VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

GEOMETRICKÉ STRUKTURY ZALOŽENÉ NA KVATERNIONECH

GEOMETRIC STRUCTURES BASED ON QUATERNIONS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE AUTHOR	Bc. HANA FLODEROVÁ
VEDOUCÍ PRÁCE SUPERVISOR	Mgr. JAROSLAV HRDINA, Ph.D.

BRNO 2010

LICENČNÍ SMLOUVA
POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO
uzavřená mezi smluvními stranami:

1. Paní

Jméno a příjmení:	Bc. Hana Floderová
Bytem:	Havlíčkova 611, 664 56,Blučina
Narozena (datum a místo):	15. 6. 1986, Brno

(dále jen autor)

a

2. Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojnÍho inženýrstvÍ
se sídlem Technická 2896/2, 61669, Brno - Královo Pole
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:
...
(dále jen nabyvatel)

Čl. 1
Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

   ☐ disertační práce

   ☒ diplomová práce

   ☐ bakalářská práce

   ☐ jiná práce, jejíž druh je specifikován jako ....

   (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP:	Geometrické struktury zaloŽené na kvaternionech
Vedoucí/ školitel VŠKP:	Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.
Ústav:	Ústav matematiky
Datum obhajoby VŠKP:	23. 6. 2010

   VŠKP odevzdal autor nabyvateli v[1]:

   ☐ tištěné formě — počet exemplářů 3

   ☐ elektronické formě — počet exemplářů 1

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

[1] hodící se zaškrtněte

Čl. 2
Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.

2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.

3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti

   - ☐ ihned po uzavření této smlouvy
   - ☐ 1 rok po uzavření této smlouvy
   - ☐ 3 roky po uzavření této smlouvy
   - ☐ 5 let po uzavření této smlouvy
   - ☐ 10 let po uzavření této smlouvy

   (z důvodu utajení v něm obsažených informací)

4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením §47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

Čl. 3
Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.

2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.

3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísni a za nápadně nevýhodných podmínek.

4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne:

Nabyvatel   Autor

Abstrakt
Geometrickou strukturou nazýváme dvojici (V, G), kde V je vektorový prostor a G je podgrupa $GL(V)$, což je množina všech matic přechodu. V této práci klasifikujeme ty struktury, které jsou založeny na vlastnostech kvaternionů. Geometrické struktury založené na kvaternionech nazýváme trojné struktury. Jsou to čtyři struktury s vlastnostmi podobnými kvaternionům. Kvaterniony jsou vytvořeny z reálných čísel přidáním tří komplexních jednotek. Kvaterniony zapisujeme ve tvaru $a + bi + cj + dk$.

Summary
A pair (V, G) is called geometric structure, where V is a vector space and G is a subgroup $GL(V)$, which is a set of transmission matrices. In this thesis we classify structures, which are based on properties of quaternions. Geometric structures based on quaternions are called triple structures. Triple structures are four structures with similar properties as quaternions. Quaternions are generated from real numbers and three complex units. We write quaternions in this shape $a + bi + cj + dk$.

Klíčová slova
Geometrické struktury, kvaterniony, lineární algebra, matice přechodu, Lieova grupa, Lieova algebra.

Keywords
Geometric structures, quaternions, linear algebra, transmission matrix, Lie group, Lie algebra.

FLODEROVÁ, H. *Geometrické struktury zaloŽené na kvaternionech.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojnÍho inženýrstvÍ, 2010. 51 s. Vedoucí diplomové práce Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Geometrické struktury založené na kvaternionech* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D.;, s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Hana Floderová

Děkuji svému školiteli Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce.

Bc. Hana Floderová

Obsah

1. Úvod

Hlavním tématem této práce jsou geometrické struktury založené na kvaternionech. Kvaterniony (Hamiltonovská čísla)jsou čísla se třemi komplexními jednotkami i, j, k ve tvaru $a + bi + cj + dk$, pro které platí jisté zákonitosti popsané v první kapitole. Geometrické struktury založené na kvaternionech mají v anglickém jazyce název **Triple structure**. My jsme tento název přeložili jako **Trojné struktury**. Trojné struktury máme čtyři a to biparakomplexní, hypersoučinovou, bikomplexní a hyperkomplexní. Hyperkomplexní struktura je jiné označení kvaternionů. Biparakomplexní, hypersoučinová a bikomplexní struktura mají vlastnosti velice podobné kvaternionům.

V první kapitole nadefinujeme struktury, které si pro další použití označíme jako základní struktury (skalární součin, symplektická forma, komplexní struktura). Dále již zmíněné trojné struktury. Poznáme jak se od sebe liší a ve vhodné bázi trojné struktury realizujeme pomocí matic.

Následující podkapitola se týká samotných geometrických struktur. Nejprve vypočítáme matice přechodu jednotlivých prostorů, tedy euklidovského prostoru, symplektického prostoru atd. Následně k těmto prostorům sestrojíme příslušné geometrické struktury reprezentované právě těmito maticemi přechodu, které zadefinované objekty zachovávají. Tohoto využijeme pro zjištění kolik ze základních struktur je nutné definovat,aby byly zachovány všechny tři. Matice přechodu spočteme i pro trojné struktury. Zjistíme, jestli je možné, aby matice přechodu jedné struktury zachovávala současně i další trojné struktury.

Nyní se zamyslíme, jestli může být struktura trojnou i základní. Musíme zjistit, která struktura má již vlastnost komplexní struktury a která ji nemá. Z předchozí kapitoly budeme vědět kolik základních struktur je třeba na trojných strukturách nadefinovat, aby byly zachovány všechny tři základní struktury. Jestliže jsme zjistili, že tři z trojných struktur mají již vlastnost komplexní struktury, stačí, aby tyto trojné struktury vyhovovaly ještě vlastnostem skalárního součinu nebo symplektické formy. Tímto zajistíme, že zmíněné tři trojné struktury budou mít vlastnost všech tří základních struktur. Zbývající z trojných struktur komplexní jednotku neobsahuje, proto ji doplníme a dostaneme kombinaci s jednou z dalších trojných struktur. Přidáme vlastnost skalárního součinu a symplektické formy a zachování základních struktur je splněno.

Další větší kapitolou budou Lieovy grupy a algebry. Lieovu grupu můžeme chápat jako objekt, který je zároveň grupou i hladkou varietou. Zde po definicích tečného prostoru a variety pracujeme s Lieovými algebrami. Tyto algebry sestrojíme na trojných strukturách. Uvedeme i další příklady Lieových algeber pro lepší porozumění tématu. Lieovy algebry mohou být efektivně popsány pomocí strukturních konstant. Strukturní konstanty značíme c_{ij}^k. Jedná se o koeficienty lineární kombinace bázových vektorů: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$. V této kapitole vypočítáme strukturní konstanty pro trojné struktury.

2. Geometrické struktury

2.1. Úvodní poznámky

V této práci, jak vidíme z názvu, budeme definovat geometrické struktury založené na kvaternionech. Proto se nejprve zastavíme nad definicí kvaternionů jako takových, jejich vlastností a využití, aby bylo dále zřejmé s čím pracujeme.

Kvaterniony poprvé popsal William Rowan Hamilton v roce 1843. Zpočátku se nesetkaly s kladnými ohlasy, protože porušovaly komutativní zákon $ab = ba$. Později však našly své uplatnění v teoretické fyzice i v aplikované matematice.

Základní vlastnosti

Kvaterniony jsou vytvořeny z reálných čísel přidáním tří komplexních jednotek i, j, k a značí se písmenem $\mathbb{H}$. Jsou zapisovány v tomto tvaru:

$$a + bi + cj + dk.$$

Komplexní jednotky splňují následující vztahy:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji,$$
$$k = ij.$$

Kvaterniony tvoří podílovou algebru nad tělesem reálných čísel. Definujeme na nich pravé a levé dělení. Jako množina tvoří se sčítáním, násobením a dělením těleso. Dále můžeme pro kvaterniony definovat jejich konjugaci. Tedy pro kvaternion $h = a+bi+cj+dk$ máme konjugaci $\bar{h} = a - bi - cj - dk$. Pro tuto konjugaci platí

$$h\bar{h} = \bar{h}h = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Jedná se o nezáporné číslo, nulové je pouze pro nulový kvaternion $h = 0$.

Norma kvaternionu má tvar $|h| = \sqrt{h\bar{h}}$. Ukážeme si, že tato norma zachovává násobení, tedy pro kvaterniony h, g platí: $|hg| = |h||g|$. Uvažujeme kvaterniony $h = a + bi + cj + dk$ a $g = s + ti + uj + vk$. Norma kvaternionu je tvaru: $|h| = \sqrt{h\bar{h}}$.

$$|hg| = \sqrt{hg\overline{hg}} = \sqrt{(a + bi + cj + dk)(s + ti + uj + vk)(a - bi - cj - dk)(s - ti - uj - vk)} =$$

$$= \cdots = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(s^2 + t^2 + u^2 + v^2)} =$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}\sqrt{(s^2 + t^2 + u^2 + v^2)} = |h||g|.$$

Střední část výpočtu je přímočará, ale technicky náročná a proto jí neuvádíme. Inverzní prvek pro kvaternion existuje vždy pro $h \neq 0$ a je $h^{-1} = \bar{h}/(h\bar{h})$.

Příklady použití kvaternionů

a) *Rotace v* $\mathbb{R}^3$

Kvaterniony je možné zapsat i ve tvaru $a + \mathbf{v}$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v} = v^1 i + v^2 j + v^3 k$ je vektor v $\mathbb{R}^3$. Jestliže máme libovolný čistě imaginární kvaternion $\mathbf{v}$ a libovolný kvaternion $h \neq 0$ platí, že $h\mathbf{v}h^{-1}$ je opět čistě imaginární (tzn. vektor). Tedy, že

$$Re[(a + bi + cj + dk)(v^1 i + v^2 j + v^3 k)(a - bi - cj - dk)] =$$
$$= \frac{(-v^1 b - v^2 c - v^3 d)a + a(v^1 b + v^2 c + v^3 d)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 0.$$

Zobrazení $\mathbf{v} \longmapsto h\mathbf{v}h^{-1}$ je tedy rotace v $\mathbb{R}^3$.

Je možné se omezit na jedničkové kvaterniony $|h| = 1$. Poté tedy platí, že rotaci o úhel φ kolem osy $\mathbf{o}$ reprezentuje kvaternion

$$h = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)\mathbf{o},$$

kde $\mathbf{o}$ je jedničkový vektor ve směru osy $\mathbf{o}$. Pro každou rotaci máme dva jedničkové kvaterniony h a $-h$.

b) *Rotace v* $\mathbb{R}^4$

Pro tuto rotaci ztotožníme kvaterniony s prvky prostoru $\mathbb{R}^4$. Pro libovolnou dvojici jedničkových kvaternionů h, g je zobrazení

$$v \in \mathbb{H} \longmapsto hvg \in \mathbb{H}$$

rotace v $\mathbb{R}^4 \backsimeq \mathbb{H}$. Každé rotaci odpovídají právě dvě dvojice jedničkových kvaternionů h, g a $-h, -g$.

Oktoniony

V matematice máme ještě složitější rozšíření komplexních čísel než jsou kvaterniony. Jedná se o *oktoniony*. Oktoniony jsou neasociativní rozšíření kvaternionů. Tvoří osmidimenzionální algebru nad reálnými čísly. Oktoniony patří do tzv. normovaných algeber s dělením (neboli Hurwitzovy algebry). Existují jen čtyři takové algebry a to reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony a oktoniony. Rozdíl mezi vektorovými prostory a Hurwitzovými algebrami je právě v dělení.

Každý oktonion je lineární kombinací jednotek $1, i, j, k, l, li, lj, lk$. Oktonion x se dá zapsat ve tvaru:

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 l + x_5 li + x_6 lj + x_7 lk,$$

kde x_a jsou reálná čísla.

Oktoniony se sčítají jako komplexní čísla, tedy se sečtou odpovídající složky a násobí se podle tabulky:

Vlastnosti

Násobení oktonionů není komutativní:

$$ij = -ji \neq ji,$$

není ani asociativní:

$$(ij)l = -i(jl) \neq i(jl).$$

1	i	j	k	l	li	lj	lk
i	-1	k	-j	-li	l	-lk	lj
j	-k	-1	i	-lj	lk	l	-li
k	j	-i	-1	-lk	-lj	li	l
l	li	lj	lk	-1	-i	-j	-k
li	-l	-lk	lj	i	-1	-k	j
lj	lk	-l	-li	j	k	-1	-i
lk	-lj	li	-l	k	-j	i	-1

Tabulka 2.1: Násobení oktonionů

2.2. Základní pojmy lineární algebry

Zavedeme pojem vektorového prostoru. Pro porozumnění definice je nejprve třeba nadefinovat pojem komutativní grupy.

Poznámka. V celé této práci se budeme soustředit na dimenzi 4. Volíme tuto dimenzi pro lepší názornost při výpočtech s maticemi. Pro přechod na obecný pohled stačí pak matice chápat blokově a protože všechny námi definované struktury lze realizovat v maticích mající 4×4 bloky, jsou naše výsledky obecnějšího charakteru.

Definice 1. Nechť G je libovolná neprázdná množina. Libovolné zobrazení + množiny $G \times G$ do množiny G ($+ : G \times G \longrightarrow G$) se nazývá *operace (vnitřní) na množině* G. Množina G s operací + se nazývá *grupoid*. Tento grupoid pak zapisujeme symbolem $(G, +)$.

Definice 2. Nechť $(G, +)$ je grupoid a prvky $a, b, c \in G$. Tento grupoid $(G, +)$ se nazývá *grupa*, pokud operace + splňuje:

i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita),

ii) $a + 0 = a$ (neutrální prvek),

iii) $a + (-a) = 0$ (inverzní prvek).

Definice 3. Grupa $(G, +)$ se nazývá *komutativní*, jestliže pro prvky $a, b, \in G$ platí:

$$a + b = b + a.$$

Definice 4. Komutativní grupa $(V, +)$ se nazývá *vektorový prostor* nad $\mathbb{R}$, jestliže pro každý prvek $\mathbf{v} \in V$ a každé reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ je definován prvek $r \cdot \mathbf{v}$ z množiny V a přitom platí pro každé $\mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$:

(a) $r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}$,

(b) $(r + s) \cdot \mathbf{u} = r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}$,

(c) $(r \cdot s) \cdot \mathbf{u} = r \cdot (s \cdot \mathbf{u})$,

(d) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Poznámka. Obecně mohou být vektorové prostory nad libovolným polem ($\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}_3, ...$), my ale budeme pracovat jen s vektorovými prostory nad $\mathbb{R}$ a tedy od tohoto okamžiku je každý vektorový prostor V myšlen nad $\mathbb{R}$, pokud neřekneme jinak.

Definice 5. Báze vektorového prostoru V je množina lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární obal je roven celému prostoru V. V konečně dimenzionálním prostoru dimenze n je bází každá množina obsahující n lineárně nezávislých vektorů. Je-li $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bází n-rozměrného vektorového prostoru V, pak libovolný vektor $v \in V$ lze vyjádřit pomocí jednoznačně určených koeficientů $a_i \in \mathbb{R}$ jako $v = \sum a_i e_i$. Čísla $\{a_i\}$ se pak nazývají *souřadnice vektoru* v v bázi B.

Definice 6. Nechť X a Y jsou vektorové prostory (nad $\mathbb{R}$). Potom zobrazení $L : X \longrightarrow Y$ se nazývá *lineární*, pokud pro všechna $x, y \in X$ a všechna $q \in \mathbb{R}$ splňuje:

a) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ (aditivita),

b) $L(qx) = qL(x)$ (homogenita).

Definice 7. Nechť V je vektorový prostor a nechť $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ a $\mathbf{e'}_1, ..., \mathbf{e'}_n$ jsou dvě báze prostoru V. Nechť dále je:

$$\mathbf{e'}_1 = a_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{e}_2 + ... + a_{n1} \cdot \mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{e'}_2 = a_{12} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{e}_2 + ... + a_{n2} \cdot \mathbf{e}_n,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e'}_n = a_{1n} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{2n} \cdot \mathbf{e}_2 + ... + a_{nn} \cdot \mathbf{e}_n.$$

Pak matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice přechodu od báze* $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ *k bázi* $\mathbf{e'}_1, ..., \mathbf{e'}_n$.

Pro lepší pochopení matice přechodu uvedeme příklad na přechod od báze α k bázi β.

■ **Příklad 2.1.** Zvolíme si bázi. Potom každý vektor má vzhledem k této bázi souřadnice. Jestliže tyto souřadnice vynásobíme maticí přechodu, dostaneme souřadnice v jiné bázi. Na prostoru $\mathbb{R}^4$ máme báze α a β ve tvaru:

$$\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\beta = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Máme zadaný vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Napíšeme tento vektor v souřadnicích báze α :

$$\mathbf{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}_\alpha = (2, 1, -1, 0)^T.$$

Nyní napíšeme vektor $\mathbf{v}$ v bázi β :

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}_\beta = (1, 1, -1, 0)^T.$$

Pro libovolné dvě báze můžeme sestrojit matici přechodu, tj. matici A splňující:

$$\mathbf{v}_\alpha = A_{\alpha\beta}\mathbf{v}_\beta$$

V našem případě hned víme jak bude matice přechodu vypadat díky tomu, že se jedná o přechod od standardní báze k bázi β a matice přechodu tvoří tedy vektory báze β ve sloupcích:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a ověříme

$$\mathbf{v}_\alpha = A_{\alpha\beta}\mathbf{v}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Skalární součin, symplektická forma a komplexní struktura

Definice 8. Nechť V je vektorový prostor. Buď $\langle\ ,\ \rangle$ zobrazení množiny $V \times V$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ splňující následující podmínky:

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

b) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

c) $\langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, r \in \mathbb{R}$,

d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ pro každé $\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$.

Pak řekneme, že na vektorovém prostoru V je definován *skalární součin* vektorů a vektorový prostor V se nazývá vektorový prostor se skalárním součinem (nebo s vnitřním součinem) nebo *euklidovský prostor*. Reálné číslo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ se nazývá skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Skalární součin můžeme reprezentovat ve vhodné bázi jako:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T E \mathbf{y},$$

kde E je jednotková matice.

Definice 9. Nechť V je vektorový prostor dimenze $2n$. Buď $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ s těmito vlastnostmi:

a) $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

b) $\omega(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

c) $\omega(r\mathbf{u}, \mathbf{v}) = r\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, r \in \mathbb{R}$,

d) $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\ \forall \mathbf{v} \in V$, pak $\mathbf{u} = 0$.

Potom zobrazení ω nazýváme symplektická forma. Symplektickou formu ω můžeme reprezentovat ve vhodné bázi jako

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \omega \mathbf{y},$$

kde

$$\omega = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & O_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Definice 10. Nechť V je vektorový prostor, na kterém zavedeme zobrazení $I : V \longrightarrow V$, pro které platí :

$$I^2 = -E.$$

Potom zobrazení nazýváme *komplexní struktura* a ve vhodné bázi ji můžeme reprezentovat:

$$I = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & O_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

2.4. Minkowského prostor

Jako motivaci užitečnosti uvažování ve 4-rozměrném prostoru si zavedeme pojem Minkowského prostoru. Tento prostor je pojmenován po německém matematikovi Hermanu Minkowském. Ve fyzice a matematice je Minkowského prostor matematické uspořádaní, ve kterém je definována Einsteinova speciální teorie relativity. Je často srovnáván s Euklidovským prostorem. Euklidovský prostor má pouze prostorovou (prostoru podobnou) dimenzi, kdežto Minkowského prostor má 3 prostorové dimenze a jednu časovou (času podobnou) dimenzi.

Jedná se o čtyřdimenzionální vektorový prostor vybavený nedegenerativní, symetrickou bilineární formou s označením $(-,+,+,+)$. Prvky Minkowského prostoru nazýváme události nebo čtyřvektory. Pro zdůraznění označení $(-,+,+,+)$ se prostor označuje $R^{1,3}$ nebo také M^4 a M.

Minkowského skalární součin

Definice 11. Nechť V je 4-dimenzionální reálný vektorový prostor. Minkowského skalární součin je zobrazení $\eta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, které splňuje vlastnosti:

a) $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \ \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

b) $\eta(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

c) $\eta(a\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, r \in \mathbb{R}$,

d) $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \ \ \forall \mathbf{w} \in V$ potom $\mathbf{v} = 0$,

e) signatura η je $(+,-,-,-)$ nebo $(-,+,+,+)$, (volba je otázka konvence).

Musíme poznamenat, že toto není skalární součin v běžném smyslu, protože není pozitivně-definitní, to znamená, že norma Minkowského prostoru $||v||$, definovaná $||v||^2 = \eta(v, v)$ nemusí být kladná. Podmínka pozitivní-definitnosti zde byla nahrazena slabší podmínkou nedegenerovanosti, tj. že vnitřní součin je indefinitní. Minkowského skalární součin, Minkowského norma a Minkowského metrika je vlastně chybné pojmenování, jelikož je v rozporu se standardním označením skalárního součinu, metriky nebo normy.

Stejně jako v Euklidovském prostoru, dva vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou ortogonální, jestliže platí $\eta(v, w) = 0$. Vektor $\mathbf{v}$ se nazývá jednotkový vektor, jestliže $\eta(v, v) = \pm 1$. Báze pro M, která se skládá ze vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů, se nazývá ortonormální báze.

Standardní báze

Pro Minkowského prostor uvádíme standardní báze jako soubor čtyř ortogonálních vektorů (e_0, e_1, e_2, e_3), pro které platí:

$$-e_0^2 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1.$$

Tuto podmínku můžeme přepsat do tvaru:

$$\langle e_\mu, e_v \rangle = \eta_{\mu v},$$

kde $\mu, v = 0, 1, 2, 3$ a matice η je dána takto:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Složky vektoru $\mathbf{v}$ zapisujeme (v^0, v^1, v^2, v^3) a užíváme Einsteinův zápis pro vektor $\mathbf{v} = v^\mu e_\mu$ (tím rozumíme úmluvu, podle níž ve vztazích, kde je týž index použit zároveň jako dolní a horní, provádíme podle tohoto indexu sčítání). Složka v^0 se nazývá časová složka vektoru $\mathbf{v}$, další tři složky nazýváme prostorové složky.

Skalární součin mezi dvěma vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ je dán takto:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \eta_{\mu v} \mathbf{v}^\mu \mathbf{w}^v = -\mathbf{v}^0\mathbf{w}^0 + \mathbf{v}^1\mathbf{w}^1 + \mathbf{v}^2\mathbf{w}^2 + \mathbf{v}^3\mathbf{w}^3$$

a kvadrát normy vektoru $\mathbf{v}$ takto:

$$\| \mathbf{v} \|^2 = \eta_{\mu v} \mathbf{v}^\mu \mathbf{v}^v = -(\mathbf{v}^0)^2 + (\mathbf{v}^1)^2 + (\mathbf{v}^2)^2 + (\mathbf{v}^3)^2.$$

2.5. Trojné struktury

Definice 12. Nechť V je vektorový prostor, na kterém jsou dány tři lineární zobrazení $I, J, K : V \longrightarrow V$, které vyhovují vztahům:

a) $I^2 = \epsilon_1 E, J^2 = \epsilon_2 E, K^2 = \epsilon_3 E$,kde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{-1, +1\}$,

b) $IJ \pm JI = 0$,

c) $K = IJ$,

potom tyto zobrazení nazýváme *trojné struktury.*

1. **Biparakomplexní struktura**

   Definice 13. Nechť V je vektorový prostor, na kterém je definovaná trojná struktura s lineárními zobrazeními I, J, K splňující následující podmínky:

   $$I^2 = J^2 = E, IJ = -JI, K^2 = IJIJ = -E,$$

   potom dvojici $(V, (I, J, K))$ nazýváme *biparakomplexní struktura.*

   Lemma 1. *Nechť $(V, (I, J, K))$ je biparakomplexní struktura, pak můžeme ve vhodné bázi lineární zobrazení I, J realizovat jako matice:*

   $$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Zde připomeňme poznámku z kapitoly 2.2. Hovoříme tam o používání dimenze 4 a o realizování struktur pomocí matic majících 4 ×4 bloky. Ověříme vlastnosti biparakomplexní struktury:

$$IJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-JI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow IJ = -JI,$$

tedy IJ antikomutuje.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a zjevně $K^2 = -E$.

□

2. **Hypersoučinová struktura**

Definice 14. Nechť V je vektorový prostor, na kterém je definovaná trojná struktura s lineárními zobrazeními I, J, K splňující následující podmínky:

$$I^2 = J^2 = E, IJ = JI, K^2 = E,$$

potom dvojici $(V, (I, J, K))$ nazýváme *hypersoučinová struktura.*

Lemma 2. *Nechť $(V, (I, J, K))$ je hypersoučinová struktura, pak můžeme ve vhodné bázi lineární zobrazení I, J realizovat jako matice:*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Ověříme vlastnosti hypersoučinové struktury:

$$IJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$JI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow IJ = JI,$$

tedy IJ komutuje.

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a zjevně $K^2 = E$.

□

3. **Bikomplexní struktura**

Definice 15. Nechť V je vektorový prostor, na kterém je definovaná trojná struktura s lineárními zobrazeními I, J, K splňující následující podmínky:

$$I^2 = J^2 = -E, IJ = JI, K^2 = IJIJ = I^2J^2 = E,$$

potom dvojici $(V, (I, J, K))$ nazýváme *bikomplexní struktura.*

Lemma 3. *Nechť $(V, (I, J, K))$ je bikomplexní struktura, pak můžeme ve vhodné bázi lineární zobrazení I, J realizovat jako matice:*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz. Ověříme vlastnosti bikomplexní struktury:

$$IJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$JI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow IJ = JI,$$

tedy IJ komutuje.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a zjevně $K^2 = E$.

□

4. **Hyperkomplexní (Kvaternionová) struktura**

Definice 16. Nechť V je vektorový prostor, na kterém je definovaná trojná struktura s lineárními zobrazeními I, J, K splňující následující podmínky:

$$I^2 = J^2 = -E, IJ = -JI, K^2 = -E,$$

potom dvojici $(V, (I, J, K))$ nazýváme *hyperkomplexní struktura.*

Lemma 4. *Nechť $(V, (I, J, K))$ je hyperkomplexní struktura, pak můžeme ve vhodné bázi lineární zobrazení I, J realizovat jako matice:*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Ověříme vlastnosti hyperkomplexní struktury:

$$IJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-JI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow IJ = JI,$$

tedy IJ antikomutuje.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a zjevně $K^2 = -E$.

□

V následující tabulce jsou stručně popsány trojné struktury. Je z ní dobře vidět komutativita $\times$ antikomutativita jednotlivých struktur a vlastnosti jednotek I, J, K.

Struktura	I^2	J^2	K^2	$IJ = JI$	$IJ = -JI$
Biparakomplexní	E	E	-E	-	✓
Hypersoučinová	E	E	E	✓	-
Bikomplexní	-E	-E	E	✓	-
Hyperkomplexní	-E	-E	-E	-	✓

Tabulka 2.2: Trojné struktury

2.6. Geometrické struktury

Mějme vektorový prostor V, množinu všech bází vektorového prostoru označujeme P^1V a množinu všech matic přechodu označujeme $GL(V)$.

Lemma 5. *Množina P^1V je v jedno-jednoznačné korespondenci s množinou $GL(V)$.*

Důkaz. Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor. Potom $\langle \bar{\mathbf{e}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n \rangle$ je báze tohoto prostoru a platí:

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n \rangle \in P^1V \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix}$ je matice přechodu od standardní báze k bázi $\langle \bar{\mathbf{e}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n \rangle$. Tato báze tvoří sloupce matice A.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} \in GL(V) \longmapsto \langle \bar{\mathbf{e}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n \rangle.$$

Tedy sloupce matice A jsou prvky báze $\langle \bar{\mathbf{e}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n \rangle$ vektorového prostoru V. □

Definice 17. Nechť V je vektorový prostor. Nechť grupa G je podgrupa $GL(V)$. Pak dvojici (V, G) nazýváme *geometrickou strukturou* (G-strukturou) na vektorovém prostoru V.

K každému prostoru (euklidovský, symplektický, ...) sestrojíme příslušnou geometrickou strukturu tak, že za G zvolíme právě ty matice přechodu, které zachovávají zadefinované objekty.

Pro všechny následující výpočty uvažujeme obecnou matici přechodu A ve tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

1. SKALÁRNÍ SOUČIN:

   Máme-li na prostoru V zaveden skalární součin $\langle \ , \ \rangle$ chceme, aby matice přechodu skalární součin zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y} \Longrightarrow A^T A = E,$$

Výpočet:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy, aby platilo $A^T A = E$ musí být splněny následující rovnice:

$$\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 &= 1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} + a_{42}a_{43} &= 0,\\
a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{42}^2 &= 1, & a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34} + a_{42}a_{44} &= 0,\\
a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 + a_{43}^2 &= 1, & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} + a_{43}a_{41} &= 0,\\
a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 + a_{44}^2 &= 1, & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} + a_{43}a_{42} &= 0,\\
a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} &= 0, & a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{43}a_{44} &= 0,\\
a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} + a_{41}a_{43} &= 0, & a_{14}a_{11} + a_{24}a_{21} + a_{34}a_{31} + a_{44}a_{41} &= 0,\\
a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34} + a_{41}a_{44} &= 0, & a_{14}a_{12} + a_{24}a_{22} + a_{34}a_{32} + a_{44}a_{42} &= 0,\\
a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} + a_{42}a_{41} &= 0, & a_{14}a_{13} + a_{24}a_{23} + a_{34}a_{33} + a_{44}a_{43} &= 0.
\end{aligned}$$

Množina matic přechodu je tedy určena 16-ti kvadratickými rovnicemi.

Na prostoru se skalárním součinem tvoří matice přechodu ortogonální grupu

$$O(4,\mathbb{R}) = \{A \mid A^T A = E\}.$$

2. SYMPLEKTICKÁ FORMA:

Máme-li na prostoru V zavedenu symplektickou formu ω chceme, aby matice přechodu symplektickou formu zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$\mathbf{x}^T\omega\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T\omega(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(A^T\omega A)\mathbf{y} \Longrightarrow A^T\omega A = \omega$$

Výpočet:

$$A^T\omega A = \begin{pmatrix} -a_{41} & -a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ -a_{42} & -a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ -a_{43} & -a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ -a_{44} & -a_{34} & a_{24} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy, aby platilo $A^T\omega A = \omega$ musí být splněny následující rovnice:

$$\begin{aligned}
-a_{41}a_{14} - a_{31}a_{24} + a_{21}a_{34} + a_{11}a_{44} &= 1, & -a_{42}a_{12} - a_{32}a_{22} + a_{22}a_{32} + a_{12}a_{42} &= 0,\\
-a_{42}a_{13} - a_{32}a_{23} + a_{22}a_{33} + a_{12}a_{43} &= 1, & -a_{42}a_{14} - a_{32}a_{24} + a_{22}a_{34} + a_{12}a_{44} &= 0,\\
-a_{43}a_{12} - a_{33}a_{22} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{42} &= -1, & -a_{43}a_{11} - a_{33}a_{21} + a_{23}a_{31} + a_{13}a_{41} &= 0,\\
-a_{44}a_{11} - a_{34}a_{21} + a_{24}a_{31} + a_{14}a_{41} &= -1, & -a_{43}a_{13} - a_{33}a_{23} + a_{23}a_{33} + a_{13}a_{43} &= 0,\\
-a_{41}a_{11} - a_{31}a_{21} + a_{21}a_{31} + a_{11}a_{41} &= 0, & -a_{43}a_{14} - a_{33}a_{24} + a_{23}a_{34} + a_{13}a_{44} &= 0,\\
-a_{41}a_{12} - a_{31}a_{22} + a_{21}a_{32} + a_{11}a_{42} &= 0, & -a_{44}a_{12} - a_{34}a_{22} + a_{24}a_{32} + a_{14}a_{42} &= 0,\\
-a_{41}a_{13} - a_{31}a_{23} + a_{21}a_{33} + a_{11}a_{43} &= 0, & -a_{44}a_{13} - a_{34}a_{23} + a_{24}a_{33} + a_{14}a_{43} &= 0,\\
-a_{42}a_{11} - a_{32}a_{21} + a_{22}a_{31} + a_{12}a_{41} &= 0, & -a_{44}a_{14} - a_{34}a_{24} + a_{24}a_{34} + a_{14}a_{44} &= 0.
\end{aligned}$$

Na prostoru se symplektickou formou tvoří matice přechodu grupu

$$Sp(4,\mathbb{R}) = \{A \mid A^T\omega A = \omega\}.$$

3. KOMPLEXNÍ STRUKTURA:

   Máme-li na prostoru V zavedenu komplexní strukturu I chceme, aby matice přechodu komplexní strukturu zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$I^2 = -E.$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zde si matici přechodu označíme X, aby se nám výraz neopakoval ve výsledku. Pro matici přechodu komplexní struktury musí platit:

$$XI = IX.$$

$$XI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} & -a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ -a_{24} & -a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ -a_{34} & -a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ -a_{44} & -a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}.$$

$$IX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \end{pmatrix}.$$

Této podmínce vyhovuje matice X ve tvaru:

$$X = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ -H & -G & F & E \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix}.$$

4. MINKOWSKÉHO SOUČIN

Máme-li na prostoru V zaveden Minkowského součin η chceme, aby matice přechodu Minkowského součin zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$A^T \eta A = \eta.$$

Výpočet:

$$A^T \eta A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ -a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ -a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy aby platilo $A^T \eta A = \eta$, musí být splněny následující rovnice:

$$\begin{aligned} -a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 = -1, &\quad -a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} + a_{42}a_{43} = 0, \\ -a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{42}^2 = 1, &\quad -a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34} + a_{42}a_{44} = 0, \\ -a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 + a_{43}^2 = 1, &\quad -a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} + a_{43}a_{41} = 0, \\ -a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 + a_{44}^2 = 1, &\quad -a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} + a_{43}a_{42} = 0, \\ -a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} = 0, &\quad -a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{43}a_{44} = 0, \\ -a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} + a_{41}a_{43} = 0, &\quad -a_{14}a_{11} + a_{24}a_{21} + a_{34}a_{31} + a_{44}a_{41} = 0, \\ -a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34} + a_{41}a_{44} = 0, &\quad -a_{14}a_{12} + a_{24}a_{22} + a_{34}a_{32} + a_{44}a_{42} = 0, \\ -a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} + a_{42}a_{41} = 0, &\quad -a_{14}a_{13} + a_{24}a_{23} + a_{34}a_{33} + a_{44}a_{43} = 0. \end{aligned}$$

Tabulka uvádí vždy základní strukturu a příslušnou grupu matic přechodu:

Struktura	Grupa
Skalární součin	O(4, ℝ)
Symplektická forma	Sp(4)
Komplexní struktura	Su(4)

Tabulka 2.3: Tabulka výsledných grup pro základní struktury

Nyní shrneme výsledky pro základní struktury uvedené v tabulce 2.3.

Poznámka. Potřebujeme spočítat všechny možné kombinace základních struktur. Tedy máme 3 základní struktury, 3 dvojice základních struktur a jednu trojici. To by nám celkem dalo 7 možností. Následující věta ale ukáže, že některé možnosti splývají.

Definice 18. Nechť (V, G) je geometrická struktura, pak pro:

- $G = O(4, \mathbb{R})$ nazýváme dvojici (V, G) euklidovskou strukturou,
- $G = Sp(4)$ nazýváme dvojici (V, G) symplektickou strukturou,
- $G = Su(4)$ nazýváme dvojici (V, G) komplexní strukturou.

Věta 1. *Nechť V je vektorový prostor, na kterém jsou definovány dvě ze tří základních geometrických struktur (tj. geometrické struktury pro volbu $G = O(4,\mathbb{R}), G = Sp(4),\ G = Su(4)$), pak je na něm automaticky definována i třetí základní geometrická struktura.*

Důkaz. Mějme $(G_1, V), (G_2, V)$ dvě ze tří základních geometrických struktur, tedy matice přechodu zachovávající příslušné geometrie jsou právě G_1, G_2. Pokud na vektorovém prostoru V existují obě struktury současně, je příslušná grupa $G_1 \cap G_2$.

- Pokud má jít současně o komplexní a symplektickou strukturu, musí platit, že matice přechodu je tvaru:

$$X = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ -H & -G & F & E \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix}.$$

A současně má tato struktura zachovávat i symplektickou formu, tedy podmínku $X^T \omega X = \omega$, musí platit:

$$X^T\omega = \begin{pmatrix} A & E & -H & -D \\ B & F & -G & -C \\ C & G & F & B \\ D & H & E & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & H & E & A \\ C & G & F & B \\ -B & -F & G & C \\ -A & -E & H & D \end{pmatrix}.$$

$$X^T\omega X = \begin{pmatrix} D & H & E & A \\ C & G & F & B \\ -B & -F & G & C \\ -A & -E & H & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ -H & -G & F & E \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix}.$$

Vypočtenou matici porovnáme s maticí ω.
Vypíšeme podmínky, které dostaneme porovnáním výsledné matice s maticí ω.
Dostáváme podmínky:

$$D^2 + H^2 + E^2 + A^2 = 1,$$

$$C^2 + G^2 + F^2 + B^2 = 1,$$

$$B^2 + F^2 + G^2 + C^2 = 1,$$

$$A^2 + E^2 + H^2 + D^2 = 1,$$

$$BD + FH - EG - AC = 0,$$

$$CD + GH + EF + AB = 0.$$

Ostatní prvky matice se opakují nebo jsou nulové.

- Pokud má jít současně o komplexní strukturu a skalární součin, musí být matice přechodu tvaru:

$$X = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ -H & -G & F & E \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix}.$$

  a musí vyhovovat podmínce $X^T X = E$. Po vypočtení této rovnice dostaneme stejné podmínky jako pro zachování komplexní struktury současně se symplektickou formou. Tedy platí:

$$(I, \langle , \rangle) \cong (I, \omega).$$

- Nyní zbývá dokázat, že pokud matice přechodu zachovává skalární součin a symplektickou formu, zachovává i komplexní strukturu. Tedy musí vyhovovat současně podmínkám $A^T A = E$ a $A^T \omega A = \omega$. Budeme uvažovat obecnou matici přechodu Y tohoto tvaru:

$$Y = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}.$$

Následující podmínky jsme dostali z výpočtů rovnic $Y^T Y = E$ a $Y^T \omega Y = \omega$.

$$\begin{array}{ccc}
A^2+E^2+I^2+M^2=1, & CB+GF+KJ+ON=0, & -MC-IG+EK+AO=0, \\
B^2+F^2+J^2+N^2=1, & CD+HG+KL+OP=0, & -NA-JE+FI+BM=0, \\
C^2+G^2+K^2+O^2=1, & DA+HE+LI+PM=0, & -NB-JF+FJ+BN=0, \\
D^2+H^2+L^2+P^2=1, & DB+HF+LJ+PN=0, & -ND-JH+FL+BP=0, \\
AB+EF+IJ+MN=0, & DC+HG+LK+PO=0, & -OA-KE+GI+CM=0, \\
AC+EG+IK+MO=0, & -MD-IH+EL+AP=1, & -OC-KG+GK+CO=0, \\
AD+EH+IL+MP=0, & -NC-JG+FK+BO=1, & -OD-KH+GL+CP=0, \\
BA+FE+JI+NM=0, & -OB-KF+GJ+CN=-1, & -PB-LF+HJ+DN=0, \\
BC+FG+JK+NO=0, & -PA-LE+HI+DM=-1, & -PC-LG+HK+DO=0, \\
BD+FH+JL+NP=0, & -MA-IE+EI+AM=0, & -PD-LH+HL+DP=0, \\
CA+GE+KI+OM=0, & -MB-IF+EJ+AN=0, &
\end{array}$$

Pro dokončení důkazu stejnou metodou jako v předešlých dvou odrážkách bychom potřebovali z podmínek výše dokázat, že platí:

$$I = -H, J = -G, K = F, L = E, M = -D, N = -C, O = B, P = A.$$

Můžeme, ale využít toho, že maticově $\omega = I$ a protože struktura zachovává skalární součin ($Y^T Y = E$) platí, že $(Y^T)^{-1} = Y$. Díky tomu, že struktura současně zachovává i symplektickou formu $Y^T \omega Y = \omega$ dostáváme:

$$\omega Y = (Y^T)^{-1} \omega = Y \omega$$

Můžeme říci, že věta platí. □

Důsledek 1. *Díky těmto poznatkům stačí na vektorovém prostoru požadovat vlastnosti jen dvou ze tří základních struktur a třetí je automaticky zachována. Tedy počet možných kombinací jsme zmenšili na 4 kombinace.*

Po zpracování výsledků pro základní struktury budeme pokračovat ve výpočtech matic přechodu pro trojné struktury.

5. BIPARAKOMPLEXNÍ STRUKTURA

Obecnou matici A budeme dále uvažovat i pro trojné struktury:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Máme-li na prostoru V zavedenu biparakomplexní strukturu chceme, aby matice přechodu tuto biparakomplexní strukturu zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$IA = AI, JA = AJ.$$

Výpočty provedeme:

$$IA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \end{pmatrix}.$$

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} & a_{13} & a_{12} & -a_{11} \\ -a_{24} & a_{23} & a_{22} & -a_{21} \\ -a_{34} & a_{33} & a_{32} & -a_{31} \\ -a_{44} & a_{43} & a_{42} & -a_{41} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu IA a AI. Dostáváme matici $M1$:

$$M1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ H & G & F & E \\ D & C & B & A \end{pmatrix}.$$

Nyní to samé vypočítáme pro jednotku J.

$$JA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

$$AJ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} & a_{14} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & a_{24} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} & a_{34} \\ -a_{41} & a_{42} & -a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu JA a AJ. Dostáváme matici $N1$:

$$N1 = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ I & 0 & K & 0 \\ 0 & N & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Musíme porovnat matice $M1$ a $N1$ z dílčích výpočtů, abychom dostali konečnou matici přechodu pro biparakomplexní strukturu, která je po srovnání tohoto tvaru:

$$\Longrightarrow Z1 = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

6. HYPERSOUČINOVÁ STRUKTURA

Máme-li na prostoru V zavedenu hypersoučinovou strukturu chceme, aby matice přechodu tuto hypersoučinovou strukturu zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$IA = AI, JA = AJ.$$

Výpočty provedeme:

$$IA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} \\ a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu IA a AI. Dostáváme matici $M2$:

$$\Longrightarrow M2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ C & D & A & B \\ G & H & E & F \end{pmatrix}.$$

Nyní to samé vypočítáme pro jednotku J:

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

$$AJ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} & a_{14} & -a_{11} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{24} & -a_{21} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{34} & -a_{31} & a_{32} \\ -a_{43} & a_{44} & -a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu JA a AJ. Dostáváme matici $N2$:

$$\Longrightarrow N2 = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Musíme porovnat matice $M2$ a $N2$ z dílčích výpočtů, abychom dostali konečnou matici přechodu pro hypersoučinovou strukturu, která je po srovnání tohoto tvaru:

$$\Longrightarrow Z2 = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

7. BIKOMPLEXNÍ STRUKTURA

Máme-li na prostoru V zavedenu bikomplexní strukturu chceme, aby matice přechodu tuto bikomplexní strukturu zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$IA = AI, JA = AJ.$$

Výpočty provedeme:

$$IA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{pmatrix}.$$

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} & -a_{14} & a_{11} & a_{12} \\ -a_{23} & -a_{24} & a_{21} & a_{22} \\ -a_{33} & -a_{34} & a_{31} & a_{32} \\ -a_{43} & -a_{44} & a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu IA a AI. Dostáváme matici $M3$:

$$\Longrightarrow M3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ -C & -D & A & B \\ -G & -H & E & F \end{pmatrix}.$$

Nyní to samé vypočítáme pro jednotku J :

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{pmatrix}.$$

$$AJ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & -a_{14} & -a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & -a_{24} & -a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & -a_{34} & -a_{31} & a_{32} \\ a_{43} & -a_{44} & -a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu JA a AJ. Dostáváme matici $N3$:

$$\Longrightarrow N3 = \begin{pmatrix} A & -B & -C & D \\ E & F & G & H \\ C & D & A & B \\ G & -H & -E & F \end{pmatrix}.$$

Musíme porovnat matice $M3$ a $N3$ z dílčích výpočtů, abychom dostali konečnou matici přechodu pro bikomplexní strukturu, která je po srovnání tohoto tvaru:

$$\Longrightarrow Z3 = \begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

8. HYPERKOMPLEXNÍ STRUKTURA

Máme-li na prostoru V zavedenu hyperkomplexní strukturu chceme, aby matice přechodu tuto hyperkomplexní strukturu zachovávala, tj. aby platilo následující:

$$IA = AI, JA = AJ.$$

Výpočty provedeme:

$$IA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{pmatrix}.$$

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} & -a_{14} & a_{11} & a_{12} \\ -a_{23} & -a_{24} & a_{21} & a_{22} \\ -a_{33} & -a_{34} & a_{31} & a_{32} \\ -a_{43} & -a_{44} & a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu IA a AI. Dostáváme matici $M4$:

$$\Longrightarrow M4 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ -C & -D & A & B \\ -G & -H & E & F \end{pmatrix}.$$

Nyní to samé vypočítáme pro jednotku J.

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \end{pmatrix}.$$

$$AJ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & -a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{22} & -a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{31} & -a_{34} & a_{33} \\ a_{42} & -a_{41} & -a_{44} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme výsledné matice z výpočtu JA a AJ. Dostáváme matici $N4$:

$$\Longrightarrow N4 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ E & F & G & H \\ F & -E & -H & G \end{pmatrix}.$$

Musíme porovnat matice $M4$ a $N4$ z dílčích výpočtů, abychom dostali konečnou matici přechodu pro hyperkomplexní strukturu, která je po srovnání tohoto tvaru:

$$\Longrightarrow Z4 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}.$$

Tabulka uvádí vždy trojnou strukturu a příslušnou grupu matic přechodu (označení prvních tří grup jsme si zvolili).

Struktura	Grupa
Biparakomplexní	$Bip(4,\mathbb{R})$
Hypersoučinová	$Hyp(4,\mathbb{R})$
Bikomplexní	$Bik(4,\mathbb{R})$
Hyperkomplexní	$GL(n,\mathbb{H})$

Tabulka 2.4: Tabulka výsledných grup pro trojné struktury

I zde potřebujeme spočítat všechny možné kombinace trojných struktur. Tedy máme 4 trojné struktury, 6 dvojic trojných struktur, 4 trojice a jednu čtveřici. To by nám celkem dalo 15 možností. Následující výsledky opět dokáží, že zmíněných struktur je ve skutečnosti mnohem méně.

1. Dvojice indukující vektorový prostor s pevně zvolenou bází (až na násobek):

Věta 2. *Nechť V je vektorový prostor, na kterém zavedeme dvojice trojných struktur: biparakomplexní a bikomplexní struktury, hypersoučinové a hyperkomplexní struktury a bikomplexní a hyperkomplexní struktury. Potom jejich výsledná matice přechodu je násobkem jednotkové matice.*

Důkaz. **a)** Biparakomplexní a bikomplexní struktura

$$\begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto dvou struktur (biparakomplexní a bikomplexní) dostaneme společnou matici přechodu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

b) Hypersoučinová a hyperkomplexní srtuktura

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto dvou struktur (hypersoučinové a hyperkomplexní) dostaneme společnou matici přechodu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

c) Bikomplexní a hyperkomplexní struktura

$$\begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto dvou struktur (bikomplexní a hyperkomplexní) dostaneme společnou matici přechodu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

□

2. Ostatní dvojice:

a) Biparakomplexní a hypersoučinová struktura

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto dvou struktur (biparakomplexní a hypersoučinové) dostaneme společnou matici přechodu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & A & 0 & C \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

b) Biparakomplexní a hyperkomplexní struktura

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto dvou struktur (biparakomplexní a hyperkomplexní) dostaneme společnou matici přechodu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & -H & 0 \\ 0 & A & 0 & H \\ H & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & A \end{pmatrix}.$$

c) Hypersoučinová a bikomplexní struktura

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto dvou struktur (hypersoučinové a bikomplexní) dostaneme společnou matici přechodu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Důsledek 2. *Z tohoto srovnání dvojic trojných struktur můžeme konstatovat, že má smysl uvažovat kombinace trojných struktur, které nám nevyšly jako násobek jednotkové matice.*

Trojice trojných struktur

Nyní si vezmeme vždy trojici trojných struktur, srovnáme a zjistíme, zda má smysl uvažovat tři struktury současně.

Věta 3. *Nechť V je vektorový prostor, na kterém máme nadefinované trojné struktury a jejich grupy matic přechodu. Jestliže uvažujeme jejich trojice, potom výsledné matice přechodu jsou struktury G (podgrupy $GL(V)$) takové, že G jsou generovány násobkem jednotkové matice.*

1. Biparakomplexní + hypersoučinová + bikomplexní

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

   Po srovnání těchto tří matic přechodu pro dané struktury zjistíme, že společná matice přechodu je va tvaru:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

2. Biparakomplexní + hypersoučinová + hyperkomplexní

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}.$$

   Po srovnání těchto tří matic přechodu pro dané struktury zjistíme, že společná matice přechodu je va tvaru:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

3. Biparakomplexní + bikomplexní + hyperkomplexní

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}.$$

   Po srovnání těchto tří matic přechodu pro dané struktury zjistíme, že společná matice přechodu je va tvaru:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

4. Hypersoučinová + bikomplexní + hyperkomplexní

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}.$$

Po srovnání těchto tří matic přechodu pro dané struktury zjistíme, že společná matice přechodu je va tvaru:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Důsledek 3. *Můžeme říci, že nemá smysl zavádět tři trojné struktury současně, jelikož společné matice přechodu jsou násobky jednotkové matice. Tedy kombinací tří trojných struktur už nový výsledek nezískáme.*

2.7. Trojné a základní struktury

Kdybychom nezavedli věty pro zredukování počtu možných kombinací struktur a nyní chtěli trojné a základní struktury definovat současně, dostali bysme 105 různých možností kombinací. Z předchozího ale víme, že pro některé trojné struktury nemá smysl zavádět více jak jednu trojnou strukturu a současně stačí maximálně libovolné dvě ze tří základních struktur. Počet možných kombinací jsme tím tedy zmenšili na 28 možností. Nyní už je tedy možné nadefinovat základní struktury společně s trojnými a nezabere nám to takovou spoustu času.

Nemůžeme ale bezhlavě začít definovat vždy dvě základní struktury pro trojnou strukturu. Musíme uvažovat, která z trojných struktur již obsahuje komplexní strukturu, protože poté je třeba splnit vlastnost už jen jedné základní struktury a třetí je zachována. Z tabulky 2.2 vidíme, že biparakomplexní, bikomplexní a hyperkomplexní struktura již obsahuje komplexní sturkturu (tedy některá z jednotek I, J, K je na druhou rovna $-E$). Pro tyto tři struktury stačí tedy požadovat pouze jednu základní strukturu např. skalární součin a základní struktury budeme mít zachovány. Na hypersoučinové struktuře musíme požadovat dvě základní struktury.

Postupem jak docílit zachování dvou základních struktur na hypersoučinové struktuře je, že zkusíme této struktuře přiřadit další komplexní jednotku, např. P, která bude mít vlastnost $P^2 = -E$. Musíme zjistit, zda-li komutuje ($IP = PI$) nebo antikomutuje ($IP = -PI$). Tímto z této struktury dostaneme jednu z kombinací trojných struktur. Potom této struktuře přiřadíme skalární součin nebo symplektickou formu.

a) Biparakomplexní struktura se skalárním součinem

Definice 19. Mějme vektorový prostor V, na kterém zavedeme skalární součin a biparakomplexní strukturu $(V, \langle,\rangle, I, J, K)$.Potom ve vhodné bázi realizujeme:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Musí být zachována podmínka $X^T X = E$. Jako matici X uvažujeme matici přechodu pro tuto strukturu vypočtenou již dříve (značili jsme ji $Z1$) , ale pro lepší orientaci značení sjednotíme na X.

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

A počítáme $X^T X = E$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} A & 0 & H & 0 \\ 0 & F & 0 & C \\ C & 0 & F & 0 \\ 0 & H & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme následující grupu matic přechodu pro biparakomplexní strukturu, která zachovává skalární součin a tímto tedy základní struktury:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, A^2 + H^2 = 1, C^2 + F^2 = 1, AC + HF = 0, AF + CH = 0. \right\}$$

Dosáhli jsme zachování základních struktur na biparakomplexní struktuře.

b) Hypersoučinová struktura

Definice 20. Mějme vektorový prostor V, na kterém zavedeme skalární součin a hypersoučinovou strukturu $(V, \langle,\rangle, I, J, K)$.Potom ve vhodné bázi realizujeme:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tato struktura jako jediná neobsahuje vlastnost komplexní struktury. Musíme tedy na této struktuře zavést dvě struktury základní. Vybrali jsme skalární součin a symplektickou formu:

- Hypersoučinová struktura se skalárním součinem:
  Opět musí být zachována podmínka $X^T X = E$, aby na vektorovém prostoru V s hypersoučinovou strukturou bylo možno zavést skalární součin. Po výpočtu dostaneme grupu matic přechodu pro hypersoučinovou strukturu se skalárním součinem:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, 2AC = 0, 2HF = 0, A^2 + C^2 = 1, F^2 + H^2 = 1. \right\}$$

- Hypersoučinová struktura se symplektickou formou:
  Musí být zachována podmínka $X^T \omega X = \omega$, aby na vektorovém prostoru V s hypersoučinovou strukturou bylo možno zavést symplektickou formu. Po výpočtu dostaneme grupu matic přechodu pro hypersoučinovou strukturu se symplektickou formou:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, AH - CF = 0, AF - CH = 1. \right\}$$

Jako poslední krok přidáme hypersoučinové struktuře komplexní jednotku P v tomto tvaru:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro tuto komplexní jednotku platí: $P^2 = -E$ a $IP = -PI$.

Tedy hypersoučinová struktura po přidání komplexní jednotky P s jednotkou I antikomutuje. Přidáním komplexní jednotky P k hypersoučinové struktuře (I, J, K) dostaneme biparakomplexní strukturu (I, P, IP). Jedná se tedy o dvojici trojných struktur kterou jsme už klasifikovali.

c) Bikomplexní struktura se skalárním součinem

Definice 21. Mějme vektorový prostor V, na kterém zavedeme skalární součin a bikomplexní strukturu $(V, \langle , \rangle, I, J, K)$.Potom ve vhodné bázi realizujeme:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opět musí být zachována podmínka $X^T X = E$, aby na vektorovém prostoru V s bikomplexní strukturou bylo možno zavést skalární součin. Po výpočtu dostaneme grupu matic přechodu pro bikomplexní strukturu, která zachovává skalární součin a tímto tedy základní struktury:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}, A^2 + C^2 = 1, F^2 + H^2 = 1, -AC + CA = 0, FH - HF = 0.\right\}$$

Dosáhli jsme zachování základních struktur na bikomplexní struktuře.

d) Hyperkomplexní struktura se skalárním součinem

Definice 22. Mějme vektorový prostor V, na kterém zavedeme skalární součin a hyperkomplexní strukturu $(V, \langle,\rangle, I, J, K)$.Potom ve vhodné bázi realizujeme:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opět musí být zachována podmínka $X^T X = E$, aby na vektorovém prostoru V s hyperkomplexní strukturou bylo možno zavést skalární součin. Po výpočtu dostaneme grupu matic přechodu pro hyperkomplexní strukturu, která zachovává skalární součin a tímto tedy základní struktury:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}, A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.\right\}$$

Dosáhli jsme zachování základních struktur na hyperkomplexní struktuře.

K úplné klasifikaci nám schází popsat dvojice trojných struktur vybavených skalárním součinem, jejichž společná matice přechodu není násobkem jednotkové matice. Bereme-li dvojice musí už jedna z nich obsahovat komplexní jednotku a stačí tedy přidat jen skalární součin. Příslušný výpočet je jednoduchý a uvádíme jen výsledné grupy matic:

1. Dvojice biparakomplexní a hypersoučinové struktury:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & A & 0 & C \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, A^2 + C^2 = 1, AC + CA = 0.\right\}$$

2. Dvojice biparakomplexní a hyperkomplexní struktury:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & -H & 0 \\ 0 & A & 0 & H \\ H & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & A \end{pmatrix}, A^2 + H^2 = 1, -HA + AH = 0.\right\}$$

3. Dvojice hypersoučinové a bikomplexní struktury:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{pmatrix}, A^2 = F^2 = 1. \right\}$$

3. Lieovy grupy a algebry

3.1. Varieta

Před nadefinováním samotného pojmu variety je potřebné objasnit pojem mapa a atlas.

Velice dobrým a jednoduchým příkladem je zemský povrch (globus). Jestliže si globus idealizujeme, můžeme ho považovat za sféru, neboli spojitou zakřivenou dvourozměrnou plochu $\mathcal{S}^2$, pro kterou platí:

- lokálně můžeme zavést mapy souřadnic (např. mapu Evropy, Asie, atd.),
- mapy dohromady tvoří atlas pokrývající celou varietu $\mathcal{S}^2$,
- trajektorie (např. vlaku) je omezena jen na varietu,
- vůči jednotlivým mapám lze studovat nejen trajektorii, ale i rychlost nebo zrychlení, lze tedy derivovat a za jistých dodatečných podmínek integrovat,
- údaje určené z jednotlivých map lze mezi mapami na jejich překryvech konzistentně převádět, příslušné veličiny jsou tak určeny globálně, tedy 'bez ohledu' na konkrétní mapy.

Definice 23. Hladká varieta $\mathcal{M}$ je topologický prostor, jehož každý bod P leží v nějaké otevřené množině $\mathcal{U}$, která je spojitě vzájemně jednoznačně zobrazena na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Symbolicky to lze vyjádřit:

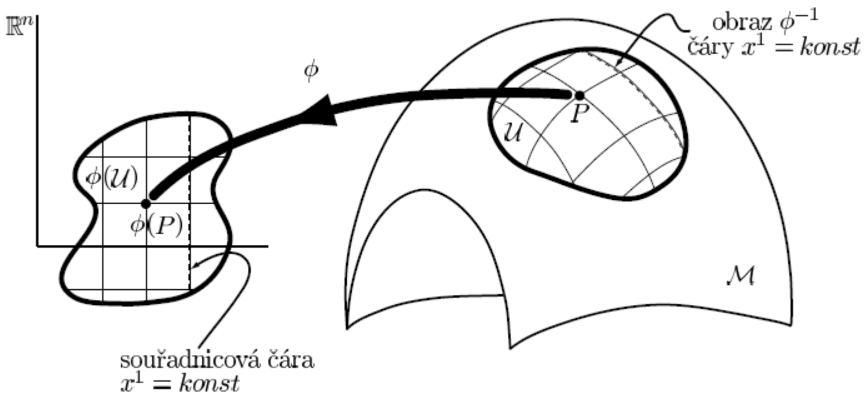
$$\forall P \in \mathcal{M} \quad \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{M},$$

taková, že

$$P \in \mathcal{U},$$

a $\exists$ spojité $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathcal{U} \longleftrightarrow \phi(\mathcal{U})$ je jednoznačné, přičemž

- ϕ nazýváme souřadnicové zobrazení,
- dvojici $(\mathcal{U}, \phi)$ nazýváme mapa,
- číslo n nazýváme dimenzí variety $\mathcal{M}$.



Obrázek 3.1: Varieta $\mathcal{M}$ je pokryta (lokálními) mapami neboli zobrazeními ϕ z $\mathcal{U}$ do $\mathbb{R}^n$.

3.2. Tečný prostor

Definice 24. Křivky c, c' na $\mathcal{M}$ se dotýtají v bodě $P \in \mathcal{M}$, jestliže

1. $c(0) = c'(0) = P$,
2. $\frac{d}{dt}|_0 x^i(c(t)) = \frac{d}{dt}|_0 x^i(c'(t))$,

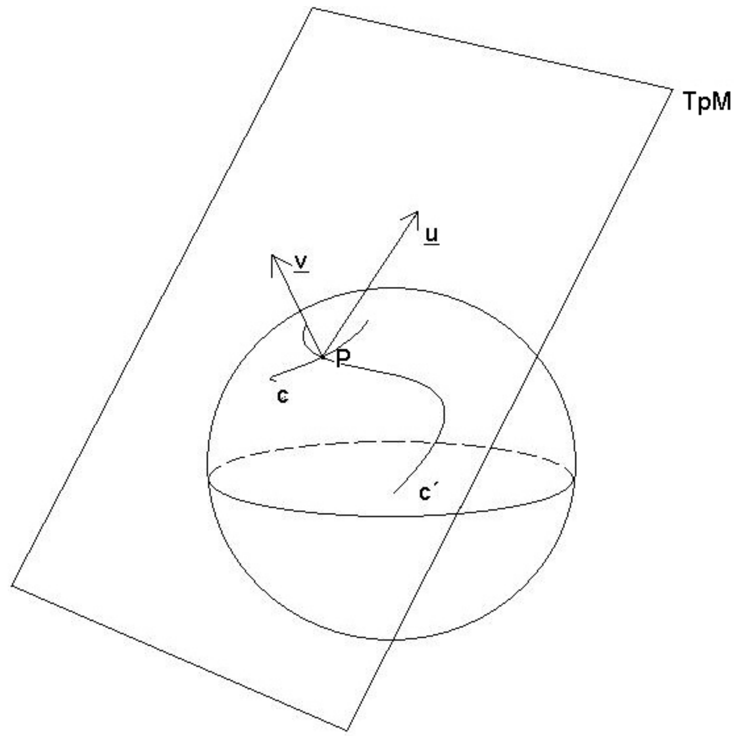
kde x^i jsou libovolné souřadnice v okolí P.

Definice 25. Vektor $\mathbf{v}$ v bodě $P \in \mathcal{M}$ je dán tečnou ke křivce $c(t)$ procházající bodem P. Vektor $\mathbf{v}$ má :

- daný směr (určený směrem křivky $c(t)$),
- danou velikost (určenou velikostí změny $c(t)$ se změnou t).

Definice 26. Skrze každý bod $P \in \mathcal{M}$ procházejí různé křivky různých parametrizací. Množinu všech vektorů určenou těmito křivkami nazýváme tečným prostorem $T_P\mathcal{M}$ k varietě $\mathcal{M}$ v bodě P.

Poznámka. Křivky $c(t)$ leží v $\mathcal{M}$, ale vektory $\mathbf{v}$ leží v $T_P\mathcal{M}$.



Obrázek 3.2: Tečný prostor $T_P\mathcal{M}$

3.3. Lieova algebra

Definice 27. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je vektorový prostor (nad polem $\mathbb{F}$) s bilineárním zobrazením $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, které nazýváme nosič (bracket) nebo komutátor a značíme ho $(X, Y) \longmapsto [X, Y]$. Má tyto vlastnosti:

1. $[X, X] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$,

2. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

První vlastnost se nazývá anti-komutativita a druhá vlastnost je Jacobiho identita.

Lieovu grupu můžeme svými slovy definovat jako objekt, který je zároveň grupou i hladkou varietou. Jako příklad si můžeme vzít grupu matic $GL(n, \mathbb{R}) = \{A|\det A \neq 0\}$. Na této hladké varietě mějme křivky $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, které můžeme zapsat jako matice tvaru:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

(tj. prvky matic A jsou funkce závislé na parametru t.)

Pro každou Lieovu grupu G tvoří tečný prostor v jedničce T_eG Lieovu algebru, kterou označujeme $\mathfrak{g}$.

■ **Příklad 3.1.** Máme Lieovu grupu ortogonálních matic $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R})|A^TA = 1\}$. Tedy $O(n, \mathbb{R})$ je hladká varieta. Tečný prostor v bodě e značíme $T_EO(n, \mathbb{R})$. Na hladké varietě předpokládáme křivky $A(t) : \mathbb{R} \longrightarrow O(n, \mathbb{R})$.

Dle vlastnosti ortogonální grupy platí:

$$A(t)^TA(t) = 1.$$

Předpokladem je, že $\dot{A}(e) \in T_E O(n,\mathbb{R})$, $A(0) = e$. Díky definici dotýkajích se křivek můžeme dále psát:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A(e)^T A(e)) &= \frac{d}{dt}1 \\
(\frac{d}{dt}A(e)^T)A(e) + A(e)^T(\frac{d}{dt}A(e)) &= \frac{d}{dt}1 \\
\dot{A}(e)^T A(e) + A^T(e)\dot{A}(e) &= 0 \\
\dot{A}(e)^T + \dot{A}(e) &= 0 \\
\dot{A} &= -\dot{A}^T
\end{aligned}$$

kde $A(e) = A^T(e) = E$.

Tato vlastnost odpovídá Lieově algebře $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

Tedy maticově pro $\mathfrak{so}(2,\mathbb{R})$ můžeme explicitně vypočítat:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$a = -a, b = -c, c = -b, d = -d$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

■ **Příklad 3.2.** Máme Lieovu grupu symplektických geometrií $Sp(n)$. Pro kterou platí $A^T \omega A = \omega$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A(e)^T \omega A(e)) &= \frac{d}{dt}\omega \\
(\frac{d}{dt}A(e)^T)\omega A(e) + A(e)^T\omega(\frac{d}{dt}A(e)) &= 0 \\
\dot{A}(e)^T \omega A(e) + A(e)^T \omega \dot{A}(e) &= 0 \\
\dot{A}(e)^T \omega + \omega \dot{A}(e) &= 0 \\
\dot{A}(e)^T \omega &= -\omega \dot{A}(e)
\end{aligned}$$

Konkrétně pro $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix},$$

$$-b = c, a = -a, d = -d, -c = b$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Vidíme, že $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{Sp}(2)$, kde izomorfismus je zde :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

■ **Příklad 3.3.** Lieově grupě $G = GL(m,\mathbb{R}) = A \in Mat_n\mathbb{R}|\det A \neq 0$ odpovídá Lieova algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R} = Mat_n\mathbb{R})$.

■ **Příklad 3.4.** $G = \{e\}$, Lieova algebra $\mathfrak{g} = 0$.

■ **Příklad 3.5.** $G = SL(m,\mathbb{R})$. Jedná se o grupu matic s determinantem rovným 1. Označíme A_t křivku matic v $SL(m,\mathbb{R})$ a v okolí E budeme psát $A_t = E + tX$. Podle definice determinantu dostaneme, že $\frac{d}{dt}|_0\det(E+tX) = \mathrm{Tr}X$. Ale det $A_t = 1$ nezávisle na t, tedy $\frac{d}{dt}|_0\det A_t = 0$ a $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m,\mathbb{R})$.

■ **Příklad 3.6.** $G = GL(m,\mathbb{C})$. Zde uvažujeme grupu komplexně lineárních transformací na $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$. Komplexní obecnou lineární grupu lze realizovat tak, že zvolíme lineární zobrazení (matici) $J \in GL(2m,\mathbb{R})$ splňující $J^2 = -E$ a $GL(m,\mathbb{C})$ je podgrupa všech matic A splňujících $AJ = JA$. Zvolíme si matici:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obecná matice v $GL(m,\mathbb{C})$ je dána rovností XJ = JX, tedy maticově:

$$XJ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

A bez výpočtu uvedeme:

$$JX = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Dostáváme následující rovnosti:

$$c = -b, a = d.$$

Derivací křivek v G dostaneme tytéž rovnosti vymezující Lieovu algebru:

$$X \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2m,\mathbb{R}), X = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

3.4. Lieovy algebry pro trojné struktury se skal. součinem a sympl. formou

Na trojných strukturách, které zachovávají skalární součin a symplektickou formu sestrojíme Lieovy algebry. Lieových algeber dosáhneme zderivováním podmínek u grup matic přechodu zachovávajících skalární součin a symplektickou formu.

a) Biparakomplexní struktura:

- Pro biparakomplexní struktura, která zachovává skalární součin máme grupu matic přechodu:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, A^2+H^2=1, C^2+F^2=1, AC+HF=0, AF+CH=0.\right\}$$

  Lieovu algebru dostaneme zderivováním příslušných podmínek pro grupu matic. Tedy dostaneme Lieovu algebru:

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & \dot{C} & 0 \\ 0 & -\dot{C} & 0 & -\dot{A} \\ -\dot{A} & 0 & -\dot{C} & 0 \\ 0 & \dot{C} & 0 & \dot{A} \end{pmatrix} (\dot{A}+\dot{C}) = -(\dot{H}+\dot{F}), (\dot{A}+\dot{F}) = -(\dot{C}+\dot{H}).\right\}$$

- Pro biparakomplexní struktura, která zachovává symplektickou formu máme grupu matic přechodu:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}, -A^2+H^2=-1, -F^2+C^2=-1, -HF+AC=0, -CA+FH=0.\right\}$$

  Odpovídající Lieovu algebru dostaneme opět zderivováním podmínek:

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & \dot{C} & 0 \\ 0 & \dot{C} & 0 & \dot{A} \\ \dot{A} & 0 & \dot{C} & 0 \\ 0 & \dot{C} & 0 & \dot{A} \end{pmatrix}, (\dot{A}+\dot{C}) = (\dot{H}+\dot{F}), (\dot{C}+\dot{A}) = (\dot{F}+\dot{H}).\right\}$$

b) Hypersoučinová struktura:

- Pro hypersoučinovou strukturu, která zachovává skalární součin máme grupu matic přechodu:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, A^2+C^2=1, F^2+H^2=1, AC+CA=0, FH+HF=0.\right\}$$

  Lieovu algebru dostaneme zderivováním příslušných podmínek pro grupu matic. Tedy dostaneme Lieovu algebru:

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & -\dot{A} & 0 \\ 0 & \dot{F} & 0 & -\dot{F} \\ -\dot{A} & 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & -\dot{F} & 0 & \dot{F} \end{pmatrix}, (\dot{A}+\dot{C}) = -(\dot{C}+\dot{A}), (\dot{F}+\dot{H}) = (\dot{H}+\dot{F}).\right\}$$

- Pro hypersoučinovou strukturu, která zachovává symplektickou formu máme grupu matic přechodu:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}, AF + CH = -1, -FA + HC = -1.\right\}$$

Odpovídající Lieovu algebru dostaneme opět zderivováním podmínek:

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & \dot{C} & 0 \\ 0 & \dot{F} & 0 & \dot{H} \\ \dot{C} & 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & \dot{H} & 0 & \dot{F} \end{pmatrix}, (\dot{A}+\dot{F}) = (\dot{C}+\dot{H}), (\dot{F}+\dot{A}) = (\dot{H}+\dot{C}).\right\}$$

c) Bikomplexní struktura:

- Pro bikomplexní strukturu, která zachovává skalární součin máme grupu matic přechodu:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}, A^2 + C^2 = F^2 + H^2 = 1, -AC + CA = 0, HF - FH = 0.\right\}$$

Lieovu algebru dostaneme zderivováním příslušných podmínek pro grupu matic. Tedy dostaneme Lieovu algebru:

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & \dot{F} & 0 & -\dot{F} \\ -\dot{A} & 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & \dot{F} & 0 & \dot{F} \end{pmatrix} (\dot{A}+\dot{C}) = (\dot{C}+\dot{A}), (\dot{H}+\dot{F}) = (\dot{F}+\dot{H}).$$

- Pro bikomplexní strukturu, která zachovává symplektickou formu máme grupu matic přechodu:

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}, -AF + CH = -1, -AH + CF = 0.\right\}$$

Odpovídající Lieovu algebru dostaneme opět zderivováním podmínek:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & \dot{C} & 0 \\ 0 & \dot{F} & 0 & \dot{H} \\ \dot{C} & 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & \dot{H} & 0 & \dot{F} \end{pmatrix}, (\dot{A}+\dot{F}) = (\dot{C}+\dot{H}), (\dot{A}+\dot{H}) = (\dot{C}+\dot{F}). \right\}$$

d) Hyperkomplexní struktura:

- Pro hyperkomplexní strukturu, která zachovává skalární součin máme grupu matic přechodu:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}, A^2+B^2+C^2+D^2 = 1. \right\}$$

  Lieovu algebru dostaneme zderivováním příslušných podmínek pro grupu matic. Tedy dostaneme Lieovu algebru:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} & \dot{D} \\ -\dot{B} & \dot{A} & \dot{D} & -\dot{C} \\ -\dot{C} & -\dot{D} & \dot{A} & \dot{B} \\ -\dot{D} & \dot{C} & -\dot{B} & \dot{A} \end{pmatrix}, \dot{A}+\dot{B}+\dot{C}+\dot{D} = 0. \right\}$$

- Pro hyperkomplexní strukturu, která zachovává symplektickou formu máme grupu matic přechodu:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}, A^2-B^2-C^2+D^2 = 1, -A^2+B^2+C^2-D^2 = -1. \right\}$$

  Odpovídající Lieovu algebru dostaneme opět zderivováním podmínek:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} & \dot{D} \\ -\dot{B} & \dot{A} & \dot{D} & -\dot{C} \\ -\dot{C} & -\dot{D} & \dot{A} & \dot{B} \\ -\dot{D} & \dot{C} & -\dot{B} & \dot{A} \end{pmatrix}, \dot{A}+\dot{D} = \dot{B}+\dot{C}. \right\}$$

3.5. Strukturní konstanty

Protože každé dva konečně-dimenzionální vektorové prostory stejné dimenze jsou izomorfní, budou dvě algebry odlišovat pouze vlastnosti Lieovy závorky $[.,.]$, která tak zcela určuje strukturu dané Lieovy algebry. O konkrétní volbu vektorového prostoru se proto nebudeme vůbec zajímat a Lieovu algebru budeme pokládat za jednoznačně určenou, pokud bude určeno zobrazení $[.,.]$. Protože se jedná o zobrazení lineární, stačí znát jeho působení na prvky báze — působení na ostatní vektory se získá ze vztahu linearity a zobrazení je tak definováno jednoznačně. Nechť tedy tři lineárně nezávislé vektory e_1, e_2 a e_3 tvoří bázi vektorového prostoru . Obraz jakýchkoli dvou vektorů z vektorového prostoru (tedy i vektoru báze) při zobrazení [., .] je opět vektor a lze ho proto zapsat jako jistou lineární kombinaci bázových vektoru: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$. Koeficienty lineární kombinace označené c_{ij}^k se nazývají strukturní konstanty.

■ **Příklad 3.7.** Mějme tyto báze vektorového prostoru:

$$e_1 = x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[x, y] = z, [x, z] = 0, [y, z] = 0$$

Přepíšeme pomocí e_1, e_2, e_3 :

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0,$$

Dostaneme tedy tyto strukturní konstanty pro dané báze vektorového prostoru:

$$c_{12}^3 = 1, c_{12}^1 = 0, c_{12}^2 = 0,$$

Po příkladu můžeme přejít k hlavním výpočtům. Zde vypočítáme strukturní konstanty pro trojné struktury. Zavedeme vždy strukturu, její matici přechodu a báze vektorového prostoru tvořeného příslušnou maticí přechodu.

1. **Biparakomplexní struktura**

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ H & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Zvolíme si tyto báze podle matice přechodu této struktury:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočteme strukturní konstanty pro biparakomplexní strukturu. Musíme vzít všechny možné dvojice bází e_1 až e_4. Strukturní konstanty se počítají pomocí již vysvětlené Lieovy závorky. Čili počítáme:

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1.$$

Výpočty nejsou složité, proto je nebudeme uvádět a rovnou píšeme naše výsledky:

$$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = -e_3, [e_1, e_4] = 0, [e_2, e_3] = e_1 - e_4, [e_2, e_4] = e_2, [e_3, e_4] = -e_3$$

Strukturní konstanty pro biparakomplexní strukturu:

$$c_{12}^1 = 0, c_{12}^2 = 1, c_{12}^3 = 0, c_{12}^4 = 0,$$
$$c_{13}^1 = 0, c_{13}^2 = 0, c_{13}^3 = -1, c_{13}^4 = 0,$$
$$c_{14}^1 = 0, c_{14}^2 = 0, c_{14}^3 = 0, c_{14}^4 = 0,$$
$$c_{23}^1 = 1, c_{23}^2 = 0, c_{23}^3 = 0, c_{23}^4 = -1,$$
$$c_{24}^1 = 0, c_{24}^2 = 1, c_{24}^3 = 0, c_{24}^4 = 0,$$
$$c_{34}^1 = 0, c_{34}^2 = 0, c_{34}^3 = -1, c_{34}^4 = 0.$$

2. **Hypersoučinová struktura**
Máme tuto strukturu:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Zvolíme si tyto báze podle matice přechodu této struktury:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočteme strukturní konstanty pro hypersoučinovou strukturu. Musíme vzít všechny možné dvojice bází e_1 až e_4. Počítáme:

$$[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1.$$

Výpočty nejsou složité, proto je nebudeme uvádět a rovnou píšeme naše výsledky:

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_1, e_4] = 0, [e_2, e_3] = 0, [e_2, e_4] = 0.$$

Strukturní konstanty pro hypersoučinovou strukturu:

$$c_{12}^1 = 0, c_{12}^2 = 0, c_{12}^3 = 0, c_{12}^4 = 0,$$

$$c_{13}^1 = 0, c_{13}^2 = 0, c_{13}^3 = 0, c_{13}^4 = 0,$$
$$c_{14}^1 = 0, c_{14}^2 = 0, c_{14}^3 = 0, c_{14}^4 = 0,$$
$$c_{23}^1 = 0, c_{23}^2 = 0, c_{23}^3 = 0, c_{23}^4 = 0,$$
$$c_{24}^1 = 0, c_{24}^2 = 0, c_{24}^3 = 0, c_{24}^4 = 0,$$
$$c_{34}^1 = 0, c_{34}^2 = 0, c_{34}^3 = 0, c_{34}^4 = 0.$$

3. **Bikomplexní struktura**

$$\begin{pmatrix} A & 0 & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & H \\ C & 0 & A & 0 \\ 0 & -H & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Zvolíme si tyto báze podle matice přechodu této struktury:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočteme strukturní konstanty pro bikomplexní strukturu. Musíme vzít všechny možné dvojice bází e_1 až e_4. Počítáme:

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1.$$

Výpočty nejsou složité, proto je nebudeme uvádět a rovnou píšeme naše výsledky:

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_1, e_4] = 0, [e_2, e_3] = 0, [e_2, e_4] = 0, [e_3, e_4] = 0.$$

Strukturní konstanty pro bikomplexní strukturu:

$$c_{12}^1 = 0, c_{12}^2 = 0, c_{12}^3 = 0, c_{12}^4 = 0,$$

$$c_{13}^1 = 0, c_{13}^2 = 0, c_{13}^3 = 0, c_{13}^4 = 0,$$
$$c_{14}^1 = 0, c_{14}^2 = 0, c_{14}^3 = 0, c_{14}^4 = 0,$$
$$c_{23}^1 = 0, c_{23}^2 = 0, c_{23}^3 = 0, c_{23}^4 = 0,$$
$$c_{24}^1 = 0, c_{24}^2 = 0, c_{24}^3 = 0, c_{24}^4 = 0,$$
$$c_{34}^1 = 0, c_{34}^2 = 0, c_{34}^3 = 0, c_{34}^4 = 0.$$

4. **Hyperkomplexní struktura**

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}.$$

Zvolíme si tyto báze podle matice přechodu této struktury:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočteme strukturní konstanty pro hyperkomplexní strukturu. Musíme vzít všechny možné dvojice bází e_1 až e_4. Počítáme:

$$[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1.$$

Výpočty nejsou složité, proto je nebudeme uvádět a rovnou píšeme naše výsledky:

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_1, e_4] = 0, [e_2, e_3] = -2e_4, [e_2, e_4] = 2e_3, [e_3, e_4] = -2e_2.$$

Strukturní konstanty pro hyperkomplexní strukturu:

$$c^1_{12} = 0, c^2_{12} = 0, c^3_{12} = 0, c^4_{12} = 0,$$

$$c^1_{13} = 0, c^2_{13} = 0, c^3_{13} = 0, c^4_{13} = 0,$$
$$c^1_{14} = 0, c^2_{14} = 0, c^3_{14} = 0, c^4_{14} = 0,$$
$$c^1_{23} = 0, c^2_{23} = 0, c^3_{23} = 0, c^4_{23} = -2,$$
$$c^1_{24} = 0, c^2_{24} = 0, c^3_{24} = 2, c^4_{24} = 0,$$
$$c^1_{34} = 0, c^2_{34} = -2, c^3_{34} = 0, c^4_{34} = 0.$$

4. Závěr

V této diplomové práci byly popsány geometrické struktury založené na kvaternionech, které jak nyní již víme, nazýváme trojné struktury. Vypočítali jsme matice přechodu pro tyto struktury i pro struktury základní(tedy pro skalární součin, symplektickou formu a pro komplexní strukturu). Výpočty jsme provedli na prostoru $\mathbb{R}^4$, kde se nám dobře pracovalo s maticemi, pomocí kterých jsme ve vhodné bázi struktury realizovali.

Po všech potřebných výpočtech jsme se zamysleli nad počtem struktur, které by měl vektorový prostor zachovávat, aby na něm byly splněny současně všechny tři struktury základní. Došli jsme k závěru, že stačí zachování dvou základních struktur a třetí struktura je automaticky zachována. Toto jsme aplikovali i na trojné struktury. Tedy chtěli jsme vědět kolik trojných struktur má smysl na vektorovém prostoru uvažovat. Zjistili jsme, že více než jednu trojnou strukturu nemá smysl uvažovat. Při uvažování více trojných struktur se výsledná matice přechodu velice zjednodušila. Těmito úvahami a výpočty jsme si práci velice zjednodušili. Bez zjištění kolik základních struktur je třeba na vektorovém prostoru nadefinovat bysme museli pracovat se všemi možnostmi, kterých je 105. My jsme toto číslo zredukovali na 28 kombinací.

Druhou kapitolu jsme věnovali práci s Lieovými algebrami. Popsali jsme Lieovu grupu a algebru. Na trojných strukturách jsme tyto Lieovy algebry sestrojili. Byly uvedeny i další příklady těchto algeber. K popsání Lieových algeber jsme použili i strukturní konstanty c_{ij}^k. Strukturní konstanty jsou koeficienty lineární kombinace bázových vektorů $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$. Tyto strukturní konstanty jsme vypočítali pro trojné struktury.

Literatura

[1] Doc. RNDr. Jiří Karásek, CSc., Prof. RNDr. Ladislav Skula, DrSc. *Algebra a geometrie.* Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno,2002. ISBN 80-214-2315-3.

[2] Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.*Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* IRIS, 2004, ISBN 80-89018-10-6.

[3] *Lineární algebra a geometrie 1* [online].
URL:<http://www.math.muni.cz/ horak/09j_LA_skripta.pdf> [cit. 25. 4. 2010]

[4] *Introduction to Lie Algebras.* [online].
URL:<http://www.isibang.ac.in/ statmath/conferences/gt/Lie Algebra Lec1.pdf> [cit. 15. 2. 2010]

[5] *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie* [online].
URL:<http://www.expost.cz/files/mff/tmf069.pdf> [cit. 25. 4. 2010]

[6] *Triple structures on a manifold* [online].
URL:<http://www.um.es/wgp2004/talks/FernandoEtayo.pdf> [cit. 25. 4. 2010]

5. Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{H}$	kvaterniony
V	vektorový prostor
$\mathbf{v}$	vektor
$\alpha, \beta, ...$	báze prostoru
$\langle\ ,\ \rangle$	skalární součin
A	matice
I, J, K	matice trojných struktur
$O(4, \mathbb{R})$	grupa ortogonálních matic
$T_P\mathcal{M}$	tečný prostor
$\mathcal{M}$	varieta
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$	Lieova algebra