

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

PLATNOST HYDROSTATICKÉHO A HYDRODYNAMICKÉHO PARADOXONU

Relevance of the hydrostatic and hydrodynamic paradox

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JIŘÍ VACULA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. SIMONA FIALOVÁ, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student(ka): Jiří Vacula

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem c.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Platnost hydrostatického a hydrodynamického paradoxonu

v anglickém jazyce:

Relevance of the hydrostatic and hydrodynamic paradox

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Provést literární rešerši dané problematiky.

Stanovit analytický vztah vyjadřující vliv hustoty kapaliny.

Cíle bakalářské práce:

Provést analýzu problému v závislosti na změně hustoty kapaliny

Seznam odborné literatury:
internet

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Simona Fialová, Ph.D.
Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku
2009/2010.
V Brně, dne 21. 10. 2009

L.S.

doc. Ing. Zdenek Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá objasněním existence hydrostatického a hydrodynamického paradoxonu. Především hydrostatické paradoxon obecně nebývá náležitě zdůvodněno, což implikuje další nejasnosti. Cílem práce je proto ukázat pravé příčiny těchto jevů a dále ukázat velikost vlivu stlačitelnosti kapaliny.

Klíčová slova

Hydrostatický paradox, hydrodynamický paradox, hydrostatický tlak, kapalina, voda, proudění

Abstract

This bachelor's thesis is concerned with the explanation of the hydrostatic and hydrodynamic paradox existence. Above all hydrostatic paradox is not in general properly explained which causes additional puzzle. Therefore the aim of this thesis is to find real reasons of these effects and in addition to check up possible consequences of liquid compressibility.

Keywords

Hydrostatic paradox, hydrodynamic paradox, hydrostatic pressure, liquid, water, flow

Bibliografická citace mé práce:

Vacula, J. *Platnost hydrostatického a hydrodynamického paradoxonu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 33 stran. Vedoucí bakalářské práce Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Platnost hydrostatického a hydrodynamického paradoxonu* vypracoval samostatně pod vedením a dle pokynů mé vedoucí Ing. Simony Fialové, Ph.D., veškerá použitá literatura je uvedena v seznamu.

V Brně dne 16. 5. 2010

.....

Jiří Vacula

Poděkování

Děkuji své vedoucí Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za umožnění zpracovat toto téma jako bakalářskou práci a za důležité rady a připomínky.

Jiří Vacula

Obsah

Úvod	8
1. Hydrostatický tlak.....	9
1.1 Skalární povaha tlaku	9
1.1.1 Důkaz na základě silové rovnováhy.....	9
1.1.2 Důsledek přítomnosti sil objemových	11
1.1.3 Důkaz na základě tenzorů.....	11
1.2 Odvození velikosti hydrostatického tlaku.....	12
2. Hydrostatické paradoxon	14
2.1 Podstata hydrostatického paradoxonu	14
2.2 Klasická interpretace.....	14
2.3 Objasnění na základě definice tlaku	16
3. Hydrostatický tlak reálné kapaliny	17
3.1 Diferenciální přístup	17
3.2 Nediferenciální přístup	20
4. Hydrodynamické paradoxon ideální kapaliny	22
4.1 Rovnice kontinuity	22
4.2 Rovnice Bernoulliho	23
4.3 Vliv rychlosti zvuku.....	25
5. Hydrodynamické paradoxon reálné kapaliny	30
6. Závěr.....	32
Seznam použitých symbolů a cizích slov	34

Úvod

Hydrostatické paradoxon je označení pro skutečnost, že hydrostatická tlaková síla působící na vodorovná stejně velká dna nádob naplněných do téže výšky stejnou kapalinou je stejná. Nezávisí tedy na objemu kapaliny, ale na výšce jejího sloupce. Bakalářská práce se zabývá objasněním několika přístupů určení hydrostatického tlaku kapaliny, což je nezbytný krok pro nalezení velikosti hydrostatické tlakové síly. V práci je rovněž ukázán vliv stlačitelnosti kapaliny. Pokud je kapalina vystavena tlaku, byť tlaku v kapalině vyvolaném její vlastní tíhou, dojde ke zvýšení její hustoty a tím pádem ke zvýšení jejího tlaku. Jsou zde ukázány tři možné vzorce pro výpočet tlaku reálné kapaliny a jejich porovnání.

Dále se práce zabývá hydrodynamickým paradoxonem, které, jak dále ukážeme, je důsledek rovnice kontinuity a rovnice Bernoulliho. Je zde také prošetřena závislost tlaku na rychlosti zvuku. Ačkoliv tato záležitost spadá spíše do oblasti proudění plynů v tryskách, je důležité být si vědomi toho, že tyto závislosti platí obecně pro tekutiny, tedy i pro kapalnou fázi.

Je zde také naznačeno, že není nutné ve výpočtech proudění uvažovat stlačitelnost kapalin, protože změna jejich hustoty je příliš malá na to, aby výrazně měnila tlak v potrubí.

1. Hydrostatický tlak

1.1 Skalární povaha tlaku

Při určování hydrostatického tlaku v kapalině vyjdeme z teorie kontinua. Jak se dále ukáže, existence hydrostatického paradoxonu je důsledek skalární povahy tlaku. Proto se pojdme nejprve zabývat tím, proč je tlak v kapalině veličina skalární.

Tlak je zaveden jako elementární síla $d\mathbf{F}$ působící na elementární plochu $d\mathbf{S}$, tj. $p = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{S}}$.

Jak síla, tak i plocha jsou vektory, proto musí být tlak nutně tenzor a je proto dán tenzorem napětí. Zapsáno maticově

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}.$$

Je-li kapalina v klidu, popřípadě v klidu relativním, neprojevují se síly viskózní, a proto je smyková napjatost v kapalině nulová, tj. $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Má tedy smysl se zabývat pouze napětími normálovými. Uvážíme-li navíc, že tato normálová napětí jsou v kapalině napětí tlaková, můžeme položit $\sigma_x = p_x, \sigma_y = p_y, \sigma_z = p_z$.

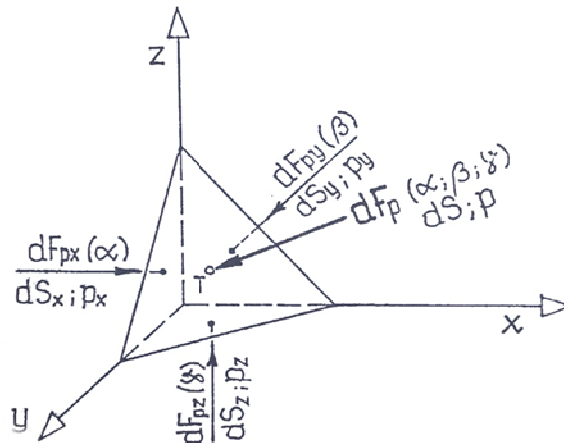
Tenzor napětí v kapalině má pak tvar

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Důkaz na základě silové rovnováhy [1]

Element kapaliny v klidu je vystaven napětí, které má pouze normálové složky. Ukažme nyní, zda je tlak ve všech směrech stejný či nikoliv ($p_x = p_y = p_z = 0$ nebo $p_x \neq p_y \neq p_z \neq 0$). Budeme demonstrovat následující způsob odvození toho, že platí $p_x = p_y = p_z = 0$ (tlak je skalár - Pascalův zákon) a poté toto odvození trochu rozebereme, jedno takové je ve skriptech Hydromechanika.

Autor zde uvádí: Na obecný elementární čtyřstěn, který znázorňuje element kapaliny, působí síla $d\mathbf{F}_p$, objem tohoto čtyřstěnu spočteme jako $dV = kdx dy dz$, kde $k=1/6$.



Obr. 1 Elementární čtyřstěn kapaliny pro odvození Pascalova zákona

V hydrostatické rovnováze působí na elementární čtyřstěn obecně:

-síly objemové

$$dF_G = gdm = g\rho dV = kg\rho dx dy dz, \quad (1)$$

-síly plošné (psáno např. pro osu „x“)

$$dF_{px} = p_x dS_x = kp_x dy dz. \quad (2)$$

Z rovnice (1) a rovnice (2) je patrné, že tíhovou silou ve čtyřstěnu můžeme zanedbat, protože je o řád nižší než síla tlaková. Při odvozování zatím předpokládáme, že tlaky na stěnách ($p; p_x, p_y, p_z$) jsou různé. Na šikmou stěnu působí tlak ve směru normály na plochu „ dS “ a tlaková síla „ dF_p “, která svírá s osami „x; y; z“ úhly „ $\alpha; \beta; \gamma$ “.

Protože je kapalina v klidu, musí být splněny podmínky hydrostatické rovnováhy sil a momentů:

$$\sum F_{px} = 0, \sum F_{py} = 0, \sum F_{pz} = 0, \sum M = 0. \quad (3)$$

Tlakové síly působí v těžišti odpovídajících ploch, přičemž těžiště „ T “ šikmé stěny je v průmětech i těžištěm bočních stěn „ $T_x; T_y; T_z$ “, takže momenty všech sil jsou nulové $\sum M = 0$. Stačí tedy uvažovat zbývající podmínky rovnováhy sil (např. v ose „x“):

$$dF_{px} - dF \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

a ostatní síly jsou kolmé na osu „x“, proto nemají složky do této osy. Dále z rovnice (2) plyne

$$p_x dS_{px} - pdS \cos \alpha = 0, \quad (5)$$

přičemž plocha dS_x je průmětem plochy dS a tedy platí

$$dS_x = dS \cos \alpha. \quad (6)$$

Dosazením rovnice (6) do rovnice (5) obdržíme rovnost tlaků $p = p_x$. Obdobný postup platí pro osy „y; z“. Z podmínek statické rovnováhy sil plyne rovnost tlaků $p = p_x = p_y = p_z$.

1.1.2 Důsledek přítomnosti sil objemových

Tímto autor dokázal, že tlak je ve všech směrech stejný - je skalár, neboť není dán směrem působení síly na elementární plošku.

Vraťme se k odstavci pod rovnicí (2), kde autor rozhodne, že zanedbá tíhové síly $dF_G = k\rho g dx dy dz$, protože vůči silám plošným jsou o řád menší. To je způsobeno dalším infinitezimálním délkovým členem, v tomto případě dx . Zamysleme se nad možnými důsledky tohoto zjednodušení. Znamená to, že i kdyby se element kontinua nacházel v poli extrémně velkých objemových sil, stále by byly tyto objemové síly zanedbatelné oproti silám plošným pouze proto, že z matematického hlediska jsou o jeden řád níže.

Tímto se dostáváme do fyzikálního sporu s realitou. Uvědomme si, že zápis dx znamená infinitezimálně malou délku ve směru x , tj. $x \rightarrow 0$. A rovněž si připomeňme dvě základní aproximace teorie kontinua:

- 1) Zanedbání částicové povahy hmoty
- 2) Této hmotě jsou přiřazeny imaginární body, pro které sepisujeme rovnice (obdoba hmotných bodů)

Ve skutečnosti zde nejsou nekonečně malé čtyřštěny, pro které lze psát rovnice. Velikost takovýchto čtyřštěnů je omezena totiž nejen velikostí atomů či molekul, ale i Planckovou délkou $\ell_p = 1,616 \cdot 10^{-34} m$. To je nejmenší teoreticky pozorovatelná délka, řádově mnohem menší než velikost atomů. Nyní je zřejmé, že zanedbání sil hmotnostních v případě tekutiny vystavené enormní hmotnostní síle pak není korektní. V takovémto případě by nebylo možné dokázat skalární povahu tlaku.

1.1.3 Důkaz na základě tenzorů [2, 4]

Ukažme ještě druhou možnou formu důkazu skalární povahy tlaku. Vychází z tenzoru napětí. Nenulové složky p_x , p_y a p_z jsou normálová napětí v elementu kapaliny. Skutečnost, že tečná napětí τ_{xy} , τ_{zy} a τ_{zx} jsou pro kapalinu v klidu nulová, dále implikuje, že tato tečná napětí jsou nulová v libovolném souřadném systému, tedy i v hlavním. Pak pro složky tlaku p platí $p_x = p_1$, $p_y = p_2$, $p_z = p_3$ a můžeme tenzor napětí v kapalině psát

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Tato napětí jsou tedy napětí hlavní. Protože jsou tečná napětí nulová v libovolně orientovaném ortogonálním hlavním souřadném systému, musí se prvky na hlavní diagonále rovnat (tato úvaha plyne z tenzorového počtu) a tenzorová plocha je proto kulová. Tímto dospíváme k závěru, že tlak je ve všech směrech stejný - je skalár (Pascalův zákon) a platí, že $p = p_1 = p_2 = p_3$. Tenzor napětí má konečný tvar

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Důkaz se obešel bez rovnováhy elementu kontinua, pouze využil vhodné úvahy o tom, že pokud jsou tečná napětí nulová pro libovolný souřadný systém, pak se musí prvky na hlavní diagonále rovnat. Protože tento způsob ale již od začátku neuvažuje síly objemové a bere v úvahu pouze síly plošné, není rovněž zcela rigorózní.

Ukázali jsme, že zanedbáním sil objemových dospějeme ke skalární povaze tlaku. A proto, jak jsme nastínili výše, tlak na nejobecnější úrovni skalár není. Jako skalár se definuje proto, že i za extrémních podmínek zůstanou objemové síly o dostatečný počet řádů menší než hodnoty sil plošných, což není měřitelné. Berme proto výše uvedené zamyšlení spíše jako ilustraci toho, že definice tlaku jako skalární veličiny je provedena na základě určitého zjednodušení, které je však ve všech současných výpočtech naprosto postačující.

1.2 Odvození velikosti hydrostatického tlaku [2, 4]

Vyjdeme ze silové rovnováhy sil plošných F_p a sil hmotnostních (objemových) F_m :

Síly hmotnostní: $F_m = \iiint_V \mathbf{a} \rho dV$, kde \mathbf{a} je vektor zrychlení, ρ hustota kapaliny a V je objem kontinua, na který tato hmotnostní síla působí.

Síly plošné: $F_p = -\oiint_S p \mathbf{n} dS$, kde \mathbf{n} je vektor vnější normály plochy, orientovaný proti působící síle F_p , p je působící tlak a S je plocha, na kterou tato plošná síla působí.

Protože je kapalina v klidu, musí platit silová rovnováha a výslednice sil působící na element kontinua je proto nulová

$$\iiint_V \mathbf{a} \rho dV - \oiint_S p \mathbf{n} dS = 0.$$

Užitím Gauss-Ostrogradského věty určíme $\oiint_S p \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla p dV$. Tímto jsme převedli sílu plošnou na ekvivalentní sílu objemovou. Můžeme psát

$$\iiint_V \mathbf{a} \rho dV - \iiint_V \nabla p dV = 0,$$

což se rovná

$$\iiint_V (\mathbf{a} \rho - \nabla p) dV = 0.$$

Výše uvedená rovnost je splněna právě tehdy, když je integrand roven nule, z čehož po vydělení ρ dále plyne

$$\mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (7)$$

Tato rovnost se označuje jako Eulerova první rovnice hydrostatická. Uvážíme-li nyní kapalinu vystavenou zrychlení pouze tíhovému, psáno $\mathbf{a} = (g;0;0)$, přejde rovnice do tvaru

$$g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

a integrací tohoto vztahu dostaneme

$$p = \rho gx + C.$$

Konstantu C určíme tak, že budeme uvažovat tlak $p = p_0$ na hladině kapaliny pro $x = 0$.

Odtud plyne $C = p_0$. Pak je tlak p

$$p = \rho gx + p_0.$$

Pro další úvahy budeme brát tlak na hladině p_0 jako nulový, budeme se zabývat pouze hydrostatickým tlakem. Označíme-li navíc hloubku pod hladinou $x = h$, platí

$$p = \rho gh. \quad (9)$$

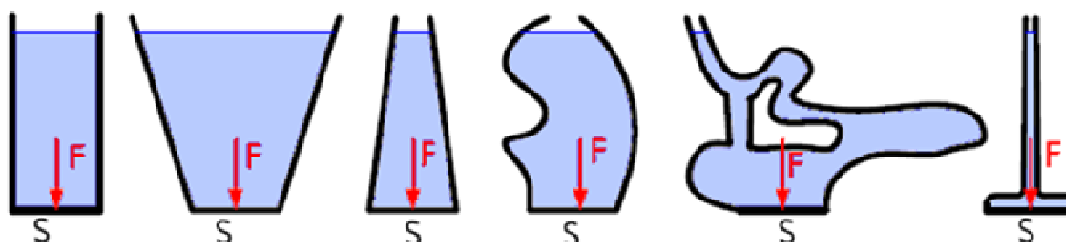
2. Hydrostatické paradoxon

2.1 Podstata hydrostatického paradoxonu

Z rovnice (9) vyplývá, že velikost hydrostatického tlaku v kapalině v tíhovém poli Země je dána pouze hustotou kapaliny, hloubkou pod hladinou a tíhovým zrychlením. Hydrostatickou tlakovou sílu působící na horizontální rovné dno určíme z definice tlaku $p = \frac{dF}{dS}$ jednoduše jako $F = pS$. Do této rovnosti dosadíme rovnici (9)

$$F = \rho ghS. \quad (10)$$

Tímto se dostáváme k samotnému hydrostatickému paradoxonu. Velikost hydrostatické tlakové síly působící na horizontální rovné dno nezávisí na množství kapaliny, ale pouze na výšce jejího sloupce; nezávisí na tvaru nádoby. Hydrostatické paradoxon se uvádí nejen z hlediska hydrostatické tlakové síly, ale i z hlediska tlaku - jako jev, kdy velikost hydrostatického tlaku působícího na vodorovná dna nádob naplněných stejnou kapalinou do téže výšky je stejná (to však platí i pro nádoby s různými dny).

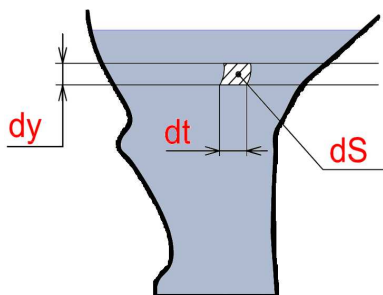


Obr. 2 Hydrostatický paradox - síla působící na dno nezávisí na objemu kapaliny

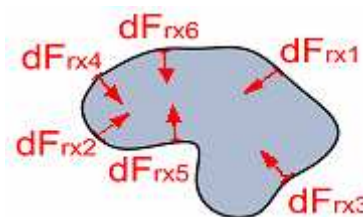
2.2 Klasická interpretace

Hydrostatické paradoxon bývá (především na středních školách) vysvětlováno tak, že, např. pro nádobu druhou zleva na obr. 2 platí, že ta část kapaliny, která se nenachází svise nad dnem nádoby, je nadnášena reakcemi stěn této nádoby. Takže se síly na kapalinu ruší a tato část kapaliny jakoby v nádobě nebyla. Ukažme platnost tohoto vysvětlení.

Mějme nádobu obecného tvaru s vodorovným dnem dle obr. 3 a dokažme, že silová výslednice reakcí stěn působících na kapalinu bude nulová.

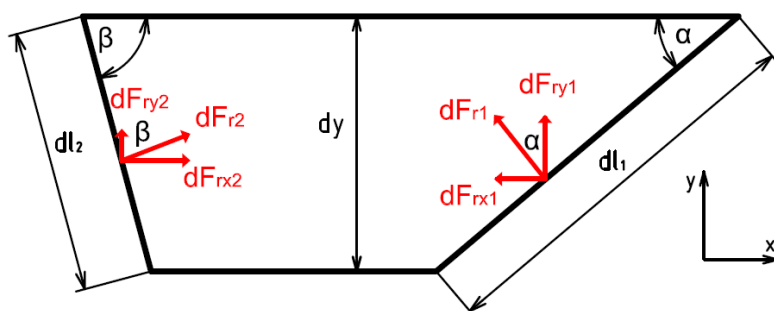


Obr. 3 Kapaliny v obecné nádobě



Obr. 4 Vodorovný řez nádobou

Každou křivou plochu nádoby si můžeme představit jako plochu složenou z mnoha elementárních rovných plošek. V určité výšce nádoby vymežíme dostatečně malý myšlený vodorovný pás, který tak určí na obvodě stěny nádoby velmi úzkou hranici. Na libovolnou elementární plošku této hranice působí hydrostatická síla kapaliny, což vyvolá silovou reakci této plošky. Vektor reakce stěny má směr její normály. Je zřejmé, že svislá (y-ová) složka reakce stěny je stejná jako svislá složka síly elementu kapaliny, který na plošku působí. To znamená, že výslednice ve svislém směru je nulová. Zbývá ovšem ukázat, zda bude i suma vodorovných (x-ových) složek reakce stěn od všech plošek v libovolném horizontálním řezu nulová (zda se dle obr. 4 všechny síly vyruší). Určíme proto velikosti dvou libovolných elementárních vodorovných složek reakce stěn a zapišme pro ně rovnice.



Obr. 5 Silové reakce ploch, jejichž normály leží v téže rovině (různoběžky)

Uvažme nejprve, že jsou tyto síly rovnoběžné a opačně orientované. Ze znalosti hydromechaniky a obr. 5 plyne, že je reakční síla stěny rovna

$$dF_{r1} = \rho g h_T S = \rho g \frac{dy}{2} dl_1 dt. \quad (11)$$

Tato síla má směr normály k plošce, na kterou hydrostatická síla působí. Její x-ová složka je

$$dF_{r1x} = F_{r1} \sin \alpha = \rho g \frac{dy}{2} dl_1 dt \sin \alpha. \quad (12)$$

Z obr. 5 je rovněž vidět, že $dy = dl_1 \sin \alpha$. Po dosazení do rovnice (12) platí

$$dF_{r1x} = \frac{1}{2} \rho g dl_1^2 dt \sin^2 \alpha \quad (13)$$

a analogickým postupem pro protilehlou stěnu dostaneme sílu ve směru x jako

$$dF_{r2x} = \frac{1}{2} \rho g dl_2^2 dt \sin^2 \beta. \quad (14)$$

Řekli jsme, že pokud je kapalina v klidu, musí být i x-ové složky nulové. Je zřejmé, že pak musí platit $dF_{r1x} = dF_{r2x}$. Z toho plyne

$$dl_1^2 \sin^2 \alpha = dl_2^2 \sin^2 \beta \quad (15)$$

Protože jsou obě strany rovnice kladné, můžeme je odmocnit a dostaneme

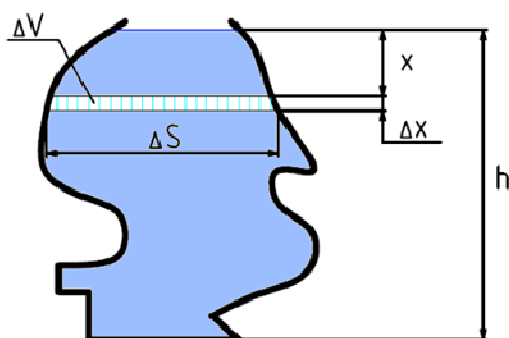
$$dl_1 \sin \alpha = dl_2 \sin \beta \quad (16)$$

Z obr. 5 je vidět, že obě strany se skutečně rovnají, neboť $dl_1 \sin \alpha = dy$ a také $dl_2 \sin \beta = dy$. Dokázali jsme tak, že je v dané hladině velikost x-ové složky reakce stěny konstantní,

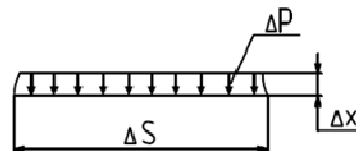
nezávisí na úhlu stěny, a proto se rovnoběžné x-ové složky vždy odečtou. Nyní si můžeme představit, že ohraničující oblast nádoby v dané hladině (viz obr. 4) můžeme „narovnat“ například do kružnice či jiných souměrných křivek (velikost reakce zůstane stejná - je konstantní). Pak lze vždy nalézt dvojici vodorovných složek reakčních sil rovnoběžných a opačně orientovaných a tím dokázat, že $dF_{r1x} = dF_{r2x}$. Tento postup lze provést pro nádobu libovolného tvaru. Je proto zavádějící, že jsou v literatuře při zdůvodňování hydrostatického paradoxu často uváděny nádoby nezakřivené a symetrické (válec a komolý kužel).

2.3 Objasnění na základě definice tlaku

Zkusme navrhnout jiný postup vysvětlení hydrostatického paradoxonu pro úroveň střední školy, tj. bez užití diferenciálního počtu. Připomeňme, že je důležité uvést nádobu obecného tvaru bez jakýchkoliv prvků symetrie.



Obr. 6 Zakótování elementárního prvku v nádobě



Obr. 7 Elementární prvek kapaliny

Mějme opět nádobu obecného tvaru naplněnou kapalinou (např. vodou) a určíme velikost tlaku v kapalině na dně nádoby. Obecně víme, že pro velikost tlaku platí

$$p = \frac{F}{S}. \quad (17)$$

A podívejme se blíže na vlastnosti tlaku pro elementární část kapaliny. Pokud vyřízneme z nádoby pomyslný dostatečně malý horizontální rovný objem kapaliny, pak elementární tlak na tento elementární horizontální objem kapaliny bude

$$\Delta p = \frac{\Delta F_G}{\Delta S}. \quad (18)$$

Užijeme druhého Newtonova pohybového zákona

$$\Delta p = \frac{\Delta(mg)}{\Delta S},$$

kde $m = \rho V$, pak a protože ρ a g jsou konstanty, platí

$$\Delta p = \rho g \frac{dV}{dS}$$

Z obr. 7 je vidět, že čím více je objem ΔV menší (tenčí), tím více se jeho určení blíží vyjádření $\Delta V = \Delta S \Delta x$. Pak pro elementární tlak Δp můžeme psát

$$\Delta p = \rho g \frac{\Delta S \Delta x}{\Delta x} = \rho g \Delta x. \quad (19)$$

Právě jsme dokázali, že velikost tlaku nezávisí na tvaru průřezu nádoby. Dle obr. 6 je navíc zřejmé, že v nádobě můžeme nalézt takovýchto ploch nekonečně mnoho. A uvědomíme-li si, že celkový tlak p na dně nádoby je dán součtem všech takovýchto elementárních tlaků, můžeme tlak p položit

$$p = \sum_{i=1}^n \Delta p_i, \text{ kde } \Delta p_i = \rho g \Delta x_i, \quad (20)$$

což lze vyjádřit jako

$$p = \rho g \sum_{i=1}^n \Delta x_i. \quad (21)$$

Řekli jsme, že elementárních horizontálních rovných plošek můžeme nalézt nekonečně mnoho. Je tedy zřejmé, že podle obr. 6 musí platit, že součet elementárních výšek Δx_i elementárních objemů ΔV_i je roven hloubce pod hladinou x

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = x. \quad (22)$$

Odtud dosazením rovnice (22) do vztahu (21) plyne $p = \rho g x$. Pokud tradičně označíme hloubku pod hladinou $x = h$, můžeme psát hydrostatický tlak $p = \rho g h$. A velikost síly působící na dně je pak zřejmě $F = pS = \rho g h S$.

U tohoto odvození není korektní již první krok (18). Zápis pro obecnou veličinu $Y - \Delta Y$ má odpovídat infinitezimálnímu dY . Proto jsme se dopustili chyby, neboť tlak je definován jako $p = \frac{dF}{dS} = \frac{\Delta F}{\Delta S}$, nikoliv jako $dp = \frac{dF}{dS} \approx \Delta p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$. Na druhou stranu, na úrovni střední školy se tlak definuje jednoduše jako $p = \frac{F}{S}$, proto můžeme brát tuto naši změnu definice tlaku jako přípustnou.

3. Hydrostatický tlak reálné kapaliny

3.1 Diferenciální přístup [1, 2, 4]

Nyní, když víme, že velikost hydrostatického tlaku, resp. hydrostatické tlakové síly, závisí zejména na hloubce pod hladinou a hustotě kapaliny, budeme se zabývat hydrostatickým tlakem kapaliny stlačitelné. Základní charakteristikou reálné kapaliny je její stlačitelnost δ . Je

definována jako $\delta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$, častěji se používá její převrácená hodnota- modul objemové pružnosti $K = -V \frac{\partial p}{\partial V}$.

Modul objemové pružnosti K je obecně baroklinní, je funkcí tlaku a teploty. Pokud budeme rovnice vztahovat k vodě, je K zhruba do tlaku 50MPa funkcí pouze teploty.

t (°C)	0	10	20	30	40	50
K (10 ⁹ Pa)	2,16	2,27	2,36	2,41	2,44	2,46

Tab. 1 Závislost modulu objemové pružnosti na teplotě

Vyjdeme ze zákona zachování hmoty, tj. $m = \rho V = konst.$ Tuto rovnost logaritmičtě derivujeme

$$-\frac{V}{dV} = \frac{\rho}{d\rho}.$$

Dosazením do definičního vztahu modulu objemové pružnosti a záměnou parciálních derivací za totální platí

$$K = \frac{\rho}{d\rho} dp. \quad (23)$$

Separujeme proměnné a integrujeme

$$\int \frac{\rho}{d\rho} = \int \frac{dp}{K},$$

$$\ln \rho = \frac{p}{K} + C. \quad (24)$$

Integrační konstantu C určíme z okrajových podmínek $\rho = \rho_0$: $p = 0$. Tato podmínka vyjadřuje, že tlak na hladině, kde je hustota kapaliny ρ_0 , je nulový. Po dosazení plyne $C = \ln \rho_0$ a po dosazení konstanty zpět do rovnice (24) je hustota

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p}{K}}. \quad (25)$$

Tento vztah dosadíme do Eulerovy první rovnice hydrostatické (8) pro složku rovnoběžnou s tíhovým zrychlením - tj. pro složku x-ovou, dostáváme

$$g - \frac{1}{\rho_0} e^{-\frac{p}{K}} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

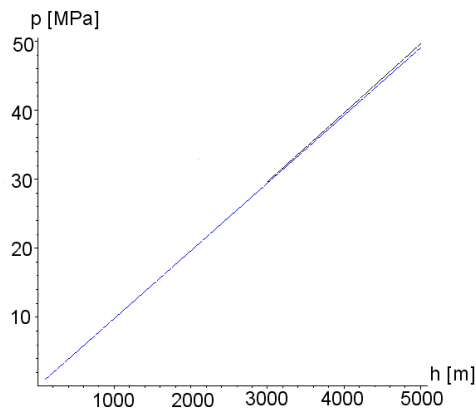
Opět separujeme proměnné a integrujeme

$$gx = -\frac{K}{\rho_0} e^{-\frac{p}{K}} + C \quad (27)$$

a konstantu C určíme rovněž z podmínky nulového tlaku na hladině, tentokrát ve formě: pro $x = 0$ je $p = 0$. Pak $C = -\frac{K}{\rho_0}$.

Po dosazení konstanty C do rovnice (27) a úpravách vyjádříme hydrostatický tlak v kapalině

$$p = K \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho_0 g x}{K}} \right). \quad (28)$$



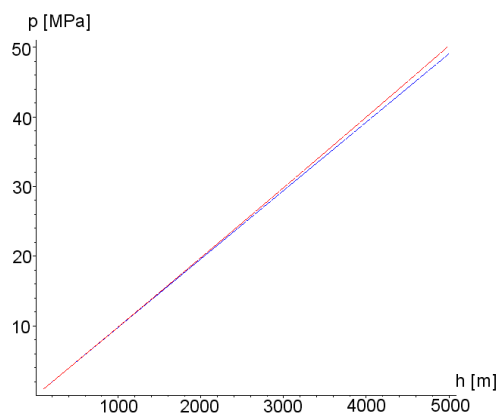
Obr. 8 Průběh tlaků reálné a ideální kapaliny

Na obr. 8 černá křivka znázorňuje průběh tlaku kapaliny podle vztahu (28), modrá křivka je závislost tlaku pro nestlačitelnou kapalinu (9). Čitelný odklon směrem k vyššímu tlaku od průběhu nestlačitelné kapaliny je až v hloubce 3000m.

Ukažme ještě možnost dosadit vztah (25) do rovnice pro hydrostatický tlak nestlačitelné kapaliny (9). Pak hydrostatický tlak kapaliny reálné je

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p}{K}} gh. \quad (29)$$

Je zřejmé, že tlak p nelze z této rovnosti explicitně vyjádřit. Pro určení $p = f(h)$ je nutno použít výpočetní techniky.



Obr. 9 Průběh tlaků reálné a ideální kapaliny

Na obr. 9 červená křivka znázorňuje průběh tlaku kapaliny podle vztahu (29), modrá křivka je závislost tlaku pro nestlačitelnou kapalinu (9).

3.2 Nediferenciální přístup [1, 2, 4]

Uveďme jiný možný přístup výpočtu ovšem bez užití diferenciálního počtu. Určíme stlačitelnost kapaliny $\delta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$ jako $\delta = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p}$. A je-li $\Delta V = V_1 - V_0$, pak platí

$$V_1 = V_0 (1 - \delta \Delta p) . \quad (30)$$

A protože platí $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{\rho_0 V_0}{V_0 (1 - \delta \Delta p)}$, je hustota

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 - \delta \Delta p} . \quad (31)$$

Poznamenejme ještě, že $\Delta p = p - p_0$, kde budeme brát $p_0 = 0$, protože tlak na hladině uvažujeme nulový a $\delta = \frac{1}{K}$. Dosadíme tyto vztahy do rovnice pro hydrostatický tlak ideální kapaliny (9)

$$p = \frac{\rho_0 h g}{1 - \frac{p}{K}} . \quad (32)$$

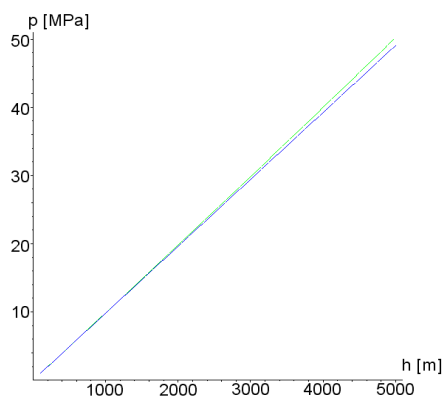
Tlak p lze vyjádřit analyticky

$$p_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4\rho_0 h g K}}{2} . \quad (33)$$

Našemu úkolu vyhovuje kořen

$$p = \frac{K - \sqrt{K^2 - 4\rho_0 h g K}}{2} , \quad (34)$$

protože pro hloubku pod hladinou $h = 0$ je tlak $p = 0$, což je v souladu s našimi předpoklady.



Obr. 10 Průběh tlaků reálné a ideální kapaliny

Na obr. 10 zelená křivka znázorňuje průběh tlaku kapaliny podle vztahu (34), modrá křivka je závislost tlaku pro nestlačitelnou kapalinu (9).

Ukažme formou tabulky rozdíly mezi jednotlivými přístupy, pro názornější srovnání i tlak vody, když s ní počítáme jako s ideální kapalinou. Hustota vody $\rho_0 = 999,7 \text{ kgm}^{-3}$ pro teplotu $t = 10^\circ \text{ C}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, modul objemové pružnosti $K = 2,27 \cdot 10^9 \text{ Pa}$.

Hloubka h [m]	Tlak p [MPa]; ideální kapalina $p = \rho hg$	Tlak p [MPa]; reálná kapalina $p = K \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho_0 hg}{K}} \right)$	Tlak p [MPa]; reálná kap. $p = \rho_0 e^{\frac{p}{K}} hg$	Tlak p [MPa]; reálná kap. (nedif. Přístup) $p = \frac{K - \sqrt{K^2 - 4\rho_0 hgK}}{2}$
Vztah č.	(9)	(28)	(29)	(34)
100	0,981	0,981	0,981	0,981
500	4,903	4,909	4,914	4,914
1000	9,807	9,828	9,850	9,850
1500	14,710	14,758	14,807	14,807
2000	19,614	19,699	19,786	19,787
2500	24,517	24,651	24,787	24,788
3000	29,421	29,613	29,810	29,813
3500	34,325	34,587	34,856	34,860
4000	39,228	39,571	39,924	39,931
4500	44,132	44,566	45,016	45,025
5000	49,035	49,573	50,130	50,143

Tab. 2 Srovnání hodnot tlaků pro různé vzorce

Z hodnot pro jednotlivé vztahy uvedené v tabulce je zřejmé, že pro běžné aplikace výpočtů hydrostatického tlaku vody je s velmi dobrou přesností možné použít vztah pro nestlačitelnou kapalinu (9). Dále je vidět, že rovnice (29) a (34) udávají vyšší hodnoty tlaků pro stejnou hloubku než rovnice (28), která je nejpřesnější. Je to způsobeno tím, že v případě rovnice (28) byla relace pro hustotu jako funkce tlaku p a modulu objemové pružnosti K (19) dosazena do rovnice diferenciální (8), takže byl tlak integrován po hloubce x . Tím byl lépe zachycen jeho průběh.

4. Hydrodynamické paradoxon ideální kapaliny

Tento pojem se týká proudění tekutin. Uveďme, že není jednotné, co přesně hydrodynamické paradoxon znamená. Je možné se setkat se dvěma interpretacemi. Buď jako skutečnost, že pokud tekutina proudí v trubici, tak v místě užšího průřezu trubice je nižší tlak (důsledek rovnice kontinuity a Bernoulliho). Nebo pouze jako skutečnost, že čím rychleji tekutina proudí potrubím, tím v něm naměříme menší tlak (důsledek jenom Bernoulliho rovnice). My se budeme zabývat případem obsáhlejším, tj. prvním případem. Název paradoxon vznikl tak, že člověk má pocit, že v místě s užším průřezem se musí tekutina „nakupit“ a tím vyvolá větší tlak.

4.1. Rovnice kontinuity [2, 4]

Rovnice kontinuity je formou zákona zachování hmotnosti. Proudí-li tekutina trubicí, uvažme v jejím libovolném průřezu S elementární kontrolní plošku dS . Touto kontrolní ploškou proteče za jednotku času tekutina o hmotnosti $\rho \mathbf{v} dS = \rho v_i v_i dS$, kde \mathbf{v} je rychlost tekutiny v místě plošky dS a \mathbf{v} je jednotkový vektor vnější normály této plošky. Součin $v_i v_i$ představuje složku rychlosti \mathbf{v} do směru vnější normály plošky dS . Tato složka je považována za kladnou, pokud tekutina vytéká z vnitřku kontrolní plochy S ven a záporná v případě vtékající tekutiny dovnitř. Celková hmotnost tekutiny, která vyteče z objemu V za jednotku času, se pak určí jako

$$\iint_S \rho v_i v_i dS. \quad (35)$$

Hmotnost tekutiny v objemu V (uvnitř kontrolní plochy S) se určí jako $\iiint_V \rho dV$. Úbytek hmotnosti uvnitř plochy S za jednotku času je pak dán jako

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV. \quad (36)$$

Protože platí zákon zachování hmotnosti, musí se oba integrály rovnat

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iint_S \rho v_i v_i dS.$$

Toto je vyjádření zákona zachování hmotnosti pro libovolný objem tekutiny protékající libovolnou plochou S . Nyní uijeme Gauss-Ostrogradského věty a převedeme plošný integrál na objemový, čímž dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho v_i v_i dS = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}$$

a převedeme na jeden integrál

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

Výše uvedená rovnost bude splněna tehdy, když integrand bude roven nule (pro libovolný objem)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (37)$$

Tímto jsme odvodili diferenciální podobu rovnice kontinuity pro stlačitelnou kapalinu. Pro kapalinu nestlačitelnou platí, že změna hustoty se v čase nemění, tj. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Diferenciální podoba rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu má potom tvar

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (38)$$

Pro praktické výpočty je důležitější tvar integrální

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

z čehož plyne, že $vS = \text{konst}$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \dots = v_k S_k = vS = \text{konst}. \quad (39)$$

Odvodili jsme tedy integrální tvar rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu. Součin vS se značí jako objemový průtok Q . To znamená $Q = vS$.

V případě stlačitelné kapaliny musíme na rozdíl od nestlačitelné kapaliny striktně respektovat zachování hmotnosti. Proto má integrální tvar rovnice kontinuity tvar

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \dots = \rho_k v_k S_k = \rho v S = \text{konst}. \quad (40)$$

Z rovnice (39) vyplývá, že v místě užšího průřezu trubice je rychlost proudění vyšší. Tento vztah však nic neříká o průběhu velikosti tlaku. Odpověď spočívá v Bernoulliho rovnici.

4.2. Rovnice Bernoulliho [4, 6]

Bernoulliho rovnice je formou zákona zachování mechanické energie. Lze ji odvodit několika způsoby, například jako integraci zákona zachování hybnosti (Eulerovy rovnice hydrodynamiky) nebo přímo ze zákona zachování mechanické energie, což ukážeme:

Nachází-li se kapalina v poli konzervativních sil (práce vykonaná na uzavřené křivce v izolovaném systému je nulová), je celková mechanická energie kapaliny E dána jako

$$E = E_k + E_p + E_G, \quad (41)$$

kde

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \dots \text{kinetická energie,}$$

$$E_G = mgh \dots \text{energie potenciální,}$$

$$E_p = pV \dots \text{potenciální tlaková energie.}$$

Existence potenciální tlakové energie E_p vychází z následujícího: na kapalinu v trubici působí síla F , kapalina tak urazí dráhu l , proto tato síla vykoná práci $W = Fl$. Dále víme, že síla $F = pS$, kde S je průřez trubice, takže po dosazení do vztahu pro práci W plyne $W = pSl = pV$. Tato práce odpovídá potenciální tlakové energii.

Po dosazení energií do vztahu (41) platí

$$\frac{1}{2}mv^2 + pV + mgh = konst . \quad (42)$$

Tuto rovnost vztáhneme na hmotnost m

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = konst . \quad [Jkg^{-1}] \quad (43)$$

Rovnost (43) je Bernoulliho rovnice v energetickém tvaru- její členy představují měrné energie, jednotka $[Jkg^{-1}]$. Lze najít ještě další používané tvary, a to tvar výškový, pokud vydělíme jednotlivé členy tíhovým zrychlením g

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = konst \quad [m] \quad (44)$$

a tvar tlakový, pokud vynásobíme rovnicí (43) hustotou ρ :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = konst . \quad [Pa] \quad (45)$$

Řekli jsme, že z rovnice kontinuity plyne, že v místě zužujícího se průřezu potrubí teče kapalina rychleji. To znamená, že v místě užšího průřezu má kapalina rychlost $v_2 > v_1$. Z Bernoulliho rovnice plyne $\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$. Uvažujme pro názornost potrubí ve stálé výšce, tj. $h_1 = h_2$, pak se členy $gh_1 = gh_2$ eliminují a tlak v místě užšího potrubí p_2 bude

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2). \quad (46)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že pro $v_2 > v_1$ je $p_2 < p_1$. Tímto jsme ukázali existenci hydrodynamického paradoxonu - v užší části potrubí je nižší tlak na stěny potrubí.

Podotkněme, že pokud bychom uvažovali zvyšující se rychlost v potrubí nikoliv v důsledku zúžení potrubí (dle rovnice kontinuity), ale v důsledku zvýšení průtoku, dojde ke zvýšení celkové mechanické energie proudu - vyjádřené v rovnici (43) jako „konst“. Nerespektování tohoto faktu může vést k mylným závěrům.

4.3. Vliv rychlosti zvuku [1, 3, 5]

Ukažme nyní důležitou skutečnost, kterou odvodíme, že dosavadní závěr platí pouze pro tekutinu proudící rychlostí menší než je rychlost zvuku v ní. Vyjděme nejprve z rovnice kontinuity v integrálním tvaru pro neideální (stlačitelnou) kapalinu (40) a z rovnice pohybové:

rovnice kontinuity

$$\rho v S = konst, \quad (40)$$

rovnice pohybová

$$-\frac{dp}{\rho} = v dv. \quad (47)$$

Rovnici pohybovou lze získat jako derivaci Bernoulliho rovnice (43) s vynechaným členem potenciální měrné energie gh , neboť je tento člen zanedbatelný, nebo přímo z druhého Newtonova zákona jako Eulerovu rovnici hydrodynamiky. Rovnice pohybová je tedy formou zákona zachování hybnosti.

Logaritmováním a derivováním rovnice (40) dostaneme

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (48)$$

Rovnici pohybovou (47) vydělíme druhou mocninou rychlosti v^2 a dosadíme do rovnice kontinuity (48), pak platí

$$\frac{dS}{S} = \frac{dp}{\rho v^2} - \frac{d\rho}{\rho}. \quad (49)$$

Dále uveďme, že rychlost zvuku a v daném prostředí lze určit jako rychlost šíření tlakových impulzů v prostředí, tj. $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Z rovnice (23) víme, že pro kapalinu, která má modul objemové pružnosti K , platí $\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho}$. Pro rychlost zvuku v kapalině pak platí

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (50)$$

K tomu ukažme, že velikost Machova čísla, které je bezrozměrné a ukazuje velikost měřené rychlosti od rychlosti zvuku v daném prostředí, je definována jako $M_a = \frac{v}{a}$. Pro kapalinu je Machovo číslo dáno výrazem

$$M_a = \frac{v}{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}. \quad (51)$$

Dosadíme-li nyní rovnici (51) do rovnice (49) a místo $\frac{d\rho}{\rho}$ píšeme $\frac{dp}{K}$ dle rovnice (23), dostaneme po úpravách relaci

$$\frac{dS}{S} = \frac{1 - M_a^2}{KM_a^2} dp \quad (52)$$

a tuto rovnost integrujeme

$$\ln(cS) = p \frac{1 - M_a^2}{KM_a^2}. \quad (53)$$

Konstantu c určíme z těchto podmínek: pro průřez trubice $S = S_0$ je tlak $p = p_0$, konstanta c je pak

$$c = \frac{1}{S_0} e^{p_0 \frac{1 - M_a^2}{KM_a^2}}$$

a dosadíme ji zpět do rovnice (53) a po úpravách určíme tlak p

$$p = \frac{KM_a^2}{1 - M_a^2} \cdot \ln\left(\frac{S}{S_0}\right) + p_0. \quad (54)$$

Nyní podrobme tento vztah analýze. Zavedme pro snazší zápis a orientaci formální substituci

$$A = \frac{KM_a^2}{1 - M_a^2} \text{ a } B = \ln\left(\frac{S}{S_0}\right), \quad (55)$$

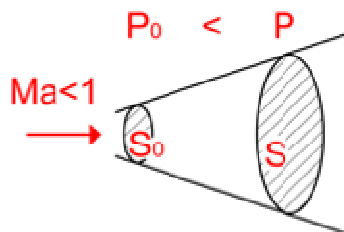
pak pro tlak p platí

$$p = A \cdot B + p_0 \quad (56)$$

a mohou nastat čtyři možné případy:

$$\text{a) } \frac{S}{S_0} > 1 \wedge M_a < 1 \Rightarrow A > 0 \wedge B > 0 \Rightarrow p > p_0$$

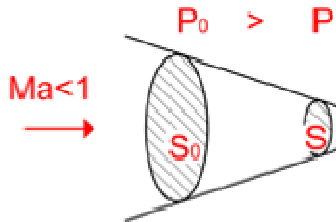
Kapalina proudí divergentním potrubím podzvukovou rychlostí, tlak bude narůstat a dle Bernoulliho rovnice (43) se rychlost proudu zpomalí.



Obr. 11 Podzvukové proudění divergentním potrubím

$$b) \frac{S}{S_0} < 1 \wedge M_a < 1 \Rightarrow A > 0 \wedge B < 0 \Rightarrow p < p_0$$

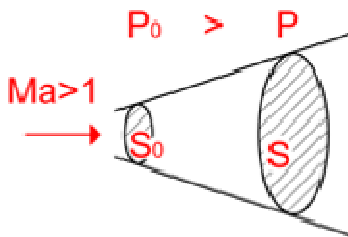
Kapalina proudí konvergentním potrubím podzvukovou rychlostí, tlak zde bude klesat a rychlost se bude zvětšovat, dle Bernoulliho rovnice. Toto je případ hydrodynamického paradoxonu.



Obr. 12 Podzvukové proudění konvergentním potrubím

$$c) \frac{S}{S_0} > 1 \wedge M_a > 1 \Rightarrow A < 0 \wedge B > 0 \Rightarrow p < p_0$$

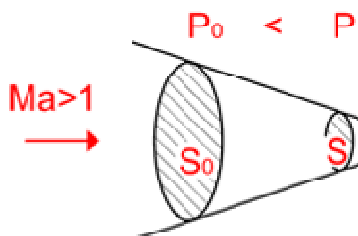
Kapalina proudí divergentním potrubím nadzvukovou rychlostí, na rozdíl od případu a) však tlak bude klesat, takže dle Bernoulliho rovnice se rychlost kapaliny dále zvýší.



Obr. 13 Nadzvukové proudění divergentním potrubím

$$d) \frac{S}{S_0} < 1 \wedge M_a > 1 \Rightarrow A < 0 \wedge B < 0 \Rightarrow p > p_0$$

Kapalina proudí konvergentním potrubím nadzvukovou rychlostí, na rozdíl od případu b) tlak vzroste a dle Bernoulliho rovnice se rychlost kapaliny zpomalí.



Obr. 14 Nadzvukové proudění konvergentním potrubím

Zkusme nyní ještě situaci vysvětlit bez matematického podtextu a uveďme pojmy konfuzor a difuzor. Jako konfuzor se označuje takové potrubí, jehož funkcí je zvýšit kinetickou energii tekutiny (zvýší její rychlost). Konfuzor je tedy tryska. Difuzor má opačnou funkci - zvýšit tlak tekutiny a snížit tak její kinetickou energii. Ukažme nejprve rozdíl u konvergentního tvaru potrubí pro podzvukovou a nadzvukovou rychlost. Pokud kapalina teče do zužující se části potrubí podzvukovou rychlostí, dokáže se informace o tlakových pulzacích v kapalině pohybovat rychleji než kapalina sama. Tím pádem části kapaliny na čele proudu předají informaci o zúžení potrubí částem kapaliny za nimi dostatečně rychle (dříve než ony samy přijdou do kontaktu se zužující se stěnou potrubí), a proto tato část kapaliny nemá tendenci zpomalovat svůj pohyb nárazem do stěny. Protože je pohyb kapaliny takto urychlen, nemají částice kapaliny čas na to předat tlakovou energii stěnám - proto naměříme při podzvukovém proudění v užší části potrubí menší tlak vzhledem k tlaku na vstupu. Jedná se tedy o podzvukovou trysku.

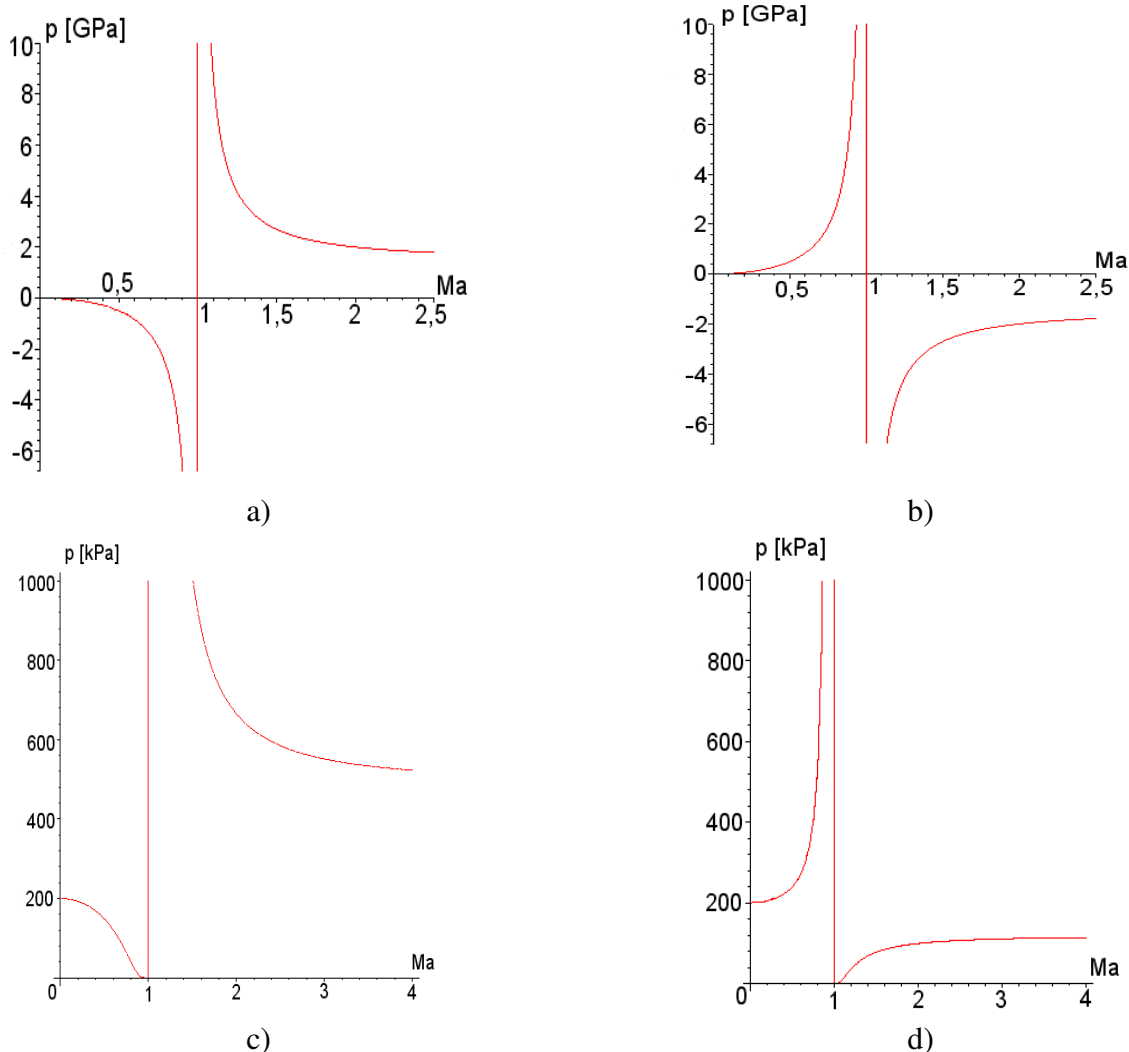
V případě nadzvukové rychlosti nestihne část kapaliny na čele proudu předat tlakovou pulzáci informaci o jakékoli změně křivosti stěny, proto část kapaliny za čelem proudu takto mohutněji narazí do stěn. Jak dále uvidíme, při přechodu z podzvukové rychlosti do nadzvukové dojde k tomu, že kapalina v blízkosti tělesa stěny „přestane stíhat reagovat“, a proto dojde k rázové vlně, která se projeví prudkým (teoreticky skokovým) nárůstem tlaku. Rychlost proudu takto klesá a v souladu s rovnicí Bernoulliho zde bude narůstat tlak. Konvergentní potrubí pracující v nadzvukovém režimu se tedy chová jako difuzor.

Rozdíl pro divergentní tvar je analogický. Při podzvukovém proudění kapaliny do rozevírající se části potrubí je informace prostřednictvím tlakových pulzací šířena rychleji, než kapalina proudí, takže se proud dle rovnice kontinuity zpomalí. Proto má kapalina čas předat tlakovou energii stěnám potrubí, což se projeví tím, že naměříme v širší části potrubí při podzvukové rychlosti vyšší tlak vzhledem k původnímu. Rozšiřující se potrubí pracující v podzvukovém režimu proudění je tedy difuzor.

Při nadzvukové rychlosti se nebude informace o změně potrubí moci šířit, kapalina bude mít však otevřený prostor umožňující zvyšovat její rychlost, a proto nebude mít čas předat tlakovou energii stěnám a bude tak docházet ke klesání tlaku. Divergentní potrubí v režimu nadzvukového proudění funguje jako tryska.

Tyto závěry plynou rovněž z rovnice odvozené pro proudění ideálního plynu

$$p = p_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^{\frac{\kappa M_a^2}{1-M_a^2}} . \quad (57)$$



Obr. 15 Závislosti tlaků na Machově čísle

Na obr. 15 jsou případy a) a b) grafy rovnice (54) pro dvojnásobné a zúžení (a) a rozšíření (b) potrubí. Obr. c) a d) jsou grafy rovnice (57) pro ideální plyn, rovněž pro dvojnásobné zúžení (c) a rozšíření (d) potrubí. Z obr. 15 a) a c) je vidět, že v potrubí konvergentním jak v režimu proudění podzvukového tak nadzvukového dochází ke klesání velikosti tlaku se zvyšující se rychlostí, který však bude v nadzvukovém pásmu vyšší. Na obr. 15 b) a d) je znázornění průběhu tlaku v potrubí divergentním. Pro režim proudění podzvukového i nadzvukového platí zvýšení tlaku se zvyšujícím se Machovým číslem, opět zdůrazněme, že v pásmu nadzvukovém je tlak menší vzhledem k podmínce tlaku p_0 nezávislé na rychlosti, takže skutečně platí, že v divergentním potrubí protékaném tekutinou rychlostí nadzvukovou dochází k poklesu tlaku. Je zajímavé, že rovnice (54) a (57) jakoby předpovídaly vznik rázové vlny během překonávání tzv. „zvukové bariéry“ - to je mimo jiné vidět i z grafů. Je-li Machovo číslo rovno jedné, dojde k prudkému nárůstu tlaku. Podle výše uvedených vztahů by měl teoreticky dosáhnout nekonečna.

Všimněme si ještě, že rovnice (54) a tedy její graf obr. 15 a), b) připouští existenci záporného tlaku. Nejedná se o chybu matematickou ani špatné předpoklady. Uvědomme si, že existence záporného tlaku plyne již z Bernoulliho rovnice (46), pokud bude rychlost

„dostatečně velká“. Například ve vodorovném potrubí kruhového průřezu teče kapalina (například voda o hustotě $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$), která má při rychlosti $v_1 = 2 \text{ m s}^{-1}$ tlak $p_1 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, přes zúžení do průměru potrubí o velikosti jedné třetiny původního průměru, pak dle rovnice kontinuity zvýší svou rychlost na rychlost $v_2 = 18 \text{ m s}^{-1}$. Její tlak pak bude dán rovnicí (46) a bude roven $p_2 = -10^4 \text{ Pa}$. Tento příklad jsme uvedli proto, aby bylo vidět, že tekutina může teoreticky vyvolávat napětí tahové. V případě vody (kapaliny) k tomuto jevu dojít nemůže, protože musí nejprve přejít přes tlak své syté páry a dojde k jejímu varu. Jednalo by se o příliš citlivý metastabilní stav.

Tímto chceme říci, že na obr. 15 a), b) jsou křivky tlaků v záporných hodnotách teoretickými metastabilními stavy. V případě ideálního plynu se tlaková křivka v záporné hodnotě nenachází, protože plyn má příliš malou hustotu na to, aby dle rovnice (46) tlak p_2 přešel do záporné hodnoty. Jediná možnost je pak extrémně zvýšit jeho rychlost. V tomto případě však dojde dříve k překročení místní rychlosti zvuku, a proto zde bude skoková změna tlaku a ten bude vyšší než původní.

Pokud by se ovšem podařilo udržet nějakou kapalinu ve fázi kapalné v trubici umístěné v prostoru (místnosti), kde by byl tlak velmi blízký vakuu, byl by absolutní tlak kapaliny uvnitř trubice dán pouze tlakem hydrostatickým. Pak by při proudění mohla kapalina skutečně vyvolat v trubici napětí tahové, směrem dovnitř trubky, ačkoliv by ze strany vně trubky nebylo žádné jiné médium.

Vlastností, které plynou z existence různého chování tekutiny v konvergentním a divergentním potrubí v různých rychlostních režimech, se nejvíce využívá při proudění plynů (Lavalova dýza). Např. v proudových motorech je nutno urychlit plyny nad rychlost zvuku, proto je zde nejprve konvergentní tryska (tzv. „podzvukový konfuzor“), který tyto plyny urychlí na rychlost zvuku, a následná divergentní tryska (tzv. „nadzvukový konfuzor“), která tuto rychlost zvuku dále zvýší. Takovéto proudění se ve výpočtech považuje jako adiabatické (izoentropické) a plyny se řídí stavovou rovnicí ideálního plynu, viz rovnice (57).

5. Hydrodynamické paradoxon reálné kapaliny [3]

Nyní se pojdme zabývat vlivem stlačitelnosti kapaliny při proudění.

Uvažme kapalinu proudící ve vodorovném potrubí. Pišme pro tuto kapalinu Bernoulliho rovnici v tlakovém tvaru

$$\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + p_1.$$

S uvážením vztahu (25), kdy nebudeme brát počáteční tlak p jako nulový, ale jako $p = p_0$,

určíme tlak v obecném místě trubice jako

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho_0}{2} \left(v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{p-p_0}{K}} \right). \quad (58)$$

Připomeňme, že tlak bez uvážení stlačitelnosti je

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_1^2).$$

Proveďme porovnání pro vodu tekoucí potrubím, kde v jeho průřezu $S_0 = 0,2m^{-2}$ teče voda rychlostí $v_0 = 2ms^{-1}$. Hmotnostní tok tímto potrubím pak bude $Q_m = \rho_0 S_0 v_0 = 400kgs^{-1}$. Jak jsme uvedli na konci kap. 4.2, proud vody má pro daný průtok celkovou mechanickou energii konstantní (neuvažujeme ztráty). Pokud se mění průřez potrubí, mění se dle Bernoulliho rovnice rychlost a tlak protékající kapaliny. Ukažme opět formou tabulky, jak se bude měnit tlak pro různé rychlosti proudící vody v důsledku zúžení potrubí při daném průtoku. Uvažujme v průřezu S_0 např. tlak $p_0 = 10^5 Pa$

	$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_1^2)$ [Pa]	$p_1 = p_0 + \frac{\rho_0}{2} \left(v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{p_0-p}{K}} \right)$ [Pa]
Rychlost [ms^{-1}]	vztah č. 39	vztah č. 51
3	97500	97500,006
4	94000	94000,023
5	89500	89500,061
6	84000	84000,133
7	77500	77500,255
8	70000	70000,444
9	61500	61500,722
10	52000	52001,111

Tab. 3 Porovnání tlaků při proudění ideální a reálné kapaliny

Je zřejmé, že při proudění kapalin je rozdíl tlaků zanedbatelný pro kapalinu uvažovanou jako reálnou a ideální. Jak je v tab. 3 ukázáno, pro vodu je tlakový rozdíl jednoho Pascalu až při rychlosti $10 ms^{-1}$, což je velmi nepatrná hodnota. Podobně však tomu bude i pro jiné kapaliny, neboť stlačitelnost je řádově velmi nízká. Rozdíly by existovaly až při velmi vysokých tlacích (nad desítky MPa) a při velmi vysokých rychlostech. Také je nutno uvažovat přítomnost fázové přeměny. Bod varu je funkcí tlaku. Při nízkých tlacích může docházet k přeměně kapaliny ve svoji páru. Pro vodu je např. při teplotě $17,5^\circ C$ tlak syté páry roven $2kPa$, kterého lze pro námi výše zvolené podmínky dosáhnout při rychlosti $14,2 ms^{-1}$.

6. Závěr

Cílem této práce bylo detailně objasnit příčiny existence hydrostatického a hydrodynamického paradoxonu.

Hydrostatické paradoxon neodporuje tvrzení, že tlak vody je dán její tíhou. Lze nalézt pokusy, které se snaží toto vyvrátit [7]. I přesto, že pro dvě nádoby s týmž sloupcem vody může jedna nádoba mít mnohonásobně větší objem než druhá. Důležité je si uvědomit, že vysvětlení existence hydrostatického paradoxu spočívá v Eulerově první rovnici hydrostatické (7) a ve skalární povaze tlaku v kapalině. Eulerova rovnice byla odvozena z rovnováhy sil plošných a objemových pro libovolný tvar kontinua. Proto jsme po použití Gauss-Ostrgradského věty mohli položit nule pouze integrandy a následnou integrací určit vztah $p = \rho gh$, který tak platí pro tvarově libovolnou nádobu. Odtud plyne skutečnost, že velikost hydrostatického tlaku je v jakékoliv nádobě stejná pro stejnou velikost vertikálního sloupce kapaliny. A navíc v případě, že budou nádoby mít i stejně velká horizontální rovná dna, bude na tato dna působit stejně velká hydrostatická tlaková síla podle vztahu $F = \rho ghS$.

Proto, jak jsme mimo jiné uvedli v kap. 2.1, je možné nalézt dvě interpretace paradoxu. Častěji je to tvrzení, že hydrostatická tlaková síla je stejná pro nádoby se stejně velkým vodorovným dnem a naplněných kapalinou do stejné výšky. V menší části je to tvrzení, že pro totéž je stejný hydrostatický tlak (nikoliv síla); ten je však stejný, jak jsme uvedli, i pro nádoby s různě velkými dny. Pokud je proto jako hydrostatický paradox uváděna skutečnost stejně velkého hydrostatického tlaku pro nádoby se stejně velkými dny, je toto zavádějící.

Dále jsme číselně ukázali vliv stlačitelnosti vody. Obecně u kapalin je modul objemové pružnosti vysoký, proto je zvýšení tlaku v závislosti na změně hustoty zanedbatelné.

Vysvětlení paradoxonu hydrodynamického je přímočařejší než hydrostatického. K objasnění stačilo odvodit ze zákona zachování hmoty rovnici kontinuity a ze zákona zachování mechanické energie rovnici Bernoulliho, což ve své podstatě nevyžaduje diferenciální počet. Proudí-li tekutina při daném průtoku potrubím, které se zúží, dojde dle rovnice kontinuity ke zvýšení její rychlosti a dle rovnice Bernoulliho ke snížení jejího tlaku. Dále jsme ukázali chování tlaků v režimu proudění podzvukového a nadzvukového. Důležité je vědět, že pro daný průtok potrubím dochází stále ke snižování tlaku v potrubí konvergentním při rychlosti podzvukové a divergentním při rychlosti nadzvukové, zvyšování tlaku v potrubí divergentním při rychlosti podzvukové a v konvergentním při rychlosti nadzvukové a že při překonávání rychlosti zvuku dochází ke skokové změně tlaku.

Ukázali jsme, že při běžných podmínkách nemá stlačitelnost kapaliny významný vliv na její tlak. Uvažovat vliv stlačitelnosti při proudění má význam pouze při proudění plynů.

Literatura

[1] ŠOB, František. *Hydromechanika*, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 239 stran, ISBN 80 – 214 – 20037 - 5, Brno 2002

[2] BRDICKA, M. - SAMEK, L. - SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. 2. opr. vyd., 3. revid. vyd. Praha: Academia, 2005. 799 s. ISBN 80-200-0772-5.

[3] PAVELEK, Milan a kol. *Termomechanika*. 3. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2003. 284 s. ISBN 80-214-2409-5.

[4] RUDOLF, Pavel. *Přednášky předmětu hydromechanika*, 2010 letní semestr

[5] PAVELEK, Milan. *Přednášky předmětu termomechanika*, 2009 zimní semestr

[6] *Wikipedia* [online]. 21.3.2010. Dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho_rovnice

[7] <http://www.obnovene-forum.estranky.cz/clanky/diskuse/teoreticka-veda>

Seznam použitých symbolů a cizích slov

F_m	[N]	síla objemová
F_p	[N]	síla plošná
F_G	[N]	síla tíhová
g	$[ms^{-2}]$	tíhové zrychlení, $g=9,81 ms^{-2}$
p	[Pa]	tlak v tekutině
∇	[dle funkce]	gradient dané funkce
$\oiint_S f dS$	[dle funkce]	uzavřený plošný integrál funkce f přes plochu S
$\iiint_V f dV$	[dle funkce]	objemový integrál funkce f přes objem V
$\int f(x) dx$	[dle funkce]	neurčitý integrál funkce f
\mathbf{n}	[-]	vektor vnější normály dané plochy
δ	$[MPa^{-1}]$	součinitel objemové stlačitelnosti
K	[MPa]	modul objemové pružnosti
V	$[m^3]$	objem kapaliny
ρ	$[kgm^{-3}]$	hustota tekutiny
a	$[ms^{-1}]$	rychlost zvuku v daném prostředí
v	$[ms^{-1}]$	rychlost tekoucí kapaliny
h	[m]	hloubka pod hladinou kapaliny
Ma	[-]	Machovo číslo

Baroklinní ...dvou a více parametrický (hustota závisující na tlaku a teplotě)

Divergentní ...rozbíhavý

Infinitesimální...nekonečně malý

Konvergentní ...sbíhavý

Ortogonální ...pravoúhlý

Rigorózní ...přesný, precizní