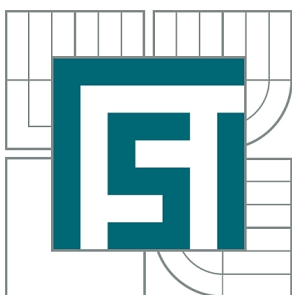




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

MODELOVÁNÍ KMITÁNÍ DYNAMICKÉ SOUSTAVY S N-STUPNI VOLNOSTI

MODELLING OF VIBRATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH N-DEGREES OF FREEDOM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

PETR HORÁK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. DANIEL DUŠEK, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Petr Horák

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování kmitání dynamické soustavy s n-stupni volnosti

v anglickém jazyce:

Modelling of vibration of dynamic systems with n-degrees of freedom

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Soustava s n-stupni volnosti může kmitat až n-vlastními frekvencemi. Znalost těchto vlastních frekvencí a vlastních tvarů je důležitá z hlediska zabránění vzniku rezonancí, které jsou pro chod většiny dynamických soustav nežádoucí.

Cíle bakalářské práce:

Pro danou soustavu hmotných bodů sestavit pohybové rovnice a spočítat vlastní frekvence a jím příslušející vlastní tvary kmitání.

Seznam odborné literatury:

Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V., Základy dynamiky strojů, ČVUT Praha, Praha, 1997.

Kratochvíl, C., Slavík, J., Dynamika, VUT Brno, Brno, 1997.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F., Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha, 1994.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 3.11.2009

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Cílem této práce je pro zadanou soustavu hmotných bodů sestavit matematický model. Spočítat vlastní frekvence a jím příslušející vlastní tvary kmitání. V práci je uvedeno rozdělení kmitání, podle různých hledisek. Zadaná soustava je analyzována a jsou sestaveny pohybové rovnice dvěma nejběžnějšími metodami. Je zde uveden postup výpočtu zmíněných veličin postupně pro zjednodušenou až po úplnou soustavu n -hmotných bodů. Tento postup je použit v souboru příkazů pro numerické vyjádření. Jsou vykresleny grafy amplitudové a frekvenční charakteristiky a graf výchylky v čase. Je zde popsán vliv změn konstant vstupujících do výpočtu.

ABSTRACT

The aim of this work is to assemble mathematical model for given system of point masses. Compute the natural frequencies and their corresponding modes of vibration. Differentiations of vibration by various points of view are written in this work. The given system is analyzed and the equations of motion using two most common methods are written. Calculation procedure of mentioned physical quantities is written in order from simplified to complete system of point masses. This procedure is used in command file to express values numerical. The frequency response of the system and the displacement-time plots are shown. The impact of constant variability entering the calculation is described.

KLÍČOVÁ SLOVA

Mechanické kmitání, n -stupňů volnosti, matematický model, Maple

KEY WORDS

Mechanical oscillation, n -degrees of freedom, mathematical model, Maple

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

HORÁK, P. *Modelování kmitání dynamické soustavy s n -stupni volnosti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 34 s., příloh 2, Vedoucí bakalářské práce Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že bakalářskou práci na téma „Modelování kmitání dynamické soustavy s n-stupni volnosti“ jsem vypracoval samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označil a uvedl v příloženém seznamu.

.....
Petr Horák

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych na tomto místě poděkoval Ing. Danielu Duškovi, Ph.D. za vedení a připomínky při zpracování mé bakalářské práce.

OBSAH

ABSTRAKT	4
1 ÚVOD.....	9
2 MECHANICKÉ KMITÁNÍ	10
2.1 ROZLOŽENÍ PARAMETRŮ MECHANICKÝCH MODELŮ	10
2.1.1 Modely se soustředěnými (diskrétními) parametry	10
2.1.2 Modely se spojitě rozloženými parametry.....	11
2.2 BUZENÍ MECHANICKÉHO KMITÁNÍ	12
2.2.1 Kmitání volné	12
2.2.2 Kmitání buzené.....	12
2.2.3 Kmitání samobuzené	13
2.3 TLUMENÍ.....	13
2.4 DĚLENÍ PODLE POVAHY KMITÁNÍ.....	14
2.4.1 Lineární kmitání	14
2.4.2 Nelineární kmitání	14
3 ŘEŠENÁ SOUSTAVA	15
3.1 SCHÉMA ZADÁNÍ.....	15
3.2 KLASIFIKACE ZADANÉ SOUSTAVY.....	15
3.3 SESTAVENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC	15
3.3.1 Metoda uvolňování	15
3.3.2 Metoda použití Lagrangeových rovnic 2. druhu	16
3.3.3 Pohybové rovnice v maticovém tvaru	16
4 POSTUP ŘEŠENÍ	18
4.1 VOLNÉ NETLUMENÉ KMITÁNÍ	18
4.2 ORTOGONALITA VLASTNÍCH VEKTORŮ	20
4.3 VOLNÉ PROPORCIONÁLNĚ TLUMENÉ KMITÁNÍ	21
4.4 VYNUCENÉ TLUMENÉ KMITÁNÍ BUZENÉ HARMONICKOU SILOU.....	23
5 VÝPOČET POMOCÍ PROGRAMU MAPLE™	25
5.1 ZÁPIS V SOUBORU PŘÍKAZŮ	25
5.2 VYKRESLENÍ HODNOT MODELOVÝCH SITUACÍ	25
5.2.1 Vykreslení hodnot pro různé konstanty tlumení.....	28
5.2.2 Vykreslení hodnot pro různé konstanty tuhosti.....	29
ZÁVĚR.....	31
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ.....	32
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	33
SEZNAM PŘÍLOH	34

1 ÚVOD

Pro obor dnešního inženýrství, zabývající se popisem a analýzou dynamických vlastností, je klíčový fakt, že pro většinu mechanických soustav je typický kmitavý pohyb, souhrnně nazývaný kmitání. Fenomén kmitání se vyskytuje ve všech oborech fyziky a techniky. Ve strojírenství hraje úlohu kmitání mechanické, které ve větší či menší míře vzniká při chodu každého stroje. Se vzrůstem produktivity práce, výkonu strojů a nárůstem jejich provozních rychlostí se zvětšují nežádoucí kmity a s nimi úzce souvisí hlučnost stroje a zvýšené namáhání jeho částí [2].

Abychom mohli tyto nežádoucí účinky eliminovat, je třeba toto mechanické kmitání zkoumat a přijmout opatření ke snížení nežádoucích vibrací. Touto analýzou získáme komplexní informace, které použijeme pro posouzení životnosti, opotřebení a namáhání součástí strojních zařízení, popřípadě hlučnosti a tím i vliv na životní prostředí. Následné určování vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání je zpravidla nutné u součástí namáhaných cyklickým zatížením z důvodu stanovení bezpečnosti. K hodnocení nebezpečné frekvence se nejčastěji používá amplitudo-frekvenční charakteristika.

Mechanické kmitání však nemusí být vždy tlumeno či jinak eliminováno z důvodu jeho nežádoucích účinků. Kmitání může plnit i užitečné funkce. Uměle buzené mechanické kmity tvoří základ práce vibračních dopravníků, zhutňovačů, třídíčů, vibračních pil apod. Proto teorie kmitání patří k důležitým částem mechaniky [2].

2 MECHANICKÉ KMITÁNÍ

Mechanické kmitání lze rozdělit do skupin z mnoha různých hledisek, podle jeho charakteru, vzniku, průběhu a typu fyzikálních charakteristik mechanické soustavy. Podle povahy řešení soustavy a požadovaných výsledků vytváříme modely se soustředěnými (diskrétními) parametry a modely se spojitě rozloženými parametry. Podle příčiny vzniku rozeznáváme kmitání volné, buzené a samobuzené. Podle vlastní disipované energie dělíme kmitání na netlumené a tlumené. Podle druhu matematického modelu na lineární a nelineární. Buzené neboli vynucené kmitání lze dělit na buzení působící silou a kinematické buzení apod. [2].

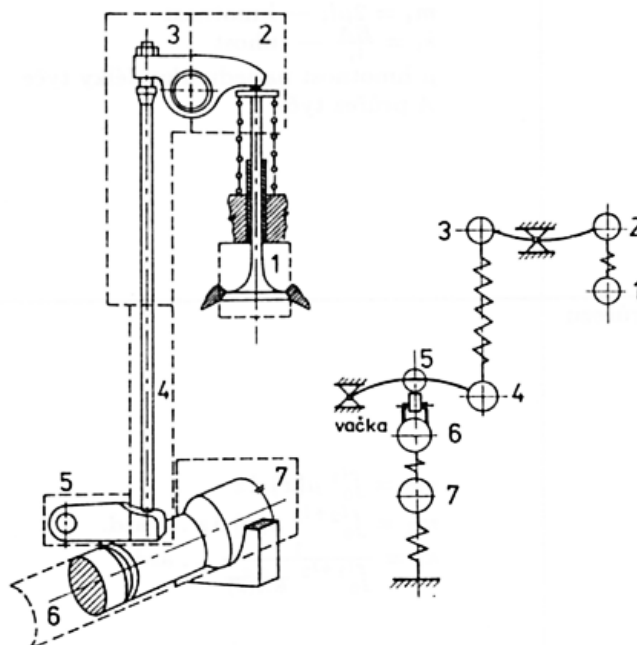
2.1 Rozložení parametrů mechanických modelů

2.1.1 Modely se soustředěnými (diskrétními) parametry

Lineární soustavy se soustředěnými parametry (diskrétní) se vyznačují těmito jednoduchými (diskrétními) prvky:

- hmotnými body nebo tuhými hmotnými tělesy, jež jsou nositelkami kinetické energie
- nehmotnými pružinami, jež jsou nositelkami potenciální energie
- nehmotnými tlumiči, jež disipují energii, tj. mění mechanickou energii v teplo.

Kombinací uvedených diskrétních prvků jsou tvářeny výpočtové modely, přičemž se požaduje, aby jejich dynamické vlastnosti co nejdříve vystihovaly dynamické vlastnosti reálného díla. Výpočtové modely se získávají vesměs z kontinua jeho diskretizací různými metodami. Např. soustředěním hmotnosti kontinua do vhodně zvolených hmotných bodů svázaných nehmotnými pružinami a tlumiči (obr. 2.1).



Obr. 2.1 Fyzikální diskretizace vačkového mechanismu [3]

Jinou možností diskretizace je použití metody konečných prvků či metody hraničních prvků (tyto metody zpravidla neumožňují schematické zobrazení výpočtových modelů jako

v předchozím případě). Pohybové rovnice lineárních soustav tvoří soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (nejčastěji s konstantními koeficienty) homogenních nebo nehomogenních s funkcí buzení na pravé straně [3].

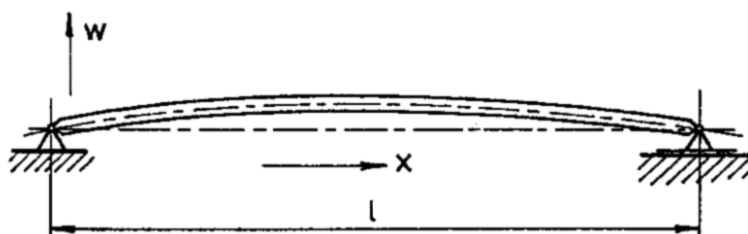
Modely se soustředěnými parametry neboli diskrétní mechanické modely mají konečný počet stupňů volnosti. Počet stupňů volnosti je roven počtu nezávislých souřadnic, potřebných k určení polohy soustavy [2].

Nejjednodušším diskrétním modelem je model s jedním stupněm volnosti. Tento model se často používá jako velmi povrchní přiblížení složitějších mechanických soustav a to v případech kdy se zajímáme o nejnižší vlastní frekvence soustavy. Celou řadu technických zařízení lze znázornit modelem s jedním stupněm volnosti. Navíc znalost řešení kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti je základem řešení kmitání s mnoha stupni volnosti a pochopení vlastní soustavy s jedním stupněm volnosti je nezbytným předpokladem pro studium složitějších mechanických soustav, ať se soustředěnými nebo spojitě rozloženými parametry [2].

2.1.2 Modely se spojitě rozloženými parametry

Každý stroj a strojná konstrukce je objektem se spojitě nebo alespoň po částech spojitě rozloženou hmotou. U modelu se soustředěnými parametry se takovýto objekt diskretizoval a popisoval diskrétním modelem. Takový model vyhovuje především tam, kde se reálný objekt diskrétnímu modelu přibližuje.

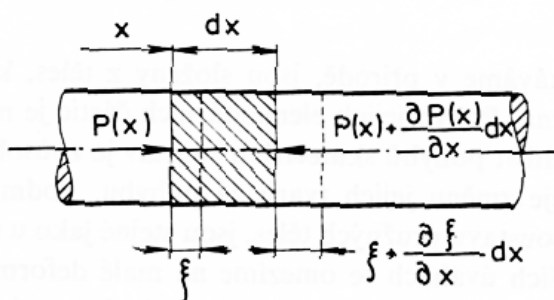
Je však řada konstrukčních prvků, které této aproximaci nevyhovují, poněvadž jejich konstrukce neobsahuje soustředěné hmoty. Jsou to především struny, lana, pruty, nosníky (obr. 2.2), membrány, desky, skořepiny a další prvky.



Obr. 2.2 Kmitající prismatický nosník [3]

Stroj nebo konstrukce je zpravidla složena z různých konstrukčních prvků, z nichž každý má své vlastní frekvence. Porušení kteréhokoliv z těchto členů může znamenat porušení funkce celého stroje. Proto je znalost kmitání základních jednoduchých prvků velmi důležitá. Jsou to často prvky, se kterými pracujeme v metodě konečných prvků. V některé literatuře se kontinua dělí na jednorozměrná, dvojrozměrná a třírozměrná podle vzájemné velikosti jednotlivých rozměrů. Všechna reálná tělesa jsou však třírozměrná a proto je vhodné dělení provádět podle konkrétního reálného objektu a druhu kmitání [4].

Uvedená tělesa můžeme rozdělit na libovolný počet úseků (obr. 2.3), kterých může být až nekonečně mnoho.



Obr. 2.3 Element prizmatické tyče [5]

Z toho plyne, že soustavy se spojitě rozloženými parametry mají nekonečný počet stupňů volnosti a platí, že k určení polohy soustavy je nutné znát stejný počet na sobě nezávislých souřadnic. Matematické modely popisující kmitání kontinua jsou tvořeny rovnicemi parciálními.

2.2 Buzení mechanického kmitání

2.2.1 Kmitání volné

Volné kmitání soustavy vzniká, je-li soustava po vychýlení z rovnováhy uvolněna a ponechána v pohybu bez účinku vnějších sil (buzení). Porušení rovnováhy nastane, udělíme-li jednomu, nebo více hmotným tělesům soustavy výchylku nebo rychlost, popřípadě obojí. Výpočet volného kmitání (též zvaný problém vlastních hodnot) se provádí z homogenních pohybových rovnic a nenulové počáteční podmínky se uplatní při určování integračních konstant. Volné kmitání je u lineárních soustav lineární kombinací vlastních kmitů [3].

2.2.2 Kmitání buzené

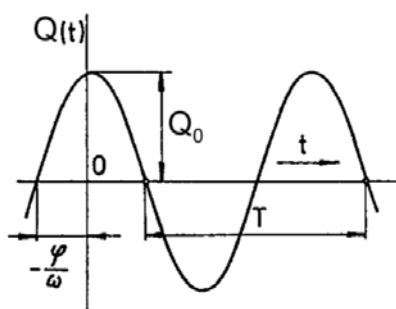
Vynucené kmitání vzniká, je-li pohyb soustavy vyvolán a udržován účinkem budících sil vnějších nebo vnitřních nebo je-li soustava buzena kinematicky. Buzení soustavy lze také realizovat tzv. parametrickým buzením což je buzení vyvolané změnou některého z parametrů soustavy např. tuhostí pružiny či součinitelem tlumení (modeluje se nekonstantními součiniteli v diferenciálních rovnicích).

Pod pojmem vynucené kmitání se často uvažuje pouze ustálené vynucené kmitání, vyvolané účinkem periodických sil nebo periodickým kinematickým buzením po utlumení přechodových dějů vzniklých při porušení rovnovážného stavu soustavy [3].

Podle průběhu budící síly (resp. pohybu rámu u kinematického buzení) v čase můžeme vynucené kmitání dělit na buzení:

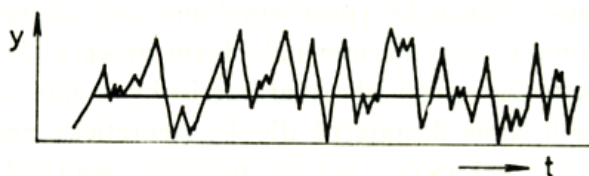
- periodické, v tomto případě je budící síla periodickou funkcí času. To znamená, že její hodnota se po určité periodě T_F opakuje: $Q(t) = Q(t+T_F) = Q(t+iT_F)$, pro $i = 1, 2, \dots$. V takovém případě lze tuto sílu rozvinout do Fourierovy řady [4].

- Harmonické, které lze vyjádřit součtem harmonických funkcí typu $Q(t) = Q_0 \cos \omega t$, nebo $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$, kde Q_0 je amplituda, ω úhlová frekvence buzení a φ fázové posunutí vzniklé součtem dvou harmonických funkcí (obr 2.4).



Obr. 2.4 Grafické znázornění harmonického buzení [3]

- Stochastické, neboli náhodné (obr 2.5). Tento průběh buzení vzniká např. u leteckých konstrukcí, dopravních prostředků, dílů vystavených proudu tekutiny apod. Při vyšetřování náhodně kmitajících soustav se využívá poznatků ze statistiky.



Obr. 2.5 Záznam náhodné proměnné [5]

2.2.3 Kmitání samobuzené

Samobuzené kmitání vzniká za přítomnosti aktivních prvků, při jejichž pohybu lze přivádět do systému vhodná forma energie. Samobuzené kmitání se udrží libovolně dlouho a nevyžaduje žádnou vnější periodickou sílu, pouze zdroj energie (který sám osobě nemá žádné oscilační vlastnosti), z kterého si kmitající soustava sama energii odebírá.

Aktivní prvky mají obvykle vždy při větších amplitudách kmitání nelineární charakteristiky, a protože i samotná mechanická soustava je často nelineární, je třeba dynamické vlastnosti soustav s aktivními prvky studovat metodami nelineární mechaniky.

2.3 Tlumení

Tlumení je souhrn složitých nevratných procesů, které při pohybu mechanické soustavy způsobují, že se část kinetické energie ztrácí. U kmitavých pohybů se tlumení projevuje fázovým posuvem mezi průběhem budící síly a vynucené výchylky, nejednoznačnou závislostí mezi silou a výchylkou (hysterezní smyčka), omezením amplitudy výchylky zejména v rezanci, postupným zanikáním volného kmitání apod. Tlumení je pasivním odporem a působí vždy proti směru pohybu (proti směru rychlosti) v daném místě [1].

Z hlediska soustavy se obvykle dělí na [2]:

- vnější tlumení, mezi něž je možno zařadit aerodynamický a hydrodynamický odpor a odpor tlumičů, úmyslně vkládaných do mechanických soustav.

- Tlumení ve vazbách a to jednak v pohyblivých, jednak v nepohyblivých (lisovaných, šroubovaných, svařovaných...).
- Vnitřní tlumení způsobené vnitřními odpory materiálu jinak nazývané materiálové tlumení.

2.4 Dělení podle povahy kmitání

2.4.1 Lineární kmitání

Lineární kmitání je popisováno obyčejnými diferenciálními rovnicemi nejčastěji druhého řádu kde se vyskytují závislé proměnné a jejich derivace v první mocnině a mají konstantní součinitele. Podobně jako je tomu v teorii lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav, je i lineární teorie široce rozpracována. Jsou známy konkrétní postupy řešení i pro velmi složité soustavy, zejména je-li jejich kmitání buzeno periodickými silami. Velkou výhodou je princip superpozice platný u lineárních soustav [5]. Velikost odezvy je lineárně úměrná velikosti buzení [6].

2.4.2 Nelineární kmitání

Mnohé problémy nelze zjednodušit popsáním lineárními rovnicemi, protože ne vždy mohou popsat kvalitativní charakter dynamických procesů, které v analyzovaných soustavách ve skutečnosti probíhají. V takových případech je často nutné doplnit lineární pohybové rovnice nelineárními členy, které nejčastěji popisují pružné nebo tlumící charakteristiky.

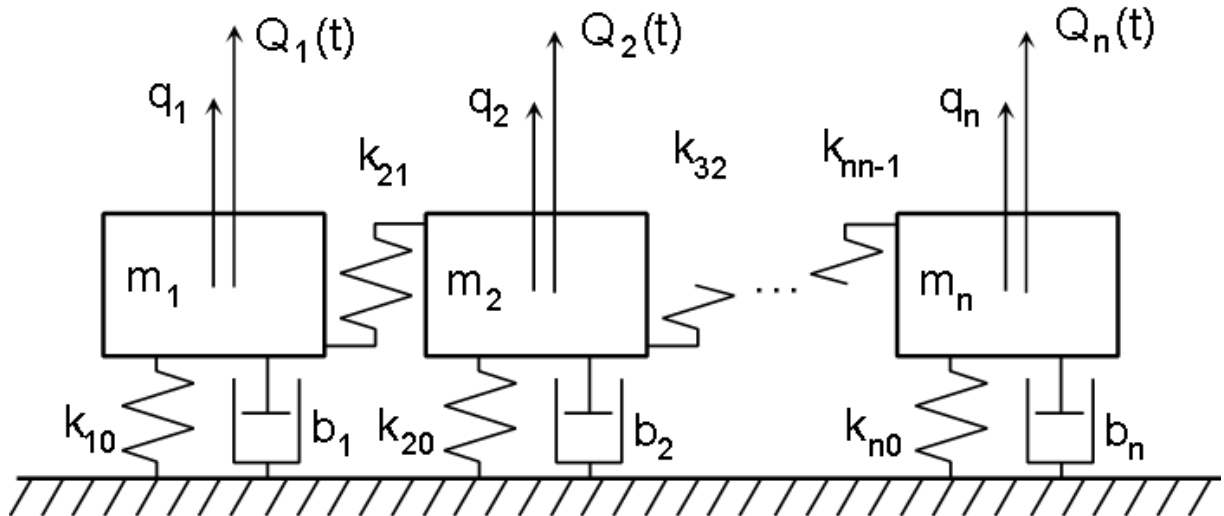
Typickými projevy nelinearity jsou zejména závislosti vlastní frekvence a koeficientu tlumení na amplitudě ustálených pohybů, víceznačnost řešení a přechody kmitající soustavy z jednoho pohybového stavu do druhého, existence ustáleného samobuzeného kmitání, možnosti vzniku subharmonických a vícesložkových kmitů a řada dalších.

Výpočtové modely nelineárních mechanických soustav jsou představovány soustavami nelineárních diferenciálních rovnic, často doplněny soustavami matematických relací, při jejichž řešení neplatí princip superpozice. Z toho například vyplývá, že vlastní a vynucené kmitání se navzájem ovlivňují, že u vynuceného kmitání nelze budící účinky rozložit do harmonických složek a jejich dílčí odezvy prostě sečíst, neplatí, že dvojnásobná velikost vnější síly vyvolá dvojnásobnou výchylku (v mimorezonančních oblastech) apod. [2].

3 ŘEŠENÁ SOUSTAVA

3.1 Schéma zadání

Mechanická soustava je zadána schematicky dle (obr. 3.1).



Obr. 3.1 Schéma zadané soustavy

3.2 Klasifikace zadané soustavy

Jedná se o soustavu se soustředěnými (diskrétními) parametry, která je tvořena n přímočaře se posouvajícími bodovými tělesy s hmotnostmi m_1, m_2, \dots, m_n . Ty jsou připevněny k rámu i navzájem pomocí lineárních pružin s konstantami $k_{10}, k_{20}, \dots, k_{n0}$ (resp. $k_{21}, k_{32}, \dots, k_{nn-1}$) a lineárních tlumičů s konstantami b_1, b_2, \dots, b_n přičemž uvažujeme proporcionální tlumení. Buzení je realizováno za pomoci sil, jež jsou definovány v čase harmonickou funkcí $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)$. V soustavě se vyskytují pouze prvky lineární (jedná se o lineární kmitání). Polohy bodových těles jsou určeny zobecněnými souřadnicemi q_1, q_2, \dots, q_n , které jsou voleny tak, že v rovnovážné poloze jsou všechny rovny nule [5].

3.3 Sestavení pohybových rovnic

K matematickému popsání soustavy slouží pohybové rovnice, ty lze získat více způsoby. Mezi nejčastěji používané metody patří metoda uvolňování a metoda za použití Lagrangeových rovnic 2. druhu.

3.3.1 Metoda uvolňování

Při sestavování pohybových rovnic bodových těles využijeme 2. Newtonova pohybového zákona. Při řešení pohybu vázaného bodového tělesa jej tedy nejprve uvolníme (nahradíme vazby s okolím ekvivalentním silovým působením) a pro jednorozměrný problém můžeme psát rovnice [6]:

$$\begin{aligned} -b_1\dot{q}_1 - k_{10}q_1 - k_{21}(q_1 - q_2) + Q_1(t) &= m_1\ddot{q}_1 \\ -b_2\dot{q}_2 - k_{20}q_2 + k_{21}(q_1 - q_2) - k_{32}(q_2 - q_3) + Q_2(t) &= m_2\ddot{q}_2 \\ \dots & \\ -b_n\dot{q}_n - k_{n0}q_n + k_{nn-1}(q_{n-1} - q_n) + Q_n(t) &= m_n\ddot{q}_n \end{aligned}$$

Ty lze upravit do tvaru:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 + (k_{10} + k_{21})q_1 - k_{21}q_2 &= Q_1(t) \\
 m_2 \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 - k_{21}q_1 + (k_{20} + k_{21} + k_{32})q_2 - k_{32}q_3 &= Q_2(t) \\
 \dots \\
 m_n \ddot{q}_n + b_n \dot{q}_n - k_{n,n-1}q_{n-1} + (k_{n0} + k_{n,n-1})q_n &= Q_n(t)
 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

3.3.2 Metoda použití Lagrangeových rovnic 2. druhu

Tvar Lagrangeovy rovnice 2. druhu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_P}{\partial q_j} = Q_j(t) \quad \text{pro } (j=1, 2, \dots, n)$$

Kinetická energie soustavy [1]:

$$\begin{aligned}
 E_K &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \\
 E_K &= \frac{1}{2} [m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + \dots + m_n \dot{q}_n^2]
 \end{aligned}$$

Disipační funkce soustavy [1]:

$$\begin{aligned}
 E_D &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \\
 E_D &= \frac{1}{2} [b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2 + \dots + b_n \dot{q}_n^2]
 \end{aligned}$$

Potenciální energie soustavy [1]:

$$\begin{aligned}
 E_P &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} \\
 E_P &= \frac{1}{2} [k_{10} q_1^2 + k_{21} (q_2 - q_1)^2 + k_{20} q_2^2 + k_{32} (q_3 - q_2)^2 + \dots + k_{n0} q_n^2]
 \end{aligned}$$

Kde $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ je reálná konstantní a symetrická matice hmotnosti, $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ matice tuhosti a $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ matice tlumení, všechny řádu n [1].

Dosazením těchto vztahů do Lagrangeových rovnic bychom obdrželi stejné pohybové rovnice mechanické soustavy jako (3.3.1).

3.3.3 Pohybové rovnice v maticovém tvaru

S narůstajícím počtem stupňů volnosti mechanické soustavy se stává řešení velmi pracné. Proto s výhodou používáme maticový zápis pohybových rovnic a maticový počet při jejich řešení. Rov.(3.3.1) lze maticově zapsat následovně [4]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (3.3.2)$$

kde značí $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ vektory výchylky, rychlosti a zrychlení, vyjádřený n rozměrnou sloupcovou maticí $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]$, $\mathbf{Q}(t)$ je časově závislý vektor budících sil $\mathbf{Q}^T(t) = [Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)]$.

M je matice hmotnosti, **B** je matice tlumení a **K** je matice tuhosti. Všechny tyto matice jsou pro konkrétní soustavu čtvercové a symetrické řádu n . Pro model na obr. 3.1 mají tvar [4]:

Matice hmotnosti **M**:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

Matice tlumení **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

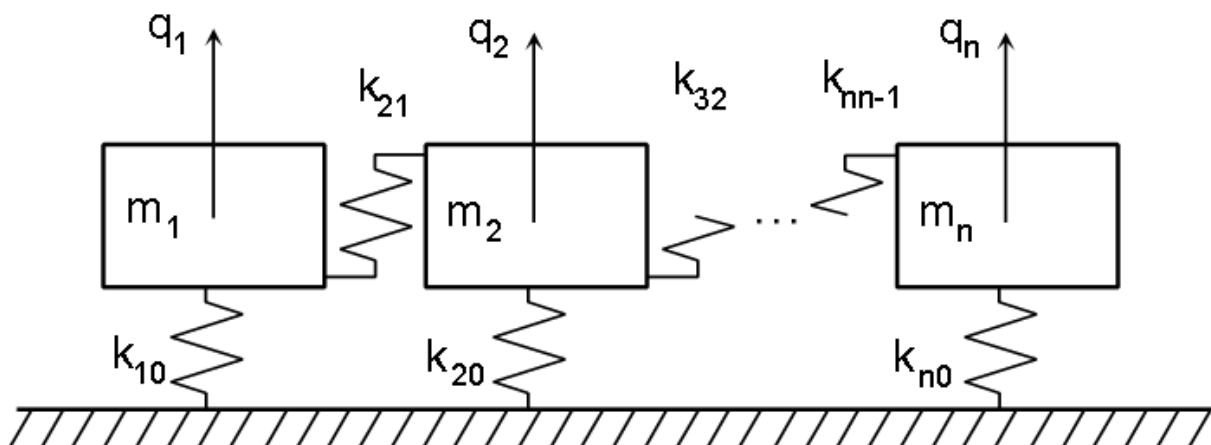
Matice tuhosti **K**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{10} + k_{21} & -k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ -k_{21} & k_{20} + k_{21} + k_{32} & -k_{32} & \dots & 0 \\ 0 & -k_{32} & k_{30} + k_{32} + k_{43} & -k_{43} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -k_{nn-1} & k_{n0} + k_{nn-1} \end{bmatrix}$$

4 POSTUP ŘEŠENÍ

4.1 Volné netlumené kmitání

Při uvažování pouze volného netlumeného kmitání se nám schéma soustavy změní takto: (obr. 4.1)



Obr. 4.1 Schéma soustavy pro volné netlumené kmitání

Pohybové rovnice pro volné kmitání netlumené soustavy se soustředěnými parametry o n stupních volnosti mají v maticovém zápisu tvar [3]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.1.1)$$

Za předpokladu, že soustava bude kmitat harmonicky, je řešení rov. (4.1.1)

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{i\Omega t} \quad (4.1.2)$$

kde \mathbf{u} je vektor amplitud harmonických kmitů: $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$. Ω je úhlová frekvence. Dosazením rovnice (4.1.2) do rov. (4.1.1), když postupnou derivací podle času získáme $\ddot{\mathbf{q}} = -\Omega^2 \mathbf{u}e^{i\Omega t}$ dostaneme po úpravě [2]:

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.1.3)$$

Rovnice (4.1.3) představuje problém vlastních hodnot. Netriviální řešení rovnice (4.1.3), kdy alespoň jedna souřadnice vektoru \mathbf{u} je nenulová, existuje jen když determinant matice $\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}$ je roven nule, tj. pro [1]:

$$\det|\mathbf{K} - \Omega_0^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.1.4)$$

Tento determinant nazýváme frekvenční determinant. Jeho rozvinutím obdržíme frekvenční rovnici n -tého stupně pro Ω_0^2 :

$$a_n \Omega_0^{2n} + a_{n-1} \Omega_0^{2(n-1)} + \dots + a_1 \Omega_0^2 + a_0 = 0$$

Pro pozitivně definitní matice \mathbf{M} a \mathbf{K} jsou kořeny této rovnice reálné, nezáporné hodnoty, které uspořádáme vzestupně

$$0 \leq \Omega_{01} \leq \Omega_{02} \leq \dots \leq \Omega_{0n}$$

To jsou vlastní úhlové frekvence soustavy. Pouze těmito frekvencemi může mechanická soustava kmitat harmonicky. Jestliže dosadíme některou vlastní úhlovou frekvenci, např. Ω_{0r} do rov. (4.1.3), mohli bychom z ní obdržet vektor amplitud odpovídající zvolené úhlové frekvenci:

$$(\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M})\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

Poněvadž soustava rovnic (4.1.3) je homogenní, dostali bychom po dosazení určité vlastní úhlové frekvence nekonečné množství řešení pro \mathbf{u}_r . Z toho důvodu lze určit pouze vzájemné poměry členů vlastního vektoru \mathbf{u}_r , např. [2]:

$$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{u_{1r}}{u_{1r}}, \frac{u_{2r}}{u_{1r}}, \dots, \frac{u_{nr}}{u_{1r}} \right]^T, \quad \mathbf{v}_2 = \left[\frac{u_{1r}}{u_{2r}}, \frac{u_{2r}}{u_{2r}}, \dots, \frac{u_{nr}}{u_{2r}} \right]^T, \dots$$

Takovým způsobem lze vytvořit n různých posloupností, které ke každé vlastní úhlové frekvenci definují vlastní tvar kmitání. Proto se těmto vektorům říká vlastní vektory nebo též modální vektory. Z n možných posloupností volíme obvykle takovou, aby maximální hodnota prvku vlastního vektoru byla rovna jedné. Říkáme, že příslušný vlastní vektor normujeme. Při normování požadujeme, aby platilo [2]:

$$\mathbf{v}_r^T \dot{\mathbf{v}}_r = 1 \quad (\text{Euklidova norma}),$$

V mechanice bývá někdy výhodné požadovat, aby

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{Normujeme podle matice hmotnosti})$$

nebo

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{Normujeme podle matice tuhosti})$$

Kmitá-li soustava r -tým tvarem, jsou jednotlivé výchylky dány rovnicemi

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (4.1.5)$$

nebo v reálném tvaru [2]

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{v}_r \sin(\Omega_{0r}t + \varphi_r) \quad (4.1.6)$$

Neměnný tvaru kmitu v čase dokazují rovnice (4.1.5) a (4.1.6), poněvadž amplitudy pohybu všech těles jsou v čase konstantní, pochopitelně nikoliv však pro všechna tělesa stejné. Obecné řešení rovnice (4.1.1) je dáno lineární kombinací jednotlivých vlastních tvarů kmitů

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{r=1}^n \tilde{C}_r \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (4.1.7)$$

kde \tilde{C}_r jsou komplexní integrační konstanty. V reálném oboru má rovnice (4.1.7) tvar

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r \mathbf{v}_r \sin(\Omega_{0r}t + \varphi_r) \quad (4.1.8)$$

nebo

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n \mathbf{v}_r (A_r \cos \Omega_{0r}t + B_r \sin \Omega_{0r}t) \quad (4.1.9)$$

Integrační konstanty C_r , φ_r resp. A_r , B_r pro $r = 1, 2, \dots, n$ se určí z počátečních podmínek ($t = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0$) [2].

Vlastní vektory tvarů kmitů je vhodné sestavit do takzvané modální matice rozměru $n \times n$ [2]:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdot & \cdot & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Vlastní úhlové frekvence se sestavují do *spektrální matice* [2]:

$$\mathbf{\Omega}_0^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{01}^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \Omega_{02}^2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \Omega_{0n}^2 \end{bmatrix}$$

4.2 Ortogonalita vlastních vektorů

Předpokládáme, že mechanická soustava má dvě různé vlastní frekvence Ω_{0r} a Ω_{0s} . Rovnici (4.1.3) můžeme psát ve tvaru [2]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_s &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Vynásobíme první rovnici v pořadí zleva vektorem \mathbf{v}_s^T a druhou \mathbf{v}_r^T [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_r^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_s &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Druhou z těchto rovnic transponujeme, přičemž víme, že pro symetrické matice platí rovnosti [2]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^T$$

Získáme rovnici:

$$\mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Získanou rovnici odečteme od rovnice (4.2.2) a po úpravě obdržíme [2]:

$$(\Omega_{0s}^2 - \Omega_{0r}^2) \mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Protože jsme předpokládali $\Omega_{0r} \neq \Omega_{0s}$, musí platit podmínky ortogonalit [1]:

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = 0 \quad \text{pro} \quad r \neq s \quad (4.2.3a)$$

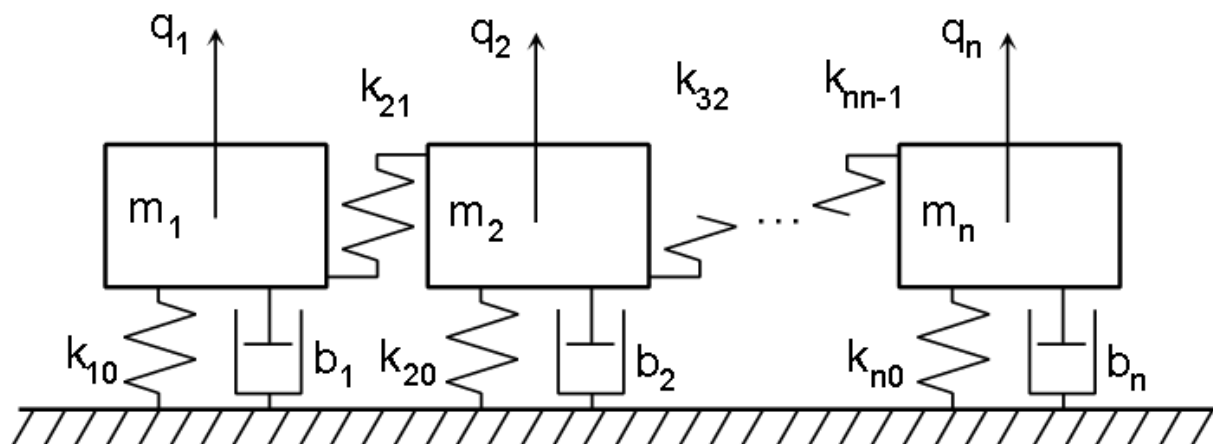
a dosazením do rov. (4.2.2) bude také

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r = 0 \quad \text{pro} \quad r \neq s \quad (4.2.3b)$$

Z rovnic (4.2.3a) a (4.2.3b) plyne věta: Vlastní vektory, příslušné různým vlastním úhlovým frekvencím jsou ortogonální vzhledem k matici hmotnosti i k matici tuhosti [2].

4.3 Volné proporcionálně tlumené kmitání

Po přidání tlumičů bude soustava vypadat následovně: (obr. 4.2)



Obr. 4.2 Schéma soustavy pro volné tlumené kmitání

Pohybovou rovnicí volného tlumeného kmitání získáme z rovnice (3.3.2), ve které položíme člen buzení $\mathbf{Q}(t) = 0$ [4]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.3.1)$$

Matice tlumení \mathbf{B} je čtvercová matice řádu n . Při sestavování této matice z konstant tlumení jednotlivých tlumičů vznikají obtíže, poněvadž konstanty nejsou zpravidla známe a nelze je jednoduše určit. Proto se snažíme tuto nejistotu obejít nějakým hypotetickým tlumením, jehož vyjádření je dostatečně jednoduché a navíc dává i jednoduché vyjádření podmínek ortogonality. Těmto předpokladům odpovídá tak zvané proporcionální tlumení. Proporcionální tlumení je vztaženo k maticím hmotnosti a tuhosti a je vyjádřeno vztahem [4]:

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (4.3.2)$$

V této rovnici představuje člen $\alpha\mathbf{M}$ konstrukční tlumení, které je funkcí hmotností kmitající soustavy, člen $\beta\mathbf{K}$ nahrazuje materiálové tlumení, které je, podobně jako tuhost pružných prvků soustavy, funkcí vnitřních materiálových vlastností. Podmínky ortogonality jsou dány vztahy (4.2.3a) a (4.2.3b) a přistoupí k nim ještě podmínka [4, 2]:

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r = 0 \quad \text{pro } r \neq s \quad (4.3.3)$$

Pro řešení pohybové rov.(4.3.1) využijeme předchozího řešení vlastních vektorů netlumené soustavy ($\alpha = \beta = 0$) a budeme předpokládat řešení ve tvaru [2]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r \quad (4.3.4)$$

kde \mathbf{v}_r je vlastní vektor netlumeného pohybu. Dosazením rovnice (4.3.4) do rovnice (4.3.1) dostaneme [2]:

$$\mathbf{M} \sum_{r=1}^n \lambda_r^2 C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r + \mathbf{B} \sum_{r=1}^n \lambda_r C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r + \mathbf{K} \sum_{r=1}^n C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r = 0$$

Sumací se v této rovnici zbavíme vynásobením celé rovnice zleva transponovaným vektorem tvaru \mathbf{v}_s^T a využitím podmínek ortogonality. Po úpravě přejde tato rovnice na tvar [2]:

$$C_r \left(\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \lambda_r^2 + \mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r \lambda_r + \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_r \right) e^{\lambda_r t} = 0 \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n$$

Pro netriviální řešení musí být výraz v závorce roven nule. Když označíme

- zobecněnou (modální) hmotnosti módu r :

$$m_{yr} = \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r$$

- zobecněnou (modální) tuhost módu r :

$$k_{yr} = \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r$$

a matici tlumení vyjádříme z rovnice (4.3.2), bude platit [2]:

$$m_{yr} \lambda_r^2 + (\alpha m_{yr} + \beta k_{yr}) \lambda_r + k_{yr} = 0 \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.3.5)$$

Z rovnice (4.3.5) určíme kořeny λ_r [2]:

$$(\lambda_r)_{1,2} = -\delta_r \pm i\Omega_r \quad (4.3.6)$$

kde je [2]:

$$\delta_r = \frac{\alpha m_{yr} + \beta k_{yr}}{2m_{yr}}$$

$$\Omega_r = \sqrt{\Omega_{0r}^2 - \delta_r^2}$$

$$\Omega_{0r} = \sqrt{\frac{k_{yr}}{m_{yr}}}$$

Obecné řešení tedy bude z rov. (4.3.4) [2]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n \left(C_{1r} e^{\lambda_{r1} t} + C_{2r} e^{\lambda_{r2} t} \right) \mathbf{v}_r \quad (4.3.7)$$

Pokud bude $\Omega_{0r} > \delta_r$ budou kořeny $(\lambda_r)_{1,2}$ komplexně sdružené a výsledný pohyb bude periodický, vyjádřený rovnicemi [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n e^{-\delta_r t} \left(A_r \cos \Omega_r t + B_r \sin \Omega_r t \right) \mathbf{v}_r \quad (4.3.8)$$

nebo [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r e^{-\delta_r t} \sin(\Omega_r t + \varphi_r) \mathbf{v}_r \quad (4.3.9)$$

Hodnoty C_{1r} , C_{2r} nebo A_r , B_r či C_r , φ_r jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek ($t = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0$) [4].

4.4 Vynucené tlumené kmitání buzené harmonickou silou

Konečně se dostáváme k druhu kmitání, kterým můžeme popsat v plné šíři zadanou soustavu dle schématu na (obr. 3.1). V tomto případě využijeme úplnou rovnici (3.3.2).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (4.4.1)$$

Jedná se o soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu s pravou stranou. Její řešení se skládá z řešení homogenního a partikulárního [4]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_h + \mathbf{q}_p$$

Homogenní řešení je dáno rov.(4.3.8) resp. (4.3.9). Partikulární řešení závisí na vektoru budících sil. Protože se jedná o harmonické buzení, které lze popsat rovnicí [4]:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t},$$

partikulární řešení budeme předpokládat ve tvaru [4]:

$$\mathbf{q}_p = \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}, \quad (4.4.2)$$

kde $\tilde{\mathbf{s}}$ je komplexní vektor amplitud. Dosazením rovnice (4.4.2) do rovnice (4.4.1) získáme po úpravě [4]:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_0$$

Z této rovnice vyjádříme explicitně komplexní vektor amplitud odezvy [4]:

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Q}_0 \quad (4.4.3)$$

tak, že provedeme inverzi komplexní matice $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1}$. Pro tuto inverzi bez práce s komplexními čísly použijeme následující postupu [4]:

Označme reálnou část:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$$

a imaginární část:

$$\mathbf{D} = \omega \mathbf{B}$$

Inverzí dynamické matice tuhosti obdržíme opět reálnou a imaginární část:

$$(\mathbf{A} + i\mathbf{D})^{-1} = (\mathbf{L} + i\mathbf{N})$$

vynásobením levé strany této rovnice maticí dynamické tuhosti $(\mathbf{A} + i\mathbf{D})$ obdržíme jednotkovou matici:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A} + i\mathbf{D})(\mathbf{L} + i\mathbf{N})$$

Roznásobením a vytknutím do tvaru: reálná + imaginární část získáme:

$$\mathbf{E} = \mathbf{AL} - \mathbf{DN} + i(\mathbf{AN} + \mathbf{DL})$$

Reálné a imaginární části obou stran rovnice musí být rovny:

$$\mathbf{AL} - \mathbf{DN} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{AN} + \mathbf{DL} = \mathbf{0}$$

Tuto soustavu lze zapsat maticově jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

odkud lze již určit členy inverzní matice dynamické tuhosti, ovšem za cenu toho, že musíme invertovat matici řádu $2n$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Rovnici (4.4.3) lze psát ve tvaru [4]:

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{L} + i\mathbf{N})\mathbf{Q}_0 = \mathbf{s}_0 e^{i\varphi_{p,r}}$$

kde reálné hodnoty amplitud odezvy jsou dány vztahem [4]:

$$s_{0r} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\tilde{s}_r\})^2 + (\operatorname{Im}\{\tilde{s}_r\})^2} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.4)$$

a jim odpovídající fáze [4].

$$\varphi_{p,r} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{\tilde{s}_r\}}{\operatorname{Re}\{\tilde{s}_r\}} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.5)$$

Odezvu soustavy buzené harmonickou silou lze vyjádřit rovnicí:

$$\mathbf{q} = \left[\sum_{r=1}^n C_r e^{-\delta_r t} \sin(\Omega_r t + \varphi_r) \mathbf{v}_r \right] + \mathbf{s}_0 \sin(\omega t + \varphi_p) \quad (4.4.6)$$

Integrační konstanty C_r a φ_r je nutné určit z počátečních podmínek [4].

Protože jsme vycházeli z řešení homogenní rovnice, která popisovala proporcionální tlumení, musíme i zde uvažovat tlumení jako proporcionální.

5 VÝPOČET POMOCÍ PROGRAMU MAPLE™

„Maple™ je systém počítačové algebry pro výuku a využití matematiky v přírodovědných, technických a ekonomických oborech, který byl vyvíjen od devadesátých let minulého století. Umožňuje symbolické a numerické matematické výpočty, jejich počítačovou vizualizaci, dokumentaci a publikaci. Učitelům, studentům i vědcům a výzkumným pracovníkům poskytuje uživatelsky přívětivé prostředí, ve kterém lze snadno používat matematiku.“[7]

Úloha byla vytvořena v programu ve verzi 12.0 na Windows® XP za použití knihovny pro řešení problémů lineární algebry LinearAlgebra.

5.1 Zápis v souboru příkazů

Zápis je vytvořen tak aby umožnil obecný výpočet hodnot pro soustavy s n -stupni volnosti. Na počátku je proměnné n přiřazena hodnota rovna počtu stupňů volnosti. Matice hmotnosti, tuhosti a tlumení je plněna náhodně generovanými hodnotami v zadaném rozsahu. Matice jsou uspořádány tak aby odpovídaly zadané soustavě, přičemž tlumení je popsáno proporcionálně pomocí konstant α a β .

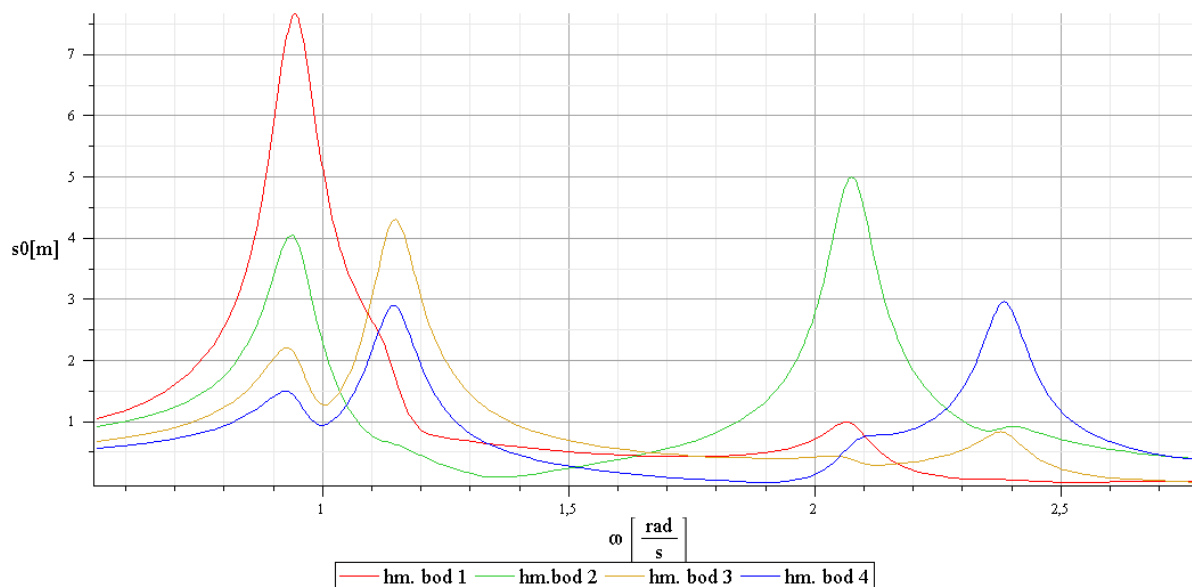
Řádky zápisu zpravidla odpovídají rovnicím uváděným v teoretickém rozboru úlohy v kapitolách 3 a 4, přičemž jejich výsledky jsou ukládány do proměnných se stejným symbolickým označením. Po provedení výpočtu je vypsán výsledek operace zároveň s jeho numerickým vyjádřením.

Vykresleny jsou grafy závislostí amplitud vynucených kmitů na budící frekvenci (tzv.: amplitudová charakteristika) a fází odezvy v závislosti na budící frekvenci (fázová charakteristika). Nad rámec zadání je navíc vykreslen průběh výchylek hmotných bodů rozvinutý v čase pro dané počáteční podmínky.

5.2 Vykreslení hodnot modelových situací

Pro vykreslení grafů jsem zvolil počet stupňů volnosti $n = 4$. V grafu (obr 5.1) je vidět průběh amplitud vynucených kmitů s_0 v závislosti na budící frekvenci ω .

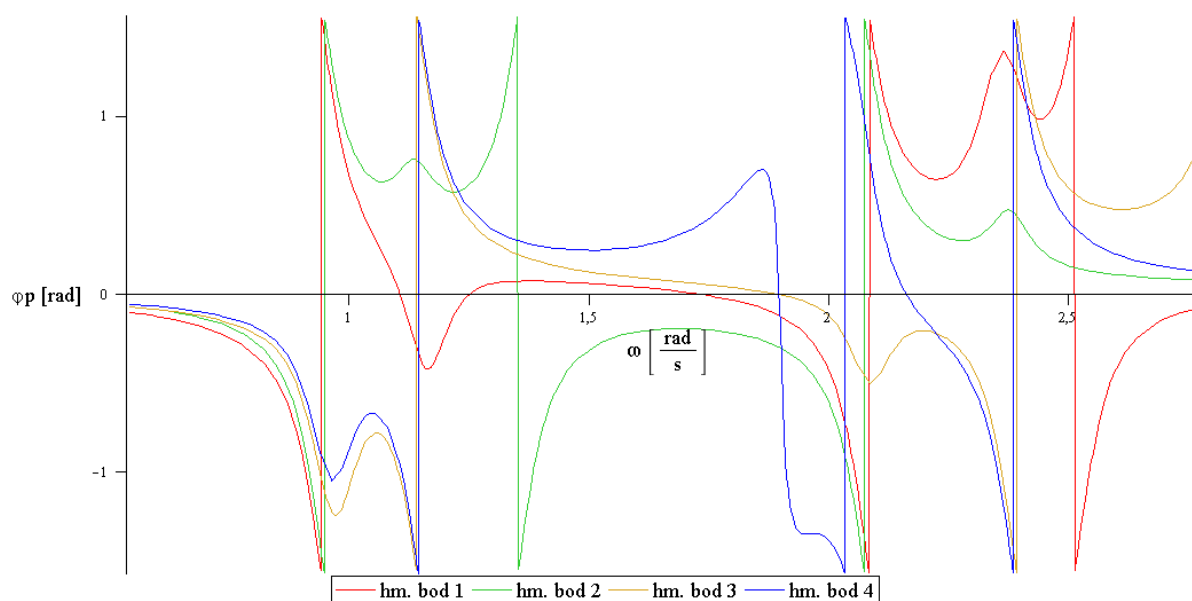
Pro určení matice tlumení je použita proporcionální definice, která využívá konstant α a β . Ty v závislosti na maticích \mathbf{M} a \mathbf{K} určí výslednou matici \mathbf{B} . Matice odpovídá zadané soustavě, je-li konstanta β rovna nule. Pokud by byla nenulová, znamenalo by to, že viskosní tlumení je realizováno i v místech mezi hmotnými body. Konstanta α je zvolena tak, aby platilo $\delta < \Omega_0$, čili se jedná o podkritické tlumení.



Obr. 5.1 Amplitudová charakteristika (podkritické tlumení)

V grafu (obr 5.1) jsou zobrazeny průběhy amplitud různých hmotných bodů. Ty jsou odlišeny různou barvou. „Stav kdy je frekvence buzení rovna vlastní (tlumeného i netlumeného kmitání) se nazývá rezonance (opak antirezonance)“ [8]. Proto při každé z vlastních frekvencí roste amplituda daného hmotného bodu, kterému tato frekvence odpovídá. Tím, že jsou hmotné body vzájemně svázány pružinami, se navzájem ovlivňují. To má za následek to, že rostou i amplitudy ostatních hmotných bodů.

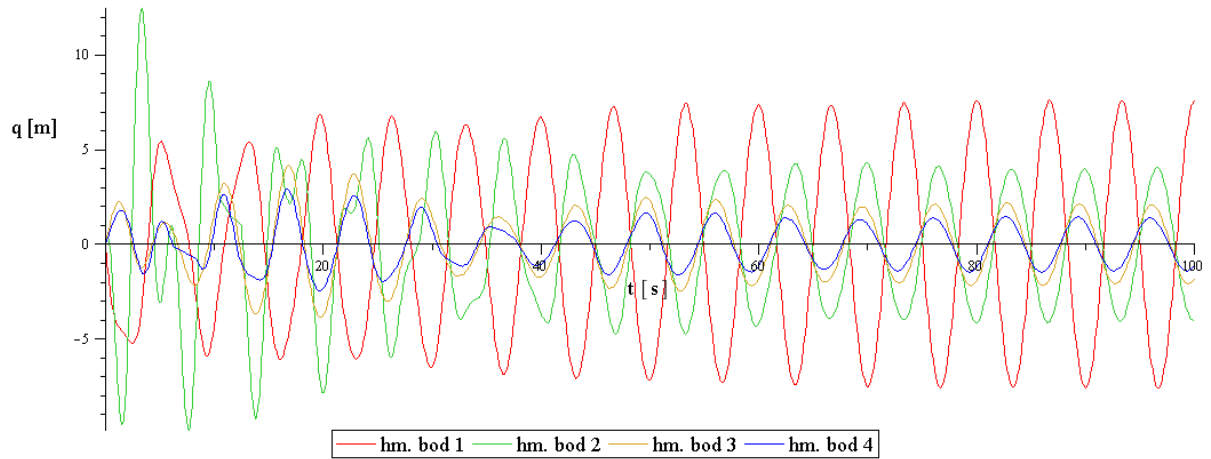
Průběh fáze odezvy na budící frekvenci (fázová charakteristika) je zobrazen v následujícím grafu (obr. 5.2):



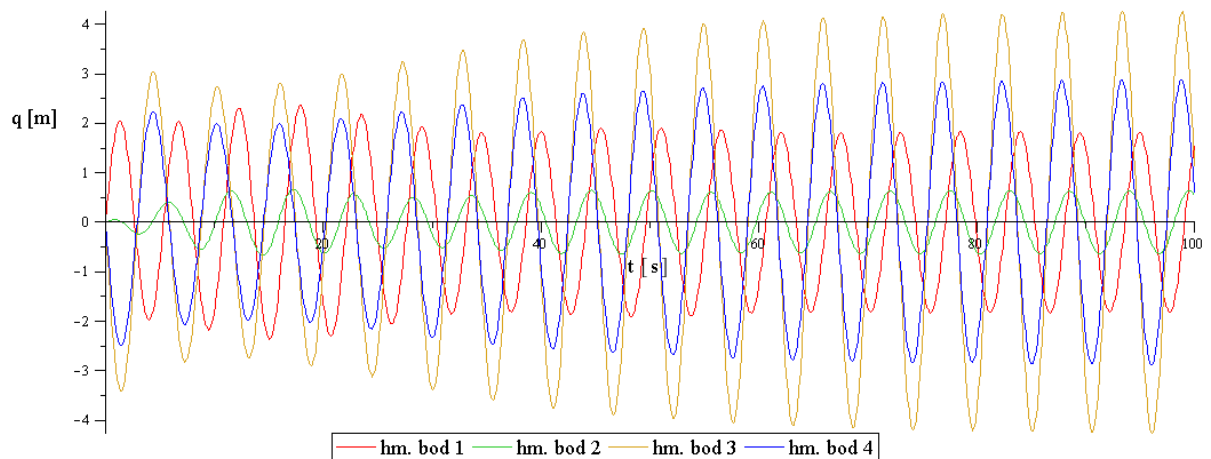
Obr. 5.2 Fázová charakteristika (podkritické tlumení)

Pro průběh polohy hmotných bodů v čase jsem zvolil budící frekvenci rovnu vlastní frekvenci tlumeného kmitání, tím nastává rezonance. Výsledkem jsou 4 grafy pro 4 vlastní

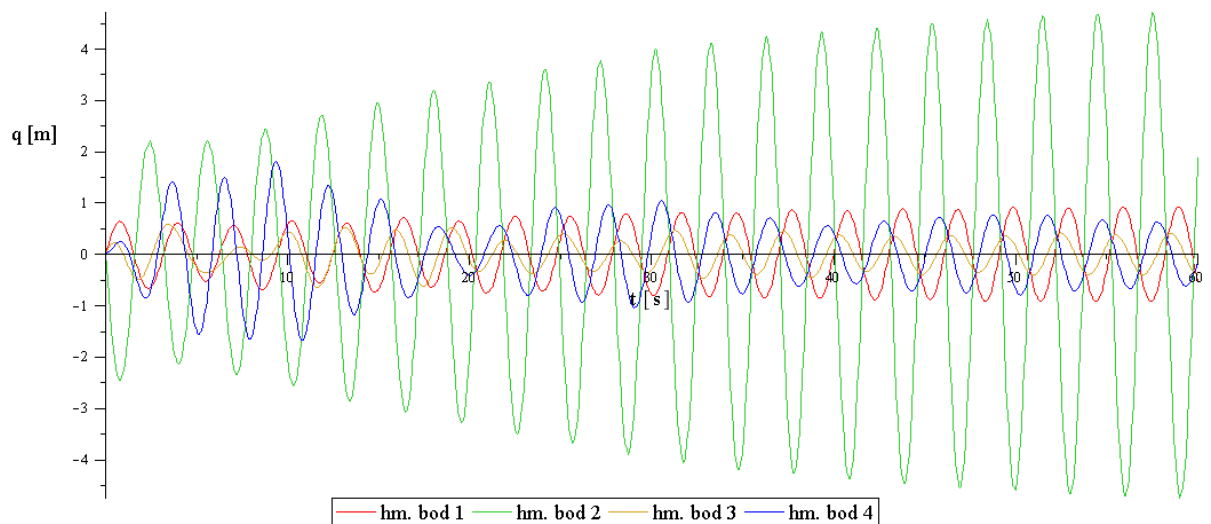
frekvence tlumeného kmitání (obr 5.3), při jejichž řešení byly zvoleny počáteční podmínky nulové.



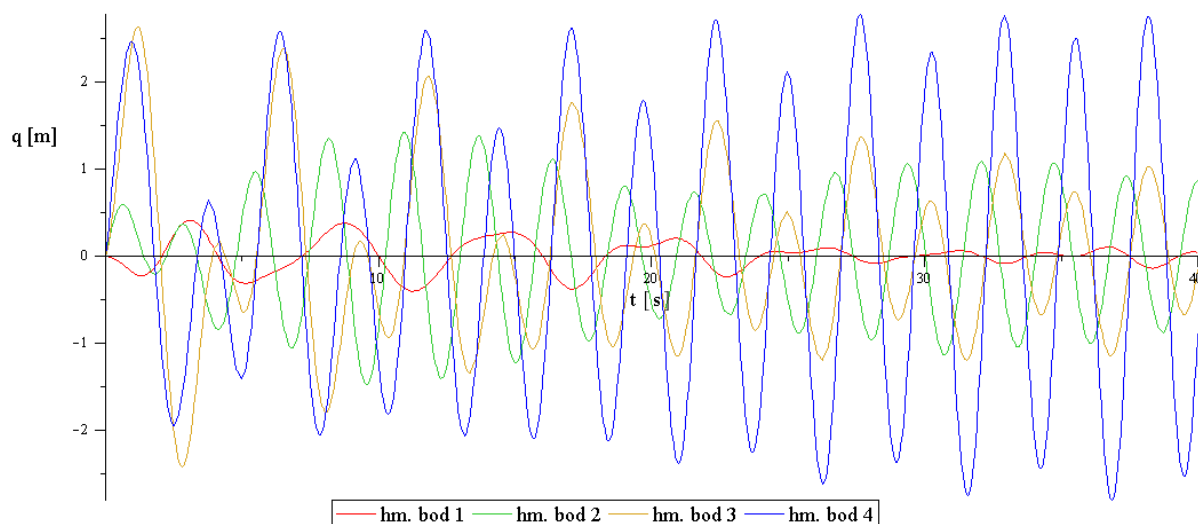
a) Budící frekvence rovna 1. vlastní frekvenci



b) Budící frekvence rovna 2. vlastní frekvenci



c) Budící frekvence rovna 3. vlastní frekvenci



d) Budící frekvence rovna 4. vlastní frekvenci

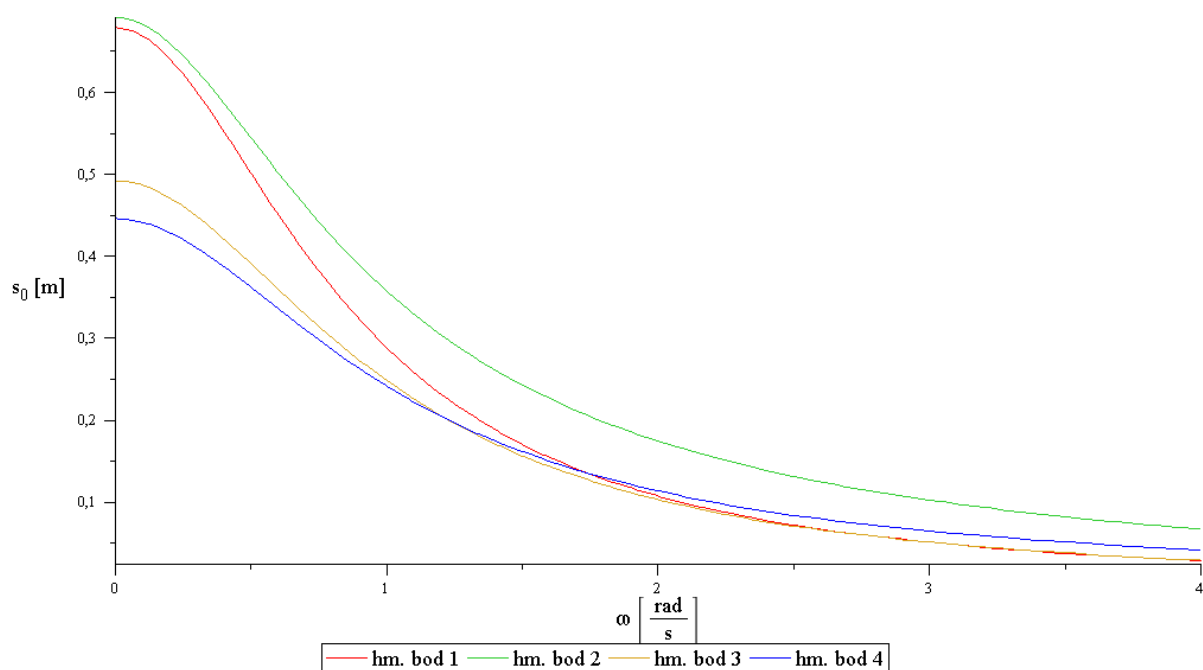
Obr. 5.3 Průběh výchylky v čase pro různé hodnoty budící frekvence (podkritické tlumení)

Z grafů (obr. 5.3) je vidět, že vždy po nějaké době potřebné pro ustálení, roste výchylka kmitů příslušná tomu hmotnému bodu, pro který je budící frekvence rovna vlastní frekvenci tlumeného kmitání. Je také patrné, že díky tlumení nemůže výchylka růst do nekonečna.

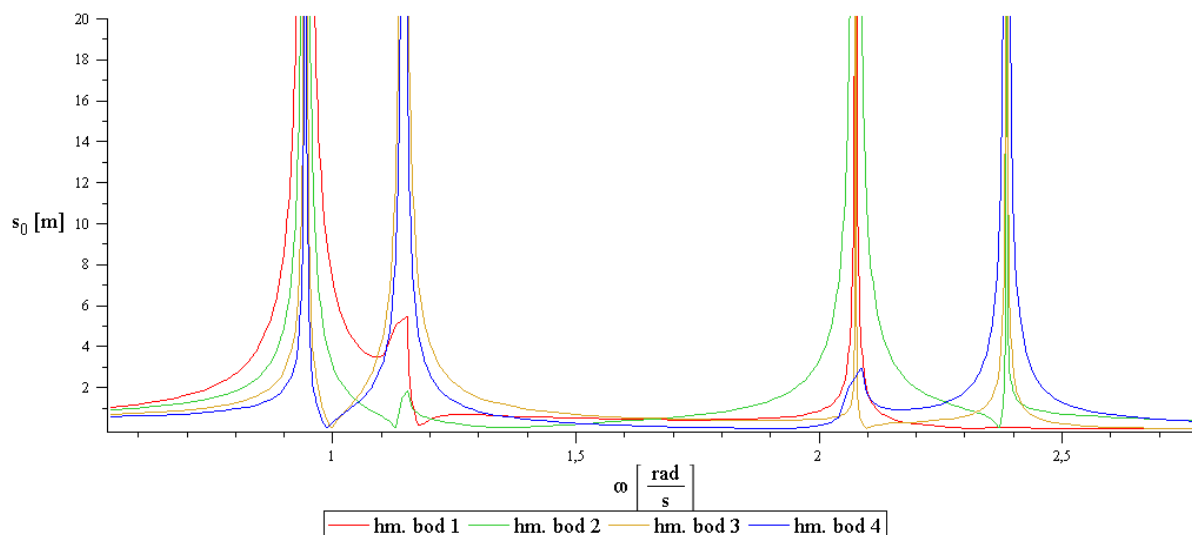
5.2.1 Vykreslení hodnot pro různé konstanty tlumení

Podkritické tlumení bylo znázorněno v předchozím případě. Proto v následujícím případě jsou konstanty α a β zvoleny tak, že $\delta > \Omega_0$, jedná se tedy o **nadkritické tlumení**. Při nadkritickém tlumení je odporová síla tak velká, že neumožní tělesu zakmitat.

Grafy amplitud odezvy v závislosti na budící frekvenci takto tlumené soustavy (obr. 5.4 a) a soustavy **netlumené** (obr. 5.4 b), pro niž platí $\delta = 0$ vypadají následovně:



a) Nadkritické tlumení



b) Bez tlumení

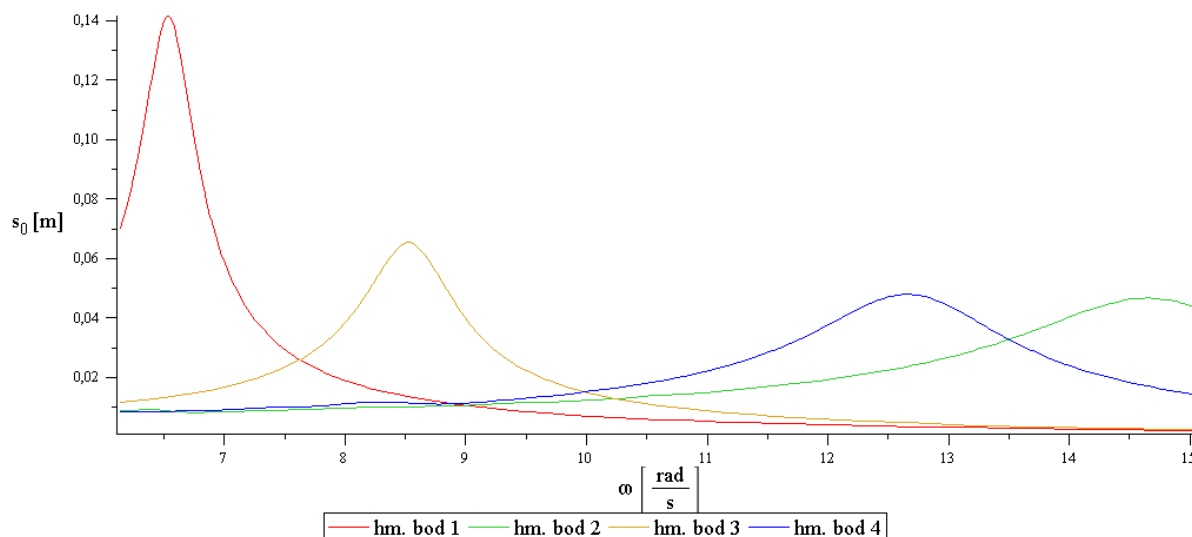
Obr. 5.4 Amplitudová charakteristika pro různé konstanty tlumení

Z grafu (obr. 5.4 b) je vidět, že pro soustavu s nulovým tlumením roste amplituda nad všechny meze.

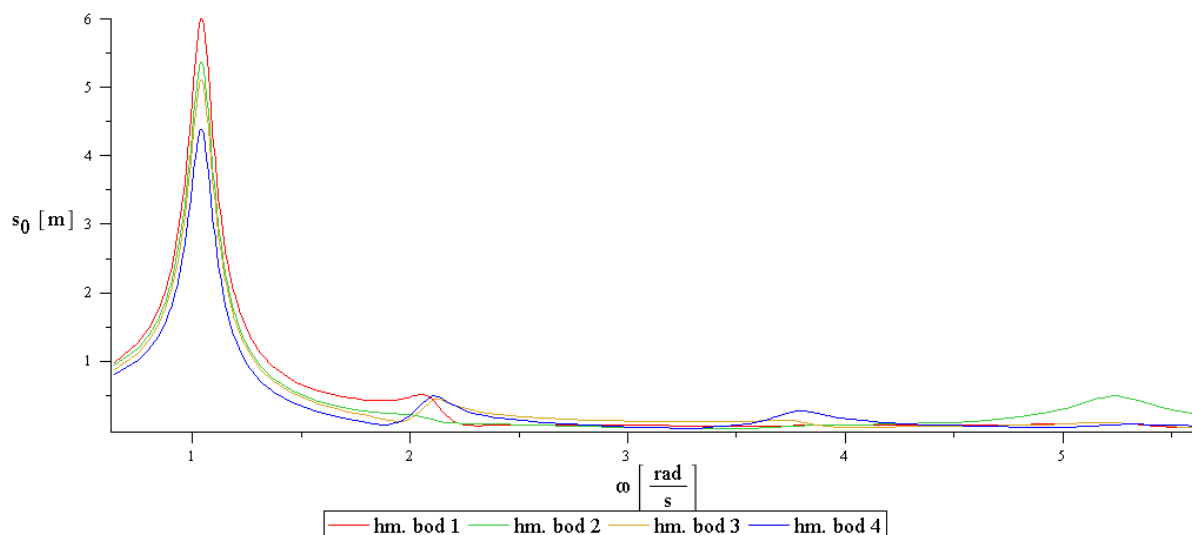
5.2.2 Vykreslení hodnot pro různé konstanty tuhosti

V soustavě se nachází dvě řady pružin, jednak **mezi hmotnými body a rámem**, a také **mezi sousedícími hmotnými body navzájem**. Tím, že řádově zvýšíme tuhost pružin z jedné řady, změníme podstatně vlastní tvar kmitání i ostatní veličiny.

Následující graf (obr. 5.5 a) zobrazuje jaký vliv má zvýšení tuhosti pružin vázajících hmotné body **k rámu** na amplitudy vynucených kmitů. Naopak vliv zvýšení tuhosti pružin **mezi hmotnými body** je znázorněn na dalším obrázku (obr. 5.5 b).



a) řádově vyšší tuhost pružin mezi rámem a hm. body



b) řádově vyšší tuhost pružin mezi hm. body navzájem
 Obr. 5.5 Amplitudová charakteristika pro různé konstanty tuhosti

V prvním případě (obr. 5.5 a) lze říci, že soustava se chová blíže představě soustavy hmotných bodů, které nejsou navzájem vázány. Druhý případ (obr. 5.5 b) se chová spíše jako jeden hmotný bod mající jednu vlastní frekvenci. Vliv dalších vlastních frekvencí je prakticky zanedbatelný.

Zvyšováním poměru mezi tuhostí jedné a druhé řady pružin se tyto změny projevují ještě více. Limitní případy jsou zřejmé. U obou jde o kmitání s jedním stupněm volnosti. První je nezávislé kmitání n hmotných bodů a druhý je jeden kmitající bod tvořený součtem n hmotností.

ZÁVĚR

Předložená práce prezentuje výsledky analýzy kmitání zadané mechanické soustavy s n -stupni volnosti. Vykresleny jsou amplitudové a fázové charakteristiky soustavy. Nad rámec zadání je vykreslen průběh výchylky rozvinutý v čase. Názorně je prezentován vliv změn hodnot, které vstupují do výpočtu, na výsledek. Přirozeně zde nejsou demonstrovány veškeré kombinace možností ovlivňující tvar a charakter kmitání. Ze zde uvedených si však lze utvořit představu, jaké bude mít kmitání vlastnosti.

Pro modelování soustavy byl použit software Maple™, ten patří do skupiny programů umožňujících za použití matematických metod řešení problémů nejen dynamiky. Tam lze zařadit také MATLAB/Simulink®, Mathematica® a jiné. Tyto programy mají bezesporu své místo, ale dnes se v praxi používají pro řešení reálných problémů spíše programové soubory založené na metodě konečných prvků (např. ANSYS®, Pro/ENGINEER® Mechanica®, MD Adams® a další).

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] SLAVÍK, Jaromír, STEJSKAL, Vladimír, ZEMAN, Vladimír: *Základy dynamiky strojů*, první vydání, ČVUT Praha, Praha, 1997.
- [2] KRATOCHVÍL, Ctirad, SLAVÍK, Jaromír: *Mechanika těles - Dynamika*, čtvrté vydání, CERM, s.r.o., Brno, 2007.
- [3] BREPTA, Rudolf., PUST, Ladislav., TUREK, František: *Mechanické kmitání*, Sobotáles, první vydání, Praha, 1994.
- [4] SLAVÍK, Jaromír: *Počítačové metody mechaniky*, první vydání, CERM, s.r.o., Brno, 2001.
- [5] KOŽEŠNÍK, Jaroslav: *Kmitání mechanických soustav*, první vydání, Academia, Praha, 1979.
- [6] ŠVANCARA, Pavel, HOUFEK, Lubomír, MALENOVSKÝ, Eduard: *Studijní opory z dynamiky* [online], 28. 11. 2006, [cit. 7. 5. 2010], dostupný z: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/index.html>>
- [7] Online prezentace distributora Czech Software First s.r.o., *Maple*, [online], [cit. 7. 5. 2010], dostupný z: <<http://www.maplesoft.cz/maple>>
- [8] MALENOVSKÝ, Eduard: *Studijní opora z předmětu Počítačové metody mechaniky v dynamice* [online], 12. 2. 2007, [cit. 7. 5. 2010], dostupný z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/pmm_dyn/index.html>

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

Symbol veličiny	Význam veličiny	Jednotka
T_F	Perioda	[s]
Q	Funkce buzení	[N]
Q_0	Amplituda funkce buzení	[N]
t	Čas	[s]
ω	Úhlová frekvence buzení	[rad·s ⁻¹]
φ	Fázové posunutí	[rad]
m	Hmotnost hmotného bodu	[kg]
k	Konstanta pružiny	[N·m ⁻¹]
b	Konstanta tlumiče	[N·s·m ⁻¹]
q	Zobecněné souřadnice	[m]
\dot{q}	Zobecněná rychlost	[m·s ⁻¹]
\ddot{q}	Zobecněné zrychlení	[m·s ⁻²]
n	Počet stupňů volnosti	[-]
E_K	Kinetická energie soustavy	[J]
E_D	Disipační funkce soustavy	[J]
E_P	Potenciální energie soustavy	[J]
u	Amplitud harmonických kmitů	[m]
Ω	Vlastní úhlová frekvence tlumeného kmitání	[rad·s ⁻¹]
Ω_0	Vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání	[rad·s ⁻¹]
\mathbf{v}	Modální vektor	[-]
C	Integrační konstanta	[-]
A	Integrační konstanta	[-]
B	Integrační konstanta	[-]
α	Konstanta proporcionálního tlumení	[-]
β	Konstanta proporcionálního tlumení	[-]
m_y	Zobecněná hmotnost	[kg]
k_y	Zobecněná tuhost	[N·m ⁻¹]
δ	Konstanta doznívání	[s ⁻¹]
q_h	Homogenní řešení	[m]
q_p	Partikulární řešení	[m]
s_0	Amplituda odezvy	[m]
φ_p	Fáze odezvy	[rad]

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1 ... výpis souboru příkazů programu Maple

Příloha 2 ... soubor model_kmitani.mw na přiloženém CD