VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ALGEBRAICKÉ METODY ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE
ALGEBRAIC METHODS FOR A SOLUTION OF A CUBIC EQUATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE VLADIMÍRA SLADKÁ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE RNDr. JIŘÍ KLAŠKA, Dr.
SUPERVISOR

BRNO 2008

Licenční smlouva
poskytovaná k výkonu práva užít školní dílo
uzavřená mezi smluvními stranami:

1. Paní

Jméno a příjmení:	Vladimíra Sladká
Bytem:	Nádražní 1260, 664 34, Kuřim
Narozena (datum a místo):	3. 12. 1985, Brno

(dále jen autor)

a

2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta strojního inženýrství
se sídlem Technická 2896/2, 61669, Brno - Královo Pole
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:
...

(dále jen nabyvatel)

Čl. 1
Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

   ☐ disertační práce

   ☐ diplomová práce

   ☒ bakalářská práce

   ☐ jiná práce, jejíž druh je specifikován jako ....

   (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP:	Algebraické metody řešení kubické rovnice
Vedoucí/ školitel VŠKP:	RNDr. Jiří Klaška, Dr.
Ústav:	Ústav matematiky
Datum obhajoby VŠKP:	18. 6. 2008

   VŠKP odevzdal autor nabyvateli v[1]:

   ☐ tištěné formě — počet exemplářů 2

   ☐ elektronické formě — počet exemplářů 1

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

[1]hodící se zaškrtněte

Čl. 2
Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.

2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.

3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti

   - ☐ ihned po uzavření této smlouvy
   - ☐ 1 rok po uzavření této smlouvy
   - ☐ 3 roky po uzavření této smlouvy
   - ☐ 5 let po uzavření této smlouvy
   - ☐ 10 let po uzavření této smlouvy

   (z důvodu utajení v něm obsažených informací)

4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením §47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

Čl. 3
Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.

2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.

3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísni a za nápadně nevýhodných podmínek.

4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne:

Nabyvatel Autor

Abstrakt
Algebraickým řešením kubických rovnic se snažíme získat tři kořeny, z nichž jeden je realný a zbývající dva mohou být jak reálné, tak komplexně sdružené. Výpočty jsou v této práci prováděny pomocí Cardanových vzorců. V současné době se ovšem Cardanovy vzorce téměř nepoužívají pro svou nepraktičnost a výpočty jsou prováděny pomocí numerických metod.

Summary
Solving cubic equaitons algebraically, we try to obtain three roots. One of them is real and the other ones may be either real or complex conjugate. The computations in this work are performed by means of Carnado formulae. Nowadays, Cardano formulae are rarely used due to their impracticallnes. Numerical methods are used instead.

Klíčová slova
Kubická rovnice, Cardanovy vzorce

Keywords
Cubic equation, Cardano formulae

SLADKÁ, V.*Algebraické metody řešení kubické rovnice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 27 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Jiří Klaška, Dr.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Algebraické metody řešení kubické rovnice* vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Jiřího Klašky, Dr., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Vladimíra Sladká

Děkuji svému školiteli RNDr. Jiřímu Klaškovi, Dr. za vedení mé bakalářské práce.

Vladimíra Sladká

Obsah

1. Úvod

Pojem kvadratické rovnice je starší než Pythagorova věta. Na druhé straně řešení kubické rovnice patřilo mezi první velké úspěchy renesanční matematiky v Itálii. K rovnicím třetí stupně se dostali matematici původně při řešení některých geometrických problémů, jako je trisekce úhlu nebo zdvojnásobení objemu kostky. Jak bylo objeveno později, geometrické úlohy vedoucí na rovnice třetího stupně, jsou obecně pomocí pravítka a kružítka neřešitelné.

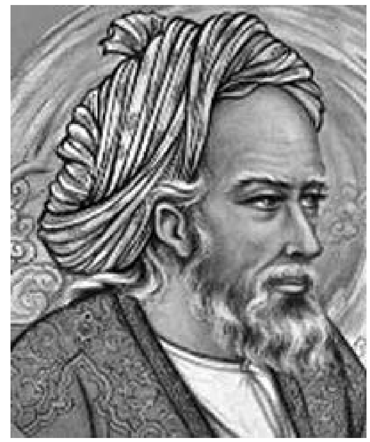
V úvodu práce jsme se zaměřili na historický vývoj řešení rovnic třetího stupně a uvedli jsme v několika větách stručné životopisy autorů nejzásadnějších myšlenek.

V druhé kapitole je naším cílem popsat algebraické možnosti určení reálného kořene kubické rovnice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Další dva kořeny, ať už komplexní nebo reálné, mohou být určeny například polynomickým dělením nebo za pomocí kvadratické formule. Proto tato část obsahuje odvození Cardanových vzorců a diskuzi řešení pro vypočtený diskriminant.

Poslední část je zaměřena na řešené příklady. Výpočty jsou prováděny pomocí Cardanových vzorců a pro názornost je také uveden příklad řešený pomocí softwaru Maple a Matlab. Na konkrétních příkladech jsme ukázali pomocí výpočtu diskriminantu stanovení druhu kořenů a provedli postup výpočtu pro získání těchto kořenů. U každého vypočteného příkladu je pro názornost vykreslen graf fce, daný příslušnou kubickou rovnicí. Vykreslení grafů provádíme pomocí softwaru Maple.

2. Historie algebraického řešení kubických rovnic

V 5. století před Kristem se řečtí matematikové pokoušeli řešit především výše zmíněné geometrické problémy pomocí pravítka a kružítka, do těchto dob klademe absolutní počátky řešení rovnic třetího stupně.



Až po více jak dvou tisících letech v 11. století perský matematik **Omar Khayymán** učinil významný pokrok v teorii kubických rovnic. Zjistil, že kubická rovnice může mít více jak jedno řešení. Jeho významný matematický příspěvek zahrnoval jeho pozdější práci *Treatise on Demonstration of Problems of Algebra*, kde uvedl kompletní klasifikaci kubických rovnic a zároveň uveřejnil geometrickou metodu řešení těchto rovnic založenou na protínání kuželoseček.

Největší pokrok v algebraickém řešení kubických rovnic zaznamenali v 16. století italští renesanční matematici. Mezi nimi i **Scipione del Ferro**. Tento významný matematik zastával místo na katedře aritmetiky a geometrie Univerzity v Boloni, kde se zabýval algebraickým řešením kubických rovnic. Cílem bylo nalézt kořeny kubické rovnice kombinací koeficientů. Lze se oprávněně domnívat, že del Ferro byl schopen řešit pouze rovnici tvaru

$$x^3 + mx = n$$

Každou rovnici třetího řádu lze převést na tento redukovaný tvar, ovšem bez hindské znalosti záporných čísel del Ferro nebyl schopen najít řešení libovolného typu kubické rovnice. Del Ferro řešení kubické rovnice objevil v roce **1515**, ale utajoval ho. Těsně před svou smrtí v roce **1526** svoji metodu předal svému studentovi **Antoniovi Fiorovi**. Fior byl průměrným matematikem a ještě méně byl schopen uchovávat tajemství.

Brzy po Boloni prosakovala zpráva, že bylo objeveno řešení kubické rovnice. **Nicolo z Brescii**, známý pod jménem **Tartaglia**, učinil pověstem konec, když se mu podařilo nalézt řešení kubické rovnice tvaru

$$x^3 + mx^2 = n$$

Fior vyzval Tartagliu k veřejné soutěži. Pravidla soutěže stanovila, že jeden druhému zadá 30 problémů s 40 nebo 50 dny na jejich vyřešení. Vítězem soutěže se stane ten, kdo vyřeší více problémů. Tartaglia vyřešil každý Fiorův problém vždy během dvou hodin. Fior proto zadal Tartagliovi rovnici tvaru $x^3 + mx = n$, protože věřil, že Tartaglia tuto rovnici nevyřeší. Ale jen 8 dní před uplynutím doby k vyřešení Tartaglia nalezl obecnou metodu pro řešení všech kubických rovnic.

Zprávy o Tartagliově vítězství dorazily k **Girolamu Cardanovi** v Miláně, kde Cardano připravoval k vydání svoji práci *Practica Arithmeticae*. Cardan pozval Tartagliu, aby na něm vyzvěděl tajemství řešení kubické rovnice. Tartaglia požadoval, aby Cardan zachoval tajemství do doby, než on sám bude řešení publikovat. Cardan ale slib porušil. V roce 1545 publikoval práci *Ars Magna*, první latinské pojednání o algebře.

Cardanovo řešení rovnice $x^3 + mx = n$ bylo následující.
Cardan vyšel ze vztahu

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3 \tag{2.1}$$

Pokud a, b splňují následující vztahy:

$$3ab = m \tag{2.2}$$
$$a^3 - b^3 = n \tag{2.3}$$

pak $(a-b)$ je řešením rovnice $x^3 + mx = n$. Ale nyní je

$$b = \frac{m}{3a} \tag{2.4}$$
$$a^3 - \frac{m^3}{27a^3} = n \tag{2.5}$$

Po dosazení dostaneme výsledný výraz

$$a^6 - n \cdot a^3 - \frac{m^3}{27} = 0 \tag{2.6}$$

Poslední vztah je kvadratickou rovnicí proměnné a^3, takže se řeší jako běžná kvadratická rovnice.

Cardano ale zjistil, že určité rovnice mají podivné řešení. Když řešil rovnici

$$x^3 = 15x + 4$$

získal výraz obsahující hodnotu $\sqrt{-121}$. Cardano věděl, že odmocnina ze záporného čísla neexistuje a také věděl, že řešením uvedené rovnice je $x = 4$. Proto 4. srpna 1539 napsal Tartagliovi ve snaze nalézt nějaké řešení problému. Tartaglia ale problém zřejmě nepochopil. Ve své práci *Ars Magna* Cardano publikoval řešení obdobných kubických rovnic ve tvaru komplexních čísel, ale pochyboval o tom, že takový výsledek má nějaký smysl.

Cardanova práce *Ars Magna* inspirovala řadu matematiků, aby se zabývali řešením kubických a bikvadratických rovnic. Své metody řešení odvodili **Viéte, Harriot, Tschirnhaus, Euler, Bezaut a Descartes**. Tschirnhausovy metody rozšířil švédský matematik E.S. Bring koncem 18. století.

Thomas Harriot přispěl několika výsledky. Jedním z dnes zřejmých výsledků bylo zjištění, že pokud $x = b, x = c, x = d$ jsou řešení kubické rovnice, pak tato kubická rovnice má tvar

$$(x-b)(x-c)(x-d) = 0$$

Leibniz ve svém dopise Huygensovi v březnu 1673 provedl první přímé ověření platnosti Cardanova-Tartagliova vztahu.

2.1. Pár slov k autorům nejdůležitějších poznatků

Scipione del Ferro (1465 - 1526) se narodil v Boloni v severní Itálii Florianovi a Filipě Ferrovým. Jeho otec Florian pracoval v papírnickém průmyslu. Scipione del Ferro studoval a po té i vyučoval na boloňské universitě, kde přednášel aritmetiku a geometrii od roku 1496 až do své smrti roku 1526. Žádný dokument mapující jeho matematické výsledky se nedochoval, zvláště díky tomu, že odmítal jakkoliv interpretovat a diskutovat své poznatky. Pouze uzavřená společnost v jeho okolí, včetně studentů, mohla nahlížet do velmi krátkých částí jeho písemných prací. I přesto si sepisoval deník, kde zaznamenával všechny důležité objevy. Po jeho smrti tento zápisník zdědil jeho zeď Hannival Nave, který si vzal jeho dceru Filipu. Nave byl také matematik a nahradil del Ferra na universitě v Boloni. V roce 1543 del Ferrovi studenti Gerolamo Cardano a Ludovico Ferrari přijeli do Boloně, aby se setkali s Navem. Získali od něj poslední zápisník, který mimo jiné obsahoval i řešení kubických rovnic.

Niccolo Fontana Tartaglia (1500-1557) se narodil v Brescii. Jeho otec byl doručovatel Michele Fontana, po jeho násilné smrti v roce 1505 se Niccolo se svojí matkou a dalšími dvěma sourozenci ocitá na pokraji chudoby. V roce 1512 francouzské vojsko napadlo jeho rodné město a po šesti dnech tvrdých bojů se Francouzům podařilo vyhrát. Při následujícím masakru byl Fontana zraněn do krku a jazyka, což způsobilo jeho pozdější neschopnost normálně mluvit, proto přezdívka "koktavec". Spolu se svými vrstevníky se zasloužil o šíření klasických děl v moderních jazycích mezi vzdělanou střední vrstvu. Jeho první překlad Euclidovy knihy *Elements*(do češtiny přeloženo jako Částice)v roce 1543 byl obzvláště významný. Tartagliovo vydání založené na latinském překladu původního řeckého textu bylo bezchybné narozdíl od předchozích. Tartaglia je v současnosti zřejmě nejvíce znám pro své konflikty s Gerolamem Cardanem. Cardano byl výborný matematik, jenže Niccolo Fontana byl ještě lepší, uměl totiž řešit rovnice třetího stupně. Cardano přesvědčoval svého rivala, aby mu své tajemství prozradil. Ten nakonec souhlasil, ale jen pod podmínkou, že mu předá řešení formou básně, která nesmí být publikována. Když Cardano porušil svůj slib, rozpoutal rozzuřený Tartaglia veřejnou kampaň, aby svého soka společensky znemožnil. Nakonec se mu podařilo, že Cardana začala pronásledovat španělská inkvizice. Tartaglia také nalezl výraz pro výpočet objemu čtyřstěnu. Niccolo Fontana Tartaglia zemřel v chudobě 13. prosince ve svém domě ve Venice.

Gerolamo Cardano (1501-1576) nebo latinsky Hieronymus Cardanus byl italský matematik, filosof, astronom a astrolog, jeden z nejvýznamnějších představitelů rozvoje přírodních věd a neoplatonismu období renesance. Narodil se 24. září 1501 v Pavii a umírá 20. září 1576 v Římě. Působil převážně v Miláně, Pavii a Boloni. Narodil se jako nemanželské dítě matematicky nadaného právníka Fazia Cardana, který se přátelil s Leonardem da Vinci. Jeho matka krátce před jeho narozením utekla před morem z Milána do Pavie, její další tři děti však na mor umřely. V roce 1520 začal studovat na universitě v Pavii a později studoval medicínu v Padově. Díky svému ekcentrickém a konfrontačnímu chování neměl příliš mnoho přátel a po ukončení studií měl velký problém získat práci. V současnosti je nejlépe znám pro své úspěchy v algebře. V roce 1545 publikoval řešení kubických a bikvadratických rovnic ve své knize *Ars Magna*. Ovšem tajemství řešení kubických rovnic mu svěřil Niccolo Fontana Tartaglia za podmínky dodržení slibu, že toto řešení neodhalí. Cardanův student Lodovico Ferrari se s ním společně zabýval řešením bikvadritických rovnic, proto byli oba uvedeni v předmluvě knihy. Ve spoustě svých výpočtů předpokládal existenci v té době neznámých komplexních čísel, ačkoliv neznal jejich vlastnosti. Jeho kniha *Liber de Ludo Aleae* věnovaná hazardním hrám a pravděpodobnosti (sám byl vašnivý hráč) však byla publikována po jeho smrti až roku 1663. Část knihy byla věnována metodám jak efektivně podvádět. Cardanův nejstarší a nejoblibenější syn byl popraven roku 1560, jeho druhý syn byl hazardní hráč a vlastnímu otci kradl peníze. Od roku 1570, po zákazu vyučovat a publikovat pro údajné kacířství, žil v Římě. Zemřel v den, který si sám astronomicky předpověděl již dříve.

3. Řešení rovnic třetího stupně

Věta 1. *Nechť $z \neq 0$ je komplexní číslo. Nechť $\sqrt[n]{z}$ značí kteroukoliv pevně zvolenou hodnotu tohoto symbolu. Potom všechny n-té odmocniny z čísla z jsou dané čísly*

$$\sqrt[n]{z}, \quad \varepsilon \sqrt[n]{z}, \quad \varepsilon^2 \sqrt[n]{z} \quad ,..., \quad \varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{z},$$

kde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{n}$.

Věta 2 (Základní věta algebry)**.** *Každá algebraická rovnice n-tého stupně , $n > 0$, s komplexními koeficienty má aspoň jeden kořen.*[1]

Věta 3. *Druhá odmocnina z komplexního čísla $a + b\mathrm{i}$ má dvě hodnoty, které se liší pouze znaménkem. Jsou to tato čísla:*

a) *Pro $b > 0$:*

$$\pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right];$$

b) *Pro $b < 0$:*

$$\pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right].$$

Přitom hodnoty symbolů (nezáporných čísel) bereme všude s kladným znaménkem.

Věta 4. *Každé komplexní číslo $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \neq 0$ má právě n různých n-tých odmocnin. Je to těchto n čísel:*

$$\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \qquad k = 0, 1..., n-1.$$

Přitom $\sqrt[n]{r}$ značí nezáporné číslo, jehož n-tá odmocnina je r.

3.1. Algebraické řešení kubických rovnic

Kubická rovnice má tvar

$$z^3 + a_1 \cdot z^2 + a_2 \cdot z + a_3 = 0. \tag{3.1}$$

Jednoduchou substitucí $z = x - \frac{1}{3} \cdot a_1$ je možno odstranit z rovnice člen se z^2. Rovnice přejde na tvar

$$(x - \frac{1}{3}a_1)^3 + a_1(x - \frac{1}{3}a_1)^2 + a_2(x - \frac{1}{3}a_1) + a_3 = 0$$

Proto se v dalších úvahách omezíme na rovnice tvaru

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3.2}$$

[1]Hypotéza o správnosti věty (2) pochází ze 17.století. První pokus o její důkaz pochází od D'ALEMBERTA z roku 1746. První skutečný důkaz pochází od GAUSSE z roku 1799. Za svého života (v období 50 roků) našel Gauss 4 rozličné důkazy.

kde $p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2, \quad q = a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3$.

Přitom budeme předpokládat $p \neq 0$, protože v opačném případě už rovnici umíme řešit. Nechť je x kořenem rovnice (3.2). Napíšeme ho ve tvaru součtu dvou (zatím blíže neurčených) čísel $x = u + v$. Čísla u, v musí potom splňovat vztah

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pro dvě hledaná čísla u, v máme pouze jeden vztah (3.3), proto navíc předepíšeme další podmínku. Požadujeme, aby dále platilo

$$3uv = -p. \tag{3.4}$$

Rovnice (3.3) se potom redukuje na tvar

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{3.5}$$

Pokud rovnici (3.4) umocníme na třetí, dostaneme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 \cdot v^3 &= -\left(\frac{1}{3}p\right)^3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vztahy (3.6) ukazují, že čísla u^3 a v^3 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\xi^2 + q\xi - \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = 0. \tag{3.7}$$

Tato rovnice se nazývá **kvadratickou rezolventou** rovnice (3.2). Jejími kořeny jsou čísla

$$u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}, v^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}, \tag{3.8}$$

přičemž $\sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$ značí jednu z obou hodnot napsaného symbolu, kterou v dalším považujeme za pevnou. Z rovnic (3.8) vyplývá, že když čísla u, v mají vyhovovat rovnicím (3.3) a (3.4), musí se tato čísla rovnat některé z hodnot symbolů

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}, \quad \text{resp.} \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}. \tag{3.9}$$

Každý ze symbolů (3.9) je trojznačný. Máme tedy pro $u + v$ zdánlivě devět hodnot, odpovídajících všem kombinacím hodnot těchto symbolů. Nezapomínejme však, že čísla u, v mají splňovat vztah $u \cdot v = -\frac{1}{3}p$. To znamená, že jen co za u zvolíme jednu ze tří možných hodnot, je číslo v jednoznačně určené vztahem $v = -\frac{p}{3u}$. Máme tedy jen tři možné hodnoty pro součet $u+v$. (Když $p \neq 0$, je i $u \neq 0$.) Toto můžeme specifikovat ještě podrobněji takto: Ve větě (1) jsme viděli, že všechny tři hodnoty $\sqrt[3]{z}$ se dají psát ve tvaru

$$\sqrt[3]{z}, \quad \varepsilon\sqrt[3]{z}, \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{z} \quad (\text{kde } \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}),$$

přičemž pod $\sqrt[3]{z}$ rozumíme teď jednu pevně zvolenou hodnotu tohoto symbolu. Označme znakem u_1 jednu z hodnot symbolu

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2+\left(\frac{1}{3}p\right)^3}},$$

kterou v dalším budeme považujeme za pevnou. Ostatní hodnoty tohoto symbolu jsou potom : εu_1,$\varepsilon^2 u_1$. Pro takto pevně zvolené u_1 je

$$\left(-\frac{p}{3u_1}\right)^3=-\frac{p^3}{27}\left[-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2+\left(\frac{1}{3}p\right)^3}\right]^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2+\left(\frac{1}{3}p\right)^3}.$$

Tedy $-\frac{p}{3u_1}$ je jednou z hodnot symbolu $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2+\left(\frac{1}{3}p\right)^3}}$. Označme znakem v_1 tu hodnotu posledního symbolu, která splňuje vztah $v_1=-\frac{p}{3u_1}$. Potom máme tyto tři možnosti pro kořeny rovnice (3.2):

$$\begin{aligned}
x_1&=u_1+v_1,\\
x_2&=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 v_1=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1),\\
x_3&=\varepsilon^2 u_1+\varepsilon v_1=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1).
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Přitom jsme použili zřejmé vztahy :

Když $3u_1v_1=-p$, potom řešením rovnice $3(u_1\varepsilon)\cdot\eta=-p$ je $\eta=\varepsilon^2 v_1$ a řešení rovnice $3(u_1\varepsilon^2)\cdot\eta=-p$ je $\eta=\varepsilon v_1$

V tuto chvíli musíme dokázat, že čísla (3.10) jsou skutečně všechny kořeny rovnice (3.2). Na to stačí dokázat, že platí:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+px+q,$$

nebo ekvivalentně:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3&=0,\\
x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3&=p,\\
x_1x_2x_3&=-q.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

Uvedené vzorce (3.11) se nazývají Viétovy vztahy mezi kořeny a koeficienty rovnice. Správnost těchto vztahů vyplývá z těchto výpočtů:

a) Když $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, je $x_1+x_2+x_3=u_1(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+v_1(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=0$.

b) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=(u_1+v_1)\cdot[-(u_1+v_1)]+$ $+\left[\frac{1}{4}(u_1+v_1)^2+\frac{3}{4}(u_1-v_1)^2\right]=-\frac{3}{4}(u_1+v_1)^2+\frac{3}{4}(u_1-v_1)^2=-3u_1v_1=p$.

c) $x_1x_2x_3 = (u_1 + v_1)\left[\frac{1}{4}(u_1+v_1)^2 + \frac{3}{4}(u_1-v_1)^2\right] = (u_1 + v_1)(u_1^2 - u_1v1 + v_1^2) =$
$= u_1^3 + v_1^3 = -q.$

Výsledek shrneme do této věty:

Věta 5. *Označme znakem u kteroukoliv hodnotu výrazu*

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}.$$

Označme znakem v tu hodnotu výrazu

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}},$$

pro kterou platí $3uv = -p$. Potom kořeny rovnice (3.2) jsou tato čísla:

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v \\ x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v \\ x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vzorce (3.12) se nazývají **Cardanovy vzorce**.

Poznámka. Vyřešili jsme rovnici (3.2). Pokud chceme najít kořeny rovnice (3.1) stačí si uvědomit, že rovnici (3.2) dostaneme z rovnice (3.1) substitucí $z = x - \frac{1}{3}a_1$, přičemž p, q mají význam vyložený v (3.2). Dosazením máme

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}q\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}p\right)^3 &= \left(\tfrac{1}{2}a_3 - \tfrac{1}{6}a - 1a_2 + \tfrac{1}{27}a_1^3\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}a_2 - \tfrac{1}{9}a_1^2\right)^3 = \\ &= \frac{1}{4}a_3^2 - \frac{1}{6}a_1a_2a_3 - \frac{1}{108}a_1^2a_2^2 + \frac{1}{27}a_1^2a_3\frac{1}{27}a_2^3 = -\frac{1}{108}D_3,\end{aligned}$$

kde D_3 je diskriminant rovnice (3.1).

$$D_3 = a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

■ **Příklad 3.1.1.** Máme řešit rovnici

$$2z^3 - 9z^2 + 18z - 7 = 0.$$

Protože se se zlomky nepříjemně počítá, zavedeme nejprve substituci $z = \frac{1}{2}y$. Rovnice proto přejde na tvar

$$y^3 - 9y^2 + 36y - 28 = 0.$$

Zavedeme teď substituci $y = x + 3$. Rovnice přejde na tvar

$$x^3 + 9x + 26 = 0.$$

Máme $u = \sqrt[3]{-13 + \sqrt{13^2 + 3^3}} = \sqrt[3]{-13 + \sqrt{196}} = \sqrt[3]{-13 + 14} = \sqrt[3]{1}$. Volme za $\sqrt[3]{1}$ přímo číslo 1. Pro v máme: $3uv = -9$, t.j. $v = -3$. Platí tedy:

$$x_1 = 1 - 3 = -2, \quad x_2 = \varepsilon - 3\varepsilon^2 = 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad x_3 = \varepsilon^2 - 3\varepsilon = 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Pro čísla y dostáváme:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad y_3 = 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Odtud plyne:

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_3 = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

3.2. Diskuze řešení rovnice třetího stupně

V tomto odstavci provedeme diskuzi získaných výsledků. Zaměříme se na případ, kdy koeficienty rovnice jsou reálná čísla.

A. Vypočítejme nejprve diskriminant rovnice (3.2), t.j. hodnotu výrazu

$$D_3 = [(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]^2.$$

Ze vzorců (3.10) vyplývá (píšeme $u_1 = u$, $v_1 = v$):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{3}{2}(u+v) - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v), \\ x_1 - x_3 &= \frac{3}{2}(u+v) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v), \\ x_2 - x_3 &= \mathrm{i}\sqrt{3}(u-v). \end{aligned}$$

Tedy je: [2]

$$D_3 = \left[\frac{9}{4}(u+v)^2 + \frac{3}{4}(u-v)^2\right]^2 \cdot [-3(u-v)^2] =$$
$$= -27(u-v)^2(u^2+uv+v^2)^2 = -27(u^3-v^3)^2 = -27[(u^3+v^3)^2 - 4u^3v^3] =$$
$$= -27\left[q^2 + 4\left(\frac{1}{3}p\right)^3\right] = -27q^2 - 4p^3.$$

Odtud dostáváme tuto větu:

Věta 6. *Rovnice (3.2) má vícenásobný kořen pouze tehdy, když se její diskriminant $D_3 = -27q^2 - 4p^3$ rovná nule.*

B. Nyní předpokládejme $D_3 \neq 0$ a dále, že rovnice (3.2) má reálné koeficienty. Tato rovnice má buď tři reálné kořeny, anebo jeden reálný kořen a jeden pár komplexně sdružených (nereálných) kořenů.

[2] Všimněte si, že platí $D_3 = -27q^2 - 4p^3 = -108\left[\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3\right]$.

a) Když kořeny x_1, x_2, x_3 jsou reálná (a podle předpokladu různá) čísla, je D_3 jako kvadrát reálného čísla kladné číslo.

b) V druhém případě nechť x_3 je reálný kořen a x_1, x_2 jsou komplexně sdružené kořeny. Výraz $(x_1 - x_2)^2$ je záporný, ale $(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2$ - jako součin dvou nereálných komplexně sdružených čísel - je kladný. Tedy $D_3 < 0$.

Věta 7. *Nechť (3.2) je rovnice s reálnými koeficienty, pro kterou je $D_3 \neq 0$. Potom pokud $D_3 > 0$ má rovnice tři reálné kořeny; pokud je $D_3 < 0$, má rovnice jeden reálný kořen a jeden pár komplexně sdružených (nereálných) kořenů.*

C. Cardanův vzorec má některé nepříjemné vlastnosti. První takovou nepříjemnou skutečnost ukážeme na následujícím příkladě.

■ **Příklad 3.2.1.**

$$x^3 + x + 10 = 0$$

Tato rovnice má - jak je vidět na první pohled - kořen $x_1 = -2$. Další kořeny dostaneme dělením rovnice $(x^3 + x + 10) : (x + 2) = x^2 - 2x + 5 = 0$. Jsou to tedy čísla $x_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_3 = 1 - 2\mathrm{i}$.

Pokud dosadíme do Cardanova vzorce (3.12), dostáváme tyto kořeny:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{-5 - \frac{26}{9}\sqrt{3}},\\
x_2 &= \varepsilon\sqrt[3]{-5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-5 - \frac{26}{9}\sqrt{3}},\\
x_3 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{-5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}} + \varepsilon\sqrt[3]{-5 - \frac{26}{9}\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

První z těchto kořenů je reálné číslo, ale ani zkušený matematik nepozná na první pohled, že toto číslo x_1 se rovná právě číslu -2.

D. Ještě nepříjemnější je vlastnost, kterou ukážeme na následujícím příkladě.

■ **Příklad 3.2.2.**

$$x^3 - 15x + 22 = 0$$

Tato rovnice má diskriminant $D_3 = -108(11^2 - 5^3) > 0$. Proto má naše rovnice tři reálné kořeny. Tyto kořeny se dají zkusmo lehce najít. Platí totiž: $x^3 - 15x + 22 = (x - 2)(x^2 + 2x - 11)$. Tedy kořeny jsou $2, \quad -1 + 2\sqrt{3}, \quad -1 - 2\sqrt{3}$.

Cardanův vzorec dává (při vhodné volbě hodnot symbolů odmocnin):

$$u = \sqrt[3]{-11 + \sqrt{11^2 - 5^3}} = \sqrt[3]{-11 + 2\mathrm{i}},$$

$$v = \sqrt[3]{-11 - \sqrt{11^2 - 5^3}} = \sqrt[3]{-11 - 2\mathrm{i}}.$$

Ze vzorce (3.10) tedy pro kořeny naší rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}} \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) \end{aligned}$$

Kořeny nám vyšly v komplexním tvaru. Tuto komplikaci se pokusíme obejít tak, že se pokusíme třetí odmocniny komplexních čísel, které se tu vyskytují, převést nějakou algebraickou úpravou na tvar $\xi + \mathrm{i}\eta$, kde ξ a η jsou reálná čísla.

Nechť je dané komplexní číslo $a + b\mathrm{i}$, $b \neq 0$. Ptáme se, zda se $\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}$ nedá převést algebraicky, tedy bez goniometrického vyjádření na tvar $\xi + \mathrm{i}\eta$, ξ a η jsou reálné. Pokud ano, potom musí platit

$$(\xi + \mathrm{i}\eta)^3 = a + b\mathrm{i}. \tag{3.13}$$

Najděme algebraické rovnice, kterým vyhovují čísla ξ a η. Z rovnice (3.13) vyplývá:

$$(\xi - \mathrm{i}\eta)^3 = a - b\mathrm{i}. \tag{3.14}$$

V tento moment položíme $\mu = \xi + \mathrm{i}\eta$, $\quad \nu = \xi - \mathrm{i}\eta$. Z rovnic (3.13) a (3.14) dostáváme:

$$\mu^3 + \nu^3 = 2a,$$

$$(\mu\nu)^3 = a^2 + b^2.$$

Pokud $\mu\nu$ je reálné kladné číslo, je

$$\mu\nu = \sqrt[3]{a^2+b^2}, \tag{3.15}$$

kde odmocninou rozumíme reálnou hodnotu tohoto symbolu. Rovnice pro ξ najdeme takto. Platí zřejmě $\mu+\nu = 2\xi$, tedy $\mu^3+\nu^3+3\mu\nu(\mu+\nu) = 8\xi^3$. Dosazením dostáváme:

$$2a + 3\sqrt[3]{a^2+b^2} \cdot 2\xi = 8\xi^3.$$

Tedy číslo ξ vyhovuje rovnici

$$\xi^3 - \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{a^2+b^2} \cdot \xi - \frac{1}{4}a = 0. \tag{3.16}$$

Rovnice (3.16) je rovnice třetího stupně s reálnými koeficienty, jejíž diskriminant je

$$D_3 = -108\left[\left(-\frac{1}{8}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\sqrt[3]{a^2+b^2}\right)^3\right] = -108\left(-\frac{1}{64}b^2\right) > 0.$$

Tedy všechny kořeny rovnice (3.16) jsou reálná čísla. Pro jeden z kořenů rovnice (3.16) dostáváme (podle Cardanova vzorce).

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}} + \sqrt[3]{a-b\mathrm{i}}).$$

Přitom je třeba volit hodnoty symbolů volit tak, aby součin $\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}} \cdot \sqrt[3]{a-b\mathrm{i}}$ se rovnal číslu $\sqrt[3]{a^2+b^2} > 0$. Další dva kořeny dostáváme známým způsobem

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{a-b\mathrm{i}}),$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon^2\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}} + \varepsilon\sqrt[3]{a-b\mathrm{i}}),$$

Náš pokus skončil neúspěšně, a to v tom smyslu, že ve vyjádření čísla ξ vystupuje odmocnina, které jsme se právě chtěli vyhnout.[3]

Poznámka 1. Dá se dokázat, že neexistuje žádný tvar agebraického řešení rovnice 3. stupně s reálnými koeficienty se třemi reálnými kořeny, který by operoval pouze s reálnými čísly, a že tedy objevení se komplexních čísel ve vyjádření kořenů není důsledkem nevhodně zvoleného postupu.

Poznámka 2. Pokud jsou ve výraze $\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}$ čísla a, b vhodným způsobem specializované, je možné, že toto číslo se dá vyjádřit ve tvaru $\xi + \mathrm{i}\eta$, kde ξ, η jsou realné odmocniny. Tak je to například v předcházejícím příkladě, kde má rovnice tvar $x^3 - 15x + 22 = 0$ a kořeny:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}} \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}) \end{aligned}$$

Když položíme $a = -11, b = 2$, přejde rovnice (3.16) na tvar $\xi^3 - \frac{15}{4}\xi + \frac{11}{4} = 0$. Zkusmo zjistíme že rovnice má kořeny $1, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$.

Rovnice pro η má tvar $\eta^3 - \frac{15}{4}\eta + \frac{1}{2} = 0$ a její kořeny jsou $-2, 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Odtud vyplývá, že $\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}}$ má tyto tři hodnoty :

$1 - 2i, (1-2\mathrm{i})\varepsilon = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), (1-2\mathrm{i})\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Tedy všechny tři hodnoty $\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}}$ se dají vyjádřit pomocí reálných odmocnin z racionálních čísel ve tvaru $\xi + \mathrm{i}\eta$.

Je však možné najít příklady, ve kterých není takovéto vyjádření možné. Například $\sqrt[3]{5+10\mathrm{i}}$ se nedá vyjádřit ve tvaru $\xi + \mathrm{i}\eta$, kde ξ, η jsou reálné odmocniny z racionálních čísel. Proto výraz $\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}$ se nedá vyjádřit pomocí nějakého vzorce, který by byl analogický ke vzorci ve větě (3). To je pravý význam tvrzení vysloveného v předchozí poznámce.

[3] Analogicky možno dokázat, že číslo η vyhovuje kubické rovnici $\eta^3 - \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{a^2+b^2} \cdot \eta - \frac{1}{4}a = 0$, která má opět samé reálné koeficienty. Jeden její kořen je např. $\eta = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{-b+\mathrm{i}a} + \sqrt[3]{-b-\mathrm{i}a})$, kde hodnoty symbolů jsou voleny tak, aby součin $\sqrt[3]{-b+\mathrm{i}a} \cdot \sqrt[3]{-b-\mathrm{i}a}$ se rovnal číslu $\sqrt[3]{a^2+b^2} > 0$. Podobně ostatní kořeny.

3.3. Goniometrické řešení rovnice třetího stupně pro případ $D_3 > 0$

Viděli jsme, že Cardanův vzorec nás zklamal právě tam, kde jsme to nejméně čekali, u rovnice se třemi reálnými kořeny. Naštěstí si umíme v tomto případě lehce pomoci goniometrickým vyjádřením komplexních čísel.

Poznamenejme nejprve: Pokud $D_3 = -4p^3 - 27q^2 > 0$, potom je nevyhnutelně $p < 0$. Vyjádříme číslo[4]

$$-\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{-\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$$

ve tvaru $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde ($r > 0 \quad \text{a} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$). Z rovnice

$$-\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{108}D_3} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

vyplývá:

$$r = \left|-\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{108}D_3}\right| = \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2r} = \frac{-q}{2\sqrt{\left(-\frac{1}{3}p\right)^3}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{1}{108}D_3}.$$

Poslední vztah ukazuje, že je nevyhnutelně $0 < \varphi < \pi$; stačí tedy vypočítat φ z prvního vztahu s podmínkou $0 < \varphi < \pi$.

V Cardanově vzorci

$$x = u + v \tag{3.17}$$

jsou čísla u, v vhodně volené hodnoty symbolů

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}, \quad \text{resp.} \quad \sqrt[3]{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}.$$

Z věty (4) víme že všechny hodnoty těchto symbolů jsou

$$\sqrt{-\frac{1}{3}p}\left[\cos\frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)\right] \qquad (k = 0, 1, 2),$$

resp.

$$\sqrt{-\frac{1}{3}p}\left[\cos\frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) - \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)\right] \qquad (k = 0, 1, 2),$$

[4] Všechny druhé odmocniny z kladných čísel bereme kladné.

Aby byla splněna podmínka $uv = -\frac{1}{3}p$, stačí vzít zřejmě v obou sčítancích ve vztahu (3.17) stejné k. Potom se imaginární části ruší a máme

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}p} \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi, \\ x_2 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}p} \cdot \cos\frac{1}{3}(\varphi + 2\pi), \\ x_3 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}p} \cdot \cos\frac{1}{3}(\varphi + 4\pi). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Tím jsme dokázali:

Věta 8. *Nechť $x^3 + px + q = 0, \quad p \neq 0$, je rovnice s reálnými koeficienty, pro kterou je $D_3 = -4p^3 - 27q^2 > 0$. Určeme úhel φ vyhovující rovnici*

$$cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{(-\frac{1}{3}p)^3}},$$

pro který platí $0 < \varphi < \pi$. Potom jsou kořeny naší rovnice dané čísly (3.18).

■ **Příklad 3.3.1.** Řešme opětovně rovnici $x^3 - 15x + 22 = 0$. Úhel φ určíme z rovnice

$$cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{(-\frac{1}{3}p)^3}} = -\frac{22}{2\sqrt{5^3}} = -\frac{11}{25}\sqrt{5}.$$

Úhel φ nám vyšel $\varphi \doteq 169°41'30''$.

Kořeny nám následně vyšly

$$\begin{aligned} x_1 &\doteq 2\sqrt{5}\cos 56°33'50'' = 2,4641\ldots, \\ x_2 &\doteq 2\sqrt{5}\cos 176°33'50'' = -4,4641\ldots, \\ x_3 &\doteq 2\sqrt{5}\cos 296°33'50'' = 1,9999\ldots \end{aligned}$$

Přesná hodnota kořene x_3 je, jak jsme dříve spočetli číslo 2.

4. Řešené příklady

4.1. Algebraické řešení

■ **Příklad 4.1.1.** Řešíme rovnici tvaru

$$x^3 - 9x - 28 = 0.$$

Nejprve vypočteme hodnotu diskriminantu

$$D_3 = -27q^2 - 4p^3 = -27 \cdot (-28)^2 - 4 \cdot (-9)^3 = -21168 + 2916 = -18252.$$

Diskriminant je záporné číslo, tudíž má rovnice jeden reálný kořen a jeden pár komplexně sdružených kořenů. Proto graf funkce dané příslušnou kubickou rovnicí protíná x-ovou osu v jednom bodě, jak je vidět na obrázku 4.1.

Tato rovnice má požadovaný tvar pro použití Cardanových vzorců, proto hned vypočteme hodnoty symbolů u a v.

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\cdot(-28) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot(-28)\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot(-9)\right)^3}} = \sqrt[3]{14 + \sqrt{(-14)^2 + (-3)^3}} = \\
&= \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} = \sqrt[3]{27} = 3, \\
v &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\cdot(-28) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot(-28)\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot(-9)\right)^3}} = \sqrt[3]{14 - 13} = \sqrt[3]{1} = 1.
\end{aligned}$$

Výsledné hodnoty kořenů jsou následující:

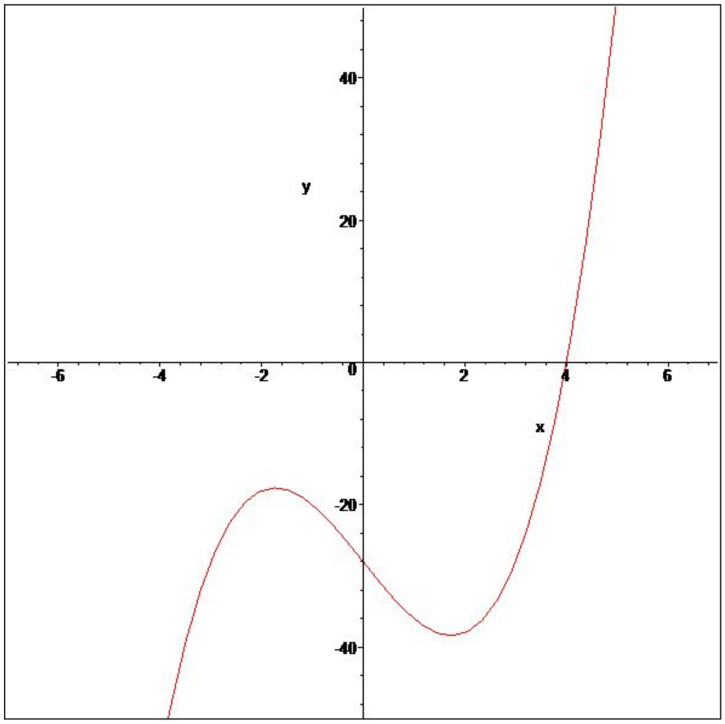
$$\begin{aligned}
x_1 &= u + v = 3 + 1 = 4, \\
x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}) \cdot 3 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\right) = \\
&= -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \\
x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})^2 \cdot 3 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\right) \cdot 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} = \\
&= \frac{6}{4} - \frac{2}{4} - \mathrm{i}\sqrt{3} = -2 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

■ **Příklad 4.1.2.** Řešíme rovnici ve tvaru

$$x^3 + 30x + 30 = 0.$$

Stejně jako v předchozím příkladě spočteme nejprve diskriminant této rovnice

$$D_3 = -108\left[\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3\right] = -108[15^2 + 10^3] - 108 \cdot 1225 = -132300.$$



Obrázek 4.1: Graf funkce $x^3 - 9x - 28$

Protože i tento diskriminant je záporné číslo, pak jedním kořenem je reálné číslo a další dva jsou komplexně sdružené, graf funkce dané příslušnou kubickou rovnicí protíná x-ovou osu v jednom bodě, což potvrzuje i obrázek 4.2.

Opětovně můžeme rovnou dosadit do vzorců pro u a v

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-15 + \sqrt{15^2 + 10^3}} = \sqrt[3]{-15 + 35} = \sqrt[3]{20}, \\ v &= \sqrt[3]{-15 - \sqrt{15^2 + 10^3}} = \sqrt[3]{-15 - 35} = -\sqrt[3]{50} \end{aligned}$$

a spočíst tak kořeny rovnice.

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v = \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}, \\ x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \varepsilon\sqrt[3]{20} - \varepsilon^2\sqrt[3]{50}, \\ x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \varepsilon^2\sqrt[3]{20} - \varepsilon\sqrt[3]{50}, \end{aligned}$$

kde $\varepsilon = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.

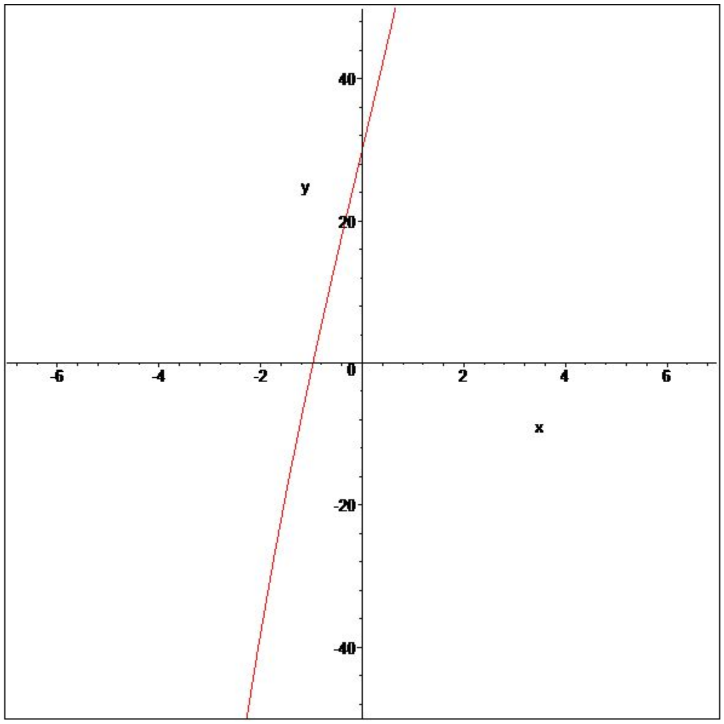
■ **Příklad 4.1.3.** Řešíme rovnici tvaru

$$x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0.$$

Zavedeme substituci $x = z + 3$, abychom z rovnice odstranili člen s x^2.

Dostáváme rovnici $(z+3)^3 - 9(z+3)^2 - 9(z+3) - 15 = 0$, ze které úpravou dostaneme redukovanou rovnici ve tvaru

$$z^3 - 36z - 96 = 0.$$



Obrázek 4.2: Graf funkce $x^3 + 30x + 30$

Pro tuto rovnici nejprve vypočteme hodnotu diskriminantu

$$D_3 = -108\left[\left(-\frac{96}{2}\right)^2 + \left(-\frac{36}{3}\right)^3\right] = -108(48^2 - 12^3) = -108 \cdot 576 = -62208.$$

Diskriminant je záporný, proto je opětovně jeden kořen naší rovnice reálný a zbývající dva jsou komplexně sdružené. Proto graf funkce dané příslušnou kubickou rovnicí opětovně protíná x-ovou osu v jednom bodě, jak je vidět na obrázku 4.3.

Následně můžeme vypočítat hodnoty u a v

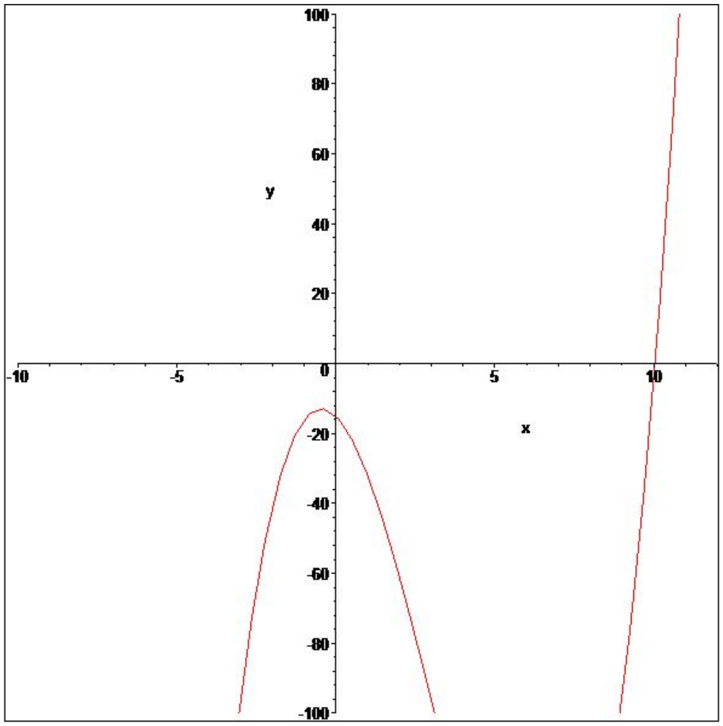
$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{48 + \sqrt{48^2 - 12^3}} = \sqrt[3]{48+24} = \sqrt[3]{72}, \\ v &= \sqrt[3]{48 - \sqrt{48^2 - 12^3}} = \sqrt[3]{48-24} = \sqrt[3]{24}. \end{aligned}$$

Pro hodnoty kořenů redukované rovnice nám vyšla následující čísla

$$\begin{aligned} z_1 &= u + v = \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{72}, \\ z_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \varepsilon\sqrt[3]{72} + \varepsilon^2\sqrt[3]{24}, \\ z_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \varepsilon^2\sqrt[3]{72} + \varepsilon\sqrt[3]{24}. \end{aligned}$$

Po provedení zpětné substituce získáme kořeny původní rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + 3 = 3 + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{72}, \\ x_2 &= z_2 + 3 = 3 + \varepsilon\sqrt[3]{72} + \varepsilon^2\sqrt[3]{24}, \\ x_3 &= z_3 + 3 = 3 + \varepsilon^2\sqrt[3]{72} + \varepsilon\sqrt[3]{24}. \end{aligned}$$



Obrázek 4.3: Graf funkce $x^3 - 9x^2 - 9x - 15$

■ **Příklad 4.1.4.** Řesíme rovnici ve tvaru

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Spočteme hodnotu diskriminantu této kubické rovnice

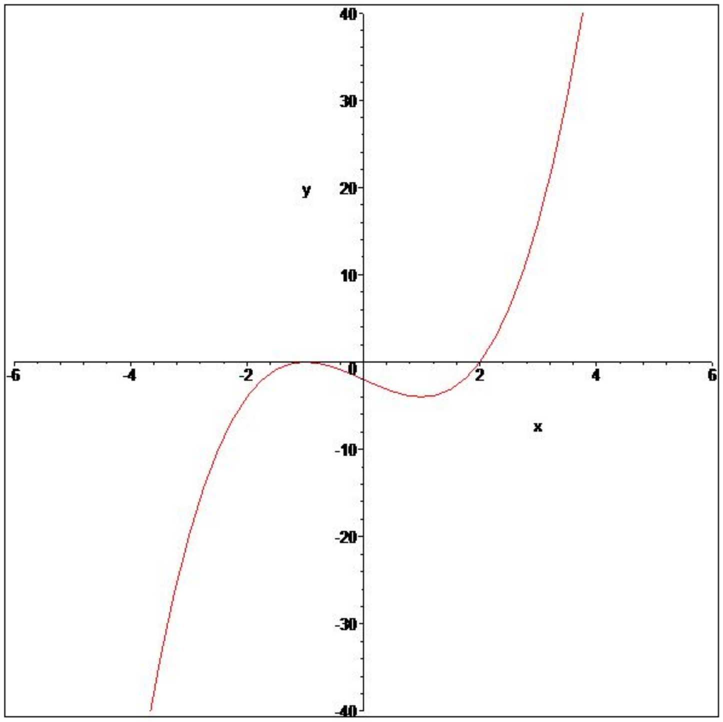
$$D_3 = -108\left[\left(\frac{1}{2}\cdot(-2)\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot(-3)\right)^3\right] = -108(1-1) = 0.$$

Tentokrát diskriminant vyšel roven nule, proto má tato rovnice vícenásobný kořen, tento případ je vyobrazen na obrázku 4.4. Rovnice je v požadovaném tvaru, proto můžeme okamžitě dosadit do vzorců pro symboly u a v

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{1+\sqrt{(-1)^2+(-1)^3}} = \sqrt[3]{1} = 1, \\ v &= \sqrt[3]{1-\sqrt{(-1)^2+(-1)^3}} = \sqrt[3]{1} = 1. \end{aligned}$$

Výsledné hodnoty kořenů vyšla čísla

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v = 1 + 1 = 2, \\ x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = -1, \\ x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -1. \end{aligned}$$



Obrázek 4.4: Graf funkce $x^3 - 3x - 2$

4.2. Goniometrické řešení

■ **Příklad 4.2.1.** Řešíme rovnici ve tvaru

$$x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0.$$

Zavedením substituce $x = z + 1$ převedeme rovnici na tvar

$$z^3 - 4z - 1 = 0.$$

Při převodu jsme využili výše zmíněných vzorců pro koeficienty p, q.

$$\begin{aligned} p &= -1 - \frac{1}{3} \cdot 9 = -1 - 3 = -4, \\ q &= 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{27} \cdot (-27) = 2 - 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Nejprve spočteme úhel φ podle následujícího vzorce

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{(-\frac{1}{3}p)^3}} = -\frac{-1}{2\sqrt{(\frac{4}{3})^3}} = \frac{\sqrt{27}}{16}.$$

Tedy výsledná hodnota vychází $\varphi \doteq 71°02'56''$.

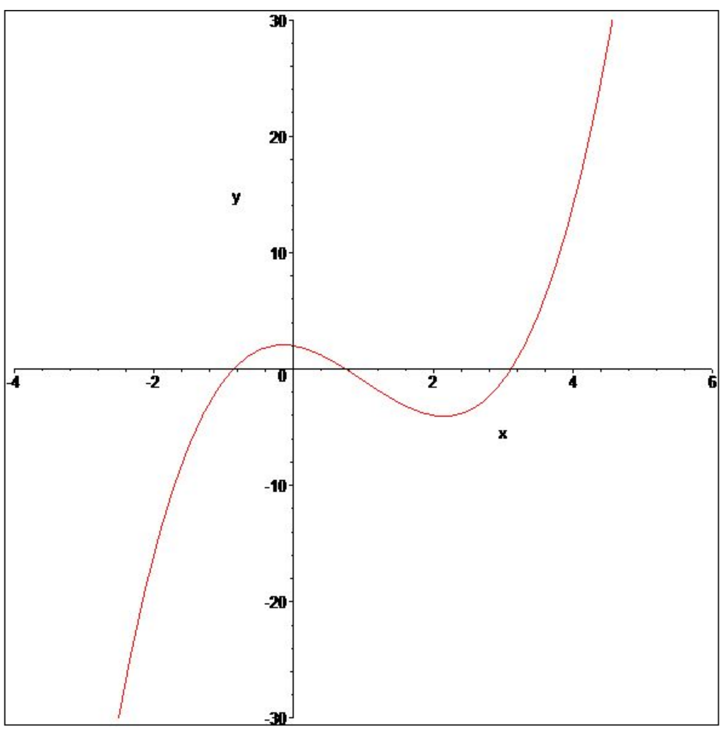
Následně vypočteme kořeny

$$
\begin{aligned}
z_1 &\doteq 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cos\left(\frac{71°02'56''}{3}\right) = 2,1149\ldots, \\
z_2 &\doteq 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cos\left(\frac{71°02'56'' + 360°}{3}\right) = -1,8607\ldots, \\
z_3 &\doteq 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cos\left(\frac{71°02'56'' + 720°}{3}\right) = -0,2542\ldots
\end{aligned}
$$

Zpětnou substitucí dostaneme všechny tři kořeny původní rovnice

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1 + 1 \doteq 2,1149 + 1 = 3,1149\ldots, \\
x_2 &= z_2 + 1 \doteq -1,8607 + 1 = -0,8607\ldots, \\
x_3 &= z_3 + 1 \doteq -0,2542 + 1 = 0,7458\ldots
\end{aligned}
$$

Příslušný graf funkce dané kubickou rovnicí protíná x-ovou osu ve třech bodech, z čehož vyplývá, že diskriminant je kladný. Tento graf je zobrazen na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Graf funkce $x^3 - 3x^2 - x + 2$

4.3. Výpočty pomocí softwaru Maple a Matlab

■ **Příklad 4.3.1.** Zadanou kubickou rovnici

$$2x^3 - 9x^2 + 18x - 7 = 0$$

řešíme pomocí softwaru

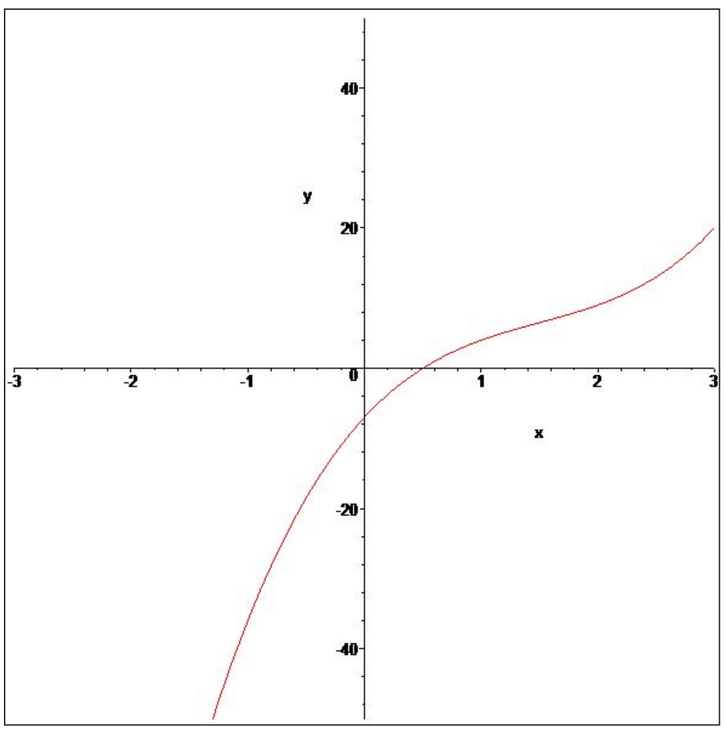
- Maple

```
solve(2*x^3-9*x^2+18*x-7);
```

$$\frac{1}{2}, 2 + \sqrt{3}I, 2 - \sqrt{3}I$$

```
plot(2*x^3-9*x^2+18*x-7,x=-3..3,y=-100..100);
```

Vykreslený graf je uveden na obrázku 4.6.

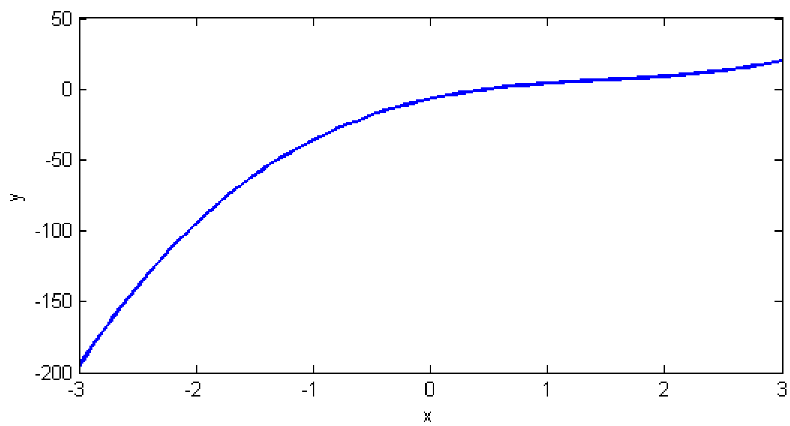


Obrázek 4.6: Graf funkce $2x^3 - 9x^2 + 18x - 7$

- Matlab

```
>> solve('2*x^3-9*x^2+18*x-7=0')

ans =

   1/2
   2+i*3^(1/2)
   2-i*3^(1/2)

>>x=linspace(-30,30);

>>y=linspace(-100,100);

>>y=2*x.^3-9*x.^2+18*x-7;

>>plot(x,y)
```

Vykreslený graf je uveden na obrázku 4.7.



Obrázek 4.7: Graf funkce $2x^3 - 9x^2 + 18x - 7$

5. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit stručný text a seznámit čtenáře bez speciálních znalostí matematiky o způsobech řešení kubických rovnic, s jejich výpočetním postupem a v neposlední řadě i s řešením pomocí matematického softwaru Maple a Matlab.

Úvodem autor popsal historický vývoj a pár slovy se zmínil o autorech nejzásadnějších poznatků, především o Gerolamu Cardanovi.

Právě Cardanovy vzorce a jejich odvození je uvedeno v následující kapitole, která je zaměřena hlavně na teoretický aparát potřebný pro praktické výpočty. Tato část textu obsahuje diskuzi řešení, která je závislá na výpočtu diskriminantu, podobně jako u kvadratických rovnic, a také na goniometrické řešení.

V následující kapitole je na zajímavých příkladech naznačen jak algebraický, tak i goniometrický výpočet kořenů kubické rovnice a pro názornost je přiložen odpovídající graf vykreslený v softwaru Maple. Tato kapitola obsahuje také způsob výpočtu pomocí softwaru Maple a Matlab.

Na vyřešených příkladech je viditelná nepraktičnost Cardanových vzorců, které nám pro rovnici se třemi reálnými kořeny určují dva z těchto kořenů ve složitém komplexním tvaru, který je ve valné většině případů dále neupravitelný. Proto se v dnešní době výpočty kubických rovnic téměř neprovádějí pomocí Cardanových vzorců, ale za pomocí patřičných numerických metod.

Literatura

[1] SCHWARZ, Štefan. *Základy náuky o riešení rovníc.* 2. Vydanie. Bratisla : Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1968. 456 s. ISBN 71-017-68.

[2] *Gerolamo Cardano* [online]. 2001 , 2 May 2008 [cit. 2007-12-20]. Dostupný z WWW: < http://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano >.

[3] *Scipione del Ferro* [online]. 2001 , 4 May 2008 [cit. 2007-12-26]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Scipione_del_Ferro>.

[4] *Niccolo Fontana Tartaglia* [online]. 2001 , 1 February 2008 [cit. 2007-12-25]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia>.

[5] *Niccolo Fontana Tartaglia* [online]. 2005 , 13 February 2006 [cit. 2007-12-26]. Dostupný z WWW: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Tartaglia.html>.

[6] MathMedics, LLC.. *The "Cubic Formula"* [online]. 1999 , June 2006 [cit. 2008-01-14]. Dostupný z WWW: <http://www.sosmath.com/algebra/factor/fac11/fac11.html>.

[7] *Quadratic, cubic and quartic equations* [online]. 1996 , February 1996 [cit. 2007-12-20]. Dostupný z WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html>.

[8] *Omar Khayyám* [online]. 2001 , 4 May 2008 [cit. 2007-12-21]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Omar_Khayy%C3%A1m>.

[9] *Scipione del Ferro* [online]. 1996 , July 1999 [cit. 2007-12-22]. Dostupný z WWW: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ferro.html>.

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

a_1, a_2, a_3	koeficienty kubické rovnice
p, q	koeficenty redukované kubické rovnice
D_3	diskriminant kubické rovnice