)$. Existuje-li vlastní (tj. konečná) limita tvaru*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad \text{neboli} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

nazýváme ji vlastní derivací funkce $f(t)$ v bodě t_0 a značíme symbolem $f'(t) = \dot{f}(t) = f^{(1)}(t)$.

Je-li limita (2.1) nevlastní (tj. nekonečná) nazýváme ji nevlastní derivací funkce $f(t)$ v bodě t_0 .

Neexistuje-li vlastní ani nevlastní limita (2.1), říkáme, že funkce $f(t)$ nemá v bodě t_0 derivaci.

Derivace vyšších řádů se zavádí iterativně, tj.

$$f^{(n)}(t) = [f^{(n-1)}(t)]', n = 2, 3, \dots$$

Nyní můžeme přejít na jednu ze stěžejních definic, definici obyčejné diferenciální rovnice [8]. Pro jednoduchost uvažujme jen rovnici v explicitním tvaru.

DEFINICE 2.2 *Obyčejnou diferenciální rovnici nazýváme rovnici, v níž se vyskytují derivace hledané funkce jednoho argumentu*

$$y'(t) = f(t, y).$$

DEFINICE 2.3 *Řádem diferenciální rovnice rozumíme nejvyšší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici. Diferenciální rovnice n -tého řádu je dána výrazem*

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

DEFINICE 2.4 *Lineární diferenciální rovnici řádu n nazýváme rovnici tvaru*

$$A_n y^{(n)}(t) + \dots + A_1 y'(t) + A_0 y(t) = B,$$

kde $A_n(t), \dots, A_1(t), A_0(t), B(t)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$.

Při studiu vlastností řešení ODR má velký význam otázka jednoznačnosti, tedy za jakých podmínek prochází každým bodem určité oblasti Ω právě jedno řešení.

Neméně důležitou otázkou je existence řešení dané ODR. Abychom byli schopni na obě otázky odpovědět, musíme nejprve zavést pojem Lipschitzovy podmínky. Následující zavedené pojmy jsou převzaty z [8].

DEFINICE 2.5 *Nechť Ω je $(n+1)$ -rozměrný obor bodů o souřadnicích $t, y_1, \dots, y_n$.*

Řekneme, že funkce $f(t, y_1, \dots, y_n)$ splňuje na oboru Ω Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným $y_1, \dots, y_n$, existuje-li takové číslo $L > 0$, že pro každé dva body P, Q z oboru Ω , přičemž je $P = [t, y_1, \dots, y_n]$, $Q = [t, y_1^, \dots, y_n^*]$, platí nerovnost*

$$|f(Q) - f(P)| \leq L \sum_{k=1}^n |y_k^* - y_k|. \quad (2.2)$$

VĚTA 2.6 (VĚTA O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ) *Nechť funkce $f(t, y_1, \dots, y_n)$ je spojitá na uzavřeném $(n+1)$ -rozměrném oboru Ω a nechť tam splňuje Lipschitzovu podmínku (2.2).*

Pak existuje právě jedno řešení $y = y(t)$ diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),$$

které splňuje Cauchyovy počáteční podmínky

$$y_0 = y(t_0), y'_0 = y'(t_0), \dots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(t_0), \quad (2.3)$$

kde $t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ jsou taková daná čísla, že bod $A = [t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}]$ leží uvnitř oboru Ω .

Příslušné pojmy a tvrzení pro soustavu diferenciálních rovnic získáme zobecněním předchozích definic, které jsou uvedeny například v [8].

2.2. Vybrané vyšší funkce

V této části se zaměříme na vybrané vyšší funkce, které se ve výpočtech integrálů a derivací neceločíselného řádu velmi často vyskytují.

2.2.1. Gamma funkce

Gamma funkce, tzv. Eulerův integrál 2. druhu, představuje zobecnění faktoriálu pro reálná čísla. Tuto vlastnost lze vyjádřit vztahem

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{R}^+.$$

Řešení této rovnice je možné zapsat v integrační podobě jako

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.4)$$

Definici $\Gamma(z)$ je možné zobecnit pro $z \in \mathbb{C}$. viz [7].

2.2.2. Beta funkce

Beta funkce, tzn. Eulerův integrál 1. druhu, je definovaná pro $\nu, \mu \in \mathbb{R}^+$ vztahem

$$B(\nu, \mu) = \int_0^1 x^{\nu-1} (1-x)^{\mu-1} dx. \quad (2.5)$$

Výraz (2.5) lze také přepsat pomocí Gamma funkcí na tvar

$$B(\nu, \mu) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu + \mu)}.$$

2.2.3. Mittag-Lefflerova funkce

Důležitými vyššími funkcemi vyskytujícími se zejména při řešení rovnic neceločíselného řádu jsou tzv. funkce Mittag-Lefflerova typu, které zobecňují exponenciální funkci. Pro naše účely postačí dvouparametrická funkce Mittag-Lefflerova typu [7], definovaná vztahem

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.6)$$

Vhodnými volbami parametrů α, β můžeme z tvaru (2.6) obdržet některé známé funkce, například

$$E_{1,1}(z) = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z),$$

$$E_{1,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

2.3. Základy teorie zlomkového kalkulu (ZK)

V následující části zavedeme základní pojmy zlomkového kalkulu, tj. neceločíselný integrál a derivaci pro více informací, viz. [3], [6] a [7].

Pro zavedení zlomkového integrálu je vhodné nejdříve zavést Cauchyho integrační formuli, která je dokázána v [11].

VĚTA 2.7 (CAUCHYHO INTEGRAČNÍ FORMULE) *Bud' $f(t)$ funkce integrovatelná na $\langle a, b \rangle$. Pak pro každé číslo $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$J_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau,$$

kde $J_a^n f(t)$ je označení n -násobného integrálu funkce $f(t)$

$$J_a^n f(t) = \int_a^t \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

2.3. ZÁKLADY TEORIE ZLOMKOVÉHO KALKULU (ZK)

Zobecněním Cauchyho integrační formule pro neceločíselné hodnoty n dostáváme

DEFINICE 2.8 *Nechť je funkce $f(t)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\nu \in \mathbb{R}^+$, pak definujeme Riemannův-Liouvilleův zlomkový integrál ve tvaru*

$${}_a D_t^{-\nu} f(t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\nu)} (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Nyní můžeme přejít k definici zlomkové derivace. Existuje několik odlišných přístupů viz. [7]. Mezi nejznámější a nejvíce používané definice zlomkové derivace patří zejména tzv. Riemannův-Liouvilleův a Caputův přístup. V naší práci se pro jednoduchost omezíme na Caputovu definici.

DEFINICE 2.9 *Nechť n je přirozené číslo takové, že $n - 1 < \alpha \leq n$ a funkce $f(t)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Definujeme Caputovu zlomkovou derivaci řádu α tvarem*

$${}_a^C D^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n)} (t - \tau)^{\alpha+1-n} d\tau & \alpha \notin \mathbb{Z}^+, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (2.8)$$

Z vlastností Caputovy definice derivace (2.9) je třeba uvést především její linearitu

$${}_a^C D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a^C D^\alpha f(t) + \mu {}_a^C D^\alpha g(t).$$

Pro důkaz i dalších vlastností, např. skládání atd., viz. [4] a [7].

Nyní podle [6] zavedme zlomkové diferenciální rovnice. Jelikož teorie kolem nelineárních zlomkových diferenciálních rovnic je stále otevřená, zaměříme se na zavedení lineární zlomkové diferenciální rovnice a její vlastnosti.

DEFINICE 2.10 *Lineární zlomková diferenciální rovnice je definována tvarem*

$${}_a^C D^{\alpha_m} y(t) + \sum_{k=1}^{m-1} p_k(t) {}_a^C D^{\alpha_k} y(t) + p_0(t) y(t) = f(t), \quad (2.9)$$

kde $\alpha_k, (k = 1, 2, \dots, m)$ jsou reálná čísla taková, že $\alpha_m > \alpha_{m-1} > \dots > \alpha_1$, a kde funkce $p_k(t), (k = 0, 1, \dots, m-1)$ jsou spojité funkce.

Uvažujme dále počáteční podmínky ve tvaru

$$y(0)^{(k-1)} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

kde $n - 1 < \alpha_m \leq n$ a $b_k \in \mathbb{R}$, pro $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Pak platí věta

VĚTA 2.11 (EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST) *Nechť funkce $f(t)$ je ohraničená na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a funkce $p_k(t), k = 0, 1, \dots, m-1$ jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle 0, T \rangle$, pak pro počáteční problém (2.9) a (2.10) existuje právě jedno řešení $y(t) \in L^1(0, T)$.*

Důkaz lze nalézt v [7].

V oblasti zlomkového kalkulu patří mezi nejvíce prozkoumané tzv. dvoučlenná rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y(t) &= \lambda y(t), \\ y^{(k-1)}(0) &= b_k, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha > 0, k = 1, 2, \dots, n$ kdy $n - 1 < \alpha \leq n$. Pro tento typ rovnice je známé řešení ve tvaru

$$y(t) = \sum_{j=1}^n b_j t^{j-1} E_{\alpha,j}(\lambda t^\alpha). \quad (2.12)$$

Poznámka: Ve speciálním případě $\alpha = 1$ nám rovnice (2.11) dává velmi dobře známou diferenciální rovnici $y' = \lambda y$ s řešením $y = b_1 e^{\lambda t}$.

2.4. Laplaceova transformace

Laplaceova transformace patří mezi tzv. integrální transformace umožňující převod diferenciálních rovnic ODR na algebraické rovnice.

Podle [5] definujeme Laplaceovu transformaci

DEFINICE 2.12 *Nechť funkce $f(t)$ je definována na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Pak Laplaceovou transformací funkce $f(t)$ rozumíme funkci $F(s)$ definovanou vztahem*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

za předpokladu, že nevlastní integrál (2.13) konverguje alespoň pro jedno $s \in \mathbb{R}$.

PŘÍKLAD 2.4.1 *Uvažujme funkci $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{R}$, pro kterou určíme Laplaceův obraz*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > 0.$$

Pro práci s Laplaceovou transformací je nezbytné znát její základní vlastnosti. Na základě [4], [5], [7] některé z nich uvedme.

Linearita

Pro funkce $f(t), g(t)$, které jsou po částech spojitě, a pro konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Obraz derivace

Pro funkci $f(t)$ spojitou na otevřeném intervalu $(0, \infty)$ a pro její derivaci $f^{(n)}(t)$ platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_+). \quad (2.14)$$

2.4. LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Vztah (2.14) platí pouze pro $n \in \mathbb{N}$, což v našem případě nestačí. Je potřeba (2.14) modifikovat pro Caputovu neceločíselnou derivaci. Je možné dokázat (viz. [7]), že pro obraz Caputovy derivace platí

$$\mathcal{L}\{ {}_0^C D^p f(t) \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < p \leq n. \quad (2.15)$$

Při řešení ODR Laplaceovou transformací bývá často největší problém inverzní (zpětná) transformace, pro kterou je potřeba výsledný algebraický tvar rozložit na parciální zlomky. Pro ulehčení zpětné transformace byl sestaven tzv. Laplaceův slovník, v němž jsou k daným obrazům, tj. parciálním zlomkům, uvedeny jejich vzory.

	Vzor $f(t)$	Obraz $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
8	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
10	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{at} \left[M \cos(bt) + \frac{aM+N}{b} \sin(bt) \right]$	$\frac{Ms+N}{(s-a)^2 + b^2}$

Tabulka 2.1: Laplaceův slovník

Tabulka (2.1) nám však nemusí stačit, budeme-li provádět zpětnou Laplaceovu transformaci diferenciální rovnice neceločíselného řádu. Jak je odvozeno v [4], pro Laplaceovu transformaci funkce Mittag-Lefflerova typu dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \mathcal{L}\left\{t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, t, s\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}, t, s\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k + \beta}} = s^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k = \frac{s^{-\beta}}{\left(1 - \frac{a}{s^\alpha}\right)} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Speciálně pro funkci (2.12) popisující řešení (2.11) dostáváme

$$Y(s) = \sum_{j=1}^n b_j \frac{s^{\alpha-j}}{s^\alpha - a}. \quad (2.17)$$

3. Fyzikální motivace úlohy

Kapitola je rozdělena do dvou částí, ve kterých se postupně zaměříme na zavedení fyzikálních pojmů potřebných pro sestavení modelu kmitání hmotného bodu. Budeme se zde zabývat formulací rovnic pro klasické modelování ODR a pro modelování ZK.

3.1. Klasický popis kmitání

Klasickým popisem kmitání rozumíme modelování kmitů v rámci tzv. newtonovské (klasické) mechaniky (NM) popisující vztah mezi tělesem a silou na něj působící. Základním kamenem tohoto přístupu jsou tzv. Newtonovy pohybové zákony [1]

První Newtonův zákon - Zákon setrvačnosti

Je-li volná částice v klidu vzhledem ke vhodně zvolené vztažné soustavě, pak v něm setrvá. Pohybuje-li se stálou rychlostí, bude v tomto pohybu neustále pokračovat.

Druhý Newtonův zákon - Zákon síly

Složka zrychlení ve směru dané souřadnicové osy je určena výhradně součtem složek všech sil měřených podél téže osy a nezávisí na složkách sil ve směrech os ostatních. Lze je zapsat ve tvaru

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

kde $\sum \mathbf{F}$ vyjadřuje vektorový součet všech vnějších sil působících na těleso.

Třetí Newtonův zákon - Zákon akce a reakce

Dvě tělesa na sebe navzájem působí stejně velkou silou opačného směru. Síly akce a reakce současně vznikají a současně zanikají. Zákon lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}.$$

Kmitání se vyskytuje všude kolem nás. Od kmitání struny přes pulzující píсты motorů až ke kmitání molekul vzduchu přenášející zvukové vlny. Dále se zaměříme na modelování kmitání soustavy tvořené hmotným bodem a pružinou. Na základě (3.1) můžeme ideální (netlumený) kmitavý pohyb pružiny s hmotným bodem popsat rovnicí

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3.2)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu a k je tuhost pružiny.

Rovnice (3.2) má obecně známé řešení ve tvaru

$$x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \varphi),$$

kde x_{max} je amplituda, ω je úhlová frekvence definovaná vztahem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a φ je fázový posun. Podrobnější popis rovnice (3.2) a jejího řešení lze najít v [2].

Netlumené kmitání se však v reálném světě téměř vůbec nevyskytuje. Z tohoto důvodu se nadále zaměříme na případy tlumeného kmitání.

Tlumení kmitání je způsobeno tzv. odporovými silami, které pohybovou energii soustavy nenávratně přeměňují na energii tepelnou. Při modelování tlumených kmitů výjdeme z rovnice (3.2), do které dodáme tlumící člen $-p\dot{x}$ vyjadřující směr a velikost odporové síly úměrné rychlosti tělesa. Dostáváme tedy vztah

$$m\ddot{x} = -kx - p\dot{x}, \quad (3.3)$$

kde p je součinitel útlumu prostředí. Jelikož typů odporových sil v reálném světě je nepřehledné množství, je snaha nahradit všechny typy odporových sil jednou třecí silou F_R . Jak je uvedeno v [3], lze výslednou odporovou sílu F_R vyjádřit vztahem

$$F_R = -p \operatorname{sgn}(v)|v|^\beta, \quad \operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} -1 & \text{pro } v < 0 \\ 0 & \text{pro } v = 0 \\ 1 & \text{pro } v > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

kde p je součinitel tření a exponent β je reálné číslo, jehož hodnota je závislá na typu třecích sil. Pro speciální případy lze β experimentálně určit:

$$\begin{aligned} \beta = 0 & \quad \text{pro statické a kinetické tření pevných látek,} \\ \beta = 1 & \quad \text{pro tření kapalin s vysokou viskozitou,} \\ \beta = 2 & \quad \text{obecně pro vysoké rychlosti.} \end{aligned}$$

Pro plyny a kapaliny s malou viskozitou lze exponent β určit aproximativně k daným speciálním případům.

Z rovnice (3.4) vyplývá, že pro $\beta = 1$ dostáváme tlumící sílu uvedenou v rovnici (3.3). Pro $\beta \notin \{0, 1\}$ obdržíme nelineární tvar třecí síly F_R , čímž se obtížnost výpočtu tlumeného pohybu řádově zvýší.

3.2. Popis tlumených kmitů ZK

Vzhledem k nelineárnosti obecné definice třecí síly (3.4) se hledá jiná možnost, jak snadněji modelovat tlumení, aniž bychom museli řešit nelineární rovnice. Jednou z těchto možností je modelování pomocí zlomkového kalkulu. V případě ZK existuje více možných modelů. Jedním z nich je Bagleyho-Torvikova rovnice [10]

$$\ddot{x}(t) + p {}^C D^{\frac{3}{2}} x(t) + kx(t) = f(t),$$

která velmi dobře popisuje pohyb pevné desky v Newtonovské tekutině.

Další možnou rovnicí pro modelování tlumení je dle [3] rovnice

$${}_a^C D^\alpha x(t) = -kx, \alpha \in (1, 2), \quad (3.5)$$

pro kterou jsou počáteční podmínky dány ve tvaru

$$x(0) = b_1, \dot{x}(0) = b_1.$$

Rovnice (3.5) je speciálním případem rovnice (2.11). Zvláště pro $\alpha = 2$ se (3.5) redukuje na klasickou rovnici netlumeného kmitání (3.2).

Poznamenejme, že v [3] je (3.5) uvažována s různými definicemi zlomkových derivací. V této práci se soustředíme na případ Caputovy derivace pro snadnou interpretaci odpovídajících počátečních podmínek.

4. Modelování kmitavého pohybu

Následující kapitola je zaměřena na modelování kmitavého pohybu s tlumením. Jsou zde uvedeny tři speciální případy kmitání pružiny, které budeme modelovat obyčejnými diferenciálními rovnicemi a zlomkovým kalkulem.

Pro jednoduchost a přehlednost uvažujme hmotnost $m = 1$.

4.1. Kmitání hmotného bodu

Prvním příkladem kmitání pružiny je případ pevně uchycené pružiny s tuhostí k a délky l , na níž je uchyceno těleso ($m = 1$). Celá soustava se nachází v tlumivém prostředí.



4.1.1. Modelování obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)

Vyjdeme z 2. Newtonova pohybového zákona (3.1), pomocí kterého formulujeme počáteční problém

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -kx - p\dot{x}, \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Pro výpočet řešení počátečního problému (4.1) použijeme Laplaceovu transformaci (2.14), ze které dostaneme obrazy jednotlivých derivací. Aplikací Laplaceovy transformace na (4.1) dostaneme rovnici, ze které vyjádříme neznámou $X(s)$

$$s^2X(s) - x_0s - v_0 + psX(s) - px_0 + kX(s) = 0,$$

$$X(s) = \frac{x_0s + v_0 + px_0}{s^2 + ps + k}.\tag{4.2}$$

Pro rozklad zlomku (4.2) na jednotlivé parciální zlomky je potřeba určit typy kořenů kvadratické rovnice ve jmenovateli, tj.

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = p^2 - 4k.\tag{4.3}$$

Dostáváme možné případy.

(a) Prvním případem je kladný diskriminant D

$$D > 0 \implies p^2 > 4k,\tag{4.4}$$

čímž získáme dva různé reálné kořeny s_1, s_2 ve tvaru (4.3). Následně zlomek (4.2) rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)}, \\ A &= \frac{v_0 + (p+s_1)x_0}{s_1-s_2}, \\ B &= \frac{v_0 + (p+s_2)x_0}{s_2-s_1}. \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1) a dosazením získáme řešení počátečního problému (4.1) za podmínky (4.4)

$$x(t) = \frac{2v_0 + (p + \sqrt{p^2 - 4k})x_0}{2\sqrt{p^2 - 4k}} e^{-\frac{p+\sqrt{p^2-4k}}{2}t} - \frac{2v_0 + (p - \sqrt{p^2 - 4k})x_0}{2\sqrt{p^2 - 4k}} e^{-\frac{p-\sqrt{p^2-4k}}{2}t}. \quad (4.5)$$

Řešení (4.5) modeluje tzv. nadkritický útlum. Tento typ tlumení se v praxi nejvíce využívá u tlumičů.

(b) Druhým případem je nulový diskriminant D , tedy rovnice má jeden dvojnásobný kořen $s_{1,2}$

$$s_{1,2} = -\frac{p}{2}. \quad (4.6)$$

Při násobnosti kořenů (4.2) získáme dva parciální zlomky,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_1)^2}, \\ A &= x_0, \\ B &= v_0 + px_0 + x_0s_1. \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1) a dosazením, získáme řešení počátečního problému (4.1) za podmínky (4.6)

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{p}{2}t} + \left(v_0 + \frac{p}{2}x_0\right) t e^{-\frac{p}{2}t}. \quad (4.7)$$

Řešení (4.7) modeluje tzv. kritický útlum.

(c) Zbývajícím případem je záporný diskriminant D , tedy máme dva komplexně sdružené kořeny

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4k - p^2}}{2}.$$

V případě komplexně sdružených kořenů poupravě získáme přímo parciální zlomek, jehož jmenovatel upravíme na čtverec a neznámé koeficienty A, B nám přímo vyplynou z čitatele zlomku (4.2).

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{As+B}{\left(s-\frac{p}{2}\right)^2+k-\left(\frac{p}{2}\right)^2}, \\ A &= x_0, \\ B &= v_0 + px_0. \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací parciálního zlomku (tab. 2.1) získáme řešení počátečního problému (4.1)

$$x(t) = e^{-\frac{p}{2}t} \left(x_0 \cos \sqrt{k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{v_0 + \frac{p}{2}x_0}{\sqrt{k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{k - \frac{p^2}{4}}t \right). \quad (4.8)$$

Řešení (4.8) modeluje tzv. podkritický útlum, který se uplatňuje např. u kmitání reálné pružiny ve vzduchu.

4.1.2. Modelování zlomkovým kalkulem (ZK)

Vydeme z diferenciální rovnice (3.5), tj. řešíme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} {}^C_0D^\alpha x(t) &= -kx(t), \alpha \in (1, 2) \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pro řešení úlohy (4.9) využijeme opět Laplaceovu transformaci. Aplikací vztahu (2.15) obdržíme jednotlivé obrazy derivací. Následnou aplikací transformace na úlohu (4.9) obdržíme rovnici, z níž vyjádříme neznámou $X(s)$, kterou následně rozložíme do dvou zlomků

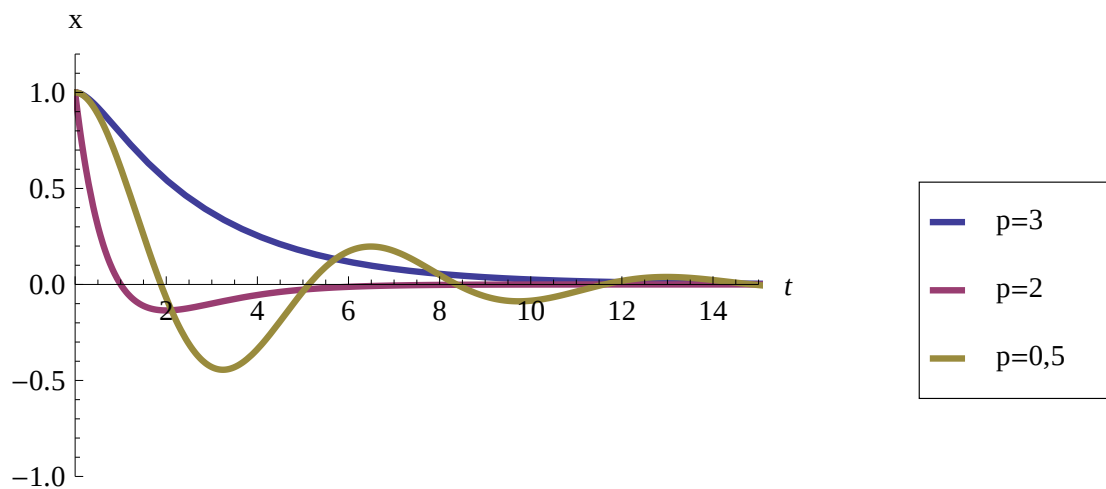
$$\begin{aligned} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x_0 - s^{\alpha-2}v_0 + kX(s) &= 0, \\ X(s) &= \frac{s^{\alpha-1}x_0 + s^{\alpha-2}v_0}{s^\alpha + k} = \frac{s^{\alpha-1}x_0}{s^\alpha + k} + \frac{s^{\alpha-2}v_0}{s^\alpha + k}. \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací (2.16) převedeme oba zlomky a získáme řešení počáteční úlohy (4.9)

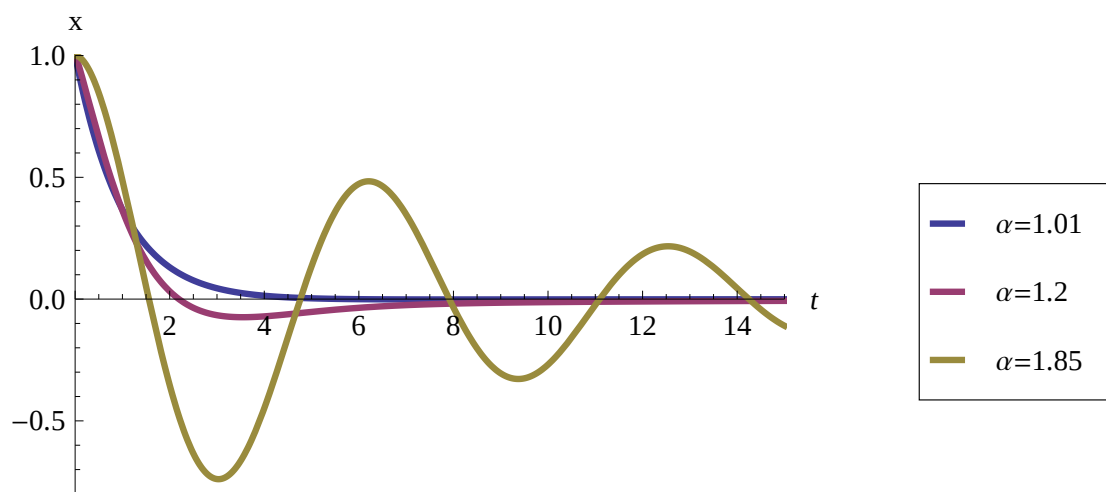
$$x(t) = x_0 E_{\alpha,1}(-kt^\alpha) + v_0 t E_{\alpha,2}(-kt^\alpha). \quad (4.10)$$

Porovnáním grafického řešení ODR (obr. 4.1) a ZK (obr. 4.2) vidíme vzájemnou podobnost. Exponent α má podobný význam jako součinitel okolního tření p , přesněji snižováním exponentu α se model chová, jako by kmitání probíhalo v prostředí s větším součinitelem útlumu. Zatímco klasický model umožňuje nalézt mezní (kritickou) hodnotu $p = 2\sqrt{k}$, při kterém se řešení kvalitativně změní, zlomkový model tuto možnost neposkytuje.

ODR

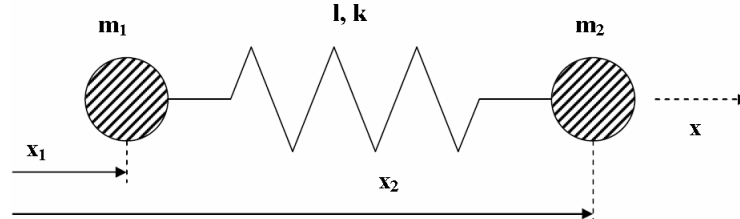
Obrázek 4.1: Poloha bodu pro hodnoty: $l = 1, x_0 = 1, v_0 = 0, k = 1$

ZK

Obrázek 4.2: Poloha bodu pro hodnoty: $l = 1, x_0 = 1, v_0 = 0, k = 1$

4.2. Kmitání a pohyb soustavy dvou hmotných bodů v prostoru

Druhým příkladem kmitání pružiny je volně umístěná soustava dvou hmotných bodů o stejné hmotnosti $m_1 = m_2 = 1$ spojených pružinou o délce l a tuhosti k v tlumeném prostředí.



4.2.1. Modelování obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)

Při řešení soustavy vyjdeme z 2. Newtonova pohybového zákona (3.1), aplikovaného na oba hmotné body, který nám definuje počáteční úlohu

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -k(l - (x_2 - x_1)) - p\dot{x}_1, \\ \ddot{x}_2 &= k(l - (x_2 - x_1)) - p\dot{x}_2, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1^0, \\ x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = v_2^0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tvar $l - (x_2 - x_1)$ v (4.11) vyjadřuje změnu délky pružiny mezi hmotnými body. V dalším kroku provedeme transformaci souřadnic, která nám soustavu dvou diferenciálních rovnic rozdělí na dvě samostatné počáteční úlohy, které nám určí vzdálenost hmotných bodů a polohu těžiště soustavy v prostoru.

První transformaci souřadnic je

$$\rho = x_2 - x_1,$$

jejíž aplikací na počáteční úlohu (4.11) dostáváme rovnici a počáteční podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = k(l - (x_2 - x_1)) - p\dot{x}_2 + k(l - (x_2 - x_1)) + p\dot{x}_1 = \\ &= 2k(l - (x_2 - x_1)) - p(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 2k(l - \rho) - p\dot{\rho}, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + p\dot{\rho} + 2k\rho &= 2kl, \\ \rho(0) &= x_2^0 - x_1^0 = \rho_1, \quad \dot{\rho}(0) = v_2^0 - v_1^0 = \rho_2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Druhá transformace souřadnic je ve tvaru

$$\eta = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

4.2. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY DVOU HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

která aplikací na úlohu (4.11) dává rovnici

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} &= \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = \frac{-k(l - (x_2 - x_1)) - px_1 + k(l - (x_2 - x_1)) - px_2}{2} = -p \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -p\dot{\eta}, \\ \eta(0) &= \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} = \eta_1, \quad \dot{\eta}(0) = \frac{v_1^0 + v_2^0}{2} = \eta_2.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Pro počáteční úlohu (4.12) postupujeme analogicky jako v případě kmitání hmotného bodu. Počáteční úloha (4.12) se nám opět rozloží na 3 případy v závislosti na kladném, nulovém nebo záporném diskriminantu D ,

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, D = p^2 - 8k.\tag{4.14}$$

(a) Pro případ kladného diskriminantu D , tj. $p^2 > 8k$, dostáváme

$$\rho(t) = l + \left(\rho_1 - l - \frac{\rho_2 + p\rho_1 + (\rho_1 - l) \frac{-p - \sqrt{p^2 - 8k}}{2}}{-\sqrt{p^2 - 8k}} \right) e^{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 8k}}{2}t} + \left(\frac{\rho_2 + p\rho_1 + (\rho_1 - l) \frac{-p - \sqrt{p^2 - 8k}}{2}}{-\sqrt{p^2 - 8k}} \right) e^{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 8k}}{2}t}.\tag{4.15}$$

(b) Pro nulový diskriminantu D , tj. $p^2 = 8k$, obdržíme

$$\rho(t) = l + e^{-\frac{p}{2}t} \left[\rho_1 - l + \left(\rho_2 + \frac{p}{2}\rho_1 - \frac{4kl}{p} \right) t \right].\tag{4.16}$$

(c) Poslední možností je záporný diskriminantu D , tj. $p^2 < 8k$. V tomto případě je řešením

$$\rho(t) = l + e^{-\frac{p}{2}t} \left[(\rho_1 - l) \cos \sqrt{2k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{\frac{p}{2}\rho_1 - \frac{p}{2}l + \rho_2}{\sqrt{2k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{2k - \frac{p^2}{4}}t \right].\tag{4.17}$$

Počáteční úlohu (4.13) řešíme následovně

$$\begin{aligned}N(s)s^2 + pN(s)s &= p\eta_1 + \eta_1s + \eta_2, \\ N(s) &= \frac{p\eta_1 + \eta_1s + \eta_2}{s^2 + ps} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+p}.\end{aligned}$$

Vypočteme koeficienty A, B

$$\begin{aligned}A &= \eta_1 + \frac{\eta_2}{p}, \\ B &= -\frac{\eta_2}{p},\end{aligned}$$

a zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$\eta(t) = \eta_1 + \frac{\eta_2}{p} (1 - e^{-pt}).\tag{4.18}$$

4.2.2. Modelování zlomkovým kalkulem (ZK)

Při modelování kmitání a pohybu soustavy vyjdeme z diferenciálních rovnic (3.5) formulujících úlohu

$$\begin{aligned} {}^C_0D^\alpha x_1(t) &= -k(l - (x_2 - x_1)) \\ {}^C_0D^\alpha x_2(t) &= k(l - (x_2 - x_1)), \text{ pro } \alpha \in (1, 2), \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1^0, \\ x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = v_2^0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Úloha (4.19) se řeší stejně, jak tomu bylo v předchozím případě. Rovnice získané z jednotlivých transformací ρ a η mají tvar

$$\begin{aligned} {}^C_0D^\alpha \rho(t) + 2k\rho(t) &= 2kl, \\ \rho(0) &= x_2 - x_1 = \rho_1, \quad \dot{\rho}(0) = v_2 - v_1 = \rho_2, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} {}^C_0D^\alpha \eta(t) &= 0, \\ \eta(0) &= \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} = \eta_1, \quad \dot{\eta}(0) = \frac{v_1^0 + v_2^0}{2} = \eta_2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Počáteční úlohu (4.20) řešíme použitím Laplaceovy transformace, zvláště vztahem (2.15). Z obdržené rovnice vyjádříme neznámou $R(s)$ a následně vzniklý zlomek rozložíme na součet čtyř zlomků, jejichž tvar vychází z (2.17)

$$\begin{aligned} s^\alpha R(s) - \rho_1 s^{\alpha-1} - \rho_2 s^{\alpha-2} + 2kR(s) &= \frac{2kl}{s}, \\ R(s) &= \frac{\frac{2kl}{s} + \rho_1 s^{\alpha-1} + \rho_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + 2k} = \frac{2kl}{s(s^\alpha + 2k)} + \frac{\rho_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 2k} + \frac{\rho_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + 2k} = \frac{l}{s} - \frac{ls^{\alpha-1}}{s^\alpha + 2k} + \frac{\rho_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 2k} + \frac{\rho_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + 2k} \end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací, dle vztahu (2.16), jednotlivých zlomků dostáváme řešení počáteční úlohy (4.20) pro $\alpha \in (1, 2)$

$$\rho(t) = l + (\rho_1 - l)E_{\alpha,1}(-2kt^\alpha) + \rho_2 t E_{\alpha,2}(-2kt^\alpha). \tag{4.22}$$

Postup při řešení počáteční úlohy (4.21) je analogický jako při výpočtu řešení předchozí úlohy. Pro neznámou $N(s)$ dostáváme

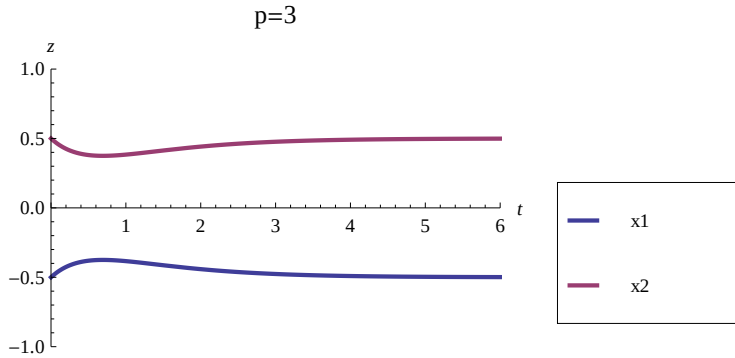
$$\begin{aligned} s^\alpha N(s) - \eta_1 s^{\alpha-1} - \eta_2 s^{\alpha-2} &= 0, \\ N(s) &= \frac{\eta_1 s^{\alpha-1} + \eta_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha} = \frac{\eta_1}{s} + \frac{\eta_2}{s^2}. \end{aligned}$$

Použitím zpětné Laplaceovy transformace obržíme řešení úlohy (4.21) pro $\alpha \in (1, 2)$

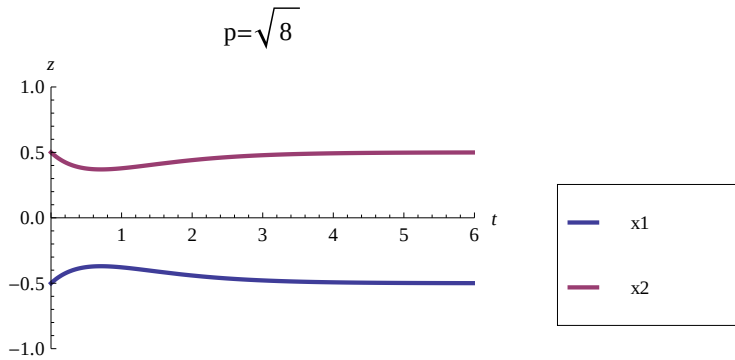
$$\eta(t) = \eta_1 + \eta_2 t. \tag{4.23}$$

4.2. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY DVOU HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

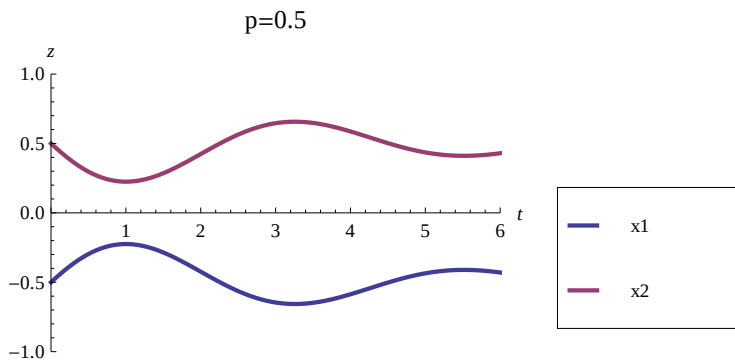
V tomto případě se grafické znázornění řešení pro ODR (obr. 4.3 až obr. 4.5) a ZK (obr. 4.6 až obr. 4.8) dá považovat za velmi podobné, což nelze říct o pohybu těžiště soustavy. Zatímco v klasickém případě má pohyb těžiště svoji limitu, u řešení ZK se soustava lineárně vzdaluje od počátku, což nekoresponduje plně s naší představou o funkci odporových sil. Poynamejme, že pokud bychom v modelu místo Caputovy derivace použili Riemannovu-Liouvillovu derivaci, pohyb těžiště soustavy by neměl lineární průběh, nýbrž mocninný, tj. $\frac{t^{(\alpha-1)}}{2\Gamma(\alpha)}$.



Obrázek 4.3: Klasické modelování, nadkritický útlum, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, v_1^0 = 1, v_2^0 = 0, k = 1$

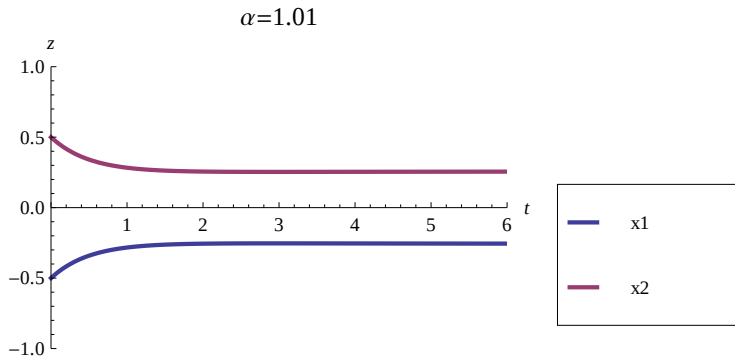


Obrázek 4.4: Klasické modelování, kritický útlum, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, v_1^0 = 1, v_2^0 = 0, k = 1$

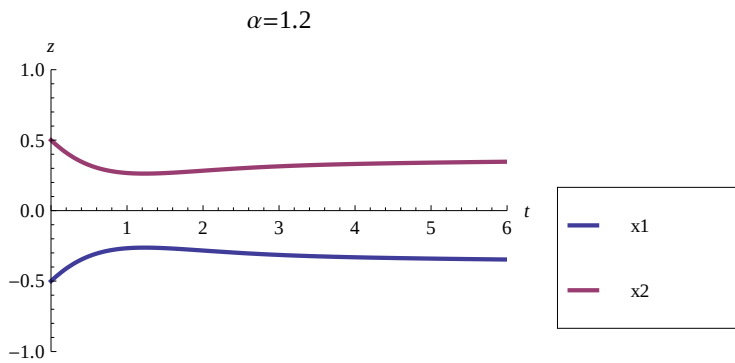


Obrázek 4.5: Klasické modelování, podkritický útlum, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, v_1^0 = 1, v_2^0 = 0, k = 1$

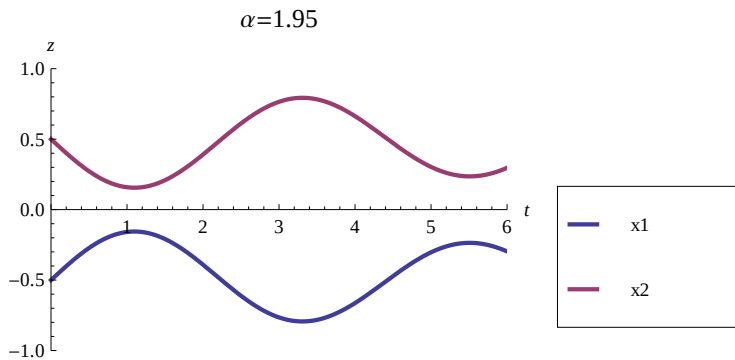
4.2. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY DVOU HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU



Obrázek 4.6: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, v_1^0 = 1, v_2^0 = 0, k = 1$



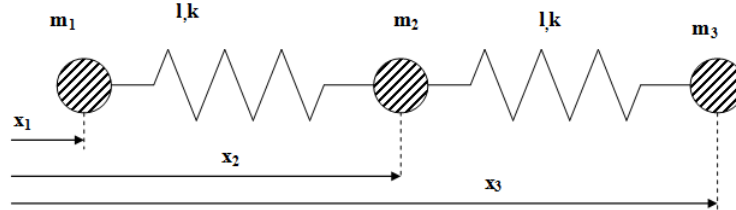
Obrázek 4.7: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, v_1^0 = 1, v_2^0 = 0, k = 1$



Obrázek 4.8: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, v_1^0 = 1, v_2^0 = 0, k = 1$

4.3. Kmitání a pohyb soustavy tří hmotných bodů v prostoru

Třetím příkladem kmitání pružiny je volně umístěná soustava tří hmotných bodů o stejné hmotnosti $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ spojené dvěma pružinami o stejné délce l a stejných tuhostech k v tlumeném prostředí.



4.3.1. Modelování obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR)

Při řešení příkladu vyjdeme z 2. Newtonova pohybového zákona (3.1), jehož aplikace na jednotlivé hmotné body soustavy nám definuje počáteční úlohu

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -k(l - (x_2 - x_1)) - p\dot{x}_1 \\
 \ddot{x}_2 &= k(l - (x_2 - x_1)) - k(l - (x_3 - x_2)) - p\dot{x}_2 \\
 \ddot{x}_3 &= k(l - (x_3 - x_2)) - p\dot{x}_3, \\
 x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1^0, \\
 x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = v_2^0, \\
 x_3(0) &= x_3^0, \quad \dot{x}_3(0) = v_3^0.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Tvary $l - (x_2 - x_1)$ a $l - (x_3 - x_2)$ vyjadřují změny délky pružiny mezi hmotnými body. V dalším kroku provedeme transformaci souřadnic, která nám soustavu tří diferenciálních rovnic rozdělí na jednu diferenciální rovnici 2. řádu pro určení polohy těžiště soustavy v prostoru a na soustavu dvou diferenciálních rovnic 2. řádu pro určení vzdálenosti hmotných bodů.

První transformací je

$$\eta = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

kteřá nám úlohu (4.24) transformuje na jednu rovnici, s počátečními podmínkami, ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \ddot{\eta} &= -p\dot{\eta}, \\
 \eta(0) &= \frac{x_1^0 + x_2^0 + x_3^0}{3} = \eta_1, \quad \dot{\eta}(0) = \frac{v_1^0 + v_2^0 + v_3^0}{3} = \eta_2.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Druhá a třetí transformace je dána výrazy

$$\rho = x_2 - x_1, \quad \xi = x_3 - x_2,$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

ze kterých získáme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= 2k(l - \rho) - k(l - \xi) - p\dot{\rho} \\ \ddot{\xi} &= 2k(l - \xi) - k(l - \rho) - p\dot{\xi}, \\ \rho(0) &= x_2^0 - x_1^0 = \rho_1, \quad \dot{\rho}(0) = v_2^0 - v_1^0 = \rho_2, \\ \xi(0) &= x_3^0 - x_2^0 = \xi_1, \quad \dot{\xi}(0) = v_3^0 - v_2^0 = \xi_2.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Pro řešení počáteční úlohy (4.25) použijeme Laplaceovu transformaci, ze které získáme obrazy derivací, jejichž dosazením dostaneme rovnici, ze které následně vyjádříme neznámou $N(s)$

$$\begin{aligned}Ns^2 - \eta_1 s - \eta_2 + pNs - p\eta_1 &= 0, \\ N(s) &= \frac{\eta_1 s + p\eta_1 + \eta_2}{s^2 + ps}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Zlomek (4.27) rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned}N(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+p}, \\ A &= \eta_1 + \frac{\eta_2}{p}, \\ B &= -\frac{\eta_2}{p}.\end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1), získáváme řešení počátečního problému (4.25)

$$\eta(t) = \eta_1 + \frac{\eta_2}{p} (1 - e^{-pt}).\tag{4.28}$$

Pro druhou počáteční úlohu (4.26) použijeme také Laplaceovu transformaci, ze které získáme obrazy jednotlivých derivací ρ a ξ . Laplaceova transformace nám soustavu dvou diferenciálních rovnic převede na soustavu dvou algebraických rovnic, ze kterých následně postupnými úpravami vyjádříme neznámé obrazy $\mathcal{L}\{\rho(t)\} = R(s)$ a $\mathcal{L}\{\xi(t)\} = Q(s)$

$$\begin{aligned}s^2 R(s) - \rho_1 s - \rho_2 + psR(s) - p\rho_1 + 2kR(s) - kQ(s) &= \frac{kl}{s} \\ s^2 Q(s) - \xi_1 s + \xi_2 + psQ(s) - p\xi_1 + 2kQ(s) - kR(s) &= \frac{kl}{s}, \\ R(s) &= \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right)k}{(s^2 + ps + 2k)^2 - k^2}, \\ Q(s) &= \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right)k}{k^2 - (s^2 + ps + 2k)^2}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Pro rozklad zlomků (4.29) na parciální zlomky musíme prvně vypočítat kořeny rovnice 4.řádu, která se nachází ve jmenovateli obou zlomků $R(s)$ a $Q(s)$.

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 12k}), & s_2 &= \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 12k}), \\ s_3 &= \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4k}), & s_4 &= \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4k}).\end{aligned}\tag{4.30}$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

Na základě kořenů (4.30) určíme jednotlivé případy kladného, nulového a záporného argumentů D_1 a D_2 odmocnin g, h , které nám určí, o jaké typy kořenů se jedná.

$$g = \sqrt{p^2 - 12k}, \quad h = \sqrt{p^2 - 4k},$$

$$D_1 = p^2 - 12k, \quad D_2 = p^2 - 4k.$$

Tímto se nám řešení rozpadá na pět případů.

(a) V případě, že argumenty D_1 a D_2 jsou kladné, získáváme čtyři různé reálné kořeny

$$D_1 > 0, D_2 > 0. \quad (4.31)$$

Za tohoto předpokladu rozložíme zlomky (4.29) na parciální

$$R(s) = \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right)k}{(s^2 + ps + 2k)^2 - k^2} = \frac{A_R}{s-s_1} + \frac{B_R}{s-s_2} + \frac{C_R}{s-s_3} + \frac{D_R}{s-s_4} + \frac{E_R}{s},$$

$$Q(s) = \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right)k}{k^2 - (s^2 + ps + 2k)^2} = \frac{A_Q}{s-s_1} + \frac{B_Q}{s-s_2} + \frac{C_Q}{s-s_3} + \frac{D_Q}{s-s_4} + \frac{E_Q}{s},$$

$$A_R = \frac{\xi_1(p-g) + \rho_1(g-p) + 2(\xi_2 - \rho_2)}{4g}, \quad A_Q = \frac{\xi_1(g-p) + \rho_1(p-g) + 2(\rho_2 - \xi_2)}{4g},$$

$$B_R = \frac{\xi_1(-p-g) + \rho_1(g-p) + 2(\rho_2 - \xi_2)}{4g}, \quad B_Q = \frac{\xi_1(g+p) + \rho_1(-p-g) + 2(-\rho_2 + \xi_2)}{4g},$$

$$C_R = \frac{2l(p-h) + \xi_1(h-p) + \rho_1(h-p) - 2(\xi_2 + \rho_2)}{4h}, \quad C_Q = \frac{2l(p-h) + \xi_1(h-p) + \rho_1(h-p) - 2(\xi_2 + \rho_2)}{4h},$$

$$D_R = \frac{2l(-p-h) + \xi_1(h+p) + \rho_1(h+p) + 2(\xi_2 + \rho_2)}{4h}, \quad D_Q = \frac{2l(-p-h) + \xi_1(h+p) + \rho_1(h+p) + 2(\xi_2 + \rho_2)}{4h},$$

$$E_R = l, \quad E_Q = \frac{3kl}{3k} = l.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1) získáváme řešení počátečního problému (4.26), za podmínky (4.31), ve kterém pro přehlednost řešení za koeficienty nedosazujeme.

$$\rho(t) = A_R e^{\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 12k})t} + B_R e^{\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 12k})t} + C_R e^{\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4k})t} +$$

$$+ D_R e^{\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4k})t} + E_R, \quad (4.32)$$

$$\xi(t) = A_Q e^{\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 12k})t} + B_Q e^{\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 12k})t} + C_Q e^{\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4k})t} +$$

$$+ D_Q e^{\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4k})t} + E_Q.$$

(b) V případě nulového argumentu D_1 , z čehož plyne kladný argument D_2 , obdržíme jeden dvojnásobný reálný kořen a dva reálné různé kořeny

$$D_1 = 0, D_2 > 0. \quad (4.33)$$

Za tohoto předpokladu rozložíme zlomky (4.29) na parciální zlomky

$$R(s) = \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right)k}{(s^2 + ps + 2k)^2 - k^2} = \frac{A_R}{s-s_1} + \frac{B_R}{(s-s_1)^2} + \frac{C_R}{s-s_3} + \frac{D_R}{s-s_4} + \frac{E_R}{s},$$

$$Q(s) = \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right)k}{k^2 - (s^2 + ps + 2k)^2} = \frac{A_Q}{s-s_1} + \frac{B_Q}{(s-s_1)^2} + \frac{C_Q}{s-s_3} + \frac{D_Q}{s-s_4} + \frac{E_Q}{s},$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

$$\begin{aligned}
A_R &= \frac{p^4 \rho_1 + 12k^2(2l + \xi_1 + 5\rho_1) - 2kp^2(l + \xi_1 + 8\rho_1)}{p^4 - 14kp^2 + 48k^2}, \\
B_R &= \frac{p^4(p\rho_1 + 2\rho_2) + 12k^2(2lp + p\xi_1 + 2\xi_2 + 5p\rho_1 + 10\rho_2) - 2kp^2(lp + p\xi_1 + 2\xi_2 + 8p\rho_1 + 16\rho_2)}{2(p^4 - 14kp^2 + 48k^2)}, \\
C_R &= \frac{k(-2lp + p\xi_1 + 2\xi_2 + h(2l - \xi_1 - \rho_1) + p\rho_1 + 2\rho_2)}{h(8k - p^2)}, \\
D_R &= \frac{k(2lp - p\xi_1 - 2\xi_2 - h(2l - \xi_1 - \rho_1) - p\rho_1 - 2\rho_2)}{h(8k - p^2)}, \\
E_R &= -\frac{6kl}{6k - p^2} = l, \\
A_Q &= \frac{p^4 \xi_1 + 12k^2(2l + \rho_1 + 5\xi_1) - 2kp^2(l + \rho_1 + 8\xi_1)}{p^4 - 14kp^2 + 48k^2}, \\
B_Q &= \frac{p^4(p\xi_1 + 2\xi_2) + 12k^2(2lp + p\rho_1 + 2\rho_2 + 5p\xi_1 + 10\xi_2) - 2kp^2(lp + p\rho_1 + 2\rho_2 + 8p\xi_1 + 16\xi_2)}{2(p^4 - 14kp^2 + 48k^2)}, \\
C_Q &= \frac{k(-2lp + p\xi_1 + 2\xi_2 + h(2l - \xi_1 - \rho_1) + p\rho_1 + 2\rho_2)}{h(8k - p^2)}, \\
D_Q &= \frac{k(2lp - p\xi_1 - 2\xi_2 - h(2l - \xi_1 - \rho_1) - p\rho_1 - 2\rho_2)}{h(8k - p^2)}, \\
E_Q &= -\frac{6kl}{6k - p^2} = l.
\end{aligned}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1) získáváme řešení počátečního problému (4.26), za podmínky (4.33), ve kterém pro přehlednost řešení za koeficienty nedosazujeme

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= A_R e^{-\frac{1}{2}pt} + B_R t e^{-\frac{1}{2}pt} + C_R e^{\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4k})t} + D_R e^{\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4k})t} + E_R, \\
\xi(t) &= A_Q e^{-\frac{1}{2}pt} + Q_K t e^{-\frac{1}{2}pt} + C_Q e^{\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4k})t} + D_Q e^{\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4k})t} + E_Q.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(c) V případě záporného argumentu D_1 a kladného argumentu D_2 obdržíme komplexně sdružené kořeny a dva reálné různé kořeny

$$D_1 < 0, D_2 > 0. \tag{4.35}$$

Za předpokladu (4.35) rozložíme výraz (4.26) na parciální zlomky

$$\begin{aligned}
R(s) &= \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right)k}{(s^2 + ps + 2k)^2 - k^2} = \frac{A_R}{s - s_3} + \frac{B_R}{s - s_4} + \frac{C_R s + D_R}{s^2 + ps + 3k} + \frac{E_R}{s}, \\
Q(s) &= \frac{(s^2 + ps + 2k)\left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1\right) + \left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1\right)k}{k^2 - (s^2 + ps + 2k)^2} = \frac{A_Q}{s - s_3} + \frac{B_Q}{s - s_4} + \frac{C_Q s + D_Q}{s^2 + ps + 3k} + \frac{E_Q}{s}, \\
A_R &= \frac{\rho_1 - \xi_1}{2}, & A_Q &= \frac{-\rho_1 + \xi_1}{2}, \\
B_R &= \frac{6h(-l - p) + 3k(\xi_1 + \rho_1) + p(\xi_1 + 5\rho_1) + 4(\xi_2 + 2\rho_2)}{4}, & B_Q &= \frac{6h(-l - p) + 3k(\xi_1 + \rho_1) + p(5\xi_1 + \rho_1) + 4(2\xi_2 + \rho_2)}{4}, \\
C_R &= \frac{2l(-2h - p) + 2h(\xi_1 + \rho_1) + 2(\xi_2 + \rho_2) + p(\xi_1 + \rho_1)}{2h}, & C_Q &= \frac{2l(-2h - p) + 2h(\xi_1 + \rho_1) + 2(\xi_2 + \rho_2) + p(\xi_1 + \rho_1)}{2h}, \\
D_R &= \frac{2l(h + p) - h(\xi_1 + \rho_1) - p(\xi_1 + \rho_1) - 2(\xi_2 + \rho_2)}{2h}, & D_Q &= \frac{2l(h + p) - h(\xi_1 + \rho_1) - p(\xi_1 + \rho_1) - 2(\xi_2 + \rho_2)}{2h}, \\
E_R &= l, & E_Q &= l.
\end{aligned}$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

Jmenovatele parciálního zlomku mající komplexní kořeny upravíme na čtverec a zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1) získáváme řešení počátečního problému (4.26), za podmínky (4.35), ve kterém pro přehlednost řešení za koeficienty nedosazujeme

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= A_R e^{\frac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4k})t} + B_R e^{\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4k})t} + e^{-\frac{p}{2}t} C_R \cos \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + \\
 &\quad + e^{-\frac{p}{2}t} \frac{-\frac{p}{2}C_R + D_R}{\sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + E_R, \\
 \xi(t) &= A_Q e^{\frac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4k})t} + B_Q e^{\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4k})t} + e^{-\frac{p}{2}t} C_Q \cos \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + \\
 &\quad + e^{-\frac{p}{2}t} \frac{-\frac{p}{2}C_Q + D_Q}{\sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + E_Q.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

(d) V případě záporného argumentu D_1 a nulového argumentu D_2 , dostaneme komplexně sdružené kořeny a jeden dvojnásobný reálný kořen

$$D_1 < 0, D_2 = 0. \tag{4.37}$$

Podle předpokladu (4.37) roložíme výraz (4.26) opět na parciální zlomky a vypočteme neznámé koeficienty

$$\begin{aligned}
 R(s) &= \frac{(s^2+ps+2k)\left(\frac{kl}{s}+\rho_1s+\rho_2+p\rho_1\right)+\left(\frac{kl}{s}+\xi_1s+\xi_2+p\xi_1\right)k}{(s^2+ps+2k)^2-k^2} = \frac{A_R}{s-s_3} + \frac{B_R}{(s-s_3)^2} + \frac{C_Rs+D_R}{s^2+ps+3k} + \frac{E_R}{s}, \\
 Q(s) &= \frac{(s^2+ps+2k)\left(\frac{kl}{s}+\xi_1s+\xi_2+p\xi_1\right)+\left(\frac{kl}{s}+\rho_1s+\rho_2+p\rho_1\right)k}{k^2-(s^2+ps+2k)^2} = \frac{A_Q}{s-s_3} + \frac{B_Q}{(s-s_3)^2} + \frac{C_Qs+D_Q}{s^2+ps+3k} + \frac{E_Q}{s},
 \end{aligned}$$

$$A_R = \frac{2k(-\xi_1+\rho_1)}{8k-p^4},$$

$$B_R = \frac{2k(-\xi_2+p(-\xi_1+\rho_1)+\rho_2)}{8k-p^2},$$

$$C_R = \frac{p^4\rho_1+4k^2(4l+\xi_1+3\rho_1)-2kp^2(l+\xi_1+4\rho_1)}{p^4-10kp^2+16k^2},$$

$$D_R = \frac{p^4(p\rho_1+2\rho_2)+4k^2(4lp+p\xi_1+2\xi_2+3p\rho_1+6\rho_2)-2kp^2(lp+p\xi_1+2\xi_2+4p\rho_1+8\rho_2)}{2(p^4-10kp^2+16k^2)},$$

$$E_R = -\frac{2kl}{2k-p^2} = l.$$

$$A_Q = \frac{2k(\xi_1-\rho_1)}{8k-p^4},$$

$$B_Q = \frac{2k(\xi_2+p(\xi_1-\rho_1)-\rho_2)}{8k-p^2},$$

$$C_Q = \frac{p^4\xi_1+4k^2(4l+3\xi_1+\rho_1)-2kp^2(l+4\xi_1+\rho_1)}{p^4-10kp^2+16k^2},$$

$$D_Q = \frac{p^4(p\xi_1+2\xi_2)+4k^2(4lp+3p\xi_1+6\xi_2+p\rho_1+2\rho_2)-2kp^2(lp+4p\xi_1+8\xi_2+p\rho_1+2\rho_2)}{2(p^4-10kp^2+16k^2)},$$

$$E_Q = -\frac{2kl}{2k-p^2} = l.$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

Nyní provedeme jako v předcházejících případech zpětnou Laplaceovou transformaci parciálních zlomků (tab. 2.1) a obdržíme řešení počátečního problému (4.26), za podmínky (4.37). Pro přehlednost do řešení nedosazujeme vypočtené koeficienty

$$\begin{aligned}\rho(t) &= A_R e^{-\frac{p}{2}t} + B_R t e^{-\frac{p}{2}t} + e^{-\frac{p}{2}t} \left[C_R \cos \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{-\frac{p}{2}C_R + D_R}{\sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t \right] + E_R, \\ \xi(t) &= A_Q e^{-\frac{p}{2}t} + B_Q t e^{-\frac{p}{2}t} + e^{-\frac{p}{2}t} \left[C_Q \cos \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{-\frac{p}{2}C_Q + D_Q}{\sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t \right] + E_Q.\end{aligned}\quad (4.38)$$

(e) V případě záporných argumentů D_1 a D_2 , obdržíme dva komplexně sdružené kořeny kubické rovnice a postupujeme stejně jako v předcházejících případech

$$12k > 4k > p^2, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}R(s) &= \frac{(s^2 + ps + 2k) \left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1 \right) + \left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1 \right) k}{(s^2 + ps + 2k)^2 - k^2} = \frac{A_R s + B_R}{s^2 + ps + 3k} + \frac{C_R s + D_R}{s^2 + ps + k} + \frac{E_R}{s}, \\ Q(s) &= \frac{(s^2 + ps + 2k) \left(\frac{kl}{s} + \xi_1 s + \xi_2 + p\xi_1 \right) + \left(\frac{kl}{s} + \rho_1 s + \rho_2 + p\rho_1 \right) k}{k^2 - (s^2 + ps + 2k)^2} = \frac{A_Q s + B_Q}{s^2 + ps + 3k} + \frac{C_Q s + D_Q}{s^2 + ps + k} + \frac{E_Q}{s},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_R &= \frac{-\xi_1 + \rho_1}{2}, & A_Q &= \frac{\xi_1 + \rho_1}{2}, \\ B_R &= \frac{p(-\xi_1 + \rho_1) - \xi_2 + \rho_2}{2}, & B_Q &= \frac{p(\xi_1 - \rho_1) + \xi_2 - \rho_2}{2}, \\ C_R &= \frac{-2l + \xi_1 + \rho_1}{2}, & C_Q &= \frac{-2l + \xi_1 + \rho_1}{2}, \\ D_R &= \frac{-2lp + p(\xi_1 + \rho_1) + \xi_2 + \rho_2}{2}, & D_Q &= \frac{-2lp + p(\xi_1 + \rho_1) + \xi_2 + \rho_2}{2}, \\ E_R &= l, & E_Q &= l.\end{aligned}$$

Následně zpětnou Laplaceovou transformací parciálních zlomků (tab. 2.1) dostaneme tedy řešení počátečního problému (4.26), za podmínky (4.39)

$$\begin{aligned}\rho(t) &= l + e^{-\frac{p}{2}t} \left[A_R \cos \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{-\frac{p}{2}A_R + B_R}{\sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t \right] + \\ &\quad + e^{-\frac{p}{2}t} \left[C_R \cos \sqrt{k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{-\frac{p}{2}C_R + D_R}{\sqrt{k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{k - \frac{p^2}{4}}t \right], \\ \xi(t) &= l + e^{-\frac{p}{2}t} \left[A_Q \cos \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{-\frac{p}{2}A_Q + B_Q}{\sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{3k - \frac{p^2}{4}}t \right] + \\ &\quad + e^{-\frac{p}{2}t} \left[C_Q \cos \sqrt{k - \frac{p^2}{4}}t + \frac{-\frac{p}{2}C_Q + D_Q}{\sqrt{k - \frac{p^2}{4}}} \sin \sqrt{k - \frac{p^2}{4}}t \right].\end{aligned}\quad (4.40)$$

4.3.2. Modelování zlomkovým kalkulem (ZK)

Při modelování kmitání a pohybu soustavy vyjdeme z diferenciální rovnice (3.5), kterou aplikujeme na jednotlivé body soustavy, čímž získáme soustavu tří diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
 {}^C_0D^\alpha x_1(t) &= -k(l - (x_2 - x_1)) \\
 {}^C_0D^\alpha x_2(t) &= k(l - (x_2 - x_1)) - k(l - (x_3 - x_2)) \\
 {}^C_0D^\alpha x_3(t) &= k(l - (x_3 - x_2)), \text{ pro } \alpha \in (1, 2), \\
 x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1^0, \\
 x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = v_2^0, \\
 x_3(0) &= x_3^0, \quad \dot{x}_3(0) = v_3^0.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Tvary $l - (x_2 - x_1)$ a $l - (x_3 - x_2)$ vyjadřují vzájemnou změnu vzdálenosti mezi jednotlivými body. Dále provedeme známou transformaci souřadnic pro vzdálenost jednotlivých bodů a pro polohu těžiště. Tímto krokem se nám úloha (4.41) transformuje na soustavu dvou diferenciálních rovnic řádu α pro vzdálenost bodů a na jednu diferenciální rovnici řádu α pro polohu těžiště.

Transformace souřadnic pro jednotlivé vzdálenosti bodů jsou

$$\rho = x_2 - x_1, \quad \xi = x_3 - x_2,$$

dle kterých získáme rovnice

$$\begin{aligned}
 {}^C_0D^\alpha \rho(t) + 2k\rho(t) - k\xi(t) &= kl \\
 {}^C_0D^\alpha \xi(t) + 2k\xi(t) - k\rho(t) &= kl, \\
 \rho(0) = x_2^0 - x_1^0 = \rho_1, \quad \dot{\rho}(0) = v_2^0 - v_1^0 = \rho_2, \\
 \xi(0) = x_3^0 - x_2^0 = \xi_1, \quad \dot{\xi}(0) = v_3^0 - v_2^0 = \xi_2.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Zbývajících transformací je

$$\eta = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

po níž se úloha (4.41) transformuje na rovnici těžiště

$$\begin{aligned}
 {}^C_0D^\alpha \eta(t) &= 0, \\
 \eta(0) = \frac{x_1^0 + x_2^0 + x_3^0}{3} = \eta_1, \quad \dot{\eta}(0) = \frac{v_1^0 + v_2^0 + v_3^0}{3} = \eta_2.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Při řešení úlohy (4.42) využijeme Laplaceovu transformaci (2.15) pro jednotlivé derivace a jejich následným dosazením dostaneme algebraickou soustavu dvou rovnic řádu α , ze kterých postupnou úpravou vyjádříme neznámé $R(s)$ a $Q(s)$

$$\begin{aligned}
 s^\alpha R(s) - \rho_1 s^{\alpha-1} - \rho_2 s^{\alpha-2} + 2kR(s) - kQ(s) &= \frac{kl}{s}, \\
 s^\alpha Q(s) - \xi_1 s^{\alpha-1} - \xi_2 s^{\alpha-2} + 2kQ(s) - kR(s) &= \frac{kl}{s},
 \end{aligned}$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

$$R(s) = \frac{s^\alpha(kl+2k\rho_1+k\xi_1)+s^{\alpha-1}(2k\rho_2+k\xi_2)+\rho_1s^{2\alpha}+\rho_2s^{2\alpha-1}+3k^2l}{s(s^{2\alpha}+4ks^\alpha+3k^2)}, \quad (4.44)$$

$$Q(s) = \frac{s^\alpha(kl+2k\xi_1+k\rho_1)+s^{\alpha-1}(2k\xi_2+k\rho_2)+\xi_1s^{2\alpha}+\xi_2s^{2\alpha-1}+3k^2l}{s(s^{2\alpha}+4ks^\alpha+3k^2)}. \quad (4.45)$$

Nyní rozložíme zlomky (4.44) a (4.45) dle tvaru, který vyplývá z rovnice (2.11) a Laplaceova obrazu řešení (2.17)

$$\frac{c_1s^\alpha + c_2s^{\alpha-1} + c_3s^{2\alpha} + c_4s^{2\alpha-1} + c_5}{s(s^\alpha + k)(s^\alpha + 3k)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs^{\alpha-1} + Cs^{\alpha-2}}{s^\alpha + k} + \frac{Ds^{\alpha-1} + Es^{\alpha-2}}{s^\alpha + 3k}. \quad (4.46)$$

Z tvaru (4.46) postupnou úpravou dostaneme obecné vyjádření pro neznámé koeficienty A, B, C, D, E

$$\begin{aligned} A &= \frac{c_5}{3k^2}, \\ B &= \frac{1}{2k}(c_1 - kc_3 - \frac{c_5}{k}), \\ C &= \frac{1}{2k}(c_2 - kc_4), \\ D &= \frac{1}{2k}(3kc_3 - c_1 + \frac{1}{3}\frac{c_5}{k}), \\ E &= \frac{1}{2k}(3kc_4 - c_2). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Na základě (4.47) nyní můžeme určit koeficienty pro jednotlivé zlomky (4.44) a (4.45)

$$\begin{aligned} A_R &= l, & A_Q &= l, \\ B_R &= \frac{1}{2}(\rho_1 + \xi_1 - 2l), & B_Q &= \frac{1}{2}(\rho_1 + \xi_1 - 2l), \\ C_R &= \frac{1}{2}(\rho_2 + \xi_2), & C_Q &= \frac{1}{2}(\rho_2 + \xi_2), \\ D_R &= \frac{1}{2}(\rho_1 - \xi_1), & D_Q &= \frac{1}{2}(-\rho_1 + \xi_1), \\ E_R &= \frac{1}{2}(\rho_2 - \xi_2), & E_Q &= \frac{1}{2}(-\rho_2 + \xi_2), \end{aligned}$$

Použitím zpětné Laplaceovy transformace (2.16) obdržíme řešení počáteční úlohy (4.42) pro $\alpha \in (1, 2)$, kde za koeficienty pro přehlednost řešení nedosazujeme

$$\begin{aligned} \rho(t) &= A_R + B_RE_{\alpha,1}(-kt^\alpha) + C_RtE_{\alpha,2}(-kt^\alpha) + D_RE_{\alpha,1}(-3kt^\alpha) + E_RtE_{\alpha,2}(-3kt^\alpha), \\ \xi(t) &= A_Q + B_QE_{\alpha,1}(-kt^\alpha) + C_QtE_{\alpha,2}(-kt^\alpha) + D_QE_{\alpha,1}(-3kt^\alpha) + E_QtE_{\alpha,2}(-3kt^\alpha). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Pro získání řešení úlohy (4.43) opět použijeme Laplaceovu transformaci (2.15), za jednotlivé derivace dosadíme jejich obrazy a z obdržené rovnice vyjádříme neznámou $N(s)$

$$s^\alpha N(s) - s^{\alpha-1}\eta_1 - s^{\alpha-2}\eta_2 = 0,$$

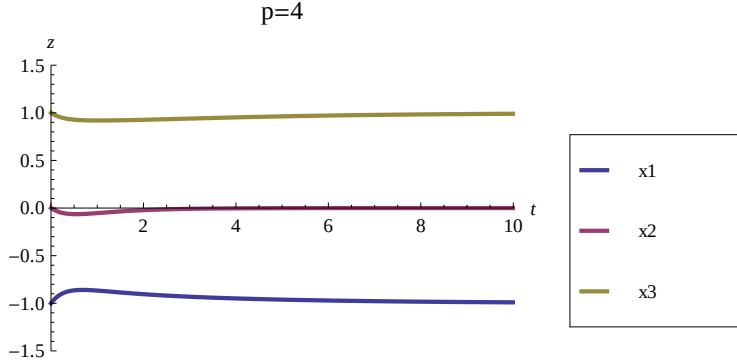
$$N(s) = \frac{\eta_1}{s} + \frac{\eta_2}{s^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací (tab. 2.1) obdržíme řešení úlohy (4.43) pro $\alpha \in (1, 2)$

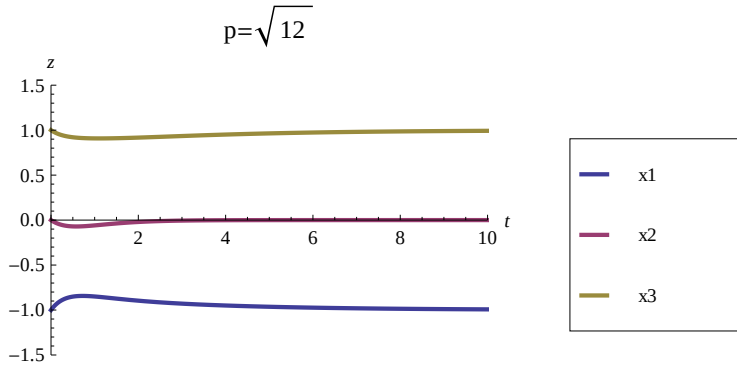
$$\eta(t) = \eta_1 + \eta_2 t. \quad (4.49)$$

4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU

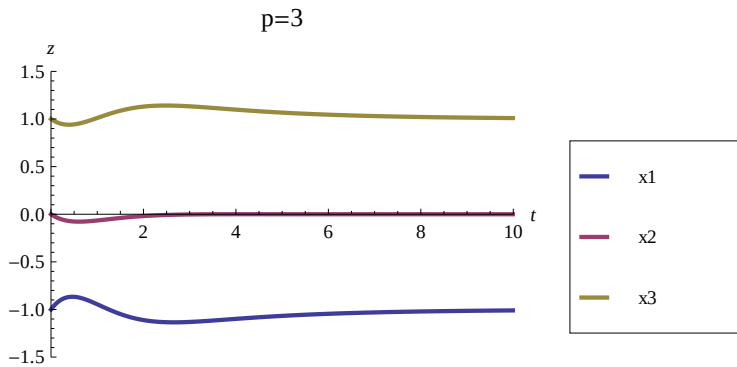
Grafická znázornění řešení kmitání soustavy ODR (obr. 4.9 až obr.4.13) a ZK (obr. 4.14 až obr. 4.18) jsou si velmi podobná. Velký rozdíl je zde opět v pohybu těžiště, kdy ODR má pohyb limitní, ale v případě ZK lineárně pokračuje.



Obrázek 4.9: Klasické modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

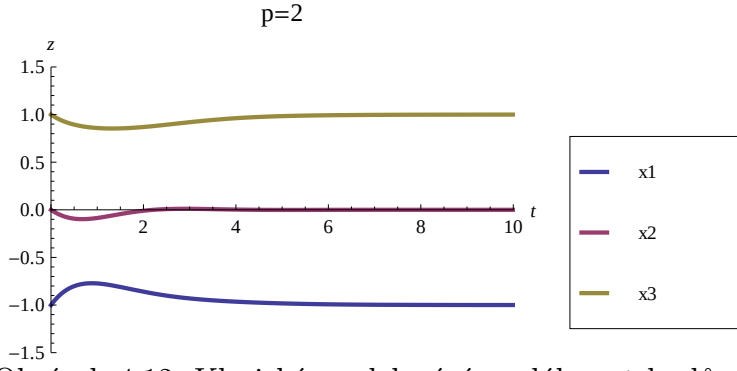


Obrázek 4.10: Klasické modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

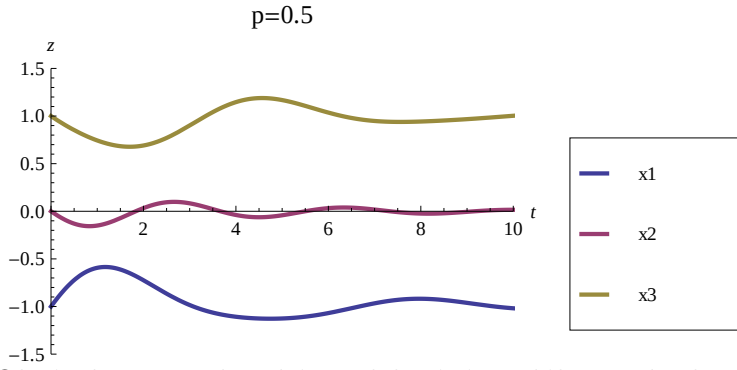


Obrázek 4.11: Klasické modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

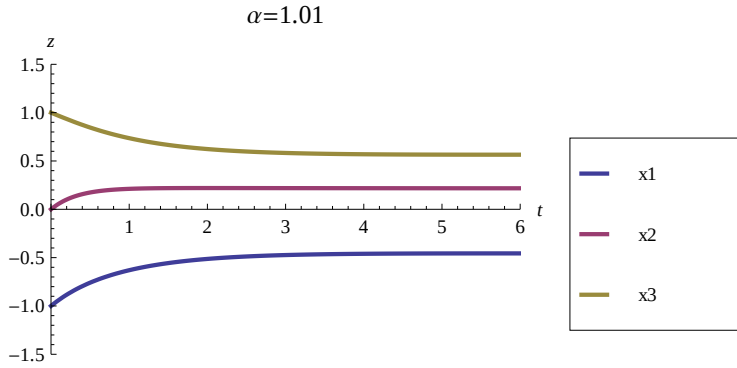
4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU



Obrázek 4.12: Klasické modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

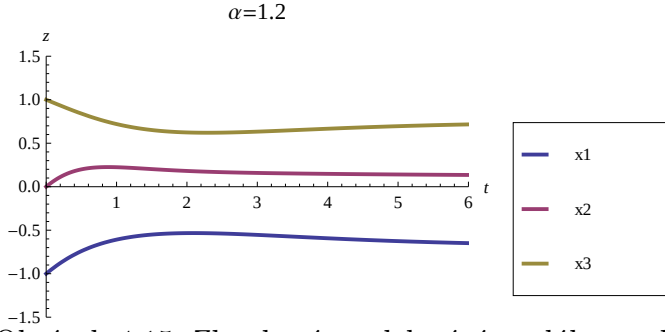


Obrázek 4.13: Klasické modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

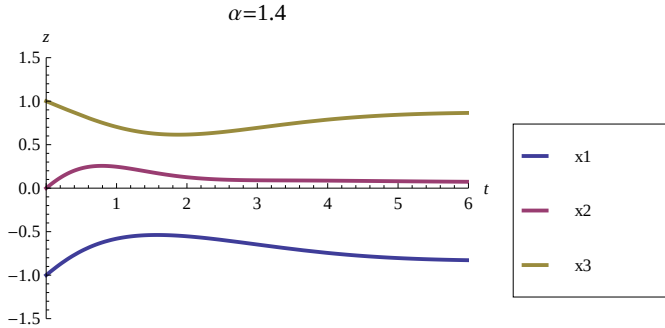


Obrázek 4.14: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

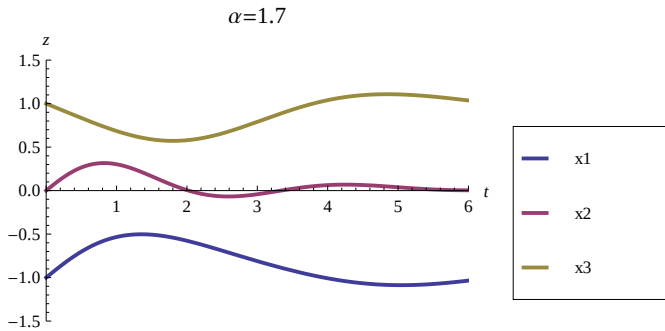
4.3. KMITÁNÍ A POHYB SOUSTAVY TŘÍ HMOTNÝCH BODŮ V PROSTORU



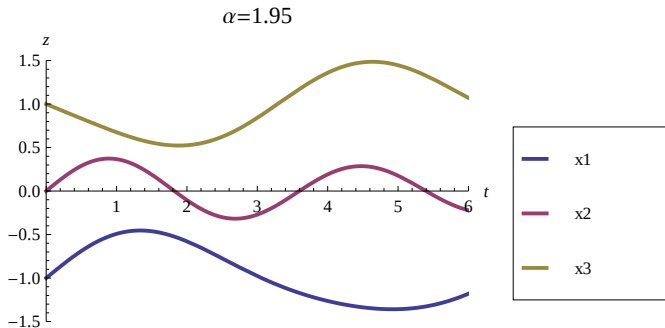
Obrázek 4.15: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$



Obrázek 4.16: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$



Obrázek 4.17: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$



Obrázek 4.18: Zlomkové modelování, vzdálenost bodů od těžiště pro hodnoty: $k = 1, l = 1, x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, kv_1^0 = 1, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0$

5. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo řešení a srovnání klasického a zlomkového modelu kmitavého modelu pohybu v tlumivém prostředí. Pro naše úvahy jsme zvolili model (3.5) s Caputovou derivací. Jako testovací úlohy byly uvažovány soustavy jednoho tělesa na pružině a dvou, resp. tří stejně hmotných těles spojených jednou, resp. dvěma stejnými pružinami. Všechny vzniklé obyčejné a zlomkové diferenciální rovnice a jejich soustavy byly řešeny metodou Laplaceovy transformace.

U klasického modelu je známa přítomnost kritických hodnot parametru p , které způsobují rozpad výpočtů do několika větví (v případě jednoho a dvou těles do tří větví, v případě tří těles do pěti). U zlomkového modelu se analogické hodnoty parametru α nevyskytují a k podobnému rozpadu nedochází, což výpočet zjednodušuje. Dalším významným rozdílem je chování těžiště soustavy těles. Zatímco klasický model vykazuje exponenciální průběh závislosti polohy těžiště na čase, a tedy existuje limitní poloha těžiště, v případě zlomkového modelu pozorujeme lineární závislost polohy těžiště na čase. Ve zlomkovém modelu tedy tlumivé síly nepůsobí na soustavu jako celek, nýbrž se vztahují pouze k vlastnímu kmitavému pohybu těles. Toto chování nesouhlasí s experimentální zkušeností, a proto by byl tento model zřejmě vhodnější spíše pro popis pevně uložené soustavy.

Porovnáním grafických výsledků klasického a zlomkového modelu kmitání můžeme říci, že snižující se řád zlomkové derivace α zvyšuje útlum kmitavého pohybu, což odpovídá růstu součinitele útlumu prostředí p . Autorovi však není znám analytický vztah mezi α a p umožňující kvantitativní a kvalitativní srovnání získaných výsledků.

Budoucí práce v této oblasti by se mohla zaměřit na hledání zlomkového modelu lépe popisujícího útlum těžiště. Další možnosti výzkumu poskytuje analýza kvalitativních vlastností modelu, zejména vztahu mezi koeficienty α zlomkového a p klasického modelu.

Literatura

- [1] HALLIDAY, D., REDNICK, R., WALKER, J.: *Fyzika: část 1, Mechanika*. Brno: VUTUM, 2003. ISBN 80-214-1868-0
- [2] HALLIDAY, D., REDNICK, R., WALKER, J.: *Fyzika: část 2, Mechanika-Termodynamika*. Brno: VUTUM, 2003. ISBN 80-214-1868-0
- [3] HERRMANN, R.: *Fractional Calculus An Introduction For Physicists*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011. ISBN 10 981-4340-24-3
- [4] KISELA, T.: *Fractional Differential Equations and Their Applications*. [Diplomová práce.] Brno: VUT, FSI, 2008. 50 s.
- [5] KLIMEŠ, L.: *Řešení diferenciálních rovnic metodou Laplaceovy transformace*. [Bakalářská práce.] Brno: VUT, FSI, 2008. 33 s.
- [6] MILLER, K.S., ROSS, B.: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. ISBN 0-471-58884-9.
- [7] PODLUBNÝ, I.: *Fractional Differential Equations*. Vol. 198. United States: Academic Press, 1999. ISBN 0-12-558840-2.
- [8] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z.: *Základy aplikované matematiky I*. Praha: SNTL, 1983. ISBN 04-508-83
- [9] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z.: *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL, 1986. ISBN 04-513-86
- [10] TORVIK, P.J., BAGLEY, R.L.: On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials. *Journal of Applied Mechanics*. June 1984, vol. 51, p. 294, ISSN 0021-8936 .
- [11] ZEMČÍKOVÁ, M.: *Výpočty a aplikace zlomkového kalkulu*. [Bakalářská práce.] Brno: VUT, FSI, 2011. 31 s.

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Z}^+$	množina kladných celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$f^n(t)$	n -tá derivace funkce $f(t)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	n -tá derivace funkce $f(t)$
$\Gamma(z)$	Gamma funkce proměnné z
$\beta(\nu, \mu)$	Beta funkce proměnných ν a μ
$E_{\alpha, \beta}$	dvouparametrická funkce Mittag-Lefflerova typu
$J_a^n f(t)$	n -násobný integrál
${}_a D_t^{-\nu} f(t)$	zlomkový integrál na intervalu (a, t) funkce $f(t)$
${}_a^C D^\alpha f(t)$	Caputova zlomková derivace řádu α funkce $f(t)$
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplaceova transformace funkce $f(t)$