



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

KINEMATICKÉ BUZENÍ KYVADLA

PENDULUM EXCITATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jiří Vrána

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: Jiří Vrána
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Kinematické buzení kyvadla

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce se zabývá modelováním kmitání kyvadla. Model kyvadla lze rozšířit o další modelu přidané tuhosti jako torzní pružina, magnety atd. Vzniká takto nelineární a nestabilní soustava, která má chaotické chování. V práci toto chování bude modelováno a simulováno v prostředí Simulink. Aplikace této soustavy lze spatřit v oboru energy harvesting, kdy z tohoto kmitání lze získat elektrickou energii pro bezdrátové aplikace.

Cíle bakalářské práce:

1. Lineární model kyvadla s kinematickým buzením
2. Rozšíření modelu o nelineární chování
3. Odezva nelineárního systému na kinematické buzení
4. Analýza aplikací této soustavy v praxi

Seznam doporučené literatury:

BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK, 1994. Mechanické kmitání. Technický průvodce, svazek 71. Praha: Sobotáles.

HAUG, Edward J ., 1989. Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. B.m.: Prentice Hall College Div. ISBN 978-0205116690.

KADJIE, Arnaud Notué a Paul WOAFO, 2014. Effects of springs on a pendulum electromechanical energy harvester. Theoretical and Applied Mechanics Letters. roč. 4, č. 6, s. 63001. ISSN 20950349.

PRIYA, Shashank a Daniel J. INMAN, ed., 2009. Energy Harvesting Technologies. Boston, MA: Springer US. ISBN 978-0-387-76463-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce je zaměřena vytvořením modelové situace kinematicky buzeného kyvadla s jedním stupněm volnosti, které kmitá jak v lineárním, tak nelineárním stavu.

V teoretické části je popsáno několik základních pojmů z teorie kmitání a uvedení několika příkladů využitelnosti kyvadla. Praktická část obsahuje sestavení pohybových rovnic modelových situací, na základě kterých jsou vytvořeny simulační programy.

Práce obsahuje i návrh praktického využití modelu nelineárního kyvadla.

Abstract

This thesis is focused on creating a model situation of excited pendulum with one degree of freedom that oscillates in both linear and nonlinear condition.

The theoretical part describes several basic concepts of oscillation theory and states some examples of pendulum applicability. The practical part consists assembling of motion equations of model situations, based on which simulations programs are created.

The thesis contains also concept of practical use of the nonlinear pendulum model.

Klíčová slova

Kyvadlo, Kmitání, Kinematické buzení, Lineární kmitání, Nelineární kmitání, Simulink, Model, Energy harvesting

Key words

Pendulum, Oscillation, Kinematics excitacion, Linear oscillation, Nonlinear oscillation, Simulink, Energy harvesting

VRÁNA, J. *Kinematické buzení kyvadla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 42 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D..

Čestné prohlášení

Já, Jiří Vrána, prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Kinematické buzení kyvadla vypracoval samostatně, s radami vedoucího práce doc. Ing Zdeňka Hadaše, Ph.D., a že jsem uvedl všechny použité zdroje.

V Brně dne 25. 5. 2017

.....
Jiří Vrána

Poděkování

Zde bych chtěl poděkovat Ing. Zdeňku Hadašovi, Ph.D. za jeho trpělivost, vstřícný přístup, cenné rady a připomínky v průběhu tvorby této práce. Dále bych chtěl poděkovat rodině a přátelům za jejich podporu.

Obsah

1	Úvod	10
2	Teorie kmitání	11
2.1	Kmitání lineárních soustav	11
2.2	Kmitání nelineárních soustav	12
2.3	Silové a kinematické buzení	12
3	Využití kyvadla v technické praxi	13
3.1	Kyvadlový akcelerometr	13
3.2	Gyroskopický inklinometr	13
3.3	Vibrační generátor	13
4	Tvorba modelu kyvadla	14
4.1	Simulink	14
4.2	Matematické kyvadlo	14
4.3	Homogenní tyč uchycená rotační vazbou	16
4.4	Odvalování čepu v pouzdře	18
4.5	Model kyvadla kmitajícího lineárně	21
4.5.1	Sestavení pohybové rovnice Lagrangeovou metodou II. druhu	22
4.5.2	Sestavení pohybové rovnice uvolňovací metodou	24
4.6	Model nelineárního tlumeného vynuceného kmitání kyvadla	26
5	Analýza výsledků	29
5.1	Výpočtový model	29
5.2	Homogenní tyč uchycená rotační vazbou	29
5.3	Odvalování čepu v pouzdře	29
5.4	Lineární vynucené kmitání netlumeného kyvadla	30
5.5	Nelineární vynucené kmitání netlumeného kyvadla	32
5.6	Praktická aplikace nelineárního kyvadla	33
6	Závěr	36
7	Použité zdroje	37
8	Seznam obrázků a grafů	39

8.1	Seznam obrázků a tabulek	39
8.2	Seznam grafů	39
9	Seznam použitých veličin	40
10	Seznam příloh.....	42

1 Úvod

Výpočet pohybu kyvadla je na první pohled jednoduchou záležitostí. Je však nutné si uvědomit, že modelová situace matematického kyvadla, je velmi jednoduchým případem, který je idealizovaný. V reálné situaci není kyvadlo pouze hmotným bodem zavěšeném na nehmotném závěsu, ale je nutné uvažovat hmotnost kyvadla rozloženou po délce závěsu a nejen soustředěnou do jednoho bodu. Dále se v modelové situaci často vyskytuje nezanedbatelně velká složka tlumící energie, například tření, které znatelně ovlivní chování kyvadla.

K ovlivnění pohybu však přispívá i vnější působení na kyvadlo. Může se jednat o působení silové, či působení zrychlení, které je reakcí na pohyb celého systému. Příkladem takového působení může být působení periodické, proměnlivé, skokové, či zcela chaotické. Kyvadlo, které je takto ovlivňováno, se označuje jako kyvadlo s vynuceným kmitáním.

Složitost systému pak mohou ovlivňovat parametry, jako je linearita kmitání. Nelineární kyvadlo již často není možné řešit analyticky, ale využije se jiné metody, například metody konečných prvků. Dále pak lze rozlišit, zda se jedná o kyvadlo s jedním či více stupni volnosti. V takovém případě je již řešením soustava diferenciálních rovnic.

Cílem této práce je vytvoření modelů lineárního a nelineárního kyvadla s vynuceným kmitáním. Tvorba modelu bude realizována sestavením pohybové rovnice, která bude použita k vytvoření fungující simulace v nástroji Simulink. Tvorba modelu bude koncipována vytvořením jednoduchých modelů, jejichž kombinací vznikne výsledný model kyvadla. Dále bude práce obsahovat vykreslení výsledného chování pro zvolené parametry, ze kterých budou patrné rozdíly, mezi jednotlivými druhy kyvadel.

Poslední částí práce potom bude návrh praktického využití nelineárního modelu kyvadla. S využitím simulačního programu budou snaha optimalizovat některé parametry kyvadla pro získání nejlepších hodnot pro požadovaný výstup.

2 Teorie kmitání

V technické praxi se setkáváme s reálnými tělesy. Tato tělesa se vyznačují tím, že nejsou dokonale tuhá, tedy projevuje se u nich elasticko-plastické chování. Pokud na ně působí vnější síly, dochází k buzení a rozkmitání těchto těles. Tento jev je v reálných situacích velice častý a nejde se mu vyhnout, je nutné s ním tedy počítat a zahrnout ho do návrhu systému.

2.1 Kmitání lineárních soustav

Základní charakteristikou lineárního kmitání je lineárně závislá odezva na vnějším buzení a platí zde základní podmínka a to, že úhly, které při kmitání vznikají, musí být menší než 5° [1].

Lineární kmitání můžeme dělit podle několika parametrů. Například lze rozlišit, zda se jedná o volné nebo vynucené kmitání. Volného kmitání lze dosáhnout vychýlením z rovnovážné polohy a ponecháním v pohybu bez vnějšího působení, tedy na soustavu nepůsobí buzení. Pro výpočet kmitání slouží homogenní část pohybové rovnice, tedy rovnice s nulovou pravou stranou [2]. Z výpočtu pak lze získat informaci o vlastní frekvenci kmitání, resp. vlastních číslech. Vlastní frekvenci rozumíme takovou frekvenci, při níž klade systém nejmenší odpor vůči deformaci. Vynucené kmitání vznikne tehdy, působí-li na soustavu vnější nebo vnitřní budící síly, které mají periodický charakter působení, nebo zda je soustava buzena kinematicky [3].

Dále můžeme lineární kmitání dělit na kmitání s jedním nebo více stupni volnosti. Kmitání s jedním stupněm volnosti lze popsat lineární diferenciální rovnicí druhého řádu která obsahuje prvky: hmotnost hmotného bodu m , nehmotný viskózní tlumič s konstantou tlumení b a nehmotnou pružinu o tuhosti k . Na hmotnost m nám z těchto prvků vyvstávají silová působení vratné síly od pružiny, tlumící síly tlumiče a budící síla $F(t)$. Neznámým parametrem je zde posuv $u(t)$, který získáme řešením pohybové rovnice (2.1.1) [2].

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = F(t) \quad (2.1.1)$$

Kmitání s více stupni volnosti slouží k popisu kmitání skutečných těles a jejich soustav. Výpočtovými modely je možné zjistit s dostatečnou přesností vlastní frekvence a vlastní tvary [2]. Vlastním tvarem rozumíme tvar, kdy soustava kmitá vlastní frekvencí.

Pohybové rovnice vycházejí z maticové algebry a jedná se v podstatě o soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Kmitání s více stupni volnosti je možné řešit přímou fyzikální diskretizací, metodou konečných prvků a metodou hraničních prvků [2].

2.2 Kmitání nelineárních soustav

Popisovat kmitání jako lineární systém v praxi většinou není možné. V reálné situaci se kyvadla vyznačují především svým nelineárním chováním. Lineární průběh lze pozorovat u malých výchylek, kdežto pro velké výchylky, deformace a rychlosti se projevuje systém jako nelineární [4].

Jako nelinearity jsou považovány nelineární vratné síly, závisující pouze na velikosti výchylky, nebo nelineární tlumící síly, které závisí na velikosti rychlosti [2]. Dále se v systému mohou objevovat síly závislé jak na výchylce tak na rychlosti, případně ještě na čase. Pokud soustava obsahuje alespoň jeden z těchto nelineárních prvků, hovoříme o nelineární soustavě. [2] Podle typu prvku pak lze rozlišovat systémy s nelineární tuhostí nebo nelineárním tlumením.

Nelineární soustavy nelze jednoduše klasifikovat, jako tomu bylo u kmitání lineárních soustav, neboť jednotlivé prvky zde nejsou popsány jedním parametrem, ale jejich popis je značně různorodější a složitější, a to z důvodu, že jejich charakteristiky jsou závislé na mnoha dalších parametrech. Nelineární kmitání lze stejně jako lineární dělit na volné a vynucené, dále ale ještě na kmitání parametrické anebo samobuzené [2], a pak podle stupňů volnosti.

2.3 Silové a kinematické buzení

Vynucené kmitání může být zapříčiněno silou působící ve směru výchylky systému, nebo její složkou. Příkladem takového působení může být například složka odstředivé síly na nevyváženou rotující hmotnost [3].

Kmitání, které je vynuceno kinematickým buzením, může vznikat rozpohybováním rámu, přičemž reakce na zrychlení, kterým je rozpohybován rám součástí, uvede daný systém do pohybu.

3 Využití kyvadla v technické praxi

Princip kyvadla je uplatňován v mnoha technických aplikacích. Může být použit ke zjišťování informací o pohybu, tedy lze snímat změnu pohybu, nebo zjišťovat okamžité zrychlení. Jeho využitím je však i možné získávat elektrickou energii přeměnou z oscilační energie kyvadla.

3.1 Kyvadlový akcelerometr

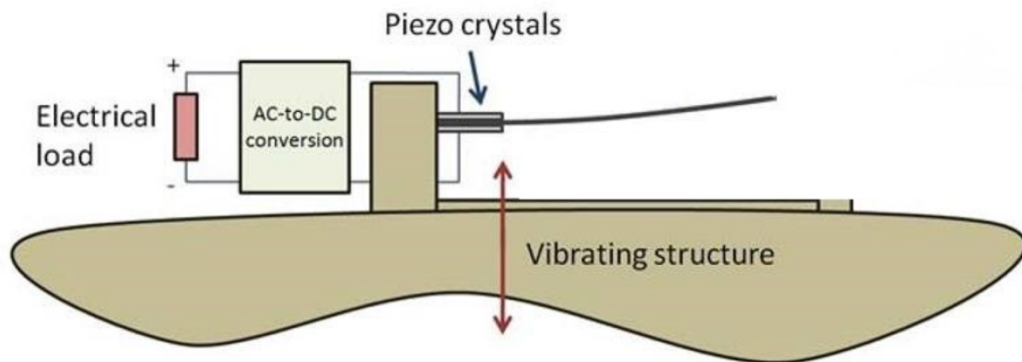
Kyvadlový akcelerometr je zařízení na měření zrychlení. Funguje na principu kyvadla s jedním stupněm volnosti [5]. Kyvadlo je vychýleno reakcí na působící zrychlení, jeho poloha je snímána a přepočtem přes tangens úhlu výchylky lze získat měřené zrychlení v daném čase.

3.2 Gyroskopický inklinometr

Inklinometry jsou přístroje měřící sklon oproti vertikální či horizontální rovině. Jedná se o kyvadlový gyroskop se třemi stupni volnosti. Gyroskop je účinkem vnějších sil vychýlen a úhel mezi rovinou gyroskopu a horizontální či vertikální rovinou nám udává sklon [6]. Jedná se o elektronickou součást a je užívána hlavně v letectví.

3.3 Vibrační generátor

Vibrační generátory jsou zařízení, která přeměňují oscilační energii na energii elektrickou. Generátor je tvořen oscilátorem zpravidla s jedním stupněm volnosti, naladěným na rezonanční frekvenci, která odpovídá budící frekvenci. Přeměna energie je realizována principem elektromagnetické indukce, případně jevem piezoelektrickým, elektrostatickým nebo jiným [7]. Tlumení oscilace je složkou disipativní energie a elektrické zátěže.



Obr. 1 Schéma piezoelektrického vibračního generátoru s elektrickou zátěží [8]

4 Tvorba modelu kyvadla

Hlavním cílem této práce bylo vytvoření modelu kyvadla, které by odpovídalo reálné situaci a reálným podmínkám. Konstrukce modelu vychází z teorie matematického kyvadla, které je dále rozšířeno o lineární a nelineární prvky. Nelinearita kyvadla bude spočívat v přidání pružiny, která bude kyvadlo tlumit až od určité výchylky. Model kyvadla bude mít tvar tyče, která bude uchycena čepem, který se bude odvalovat v pouzdře, tedy bude platit, že poloměr čepu bude menší než je poloměr pouzdra. V místě uchycení tedy bude vznikat obecný rovinný pohyb, valení. Situace bude modelována jak pro případy volného, tak vynuceného kmitání s jedním stupněm volnosti.

Princip sestavení modelu spočívá ve vyjádření pohybové rovnice, která bude aplikovatelná pro vytvoření fungujícího schématu daného modelu v prostředí Simulink.

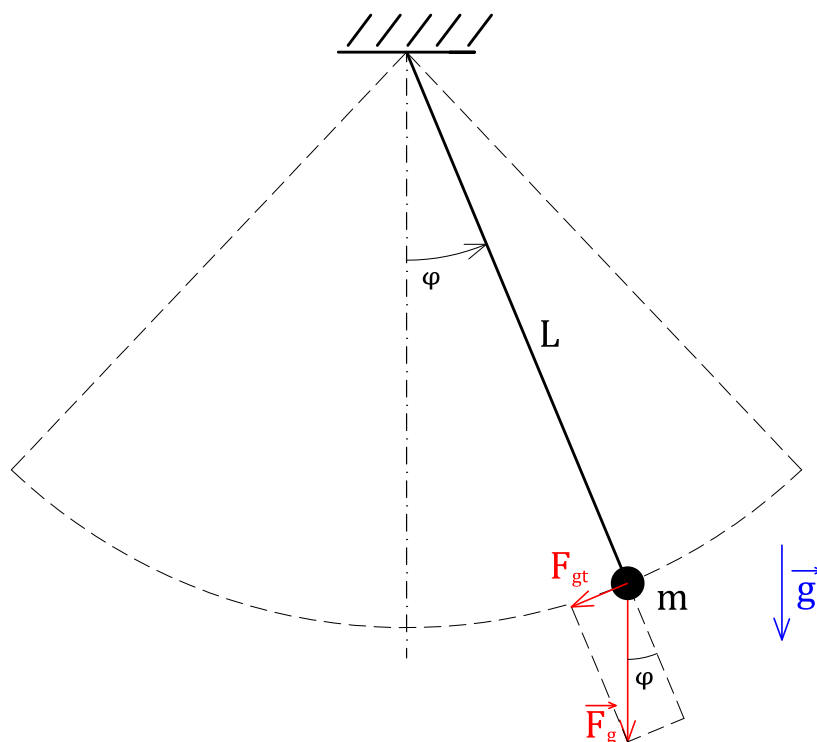
4.1 Simulink

Simulink je nástroj Matlabu sloužící pro simulaci a modelování dynamických systémů. Tvorba systémů se provádí ve formě blokových schémat. Program počítá uživatelem zvolenou numerickou metodou řešení, přičemž pro následující výpočty byla užita metoda ode45 (Dormand-Prince).

4.2 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je modelová situace ideálního stavu. Tedy zavěšení hmotného bodu na nehmotném dokonale tuhém závěsu určité délky. Na model nepůsobí žádné vnitřní silové účinky a jediné vnější silové působení je pouze síla tíhového pole Země [9].

Jedná se o volné kmitání, tedy kyvadlo bude vychýleno a jelikož se jedná o ideální případ, bude kmitat s amplitudou počáteční výchylky.



Obr. 2 Matematické kyvadlo v tíhovém poli

Pro sestavení pohybové rovnice matematického kyvadla je užito 2. Newtonova pohybové zákona, tedy že suma sil bude odpovídat součinu hmotnosti hmotného bodu a jeho okamžitého zrychlení.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (4.2.1)$$

Pro určení pohybu je podstatná tečná složka sil. Tedy tíhová síla v tečném směru, a zrychlení tečné, pro které platí vztah $a_T = \ddot{\varphi} \cdot L$. Dosazením do silové rovnice pak obdržíme tvar

$$-m \cdot g \cdot \sin \varphi = m \cdot \ddot{\varphi} \cdot L \quad (4.2.2)$$

Za předpokladu, že kyvadlo bude bráno jako lineární, bude platit $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Po úpravě obdržíme tvar pohybové rovnice matematického kyvadla [9].

$$L \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \varphi = 0 \quad (4.2.3)$$

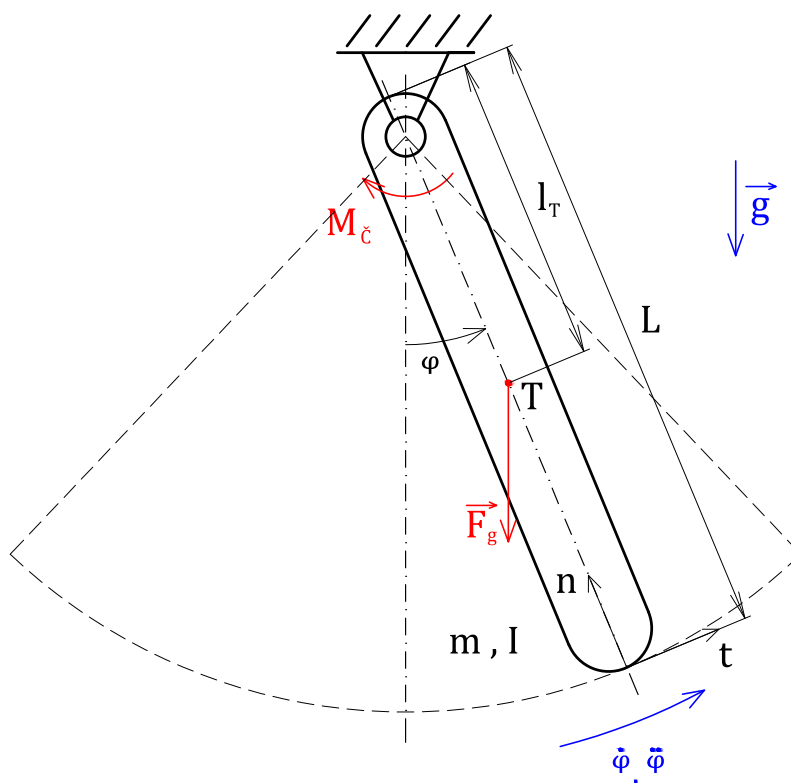
Z rovnice lze získat hodnotu vlastní úhlové frekvence oscilačního pohybu $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Výsledná závislost bude mít periodický sinusový průběh s amplitudou počáteční výchylky a periodou, která lze spočítat jako

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} \quad (4.2.4)$$

4.3 Homogenní tyč uchycená rotační vazbou

Matematické kyvadlo je model idealizované situace. V reálné situaci kyvadlo nekmítá stále se stejnou výchylkou, ale vlivem vnějších a vnitřních silových účinků dochází k pozvolnému útlumu kyvadla. Zavedeme-li si uchycení tyče k rámu rotační vazbou, pak v této vazbě nastává útlum vlivem působení třecích sil. Dále lze pro přiblížení reálné situace uvažovat závěs jako homogenní tyč. Síly působící na tuto tyč je potom nutné vztahovat do těžiště a dále je třeba počítat s momentem setrvačnosti tyče. Kyvadlo je považováno za lineární, výchylka kyvadla bude uvažována jen pro malé hodnoty.



Obr. 3 Homogenní tyč uchycená rotační vazbou

Poloha kyvadla je popsána okamžitou výchylkou φ , která je funkcí času. Silové působení tlumení zde představuje působení čepového momentu tření, který působí vždy proti směru pohybu. Účinek vratné síly je realizován pouze působením složky tíhové síly.

K sestavení pohybové rovnice je vhodné zavedení polárního souřadného systému. Tíhovou sílu si potom lze rozložit do složky tečné a normálové.

$$t: -m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (4.3.1)$$

$$n: -m \cdot g \cdot \cos \varphi \quad (4.3.2)$$

Moment setrvačnosti tyče I je určen z elementárního vzorce pro homogenní ryč a posun do osy otáčení použitím Steinerovy věty

$$I = I_T + m \cdot l_t^2 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 \quad (4.3.1)$$

Pro určení reakčních sil je vhodné užít rovnice silové rovnováhy, tedy že suma sil v tečném směru a suma sil v normálovém směru budou rovny nule.

$$t: -m \cdot g \cdot \sin \varphi - F_{Ct} = 0 \quad (4.3.2)$$

$$n: -m \cdot g \cdot \cos \varphi + F_{Cn} = 0 \quad (4.3.3)$$

Úpravou získaných rovnic jsou získány složky reakční síly F_{Ct} a F_{Cn} ve vazbě.

$$F_{Ct} = m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (4.3.4)$$

$$F_{Cn} = m \cdot g \cdot \cos \varphi \quad (4.3.5)$$

Pro moment tření čepu platí vztah

$$M_{\check{c}} = f \cdot r_{\check{c}} \cdot \sqrt{F_{Ct}^2 + F_{Cn}^2} \quad (4.3.6)$$

, kde f je koeficient smykového tření a $r_{\check{c}}$ poloměr čepu.

Pro zjednodušení simulace je čepový moment vyjádřen jako součin rychlosti v a tlumící konstanty b .

$$M_{\check{c}} = b \cdot v \quad (4.3.7)$$

K sestavení pohybové rovnice je užita momentová rovnice rotačního pohybu

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot l_T - M_{\check{c}} \quad (4.3.8)$$

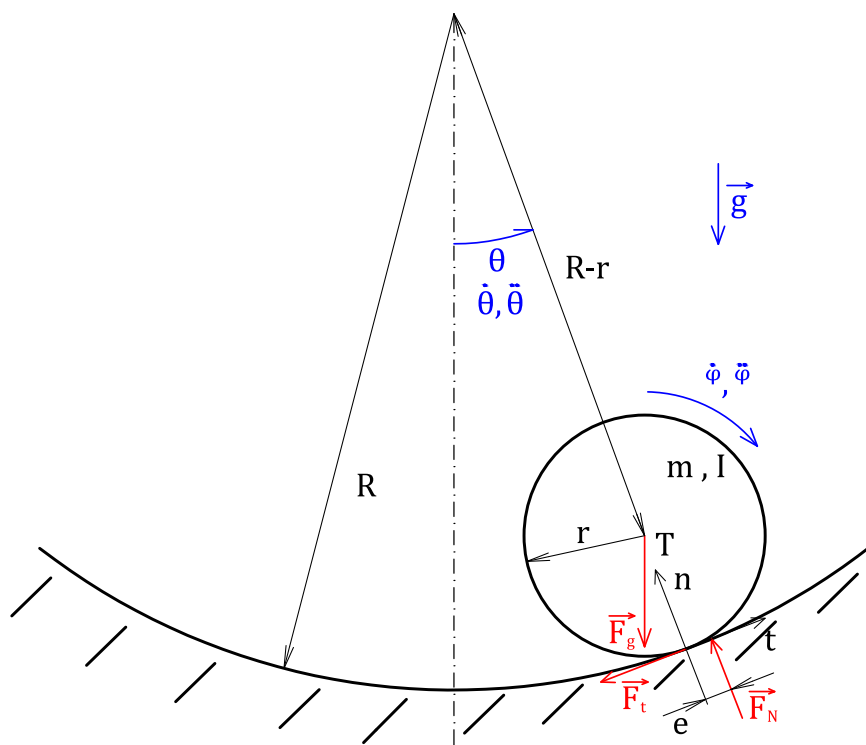
Kyvadlo je považováno za lineární, lze tedy provést náhradu $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Upravením rovnice (4.3.8) je získán konečný tvar pohybové rovnice tohoto kyvadla.

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I} \cdot (-m \cdot g \cdot l_T \cdot \sin \varphi - M_{\check{c}}) \quad (4.3.9)$$

4.4 Odvalování čepu v pouzdře

V rotační vazbě, ve které byla uchycena homogenní tyč docházelo pouze k rotaci, neboť čep přesně zapadal do pouzdra. Situace se ale změní, pokud je čep menší než daný otvor. V takovém případě už nedochází pouze k rotaci, ale objevuje se zde obecný rovinný pohyb. Konkrétně se jedná o valení menšího poloměru čepu ve větším poloměru pouzdra.

Lze uvažovat případ, kdy se těleso čepu po udělení počáteční výchylky θ_0 odvaluje po poloměru pouzdra a koná periodický pohyb, nastává volné kmitání. Na těleso čepu potom působí tíhová síla F_g a vnitřní (pasivní) síly, tedy síla třecí F_t a talková síla od pouzdra F_n .



Obr. 4 Odvalování čepu

Poloha kyvadla je podobně jako v předchozím případě popsána okamžitou výchylkou θ , která je závislá na čase, oproti předchozímu případu však ještě na úhlové rychlosti $\dot{\phi}$ odvalujícího členu.

Pro valení platí podmínka $F_t < F_T$, kde $F_T = F_N \cdot f$. Tedy síla třecí musí být menší než součin tlakové síly a koeficientu tření. Pokud podmínka není splněna, nastává smýkání.

Pro tvorbu pohybové rovnice je opět vhodné zavedení polárního souřadného systému. Tíhová síla je rozložena do složek tohoto souřadného systému jako

$$t: -m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (4.4.1)$$

$$n: m \cdot g \cdot \cos \theta \quad (4.4.2)$$

Oproti minulému případu nám zde však vystupují dvě proměnné, θ a ϕ , a pro řešení je tedy nutné najít závislost mezi těmito dvěma veličinami. Vztah mezi nimi udává kinematická rovnice pro okamžitou rychlost těžiště.

Rovnice se skládá ze dvou dílčích rovnic, které jsou postaveny do rovnosti a každá je vztažena k jednomu pólu rychlosti. Póly rychlosti se nachází jeden ve středu křivosti kružnice, po které se odvaluje čep a druhý v místě dotyku čepu a pouzdra. Jednotlivé rovnice pro rychlost těžiště pak mají tvar $v_{T,1} = \dot{\varphi} \cdot r$ a $v_{T,2} = \dot{\theta} \cdot (R - r)$. Jelikož oba tyto vztahy popisují ekvivalentně rychlost těžiště, lze je dát do rovnosti a dostat tvar

$$\dot{\theta} \cdot (R - r) = \dot{\varphi} \cdot r \quad (4.4.3)$$

K vyjádření velikosti pasivních sil použijeme silovou rovnici. Jelikož byl vhodně zvolen souřadný systém, na dílčí složky je třeba rozložit pouze tíhovou sílu. Pasivní síly v tomto případě odpovídají směru souřadného systému. Pro tečný a normálový směr vzniknou následující rovnice.

$$t: -m \cdot g \cdot \sin \varphi - F_t = m \cdot a_t \quad (4.4.4)$$

$$n: -m \cdot g \cdot \cos \varphi + F_n = m \cdot a_n \quad (4.4.5)$$

Valení je složený pohyb, jenž se skládá z pohybu relativního a unášivého. Tomu odpovídají i složky rychlostí a zrychlení. V našem případě odpovídá tečnému směru zrychlení relativní a normálovému směru zrychlení unášivé. Zrychlení relativní odpovídá součinu úhlového zrychlení čepu a jeho poloměru, zatímco unášivou složku zrychlení lze získat součinem kvadrátu unášivé úhlové rychlosti a vzdálenosti osy otáčení od středu křivosti plochy, po které se čep valí.

$$a_t = \ddot{\varphi} \cdot r \quad (4.4.6)$$

$$a_n = \dot{\theta}^2 \cdot (R - r) \quad (4.4.7)$$

Ještě před dosazením do silové rovnice je vhodné nahradit proměnou $\ddot{\varphi}$ pomocí kinematické rovnice (4.4.3) proměnou $\ddot{\theta}$. Po dosazení a úpravě získáme vyjádření třecí síly F_t a tlakové síly F_n .

$$F_t = -m \cdot (R - r) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (4.4.8)$$

$$F_n = m \cdot (R - r) \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot \cos \theta \quad (4.4.9)$$

K sestavení pohybové rovnice bude opět využita momentová rovnice pro obecný rovinný pohyb, se středem otáčení v těžišti. Na těleso budou působit dva momenty, souhlasný moment od síly F_t na rameni r a v opačném směru moment od síly F_n na rameni e .

$$I \cdot \ddot{\varphi} = F_t \cdot r - F_n \cdot e \quad (4.4.10)$$

Dosazením za složky F_t a F_n z rovnic (4.4.8), (4.4.9) a nahrazením proměnné $\ddot{\varphi}$ proměnou $\ddot{\theta}$ pomocí kinematické závislosti vznikne neupravený tvar pohybové rovnice

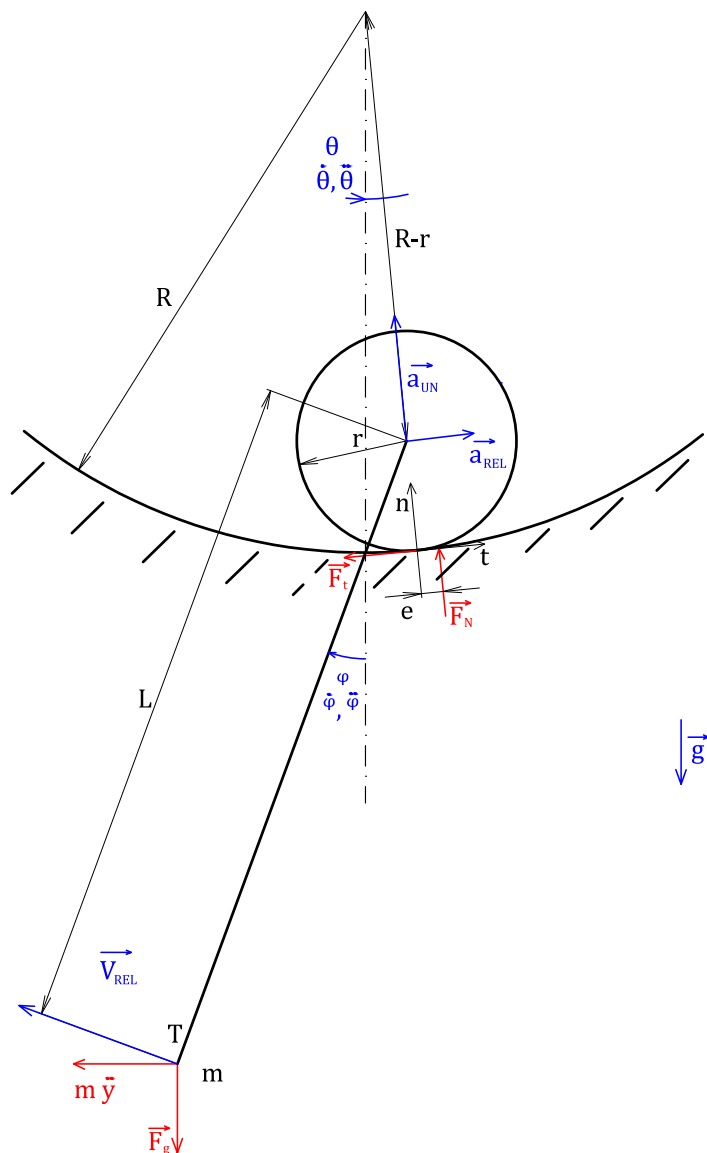
$$I \cdot \frac{r}{R-r} \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot r \cdot (R-r) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot r \cdot \sin \theta - m \cdot e \cdot (R-r) \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \cos \theta \quad (4.4.11)$$

Za předpokladu lineárního kmitání, tedy udělení malé počáteční výchylky lze opět nahradit $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$. Po vhodné úpravě má potom pohybová rovnice výsledný tvar.

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I + m \cdot r^2} \left(-m \cdot g \cdot \frac{r^2}{R-r} \cdot \theta - m \cdot e \cdot \frac{r^2}{R-r} \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \frac{r}{R-r} \right) \quad (4.4.12)$$

4.5 Model kyvadla kmitajícího lineárně

Jedním z cílů práce je vytvořit model lineárního kyvadla s kinematickým buzením. Kyvadlo bude vytvořeno kombinací dvou předchozích situací, tedy homogenní tyče, která bude pevně chycena k čepu, který se bude odvalovat v pouzdře vazby. Jedná se o model s jedním stupněm volnosti, který bude mít vynucené kmitání budícím zrychlením $\ddot{y}$. Předpokladem kyvadla bude skutečnost, že poloměr čepu bude v závislosti na délce tyče pro výpočet zanedbatelný, tedy $L \gg r$.



Obr. 5 Kyvadlo s valivým členem

Jelikož se jedná o model, kde již vystupuje více parametrů a proměnných, pro kontrolu správnosti byla pohybová rovnice sestavena užitím dvou různých metod. Jedná se o metody uvolňovací a Lagrangeovu, přičemž pohybová rovnice sestavena Lagrangeovou metodou se bude lišit tím, že zde nebude zahrnut tlumící účinek od tlakové síly, neboť tato metoda neuvažuje pasivní odpory.

4.5.1 Sestavení pohybové rovnice Lagrangeovou metodou II. druhu

Řešení Lagrangeovou metodou II. druhu spočívá v sestavení Lagrangeovy rovnice. Pro sestavení rovnice je nutné vyjádřit si energii kinetickou, potenciální a disipativní daného pohybu, dále pak ještě práci případně výkon takovéto soustavy. Je třeba si také určit zobecněné souřadnice. Počet zobecněných souřadnic odpovídá počtu stupňů volnosti,

pro náš případ tedy bude stačit jedna zobecněná souřadnice q . Hlavní výhodou této metody je menší náročnost a je vhodná pro získání přibližného zjištění pohybu [1].

Základní Lagrangeova rovnice II. druhu má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}} \quad (4.5.1)$$

Zobecněnou souřadnicí je v tomto případě zvolena výchylka φ , neboť se jedná o informaci, která nám popisuje pohyb ramena kyvadla.

Při sestavení energie kinetické je nutné vzít v potaz, že systém vykonává pohyb valení, a je tedy nutné do energie započítat jak složku translačního, tak i rotačního pohybu.

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{\varphi} \cdot r)^2 \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot (I + m \cdot r^2) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Systém si lze rozložit na dvě dílčí tělesa, tedy tyč a čep. Pro každé těleso je potom možné uvažovat vlastní těžiště, ve kterém působí tíhová síla, která se promítne do složky potenciální energie.

$$E_p = -m \cdot g \cdot ((R - r) \cos \theta + L \cdot \cos \varphi) \quad (4.5.3)$$

V rovnici potenciální energie se vyskytují dvě různé úhlové závislosti. Tyto úhly však jsou na sobě závislé, a pomocí pólů lze opět odvodit platnost kinematické rovnice tvaru.

$$\theta \cdot (R - r) = \varphi \cdot r \quad (4.5.4)$$

Dosazením vyjádření výchylky θ do rovnice potenciální energie vznikne tvar

$$E_p = -m \cdot g \cdot ((R - r) \cos \left(\frac{r}{R - r} \varphi \right) + L \cdot \cos \varphi) \quad (4.5.5)$$

Budící zrychlení bude zahrnuto do rovnice jako výkon vnějších sil.

$$P = m \cdot \ddot{y} \cdot (L - r) \cdot \dot{\varphi} \quad (4.5.6)$$

Poněvadž systém neobsahuje žádný tlumící prvek, velikost energie disipativní odpovídá nule a v rovnici se nevyskytuje. Pro situaci, kdy kyvadlo bude považováno za lineární je nutno uvažovat malé výchylky, tedy že $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$.

Pro dosažení do Lagrangeovy rovnice je nutné složky energie derivovat podle zobecněné souřadnice.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) = \ddot{\varphi} \cdot (I + m \cdot r^2) \quad (4.5.7)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = \varphi \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{r^2}{R - r} + L \right), \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{q}} = m \cdot \ddot{y} \cdot (L - r) \quad (4.5.8), (4.5.9)$$

Tyto nenulové derivace je nutné dosadit do rovnice, čímž vznikne pohybová rovnice kyvadla.

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I + m \cdot r^2} \left(-m \cdot g \cdot \frac{r^2}{R - r} \cdot \varphi - m \cdot g \cdot L \cdot \varphi + m \cdot \ddot{y} \cdot (L - r) \right) \quad (4.5.10)$$

Tato pohybová rovnice odpovídá kyvadlu, kde nepůsobí valivý moment čepu. Pro získání přesnější rovnice je nutno užít jinou metodu.

4.5.2 Sestavení pohybové rovnice uvolňovací metodou

Uvolňovací metoda je oproti metodě Lagrangeově poměrně pracnější, lze však získat přesné vyjádření pohybové rovnice. Před samotným sestavením rovnice je opět nutné vyjádřit si velikosti působících vnitřních sil, které lze získat ze silové rovnice. Prvním krokem je vhodné zavedení souřadného systému a rozložení složek sil do směrů toho systému.

Tíhová síla bude rozložena v tečném a normálovém směru jako

$$t: -m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (4.5.11)$$

$$n: m \cdot g \cdot \cos \theta \quad (4.5.12)$$

Síla, kterou vytváří působení budícího zrychlení, je rozdělena do složek jako

$$t: -m \cdot \ddot{y} \cdot \cos \theta \quad (4.5.13)$$

$$n: m \cdot \ddot{y} \cdot \sin \theta \quad (4.5.14)$$

Platí zde stejný tvar kinematické rovnice, jako v předchozím případě řešení, tedy

$$\dot{\theta} \cdot (R - r) = \dot{\varphi} \cdot r \quad (4.5.15)$$

Lze si tedy vyjádřit silové rovnice pouze pro jednu neznámou právě s využitím této rovnice.

Na těleso působí v tečném směru třecí síla F_t a tečná složka tíhové síly a síly od budícího zrychlení. V normálovém směru to potom jsou síla tlaková F_n a normálové složky tíhové síly a síly od budícího zrychlení. Tečnou a normálou složku silové rovnice lze tedy zapsat jako

$$t: -F_t - m \cdot g \cdot \sin \theta - m \cdot \ddot{y} \cos \theta = m \cdot a_t \quad (4.5.16)$$

$$n: F_n - m \cdot g \cdot \cos \theta + m \cdot \ddot{y} \sin \theta = m \cdot a_n \quad (4.5.17)$$

Složku tečného a normálové zrychlení si lze vyjádřit obdobně jako v případě valení čepu, tedy jejich hodnota bude opět odpovídat relativní a unášivé složce zrychlení.

$$a_t = \ddot{\theta} \cdot (R - r), \quad a_n = \dot{\theta}^2 \cdot (R - r) \quad (4.5.18), (4.5.19)$$

Zavedením podmínky lineárního kmitání a úpravě silových rovnic vzniknou vyjádření třecí síly F_t a tlakové síly F_n .

$$F_t = -m \cdot r \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \frac{r}{R - r} \cdot \varphi - m \cdot \ddot{y} \quad (4.5.20)$$

$$F_n = m \cdot \frac{r^2}{R - r} \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot \ddot{y} \cdot \frac{r}{R - r} \cdot \varphi + m \cdot g \quad (4.5.21)$$

K sestavení pohybové rovnice bude využita momentová rovnice pro obecný rovinný pohyb. Souhlasné momenty, které na kyvadlo působí, jsou účinky od třecí síly F_t na rameni r a složka síly vzniklé z budícího zrychlení $m \cdot \ddot{y}$ na rameni L . Proti pohybu působí složka tíhové síly F_g na rameni L a tlaková síla F_n na rameni e .

$$I \cdot \ddot{\varphi} = F_t \cdot r - F_n \cdot e - F_g \cdot L \cdot \sin \varphi + m \cdot \ddot{y} \cdot L \cos \varphi \quad (4.5.22)$$

Dosazením vyjádření sil F_t , F_n a F_g vznikne neupravený tvar pohybové rovnice.

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \frac{r^2}{R-r} \cdot \varphi - m \cdot r \cdot \ddot{y} - m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} - F_n \cdot e - m \cdot g \cdot L \cdot \sin \varphi + m \cdot \ddot{y} \cdot L \cos \varphi \quad (4.5.23)$$

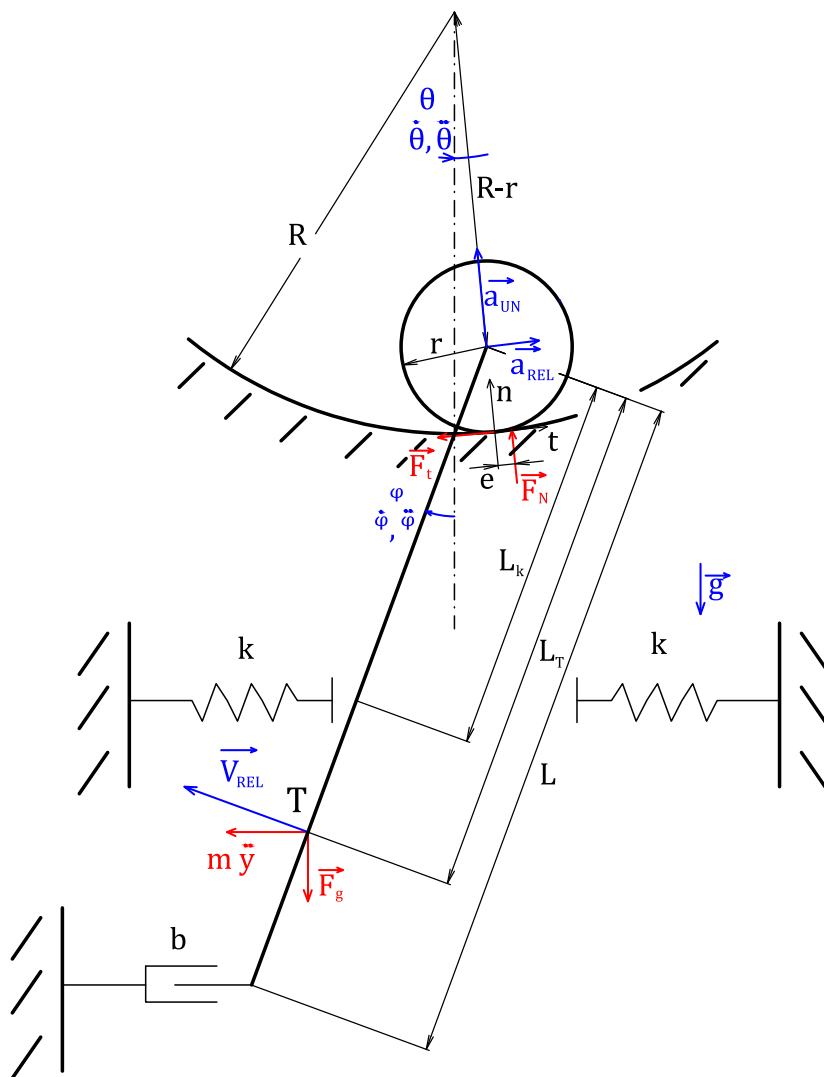
Upravením vznikne pohybová rovnice lineárního kyvadla

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I + m \cdot r^2} \left(-m \cdot g \cdot \frac{r^2}{R-r} \cdot \varphi - m \cdot g \cdot L \cdot \varphi + m \cdot \ddot{y} \cdot (L-r) - F_n \cdot e \right) \quad (4.5.24)$$

Tato rovnice již zohledňuje účinek valivého momentu a tedy lépe popisuje chování kyvadla.

4.6 Model nelineárního tlumeného vynuceného kmitání kyvadla

K vytvoření modelu nelineárního kyvadla, jak je již popsáno v úvodní kapitole, je třeba do systému přidat prvek, který bude mít nelineární charakteristiku nebo kyvadlo rozkmitat do velkých výchylek. V našem případě nastane první možnost a to, že přidáme k modelu lineárního kyvadla přidáme pevné dorazy, na které budou umístěny pružiny. Kyvadlo však na tyto pružiny narazí až v určité výchylce, což vytvoří nelineární závislost. Dále bude na konci kyvadla umístěn tlumič.



Obr. 6 Nelineární kyvadlo

Při sestavení pohybové rovnice lze vycházet z rovnice lineárního kyvadla. Parametry které obsahuje se nezmění, pouze budou přidány parametry nové. Jelikož tyto parametry neobsahují žádné pasivní odpory, lze je užitím Lagrangeovy metody zahrnout do minulého vztahu a sestavit tak pohybovou rovnici.

S přidáním pružin do systému vstupuje tuhost, kterou do rovnice lze zahrnout jako člen potenciální energie. Je však třeba uvažovat, že proměnná k již není konstantní pro všechny hodnoty výchylky. Tehdy, když se kyvadlo pružiny nedotýká je tato složka energie nulová.

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot (\varphi \cdot L_k)^2 \quad (4.6.1)$$

Tlumič s konstantou tlumení b bude při pohybu působit na kyvadlo tlumící silou a promítne se tedy jako složka disipativní energie.

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (\dot{\varphi} \cdot L)^2 \quad (4.6.2)$$

Derivace těchto složek podle zobecněné souřadnice budou mít tvar

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\varphi}} = b \cdot L^2, \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = k \cdot L_k^2 \quad (4.6.3), (4.6.4)$$

a jejich dosazením vznikne pohybová rovnice nelineárního kyvadla.

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I + m \cdot r^2} \left(-m \cdot g \cdot \frac{r^2}{R - r} \cdot \varphi - m \cdot g \cdot L_T \cdot \varphi + m \cdot \ddot{y} \cdot (L_T - r) - F_N \cdot e - b \cdot L^2 - k \cdot L_k^2 \right) \quad (4.6.5)$$

Nelinearita proměnné k bude vyjádřena v prostředí Simulink pomocí funkce "Deadzone", do které zadáme kritickou výchylku, která bude odpovídat dotyku ramene kyvadla a pružiny.

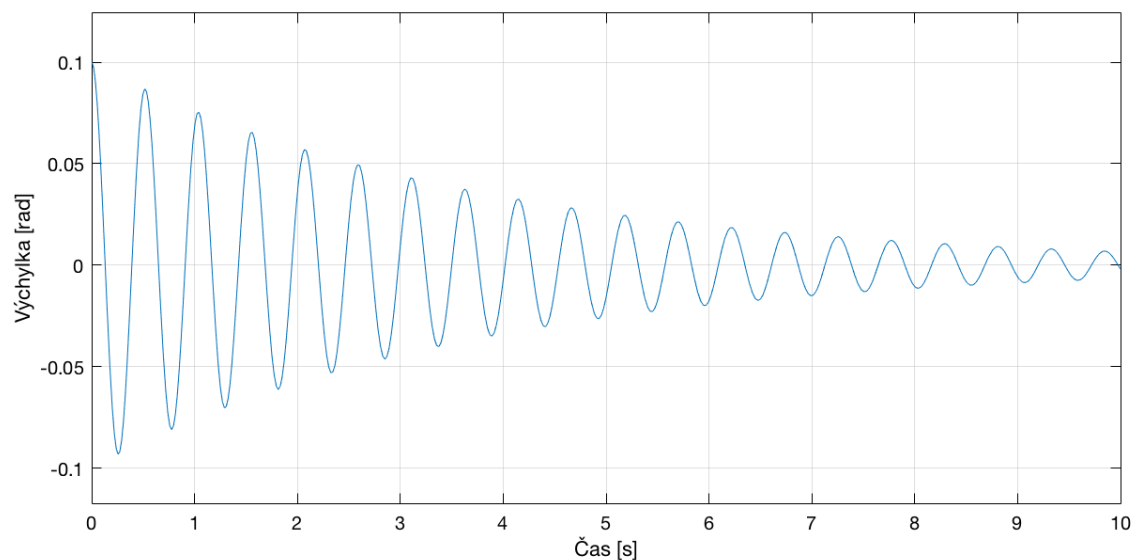
5 Analýza výsledků

5.1 Výpočtový model

Tvorba výpočtového modelu je provedena v prostředí Simulink. Výpočtový model vychází z pohybové rovnice podle níž je sestaveno blokové schéma. Dostáváme tedy obvod sestavený z parametrů daného systému, jehož výstupem je pak okamžitá výchylka v závislosti na čase. Výpočtové modely společně se spouštěcími soubory, které obsahují vstupní parametry jsou obsaženy v příloze.

5.2 Homogenní tyč uchycená rotační vazbou

Model homogenní tyče uchycené na jejím konci rotační vazbou je, jak již bylo zmiňováno, systém, který kmitá lineárně. Výstupní charakteristika kmitání bude mít periodický průběh, tvořený utlumeným sinusovým průběhem. Pro zvolené parametry vznikla závislost s podkritickým tlumením, tedy poměrný útlum je menší než 1. Jedná se kmitání volné s počáteční výchylkou 0,1 rad.



Graf č. 1 Volné kmitání homogenní tyče

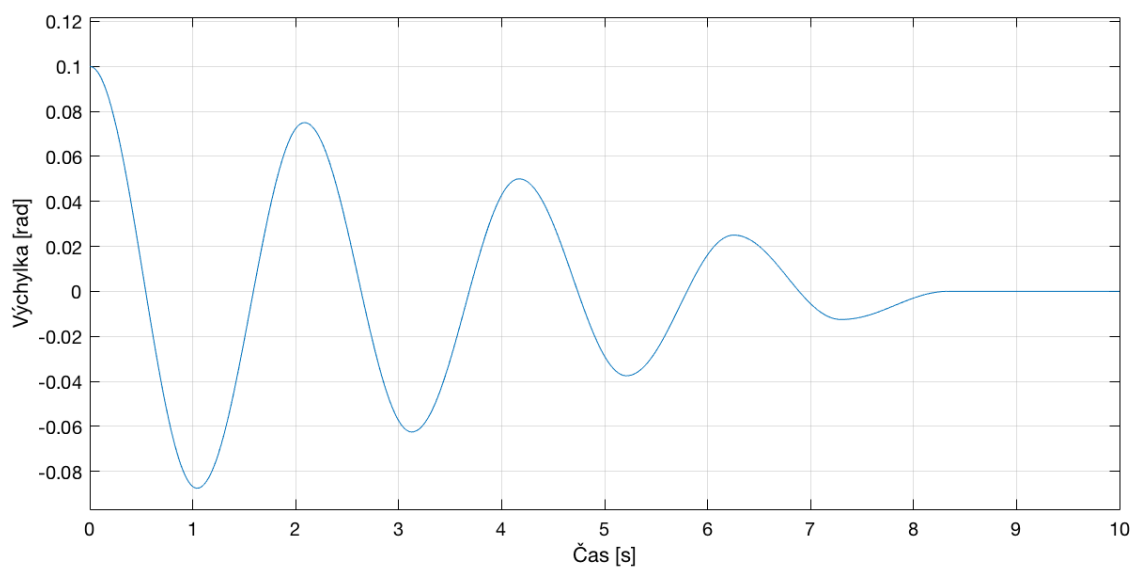
5.3 Odvalování čepu v pouzdře

Dalším případem jednoduchého lineárního kmitání je odvalování čepu v pouzdře.

Jedná se opět o volné kmitání s jedním stupněm volnosti s počáteční výchylkou 0,1 rad.

Tlumení je způsobeno momentem valivého odporu a utlumení systému je rychlejší oproti předchozímu případu.

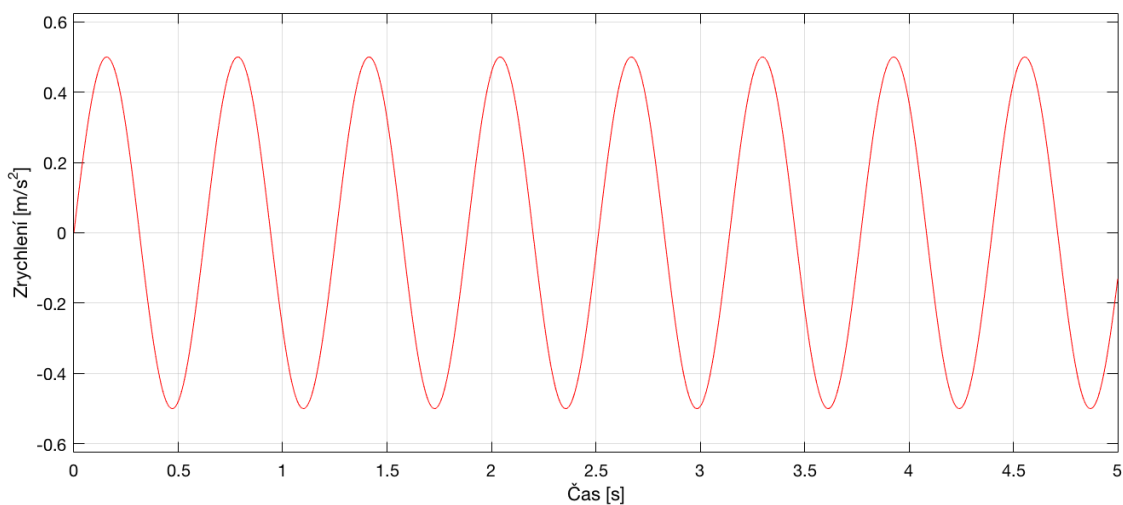
Výstupní charakteristika má opět periodický utlumený sinusový průběh. Jedná se o kmitání s podkritickým tlumením.



Graf č. 2 Časový průběh odvalování čepu

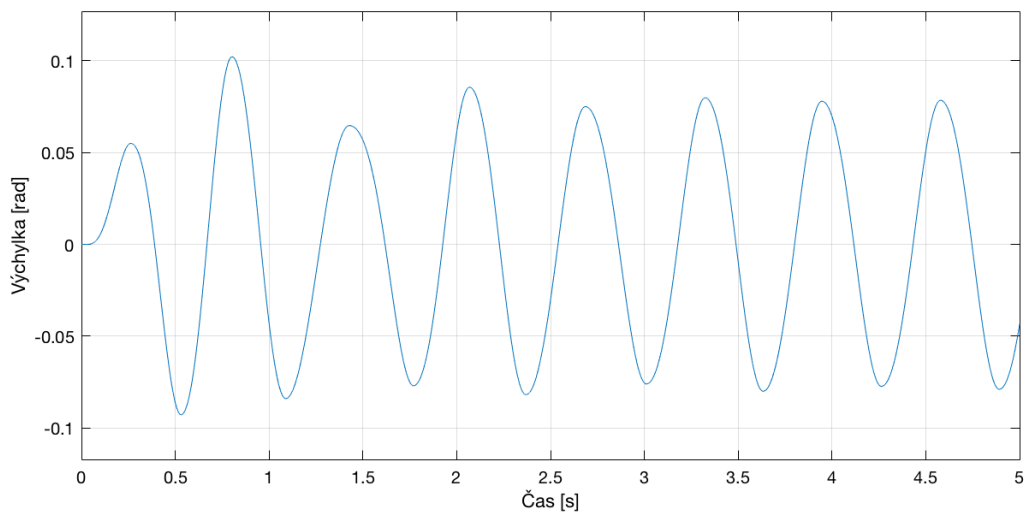
5.4 Lineární vynucené kmitání netlumeného kyvadla

Model lineárně kmitajícího kyvadla je, jak již bylo zmíněno dříve, modelem, který je kombinací modelu homogenní tyče a modelu popisující odvalování čepu. Stále se jedná o model lineárního kmitání, u kterého již kmitání není volné, ale je vynucené kinematickým buzením. Zrychlení, které na kyvadlo působí má sinusový průběh, amplitudu 0.5 m/s^2 .



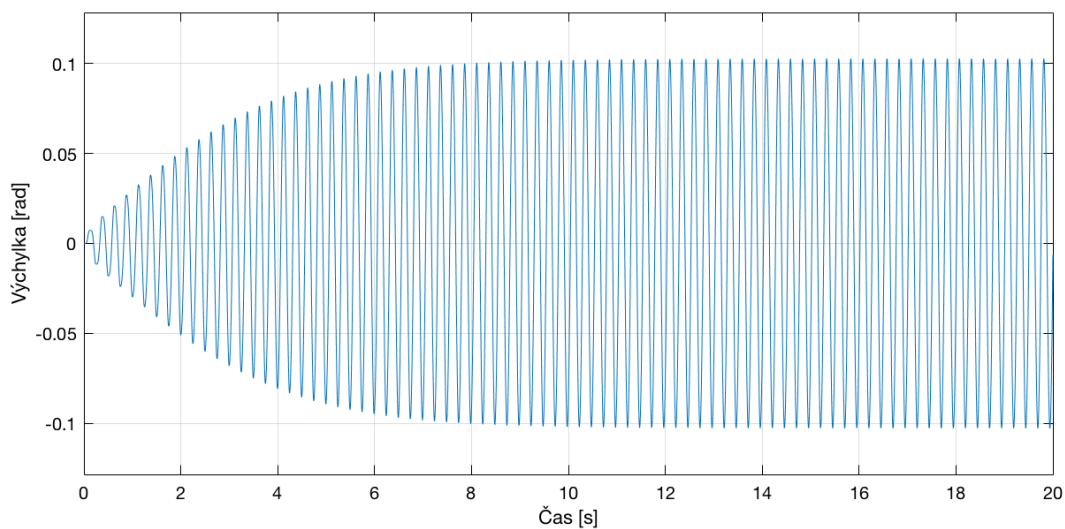
Graf č. 3 Budící zrychlení

Změnou frekvence budícího zrychlení, lze získat různé odezvy kyvadla. Při buzení nevlastní frekvencí vznikne průběh, kdy dojde jen k několika malým výkmitům, než se amplituda ustálí na stálé hodnotě.



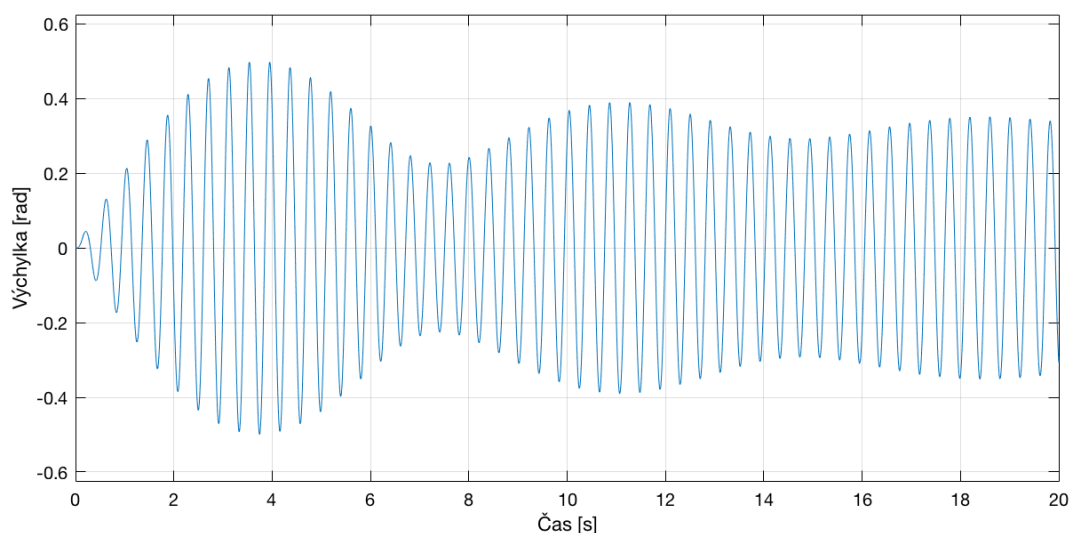
Graf č. 4 Časový průběh lineárního kmitání kyvadla buzeného zrychlením s nevlastní frekvencí kyvadla

Zcela jiný průběh vznikne, pokud bude kyvadlo buzeno vlastní frekvencí, nebo frekvencí, která se jí blíží. V takovém případě vznikne rezonanční kmitání, které se vlivem tlumících prvků po čase ustálí na určité hodnotě. Při buzení vlastní frekvencí dosáhneme největší amplitudy výkmitu, kterou můžeme pro zadané parametry dostat.



Graf č. 5 Časový průběh kmitání netlumeného kyvadla buzeného vlastní frekvencí

Ve speciálním případě však nemusí dojít ihned k ustálení na určité hodnotě, ale může dojít k poklesu hodnot amplitudy a jejímu opětovnému vzrůstu. Takovýto jev se nazývá zázněje.

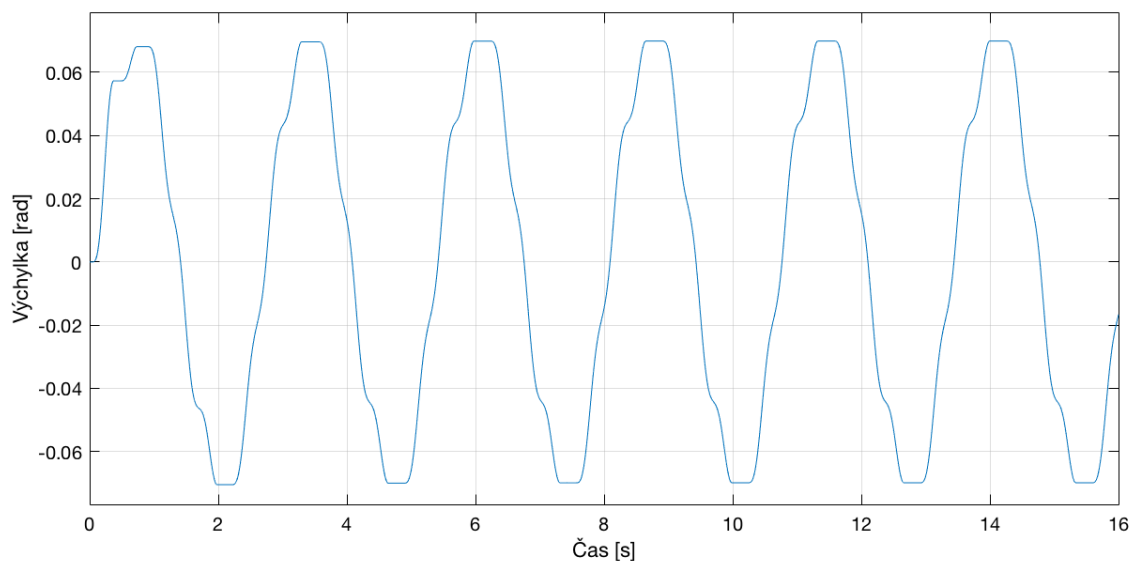


Graf č. 6 Časový průběh kmitání netlumeného kyvadla buzeného vlastní frekvencí - speciální případ

5.5 Nelineární vynucené kmitání netlumeného kyvadla

S přidáním pružiny, která na kyvadlo působí až od určité výchylky, se kyvadlo stává nelineárním systémem. To bude patrné ve výstupní charakteristice. Vynucené kmitání je realizováno budícím zrychlením, které bude mít proměnlivý sinusový průběh podobně jako v předchozím případě buzení lineárního kyvadla.

Odezva na budící signál bude ovlivněna nelinearitou pružiny, které se kyvadlo dotkne při výchylce 0,03 rad. Ve výstupní charakteristice je zřejmé právě toto místo změny tuhosti systému náhlou změnou tvaru výsledné křivky.



Graf č. 7 Časová závislost výchylky nelineárního netlumeného kyvadla

5.6 Praktická aplikace nelineárního kyvadla

Modelovou situací vytvořenou pro nelineární kyvadlo s kinematickým buzením lze aplikovat v praxi jako generátor elektrické energie [10]. Systém kyvadla by byl opatřen elektromagnety, ve kterých by kmitavý pohyb principem elektromagnetické indukce vytvářel elektrické pole. Budící zrychlení systému by bylo možné získávat například chůzí, které by potom svou reakční složkou uvádělo kyvadlo do pohybu. Dané zařízení by se dalo označit za "energy harvester", tedy zařízení získávající elektronickou energii z alternativního zdroje.

Otázkou je, jak velký výkon by bylo z takového kyvadla možné získat. K získání této informace využijeme tlumič, který přivede do systému složku disipativní energie. Uvažujme, že velikost této energie pak bude odpovídat energii elektrické, kterou kyvadlo dokáže vytvořit. Výkon systému potom bude možné vypočítat z rovnice

$$P = b \cdot v.$$

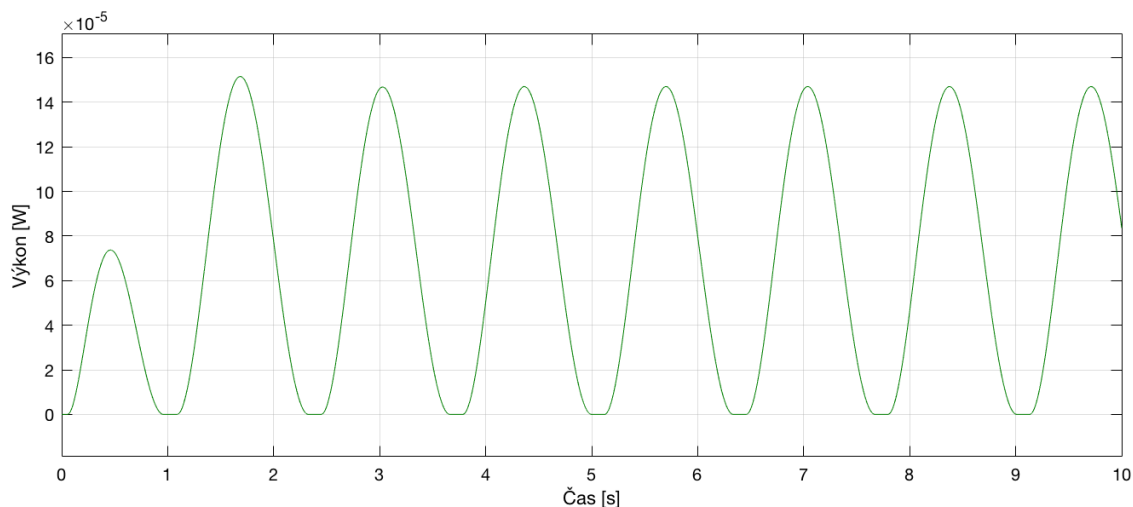
Veličina	Hodnota	Název
r [mm]	4,5	Poloměr čepu
R [mm]	6	Poloměr pouzdra
L [mm]	50	Délka tyče
L_k [mm]	40	Vzdálenost pružin od osy otáčení
m_1 [kg]	0,002	Hmotnost čepu
m_2 [kg]	0,04	Hmotnost tyče
e [mm]	0,5	Rameno valivého odporu

Veličina	Hodnota	Název
$g \text{ [m/s}^2\text{]}$	9,81	Tíhové zrychlení
$a \text{ [m/s}^2\text{]}$	1	Budící zrychlení
$k_0 \text{ [N/m]}$	10^8	Tuhost dorazu
$k_1 \text{ [N/m]}$	0,5	Tuhost pružiny
$B \text{ [Ns/m]}$	4,2	Tlumící konstanta

Tab. 1 Vstupní hodnoty kyvadla

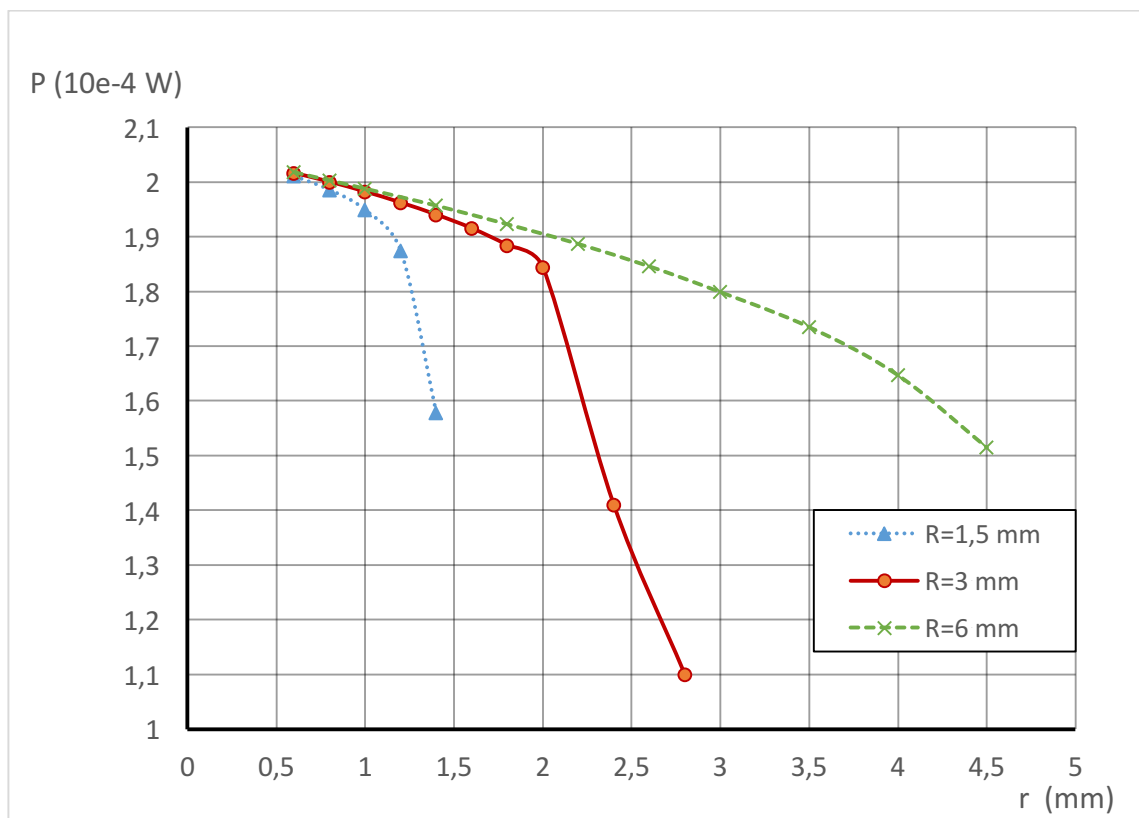
Za předpokladu, že budeme měnit pouze parametry poloměrů v čepu a pouzdra, můžeme zjistit, jakou amplitudu výkonu lze získat pro různé poloměry.

V našem konkrétním případě byly zvoleny poloměry R pro 1,5 mm, 3 mm a 6 mm. Experimentálně bylo zjištěno, že pro tyto vstupní parametry kyvadlo dosahuje nejvyšších hodnot výkonu pro tlumič s konstantou $b = 4,2 \text{ Ns/m}$. Nutno dodat že hodnoty výkonu odpovídají naměřené amplitudě získaného výkonu.



Graf č. 8 Hodnoty výkonu, které je kyvadlo schopné generovat v určitém čase

Pro tyto vstupní hodnoty dostaneme následující závislost. Lze na ní vidět, že hodnoty výkonu jsou největší v případě, kdy se velikost čepu r oproti velikosti zaoblení R snižuje. Dále lze pozorovat, že pro malé hodnoty čepu r jsou hodnoty výkonů prakticky stejné pro všechna sledovaná zaoblení R .



Graf č. 9 Závislost poloměru čepu na výkonu pro jednotlivá zaoblení

Z výsledků získaných z této závislosti lze tvrdit, že čím větší bude poloměr pouzdra, tím méně budou hodnoty získaného výkonu klesat. Pro výrobu by bylo vhodné, jelikož se čep nebude odvalovat po celém obvodu, zvolit variantu nepravidelného otvoru, a pro stykovou část čepu a pouzdra udělat zaoblení co možná největší. Co se týče velikosti čepu, budou hodnoty získaného výkonu největší pro malé poloměry čepu, to jak moc se bude výkon měnit budou ovlivňovat právě velikosti poloměru stykové části pouzdra.

6 Závěr

Tato práce se zabývala tvorbou kyvadla s kinematickým buzením. V první kapitole byla popsána teorie kmitání, vysvětlení a rozdělení pojmů jako je linearita kmitání, rozdíl mezi volným a vynuceným kmitáním, rozdělení kmitání podle počtu stupňů volnosti. Dále byly nastíněny některé příklady využitelnosti kyvadel v technické praxi.

V dalším oddíle se práce věnuje vytvoření modelů různých druhů kyvadel. Konkrétně se jedná o dva základní případy kmitání, a to kmitání homogenní tyče uchycené rotační vazbou a valení čepu v pouzdře, dále potom výsledné kyvadlo, které je tvořeno kombinací těchto dvou dílčích modelů. Modely kyvadla jsou vytvořeny jak s lineárními parametry, tak s nelineárními a obě tato kyvadla jsou dále ovlivňována kinematickým buzením. Pro každý dílčí model je sestavena pohybová rovnice, ze které je vytvořen simulační program daného systému.

V posledním oddíle jsou pro jednotlivé modely vykresleny výsledné časové charakteristiky výchylky. Pro lineární kyvadlo je vytvořeno několik případů kinematického buzení, a to buzení jak s nevlastní, tak i s vlastní frekvencí. Při vynuceném kmitání s nevlastní frekvencí lze vidět rychlé ustálení na amplitudě kmitání. U buzení vlastní frekvencí je patrný prudký nárůst výchylky, která se po určité době ustálí na hodnotě amplitudě kmitání, nebo ve zvláštním případě dojde k opětovnému poklesu a nárůstu. Tento jev je označován jako zázněj.

Pro nelineární kyvadlo je vykreslena časová odezva zobrazující nelineární chování tohoto kyvadla. Ve výsledné charakteristice je patrná změna výchylky v okamžiku, kdy se kyvadlo dotkne pružiny.

Model nelineárního kyvadla je poté použit pro návrh generátoru, který by teoreticky na principu elektromagnetické indukce byl schopen měnit energii kmitání na elektrickou energii. Pro hodnoty, které byly použity jako vstupní parametry simulace, by však byl výkon získaný takovým generátorem velmi malý, řádově by se jednalo o hodnoty 10^{-4} W.

7 Použité zdroje

- [1] HOUFEEK, Lubomír. Dynamika: Přednášky. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011.
- [2] BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. *Mechanické kmitání*. Vyd. 1. Praha: Sobotáles, 1994. Česká matice technická (Sobotáles). ISBN 8090168485.
- [3] HLAVÁČ, Zdeněk. *Vynucené kmitání soustav s jedním stupněm volnosti* [online]. b.r., , 44 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: <https://www.kme.zcu.cz/download/predmety/293-fst8.pdf>
- [4] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Vyd. 4. V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007, 227 s. : il. ; 30 cm. ISBN 9788021434462.
- [5] MAREŠ, M. Měření zrychlení vozidla [online]. Mendelova univerzita v Brně, 2012 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: https://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjawuL794XUAhUEEJoKHYxxDdcQFggsMAE&url=https%3A%2F%2Fis.mendelu.cz%2Fslide%2Fclovek.pl%3Fzalozka%3D13%3Bid%3D10873%3Bstudium%3D50549%3Bdownload_prace%3D1&usg=AFQjCNHtv3gfamENvLCfDCgRi9n07WzNmW&sig2=EvMsXJsy66mirfy5T8vLrw
- [6] FAMFULÍK, Lukáš. *Digitální kyvadlový inklinometr* [online]. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2008 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/14807>.
Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav radioelektroniky. Vedoucí práce Viera Biolková.
- [7] PRIYA, Shashank a D. INMAN. *Energy Harvesting Technologies* [online]. Boston, MA: Springer US, 2009 [cit. 2017-05-24]. DOI: 10.1007/978-0-387-76464-1. ISBN 0387764631. Dostupné z: <http://web.b.ebscohost.com.ezproxy.lib.vutbr.cz/ehost/detail/detail?sid=fde3005b-2061-409e-9a74-2c6216d5884d%40sessionmgr101&vid=0&hid=129&bdata=Jmxhbmc9Y3Mmc2l0ZT1laG9zdC1saXZl#AN=275734&db=nlebk>

- [8] RUBEŠ, Ondřej. *Návrh vibračního generátoru s využitím nelineárních charakteristik* [online]. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2016 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/59698>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Zdeněk Hadaš.
- [9] KUČEROVÁ, Barbora. *Matematické kyvadlo* [online]. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2010 [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/13394>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav matematiky. Vedoucí práce Jan Franců.
- [10] KADJIE, Arnaud a Paul WOAF0. *Effects of springs on a pendulum electromechanical energy harvester*. Theoretical and Applied Mechanics Letters [online]. Elsevier Ltd, 2014, 4(6), 063001 [cit. 2017-05-23]. DOI: 10.1063/2.1406301. ISSN 20950349. Dostupné z: http://ac.els-cdn.com/S2095034915303585/1-s2.0-S2095034915303585-main.pdf?_tid=1022cac8-3eef-11e7-b695-00000aab0f6c&acdnat=1495458394_9656a6de97e1b050f17bbf0f7e4137f5

8 Seznam obrázků a grafů

8.1 Seznam obrázků a tabulek

Obr. 1 Schéma piezoelektrického vibračního generátoru s elektrickou zátěží [7]	13
Obr. 2 Matematické kyvadlo v tíhovém poli	15
Obr. 3 Homogenní tyč uchycená rotační vazbou	16
Obr. 4 Odvalování čepu	19
Obr. 5 Kyvadlo s valivým členem	22
Obr. 6 Nelineární kyvadlo	27
Tab. 1 Vstupní hodnoty kyvadla	34

8.2 Seznam grafů

Graf č. 1 Volné kmitání homogenní tyče	29
Graf č. 2 Časový průběh odvalování čepu	30
Graf č. 3 Budící zrychlení	30
Graf č. 4 Časový průběh lineárního kmitání kyvadla buzeného zrychlením s nevlastní frekvencí kyvadla	31
Graf č. 5 Časový průběh kmitání netlumeného kyvadla buzeného vlastní frekvencí	31
Graf č. 6 Časový průběh kmitání netlumeného kyvadla buzeného vlastní frekvencí - speciální případ	32
Graf č. 7 Časová závislost výchylky nelineárního netlumeného kyvadla	33
Graf č. 8 Hodnoty výkonu, které je kyvadlo schopné generovat v určitém čase	34
Graf č. 9 Závislost poloměru čepu na výkonu pro jednotlivá zaoblení	35

9 Seznam použitých veličin

Značka	Jednotka	Název
m	kg	hmotnost
a	m/s^2	zrychlení
g	m/s^2	tíhové zrychlení
F	N	síla
F_g	N	tíhová síla
L	m	délka kyvadla
I	Nm^2	moment setrvačnosti
I_T	Nm^2	moment setrvačnosti s osou v těžišti
$L_T (l_T)$	m	vzdálenost osy otáčení od těžiště
$L_k (l_k)$	m	vzdálenost osy otáčení od působíště pružiny
F_{Ct}, F_{Cn}	N	tečná a normálová složka síly působící na rotační vazbu
M_{ξ}	Nm	moment čepového tření v rotační vazbě
f	-	koefficient tření
$r_{\check{c}}$	m	poloměr čepu
b	Ns/m	konstanta tlumení
v	m/s	okamžitá rychlost
F_t	N	třecí síla
F_n	N	tlaková síla
a_t	m/s^2	zrychlení v tečném směru
a_n	m/s^2	zrychlení v normálovém směru
a_{REL}	m/s^2	zrychlení relativní složky pohybu
a_{UN}	m/s^2	zrychlení unášivé složky pohybu
v_{REL}	m/s	rychlost relativní složky pohybu
R	m	poloměr otvoru pouzdra
r	m	poloměr čepu
e	m	rameno valivého odporu
E_k	J	kinetická energie

Značka	Jednotka	Název
E_p	J	potenciální energie
E_D	J	disipativní energie
A	J	práce vnějších sil
P	W	výkon vnějších sil
$\ddot{y}$	m/s^2	budící zrychlení
φ, θ	rad	úhlová výchylka
$\dot{\varphi}, \dot{\theta}$	rad/s	úhlová rychlost
$\ddot{\varphi}, \ddot{\theta}$	rad/s^2	úhlové zrychlení

10 Seznam příloh

Příloha I	Model homogenní tyče
Příloha II	Model valení čepu
Příloha III	Model lineárního kyvadla
Příloha IV	Model nelineárního kyvadla

Přílohy jsou nahrány na nosiči CD, který je součástí bakalářské práce. Každá příloha obsahuje model a jemu odpovídající spouštěcí skript. Soubory jsou vytvořené ve verzi Matlabu R2016a.