

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ASYMPTOTICKÁ STABILITA SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC K V INŽENÝRSKÝCH APLIKACÍCH

ASYMPTOTIC STABILITY OF SYSTEMS OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN
ENGINEERING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAKUB MAŠEK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. PETR TOMÁŠEK, Ph.D.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jakub Mašek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Asymptotická stabilita systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic v inženýrských aplikacích

v anglickém jazyce:

Asymptotic stability of systems of linear ordinary differential equations in engineering

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Nastudovat a zpracovat problematiku stability systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Ilustrace těchto poznatků na konkrétních technických problémech.

Cíle bakalářské práce:

Student by se měl naučit orientovat se v dané problematice a zvládnout aplikovat získané poznatky na vybraných technických problémech.

Seznam odborné literatury:

Kalas, J., Ráb, M., Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova Univerzita, Brno 1995.
Rektorys, K. a kol., Přehled užití matematiky II, Prometheus, Praha, 1986.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 22.11.2013

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá stabilitou soustav lineárních diferenciálních rovnic a to speciálně stabilitou Ljapunovskou a asymptotickou. Nejprve jsou zavedeny potřebné pojmy z teorie stability a soustav diferenciálních rovnic. Dále jsou vypsány základní metody pro zjišťování stability soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a je provedeno jejich porovnání. Další část práce je věnována trajektoriím v rovině se zaměřením na izolované singulární body. V závěru práce jsou uvedeny dvě technické aplikace a to propojené sekce a oscilátory.

Summary

This bachelor's thesis is dealing with stability of system of linear ordinary differential equations and specially Lyapunov stability and asymptotic stability. There are established necessary concepts from the theory of stability and form systems of differential equations at first. Furthermore there are listed basic methods for determining the stability of linear differential equations with constant coefficients and they are compared. The next part of thesis is dedicated to trajectory in plane with focus on isolated singular points. At the end are two technical applications and they are linked sections and oscillators.

Klíčová slova

Stabilita, Ljapunovská stabilita, asymptotická stabilita, systém lineární obyčejných diferenciálních rovnic, trajektorie, singulární bod, fázový portrét

Keywords

Stability, Lyapunov stability, asymptotic stability, system of linear ordinary differential equations, trajectory, singular point, phase portrait

MAŠEK, J. *Asymptotická stabilita systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic k v inženýrských aplikacích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 22 s. Vedoucí Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Asymptotická stabilita systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic v inženýrských aplikacích“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Petra Tomáška, Ph.D. s využitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Jakub Mašek

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce Ing. Petru Tomáškoví, Ph.D. za vedení, neocenitelnou pomoc, vstřícný přístup, poskytnuté materiály a v neposlední řadě ochotu pomoci při tvoření této bakalářské práce.

Jakub Mašek

Obsah

1	Úvod	2
2	Stabilita řešení	3
2.1	Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic	3
2.2	Cauchyova úloha	4
2.3	Asymptotická stabilita	4
2.4	Analýza stability SLODR1 s konstantními koeficienty	5
3	Typy trajektorií v rovině	10
3.1	Rozdělení trajektorií	10
3.2	Okolí bodů v rovině	10
3.3	Vztahy singulárních bodů k charakteristickému polynomu	11
4	Stabilita reálných systémů	14
4.1	Tři propojené nádrže do okruhu	14
4.2	Soustava těles propojených pružinami	16
4.3	Tlumené kmitání tělesa na pružině	18
5	Závěr	20
6	Seznam použitých zkratk a symbolů	22

Kapitola 1

Úvod

Diferenciální rovnice patří do jedné z nejpoužívanějších oblastí aplikované matematiky. Objevují se snad ve všech vědních oborech všude, kde chceme popsat pomocí matematiky určitý děj. Nejčastěji lze diferenciální rovnice nalézt ve fyzice, ale lze je najít třeba i v chemii, biologii, ekologii, ekonomii, meteorologii, nebeské mechanice a mnoha dalších disciplínách. První se diferenciálním rovnicím věnoval německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz už v roce 1676 a to většinou v konkrétních úlohách, nicméně ještě před Leibnizem lze úplně první pokus o řešení diferenciálních rovnic nalézt u Isaaca Newtona. Teorii diferenciálních rovnic poté rozvíjelo od dob Leibnize a Newtona mnoho matematiků. Postupně bylo objeveno mnoho vlastností a problémů okolo diferenciálních rovnic. Jedním z nich je problém chování systémů za určitých podmínek. Většinou je požadováno, aby jeho chování bylo blízké v určitém smyslu jednomu předem danému řešení. Jako první se tomuto problému věnovali francouzský matematik Henri Poincaré a ruský matematik Alexandr Michajlovič Ljapunov na konci 19. století. Později se teorii stability věnovalo mnoho dalších matematiků a byly zavedeny i jiné druhy stability než ty zavedené Ljapunovem a Poincaréem. Cílem této práce bude pouze popsat teorii Ljapunovské stability a její rozšířené formy, asymptotické stability a ilustrace jejich aplikace na vybrané technické problémy. Jiné druhy stability zde nebudeme uvádět. Práce čerpá z několika zdrojů, ale hlavními jsou [1], [2], [5] a [7].

Struktura práce je následující: V druhé kapitole zavedeme základní definice z teorie stability a oblasti soustav obyčejných diferenciálních rovnic včetně kritérií stability u soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Třetí kapitola obsahuje klasifikace okolí izolovaných singulárních bodů lineárních autonomních systémů dvou rovnic. Nakonec ve čtvrté kapitole aplikujeme uvedenou teorii stability na konkrétní technické aplikace.

Kapitola 2

Stabilita řešení

2.1 Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Pro určování stability soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic (dále jen SLODR) si nejprve definujeme a popíšeme příslušné pojmy týkající se těchto soustav.

Poznámka 2.1. Budeme se věnovat pouze SLODR prvního řádu. Rovnice vyšších řádů lze převést na větší soustavu rovnic řádu prvního.

Definice 2.1 (Soustava obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu v normálním tvaru).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde funkce f_k jsou spojité funkce na $I \times \Omega$, $I = (T, +\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou funkce proměnné t , jež jsou spojité a diferencovatelné na I . $\dot{x}$ značí derivaci x podle t . [1] [2]

Soustavu (2.1) budeme alternativně zapisovat ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),\tag{2.2}$$

kde

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Řešením pak je soustava funkcí $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, které pro všechny body $t \in I$ vyhovují soustavě (2.1). [1]

2.2 Cauchyova úloha

Dále zavedeme Cauchyovu (počáteční) úlohu pro soustavu (2.1).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}. \quad (2.3)$$

Vektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ nazveme počáteční hodnotou, číslo $\tau \in I$ počátečním okamžikem a $\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$ počáteční podmínkou pro soustavu (2.1). Řešení Cauchyovy úlohy pak budeme zapisovat jako $\mathbf{y}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$, jelikož je závislé nejen na t , ale i na počáteční podmínce a okamžiku. Proměnná t je nejčastěji interpretována jako čas a vektor $\mathbf{x}$ jako vektor stavových proměnných.

[1]

Existence a jednoznačnost Cauchyovy úlohy

Pro následující úvahy budeme vždy řešení SLODR považovat za existující a jednoznačné, jinak by úvahy neplatily a nedávaly smysl. Proto si nyní uvedeme věty, podle kterých lze poznat, existuje-li řešení a je-li jednoznačné.

Věta 2.1. *Jsou-li funkce f_k spojité na množině $I \times \Omega$, pak **existuje řešení** na intervalu $J \subset I$ obsahující τ .*

Věta 2.2. *Jsou-li navíc na množině $I \times \Omega$ spojité parciální derivace*

$$\frac{\partial f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

je řešení jednoznačně řešitelné.

Uvedené věty vycházejí z Peanovy a Picardovy věty, jejich přesné znění i s důkazu lze nalézt v [3] [7]

2.3 Asymptotická stabilita

Jelikož SLODR mohou popisovat různé procesy, ať už mechanické, elektrické či jiné, mohou mít tyto popisované procesy obecně nekonečně mnoho řešení. Nás většinou zajímají procesy, od kterých požadujeme, aby jejich řešení bylo blízké jednomu určitému ději. To jest většinou setrvání v klidu či periodickém pohybu. Děje, ve kterých procesy zůstávají neomezeně dlouhou dobu, nazveme *rovnovážný stav*. Každý proces může mít i více rovnovážných stavů (například oscilátor může být v klidu, i periodicky kmitat).

Jiné stavy po určité době mohou přejít do jednoho ze svých rovnovážných stavů. To, za jakých podmínek přejdou do rovnovážných stavů, právě studuje asymptotická stabilita. Před samotnou asymptotickou stabilitou si zavedeme tzv. *ljapunovskou stabilitu*. Ta se zabývá ovlivněním výsledku změnou počátečních podmínek.

Definice 2.2. Řešení $\bullet$ nazveme ljapunovsky stabilní pokud platí: $\forall \tau > T, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\tau, \varepsilon) > 0$ tak, že $\|\boldsymbol{\xi} - \bullet\| < \delta$ a pro všechna $t \geq \tau$ splňuje řešení $\mathbf{y}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$ Cauchyovy úlohy (2.3) nerovnost

$$\|\mathbf{y}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})\| < \varepsilon \quad (2.5)$$

Kritéria určování stability SLODR1 s konstantními koeficienty

Nyní si uvedeme některé základní metody určování stability, jelikož vycházet přímo z definice není většinou moc efektivní a často to vůbec nelze. Vzhledem k poznámce 2.2 budeme řešit pouze homogenní SLODR1, které mají tvar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.13)$$

Věta 2.3. *Řešení je asymptoticky stabilní tehdy, když každé vlastní číslo λ matice A má reálnou část $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Pokud má alespoň jedno vlastní číslo reálnou část větší jak 0, tak řešení není stabilní. Jestli je reálná část alespoň jednoho $\lambda = 0$ a není-li násobné, je řešení pouze l'apunovsky stabilní, ale už ne asymptoticky.* [1] [2] [3] [7]

Poznámka 2.4. Vlastní čísla matice A mají zápornou reálnou část právě tehdy, když nulové body charakteristického polynomu matice A mají zápornou reálnou část.

Příklad. Mějme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1 - 2x_2 - 1x_3 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 5x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= 2x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Tudíž matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} -4 - \lambda & -2 & -1 \\ -3 & -5 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

potom charakteristický polynom vypadá takto $-14 - 30x - 11x^2 - x^3$. Kořeny vycházejí $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ a $\lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$. Z tohoto vidíme, že reálné části všech kořenů mají zápornou část, tudíž je soustava stabilní a to dokonce asymptoticky.

Věta 2.4 (Hurwitzovo kritérium). *Nechť je dán polynom*

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \quad (2.15)$$

kde $n \geq 1, a_0 > 0, a_n \neq 0$, s reálnými koeficienty. Hurwitzovou maticí polynomu (2.15) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

2.4. ANALÝZA STABILITY SLODR1 S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Pak všechny nulové body polynomu (2.15) mají záporné reálné části právě tehdy, když všechny hlavní diagonální subdeterminanty Hurwitzovy matice (2.16) jsou kladné, tj.

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 > 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0 \\ &\vdots \\ D_n &= a_n D_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

[1] [2] [8]

Poznámka 2.5. Toto a následující kritéria nám umožní rozhodnout o stabilitě i bez zjišťování nulových bodů charakteristického polynomu.

Příklad. Mějme charakteristický polynom homogenní soustavy diferenciálních rovnic $3 + 2\lambda + 7\lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$. To už by zjišťování kořenů bylo zbytečně složité, takže využijeme Hurwitzovo kritérium. Hurwitzova matice vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zjistíme subdeterminanty matice.

$$D_1 = 2 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad D_4 = 1D_3 = 11 > 0$$

Všechny determinanty jsou kladné. Podmínky Hurwitzova kritéria jsou tedy splněny a polynom je hurwitzovský, tudíž řešení soustavy je stabilní.

Věta 2.5 (Liénard - Chipartovo kritérium). *Uvažujme opět polynom (2.15). Pak všechny nulové body polynomu jsou záporné, pokud platí alespoň jedna z podmínek*

1. $a_0 > 0, a_{2k} > 0$
2. $a_0 > 0, a_{2k-1} > 0$
a zároveň alespoň jedna z podmínek
3. $D_{2k-1} > 0$
4. $D_{2k} > 0$,
kde D_i jsou hlavní diagonální subdeterminanty.

[2]

Příklad. Nyní mějme charakteristickou rovnici $b + 2\lambda + a\lambda^2 + \lambda^3 = 0$, kde a, b jsou konstanty. Podle Liénardovo-Chipartova kritéria je řešení soustavy stabilní, pokud $a > 0, b > 0$ a $D_2 = 2a - b > 0$ aneb $a > b/2$. (Nemusíme už vyšetřovat D_1 a D_3 , i když by to v tomto případě bylo dosti jednoduché.)

Věta 2.6. Michajlovo - Leonhardovo kritérium Frekvenční kritérium, jež vychází z rozložení nulových bodů polynomu

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \quad (2.17)$$

v komplexní rovině. Dosazením proměnné $i\omega$ (ω je reálný parametr, $0 \leq \omega \leq +\infty$) do polynomu (2.17) za proměnou z , dostaneme parametrizaci křivky v komplexní rovině, tzv. hodograf funkce f . Aby měly všechny nulové body polynomu (2.17) záporné reálné části, musí platit:

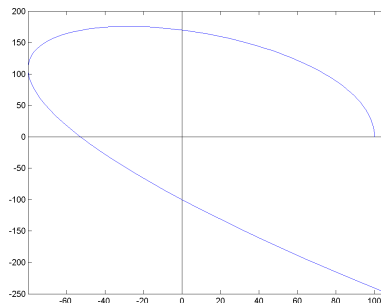
1. Křivka musí vycházet z kladné reálné poloosy, neboli hodnota funkce f pro $\omega = 0$ musí mít kladnou reálnou část a nulovou imaginární část.
2. Polohový vektor bodu $f(i\omega)$ musí při změně parametru ω od 0 do $+\infty$ opsat v kladném směru úhel $\frac{n\pi}{2}$, kde n je stupeň polynomu $f(z)$.

[1] [8]

Poznámka 2.6. V praxi se pak zjišťuje, jestli křivka protne v kladném směru $n - 1$ hlavních poloos.

Tato a dalších frekvenční charakteristiky lze nalézt v [8]

Příklad. Mějme polynom $0.05\lambda^4 + 0.6\lambda^3 + 6\lambda^2 + 50\lambda + 100$. Po dosazení $j\omega$ a následném upravení dostaneme $0.05\omega^4 - 6\omega^2 + 100 + j\omega(50 - 0.6\omega^2)$, což má křivku v komplexní rovině tuto:



Obrázek 2.1: křivka v komplexní rovině

Z toho vidíme, že křivka splňuje Michajlov - Leonhardovo kritérium, jelikož dle poznámky 2.6 protne tři poloosy. Pro ověření zjistíme limitu argumentu analyzovaného polynomu. Ta je: $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(0.05\omega^4 - 6\omega^2 + 100 + j\omega(50 - 0.6\omega^2)) = 0$, což znamená, že se křivka vrátí zpět na reálnou osu.

Porovnání uvedených kritérií

Z uvedených příkladů je vidět, že zjišťovat vlastní čísla matice lze snadno maximálně pro soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé, protože pro kořeny polynomů vyšších stupňů neexistují obecné vzorce.

Pro větší soustavu je vhodné použít kritérium zjišťující stabilitu bez konkrétních hodnot λ , například Hurwitzovo nebo Liénardovo - Chipartovo kritérium. Z těchto dvou je ale Liénardovo-Chipartovo vhodnější, jelikož stačí k rozhodnutí zjistit pouze liché nebo sudé subdeterminanty.

Frekvenční kritéria jako Michajlovo - Leonhardovo jsou náročnější než dříve uvedená algebraická kritéria, nicméně lze pomocí nich, kromě určení stability, určit také míru stability dané soustavy.

Kapitola 3

Typy trajektorií v rovině

V této kapitole se budeme věnovat typům trajektorií pro dvě soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé. Speciálně se zaměříme na singulární body.

Definice 3.1. Trajektorie je průmět řešení $\mathbf{x}(t)$ do prostoru hodnot řešení, tzv. fázového prostoru. Což je křivka $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in I$ v $\mathbb{R}^n$. Řešení soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé $(x_1(t), x_2(t))$ se tedy promítne do prostoru $\mathbb{R}^2$.^[7]

Pro větší přehlednost budeme v této kapitole oproti předchozím značit $x_1(t)$ jako $y(t)$ a $x_2(t)$ jako $z(t)$. Šipky označující orientaci křivek představují směr pohybu hodnoty řešení po trajektorii s rostoucím časem t .

3.1 Rozdělení trajektorií

Pro jednoznačně řešitelné řešení rozlišujeme tři druhy trajektorií. A to:

1. *singulární bod* - řešení $\mathbf{x}(t)$ je konstantní.
2. *uzavřená křivka (cyklus)* - řešení $\mathbf{x}(t)$ je periodické.
3. *otevřená neprotínající se křivka* - řešení $\mathbf{x}(t)$ je prosté zobrazení intervalu I do roviny. Jedná se o všechny nekonstantní a neperiodické řešení.

Poznámka: To, že se trajektorie neprotne, nám zajišťuje jednoznačnost.

3.2 Okolí bodů v rovině

Nyní se budeme zabývat ryzím okolím bodů trajektorií. Každý bod, jenž není singulární, leží na otevřené či uzavřené křivce. V jeho okolí se nacházejí body ležící na trajektoriích „rovnoběžných“ a stejně orientovaných jako křivka, na které leží onen bod. Singulární body mohou mít v okolí buďto jiné singulární body, nebo křivky. Singulární body, které v okolí žádné jiné singulární body nemají, se nazývají izolované. Izolované singulární body dělíme na několik druhů podle toho, jakým křivkám patří okolní body.

3.3. VZTAHY SINGULÁRNÍCH BODŮ K CHARAKTERISTICKÉMU POLYNOMU

1. **Střed** - každým bodem ryzího okolí (singulárního bodu) musí procházet uzavřená křivka.
2. **Uzel** - každým bodem ryzího okolí musí procházet otevřená křivka, jejíž konec je singulární bod. Směrnice tečny k trajektorii musí mít konečnou limitu. Uzly dále dělíme na:
 - (a) Přitažlivé (atraktivní) - pokud se body trajektorií pro $x \rightarrow \infty$ přibližují k singulárnímu bodu.
 - (b) Odpudivé (neatraktivní) - pokud se body trajektorií pro $x \rightarrow \infty$ vzdalují od singulárního bodu.
3. **Ohnisko** - každým bodem ryzího okolí musí procházet otevřená křivka. Směrnice tečny k trajektorii nemají vlastní limitu. Ohniska dále dělíme na:
 - (a) Přitažlivé (atraktivní) - pokud se body trajektorií pro $x \rightarrow \infty$ přibližují k singulárnímu bodu.
 - (b) Odpudivé (neatraktivní) - pokud se body trajektorií pro $x \rightarrow \infty$ vzdalují od singulárního bodu.
4. **Sedlo** - V ryzím okolí existují otevřené křivky končící v singulárním bodě, jenž se některé pro $x \rightarrow \infty$ přibližují k singulárnímu bodu, a jiné se vzdalují. [3] [7]

Okolí neizolovaných singulárních bodů, lze nalézt v [3].

3.3 Vztahy singulárních bodů k charakteristickému polynomu

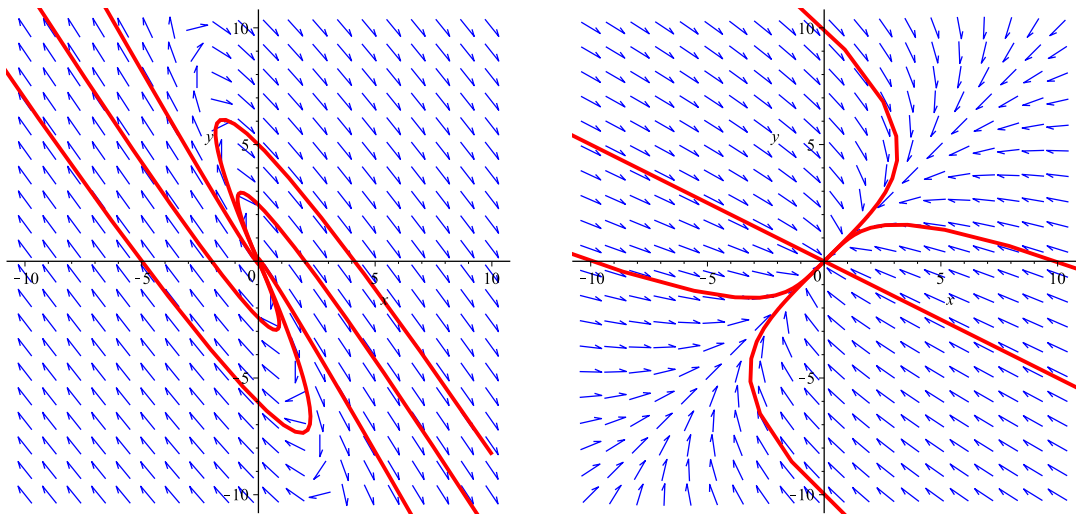
Nyní se podíváme na vztah singulárních bodů a jejich okolí k charakteristickým polynomům. Typy singulárních bodů můžeme zjistit z hodnot kořenů charakteristických polynomů λ_1 a λ_2 .

1. Pokud platí, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, jinak řečeno kořeny jsou kladné a reálné, pak singulární bod je odpudivý uzel. Obrázek 3.1 vlevo.
2. Pokud platí, $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, jinak řečeno kořeny jsou záporné a reálné, pak singulární bod je atraktivní uzel. Obrázek 3.1 vpravo.
3. Pokud platí, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, kde $a > 0$ a $b \neq 0$, jinak řečeno kořeny jsou imaginární s kladnou reálnou částí, pak singulární bod je odpudivé ohnisko. Obrázek 3.2 vlevo.
4. Pokud platí, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, kde $a < 0$ a $b \neq 0$, jinak řečeno kořeny jsou imaginární se zápornou reálnou částí, pak singulární bod je přitažlivé ohnisko. Obrázek 3.2 vpravo.
5. Pokud platí, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, jinak řečeno, že jeden kořen je kladný a druhý záporný, pak singulární bod je sedlo. Obrázek 3.3 vlevo.

3.3. VZTAHY SINGULÁRNÍCH BODŮ K CHARAKTERISTICKÉMU POLYNOMU

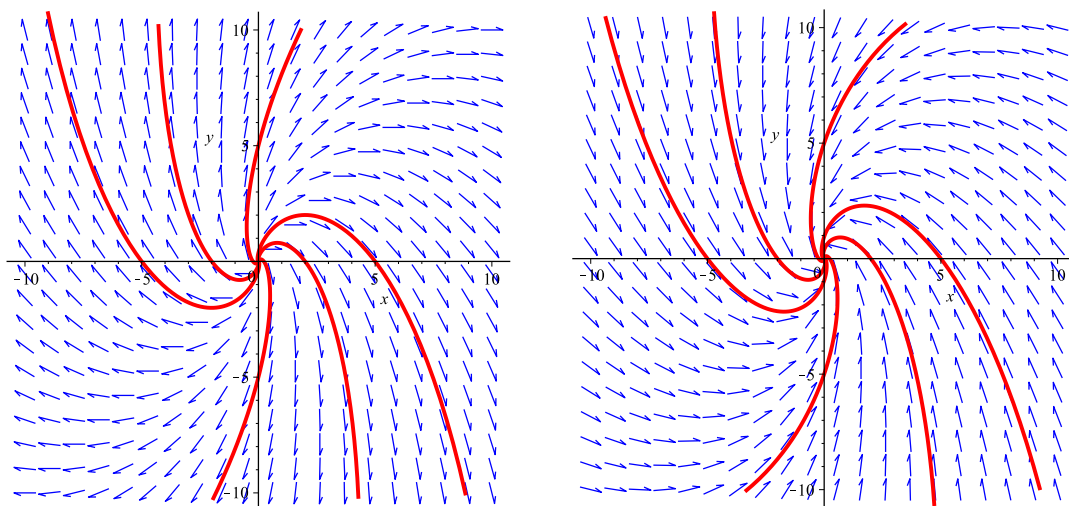
6. Pokud platí, $\lambda_{1,2} = ib$, kde $b \neq 0$, jinak řečeno kořeny jsou imaginární s nulovou reálnou částí, pak singulární bod je střed. Obrázek 3.3 vpravo. [3] [7]

Poznámka 3.1. Z tohoto vzhladem k uvedeným kritériím určování stability u SLODR1 vidíme, že asymptoticky stabilní je pouze přitažlivý uzel a přitažlivé ohnisko. Je také vidět, že soustava mající atraktivní uzel bude přecházet na ustálený stav mnohem rychleji, než soustava s atraktivním ohniskem. Střed je jenom Ljapunovsky stabilní a ostatní druhy jsou nestabilní.

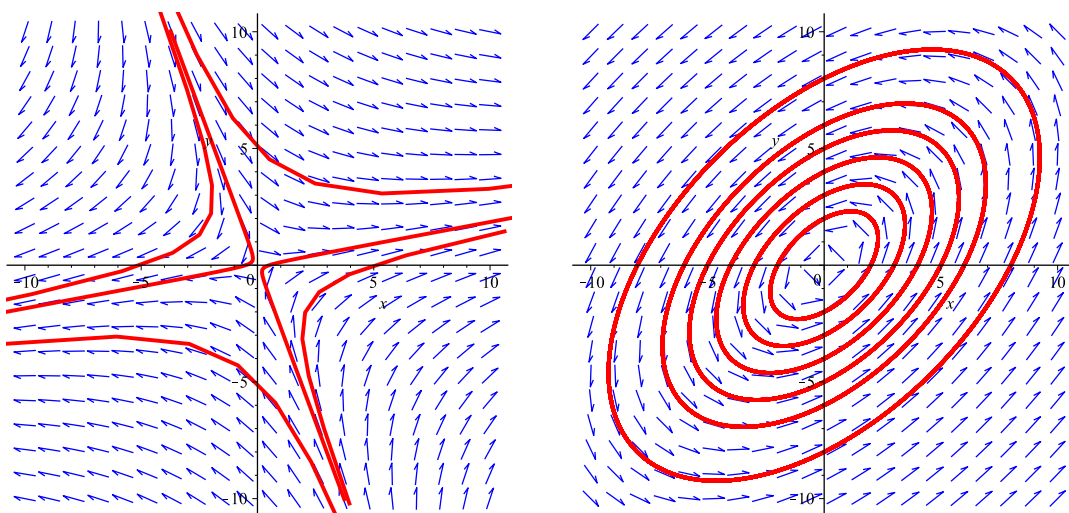


Obrázek 3.1: Odpudivý a přitažlivý uzel

3.3. VZTAHY SINGULÁRNÍCH BODŮ K CHARAKTERISTICKÉMU POLYNOMU



Obrázek 3.2: Odpudivé a přitažlivé ohnisko



Obrázek 3.3: Sedlo a střed

Kapitola 4

Stabilita reálných systémů

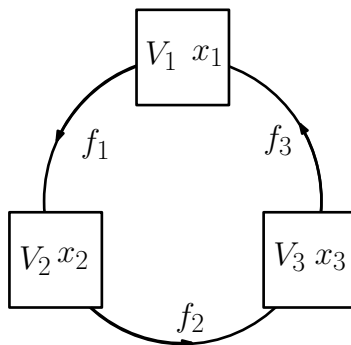
Systémy SLODR1 popisují veliké množství reálných fyzikálních dějů. My se zaměříme na dvě technické aplikace. První je soustava sekcí. Mezi dvěma propojenými sekcemi se něco určitou rychlostí přenáší (např. tekutina v trubkách mezi nádržemi, či teplo z místnosti do místnosti). Druhá aplikace, kterou se budeme zabývat, je soustava oscilátorů (kmitajících těles). Nyní si uvedeme a rozebereme základní příklady obou aplikací. Na příkladech si také ukážeme praktické zjištění vlastností uvedených v předchozích kapitolách. Podobné a mnohé další příklady lze nalézt v [5].

4.1 Tři propojené nádrže do okruhu

Formulace úlohy

Mějme soustavu tří nádrží propojených do okruhu, viz obrázek 4.1. Nádrže mají objemy $V_1 = 60 m^3$, $V_2 = 30 m^3$ a $V_3 = 60 m^3$. V každé nádrži je kromě špinavé vody i čistící prostředek. Množství čistícího prostředku nádrži 1 označíme x_1 . Obdobně u dalších nádrží. Nádrže považujeme vždy za dokonale promíchané, takže je všude v dané nádrži vždy stejná hustota čistícího prostředku.

Voda mezi nádržemi cirkuluje rychlostí $f = f_1 = f_2 = f_3 = 10 m^3 s^{-1}$ jedním směrem dle obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Schéma propojených nádrží

Matematický model

Ze zadání lze sestavit soustavu tří rovnic. Každá pro změnu látky v i -té nádrži. Soustava rovnic pak bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{f}{V_3} x_3(t) - \frac{f}{V_1} x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{f}{V_1} x_1(t) - \frac{f}{V_2} x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{f}{V_2} x_2(t) - \frac{f}{V_3} x_3(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde $\dot{x}_i$ nám představuje změnu množství čistící látky v čase v i -té nádrži. [5]

Existenci a jednoznačnost řešení nám zaručuje poznámka 2.3.

Řešení a jeho interpretace

Matice koeficientů A po dosazení výše uvedených hodnot f a V_i vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Pro zjištění charakteristické rovnice vypočteme, kdy se determinant matice $A - \lambda E$ rovná 0. Výsledná rovnice zní:

$$-\lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{5}{36}\lambda = 0. \quad (4.3)$$

Kořeny této rovnice pak jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3} - i\frac{1}{6}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{3} + i\frac{1}{6}$. Výsledné obecné řešení soustavy vypadá takto:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 + (c_2 - 2c_3)e^{-t/3} \cos(t/6) + (2c_2 + c_3)e^{-t/3} \sin(t/6) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} + (-2c_2 - c_3)e^{-t/3} \cos(t/6) + (c_2 - 2c_3)e^{-t/3} \sin(t/6) \\ x_3(t) &= c_1 + (c_2 + 3c_3)e^{-t/3} \cos(t/6) + (-3c_2 + c_3)e^{-t/3} \sin(t/6), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde c_i jsou obecné konstanty. Jelikož je jeden kořen charakteristické rovnice roven nule a ostatní dva kořeny mají záporné reálné části, tak je řešení podle věty 2.3 stabilní pouze l'apunovsky, ale už ne asymptoticky. To lze vysvětlit tím, že není jedno ustálené množství čistícího prostředku v nádrži (to se mění v závislosti na celkovém množství prostředku, neboli na počátečních podmínkách), ale pro $t \rightarrow \infty$ bude koncentrace prostředku všude stejná. Výsledné množství v nádržích bude mezi sebou ve stejných poměrech, jako jsou poměry objemů jednotlivých nádrží. V tomto případě tedy 2 : 1 : 2.

Velmi podobné soustavy n -diferenciálních rovnic popisují mnoho dějů, kdy se přenáší látka, energie a teplo mezi n objekty. Jedná se o přechod tepla mezi místnostmi, nabíjení soustavy kondenzátorů a mnoho dalších. Obecně lze tvary těchto rovnic vyjádřit jako:

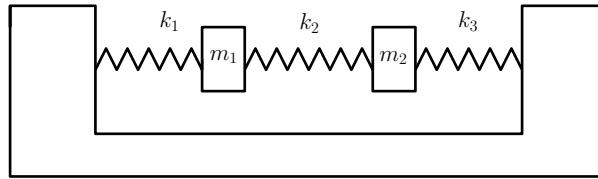
okamžitá změna látky = látka přidávaná do objektu - látka odebíraná.

4.2 Soustava těles propojených pružinami

SLODR1 může také představovat diferenciální rovnice vyšších řádů a jejich soustavy. Ty se pak dají přepsat, jako soustava více rovnic pro více neznámých. Ukázku si uvedeme na následujícím případu.

Formulace úlohy

Mějme soustavu tří pružin, mezi kterými jsou připojena dvě hmotná tělesa. Viz obrázek 4.2, kde m_1 a m_2 představují hmotnosti těles, resp. hmotných bodů, jenž nahrazují tělesa.



Obrázek 4.2: Soustava pružin

k_1, k_2, k_3 jsou tuhosti pružin. Označením x_i označíme výchylku i -tého tělesa z rovnovážné polohy. Doprava značíme výchylku kladně a doleva záporně.

Matematický model

Pro vytvoření rovnic využijeme Hookova zákona $F = -kx$, kde k je tuhost pružiny a x je její vychýlení, a druhého Newtonova zákona $F = ma$. Po dosazení nám vyjdou následující rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -k_1 x_1(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -k_2 (x_2(t) - x_1(t)) - k_3 x_2(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Výsledné rovnice druhého řádu si převedeme na SLODR1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3 \\ \dot{x}_2(t) &= x_4 \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{(-k_1 - k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t)}{m_1} \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{k_2 x_1(t) + (-k_2 - k_3)x_2(t)}{m_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Řešení a jeho interpretace

Matice koeficientů soustavy A vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

4.2. SOUSTAVA TĚLES PROPOJENÝCH PRUŽINAMI

Charakteristický polynom této soustavy pak je:

$$\frac{\lambda^4 m_1 m_2 + \lambda^2 (m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{m_1 m_2}.$$

Z důvodu složitosti dalších výrazů, budeme uvažovat, že $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $k_1 = k_3 = 3$ a $k_2 = 1$. Charakteristický polynom pak má tvar

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + \frac{15}{2} \quad (4.8)$$

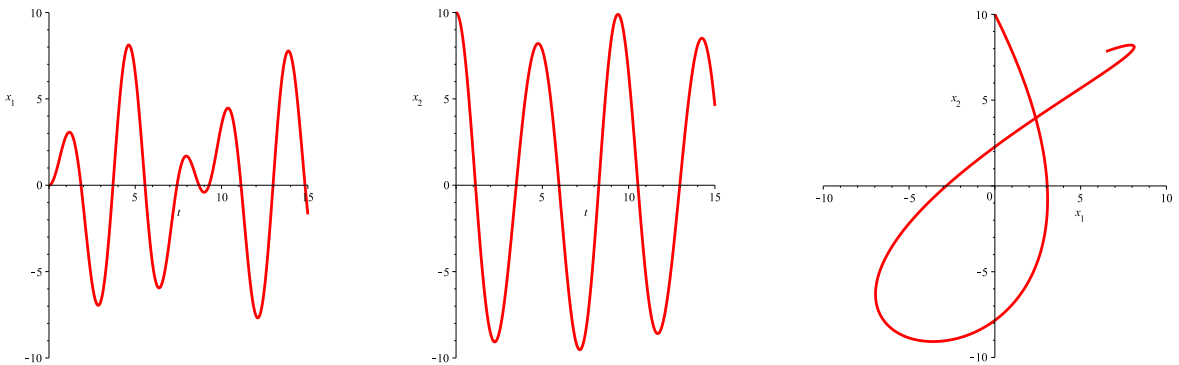
s kořeny $\lambda_1 = \frac{1}{2}i\sqrt{12 + 2\sqrt{6}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}i\sqrt{12 + 2\sqrt{6}}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}i\sqrt{12 - 2\sqrt{6}}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{2}i\sqrt{12 - 2\sqrt{6}}$.

Obecné řešení pro tuto soustavu zní

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{5}c_1 \cos(2b_1 t)b_1 + \frac{2}{5}c_2 \cos(2b_2 t)b_2 + \frac{2}{5}c_3 \sin(2b_1 t)b_1 + \frac{2}{5}c_4 \sin(2b_2 t)b_2 \\ &\quad - \frac{1}{60}c_1 \cos(2b_1 t)b_1^3 - \frac{1}{60}c_2 \cos(2b_2 t)b_2^3 - \frac{1}{60}c_3 \sin(2b_1 t)b_1^3 - \frac{1}{60}c_4 \sin(2b_2 t)b_2^3 \\ x_2(t) &= \frac{11}{10}c_1 \cos(2b_1 t)b_1 + \frac{11}{10}c_2 \cos(2b_2 t)b_2 + \frac{11}{10}c_3 \sin(2b_1 t)b_1 + \frac{11}{10}c_4 \sin(2b_2 t)b_2 \\ &\quad - \frac{1}{15}c_1 \cos(2b_1 t)b_1^3 - \frac{1}{15}c_2 \cos(2b_2 t)b_2^3 - \frac{1}{15}c_3 \sin(2b_1 t)b_1^3 - \frac{1}{15}c_4 \sin(2b_2 t)b_2^3 \\ x_3(t) &= -c_1 \sin(2b_1 t) - c_2 \sin(2b_2 t) + c_3 \cos(2b_1 t) + c_4 \cos(2b_2 t) \\ x_4(t) &= -c_1 \sin(2b_1 t) - c_2 \sin(2b_2 t) + c_3 \cos(2b_1 t) + c_4 \cos(2b_2 t) + \left(\frac{1}{2}\right)c_1 \sin(2b_1 t)\sqrt{6} \\ &\quad - \frac{1}{2}c_2 \sin(2b_2 t)\sqrt{6} - \frac{1}{2}3 \cos(2b_1 t)\sqrt{6} + \frac{1}{2}4 \cos(2b_2 t)\sqrt{6}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde $b_1 = \sqrt{12 + 2\sqrt{6}}$ a $b_2 = \sqrt{12 - 2\sqrt{6}}$.

Vzhledem k tomu, že všechny kořeny charakteristického polynomu jsou komplexní s nulovou reálnou složkou, je soustava pouze l'apunovsky stabilní a už ne atraktivní. A skutečně, pokud neuvažujeme žádné tlumení, budou tělesa při udělení výchylky, či rychlosti, kmitat kolem svého rovnovážného bodu po neomezeně dlouhou dobu a neustálí se na určité poloze. Závislost výchylek těles na čase, při vychýlení druhého tělesa o 10 jednotek doprava, lze vidět na grafu 4.3 vlevo a uprostřed. Závislost x_1 na x_2 pro $t \in < 0; 5 >$ je vidět vpravo.



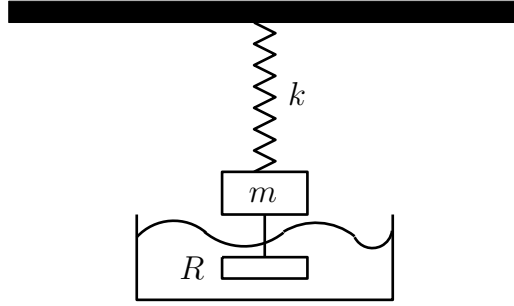
Obrázek 4.3: Výchylky těles v závislosti na čase a závislost výchylek mezi sebou.

4.3 Tlumené kmitání tělesa na pružině

V minulém příkladě jsme uvažovali soustavu kmitajících těles, kterou nic nebrzdilo. Nyní se podíváme na případ kmitajícího tělesa, jenž brzděné je.

Formulace úlohy

Mějme těleso zavěšené na pružině, které je částečně ponořeno do kapaliny. Viz obrázek 4.4. m je hmotnost tělesa, k je tuhost pružiny a r je koeficient odporu prostředí. x pak označíme výchylku tělesa ve svislém směru.



Obrázek 4.4: Těleso na pružině tlumené kapalinou

Matematický model

Stejně jako v předchozím příkladu využijeme Hookův zákon $F = -kx$ a druhý Newtonův zákon $F = ma$. Navíc použijeme i vzorec pro brzdnu sílu $F = -rv$, kde v je rychlost tělesa neboli $\dot{x}$. Po aplikaci zákonů dostaneme rovnici:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - r\dot{x}(t). \quad (4.10)$$

Provedeme substituci $\omega^2 = \frac{k}{m}$, kde $2b = \frac{r}{m}$. ω značí úhlovou rychlost a b je součinitel útlumu.^[5]

Tuto rovnici si převedeme na SLODR1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_1(t) - 2bx_2(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Řešení a jeho interpretace

Matice koeficientů A soustavy tedy je:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2b \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Spočítáme determinant $A - \lambda E$ a dostáváme rovnici

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0 \quad (4.13)$$

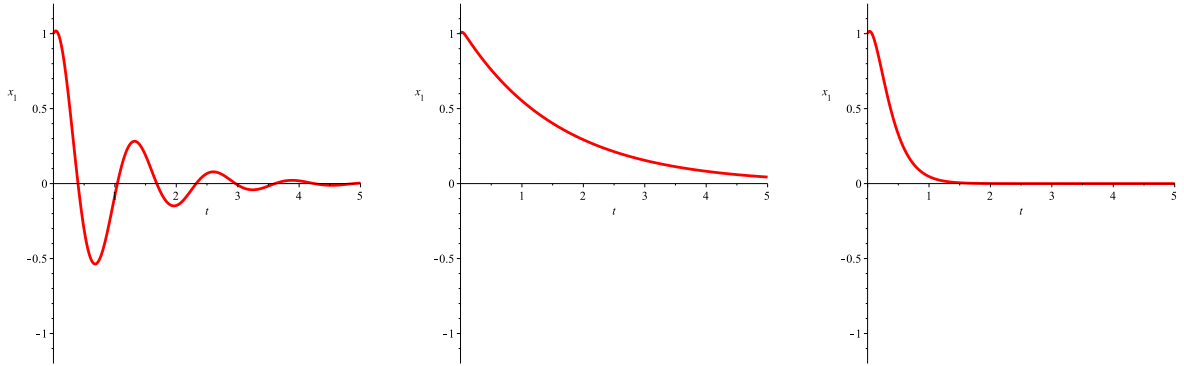
4.3. TLUMENÉ KMITÁNÍ TĚLESA NA PRUŽINĚ

Kořeny rovnice jsou $\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$ a $\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$. Obecné řešení pak vypadá následovně

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2})t} \\ x_2 &= c_1 (-b + \sqrt{b^2 - \omega^2}) e^{-b + \sqrt{b^2 - \omega^2}t} + c_2 (-b - \sqrt{b^2 - \omega^2}) e^{-b - \sqrt{b^2 - \omega^2}t} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Je zřejmé, že kořeny charakteristické rovnice budou mít pro jakoukoliv volbu b a ω zápornou reálnou část. Imaginární část bude pro $b \geq \omega$ nulová a pro $b < \omega$ nenulová. Proto je soustava nejen l'apunovsky stabilní, ale také asymptoticky.

Rychlost tlumení bude záviset na konstantách b a ω . Je-li $b < \omega$, bude tlumení nejmenší (podkritické) a pohyb bude periodický. Pro $b > \omega$ bude tlumení výrazně větší (nadkritické) a pohyb bude aperiodický (oscilátor se nepřekmitne do opačné výchylky). Konečně v případě, že $b = \omega$ se tlumení nazývá kritické a je největší. Pohyb je opět aperiodický. Jednotlivé závislosti výchylek na čase pro různá tlumení lze vidět na obrázku 4.5. Uvedené nám také odpovídá poznámce 3.1.



Obrázek 4.5: Těleso na pružině tlumené kapalinou: podkritické - nadkritické - kritické

Kapitola 5

Závěr

Cílem práce bylo popsat teorii stability soustav lineárních obyčejných rovnic a ukázat její aplikaci na konkrétním technickém problému. Což bylo splněno, jelikož se v první části zavedli základní pojmy jak z teorie stability, tak pojmy, týkající se soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Také jsme ukázali některá základní a nejjednodušší kritéria, jak poznat zda-li je systém s konstantními koeficienty stabilní či ne. Dále jsme se věnovali trajektoriím v rovině. Zjistili jsme, že všechny trajektorie se dělí na tři druhy. Následně jsme si popsali okolí izolovaných singulárních bodů. V závěru práce jsme uvedli dva základní druhy technických aplikací, jež popisují soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. U aplikací jsme si ukázali využití získaných poznatků z předchozích kapitol a uvedli jsme další možné aplikace, jejichž soustavy lze vytvořit podobným způsobem.

Při vypracovávání bakalářské práce jsem jsi oživil základy, které jsem získal během došavadního studia. Tyto základy se mi podařilo prohloubit v oblasti lineárních systémů. Bylo by zajímavé rozšířit v budoucnu tyto znalosti o nelineární systémy, a případně o systémy parciálních diferenciálních rovnic. Bohužel netuším nic o stabilitě parciálních diferenciálních rovnic, nicméně nelineární systémy často dají v určitém okolí linearizovat. Po linearizaci by šlo využít poznatků z této práce.

Literatura

- [1] NAGY, Josef. *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. 2. vydání. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury n. p., 1983. 72 s.
- [2] SVOBODA, Karel, DRUCKMÜLLER, Miloslav. *Matematika III : Diferenciální rovnice a nekonečné řady*. 1. vydání. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury n. p., 1985. 224s.
- [3] KALAS, Josef, RÁB, Miloš. *OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 1995. 212s. IBSN 80-210-1130-0
- [4] BÁRTA, Tomáš, PRAŽÁK, Dalibor. *Obyčejné diferenciální rovnice: sbírka úloh a řešených příkladů- l'apunovská stabilita*. [online]. 2011[cit. 2014-3-23]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/pcODR/pcODR/Kapitola-Stabilita/stabilita3.pdf>
- [5] GUSTAFSON, Grant B. *Systems of differential equations*. [online]. 20013 [cit. 2014-4-1]. Dostupné z: <http://www.math.utah.edu/gustafso/2250systems-de.pdf>
- [6] KRATOCHVÍL, Ctirad, et al. *Simulace dynamických soustav*. [online]. 2006-11-14 [cit. 2014-3-23]. Dostupné z: <http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/pkrejci/opory/SimDSoust/index.html>
- [7] FRANČŮ, Jan. *Obyčejné diferenciální rovnice*. [online]. 2012-12-6 [cit. 2014-4-20]. Dostupné z: [/www.math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=3358](http://www.math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=3358)
- [8] ŠVARC, Ivan. *Základy automatizace*. [online]. 2002-10 [cit. 2014-4-20]. Dostupné z: <http://autnt.fme.vutbr.cz/svarc/ZakladyAutomatizace.pdf>

Kapitola 6

Seznam použitých zkratek a symbolů

SLODR	soustava lineárních diferenciálních rovnic
SLODR1	soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu
$\dot{x}$	derivace x podle t
x_i	i -tá závislá proměnná, stavová veličina
t	čas
τ	počáteční okamžik
ξ	vektor počátečních hodnot
y	řešení Cauchyovy úlohy
$\bullet$	stabilní řešení
A	matice koeficientů soustavy
a_{ij}	prvky matice A , koeficienty soustavy, koeficient polynomu
$f(t)$	nehomogenní část soustavy
λ	vlastní číslo matice A , nulový bod charakteristického polynomu
E	jednotková matice
h	konstantní vektor
i	dle kontextu imaginární jednotka nebo značka indexu
ω	úhlová rychlost
$I \times \Omega$	oblast na které je definována SLODR
V	objem
m	hmotnost
D_i	determinanty
v	rychlost
c_i	reálná konstanta
k	tuhost pružiny
a	zrychlení
F	síla
$\ddot{x}$	druhá derivace x podle t