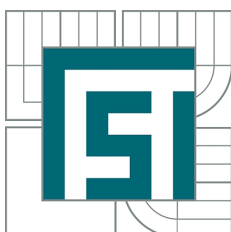


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÝ MODEL ELASTOHYDRODYNAMICKY
MAZANÉHO LÍNIOVÉHO KONTAKTU
MATHEMATICAL MODEL OF EHD LUBRICATED LINE CONTACT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

IVETA SABOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. ILDIKÓ FICZA

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Iveta Sabová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematický model elastohydrodynamicky mazaného liniového kontaktu

v anglickém jazyce:

Mathematical model of EHD lubricated line contact

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je analýza matematického modelu elastohydrodynamicky mazaného liniového kontaktu užitím numerických metod.

Cíle bakalářské práce:

Bakalářská práce musí obsahovat: (odpovídá názvům jednotlivých kapitol v práci)

1. Úvod
2. Přehled současného stavu poznání
3. Matematický model
4. Numerické řešení
5. Výsledky
6. Diskuze
7. Závěr
8. Bibliografie

Forma bakalářské práce: průvodní zpráva

Typ práce: teoretická

Účel práce: výzkum a vývoj

Seznam odborné literatury:

LUBRECHT, A.A. Numerical Solution of the EHL Line and Point Contact Problem Using Multigrid Techniques. Ph.D. Thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 1987. ISBN 90-9001583-3.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ildikó Ficza

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 20.11.2012

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Bakalárska práca sa zaoberá riešením matematického modelu elastohydrodynamicky mazaného líniového kontaktu. Hlavným cieľom je vyvinúť a naprogramovať numerický model, ktorý bude znázorňovať priebeh tlaku a hrúbky mazacej vrstvy v danom líniovom kontakte. Práca je doplnená zdrojovým kódom naprogramovanom v prostredí MATLAB.

Summary

The thesis deals with the solution of the mathematical model of elastohydrodynamically lubricated line contact. The main aim is to develop and create a programme, which would show the pressure and the film thickness distribution in a line contact. The source code programmed in MATLAB is also included.

Klíčová slova

elastohydrodynamické mazanie, líniový kontakt, Newtonova metóda

Keywords

elastohydrodynamic lubrication, line contact, Newton's method

SABOVÁ, I. *Matematický model elastohydrodynamicky mazaného líniového kontaktu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 35 s. Vedoucí Ing. Ildikó Ficza.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Matematický model elasto-hydrodynamicky mazaného líniového kontaktu* vypracovala samostatne pod vedením Ing. Ildikó Ficza s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Iveta Sabová

Rada by som poďakovala svojej vedúcej bakalárskej práce Ing. Ildikó Ficza za cenné rady a hlavne za čas, ktorý mi venovala pri riešení danej problematiky.

Iveta Sabová

Obsah

1	Úvod	3
2	Súčasný stav poznania	4
3	Matematický model	6
3.1	Reynoldsova rovnica	6
3.2	Rovnica hrúbky maziva	7
3.3	Rovnica silovej rovnováhy	7
3.4	Závislosť viskozity na tlaku	7
3.5	Závislosť hustoty na tlaku	8
3.6	Bezrozmerné rovnice	8
4	Numerické riešenie	10
4.1	Sústavy lineárnych rovníc	10
4.1.1	Gaussova eliminačná metóda	10
4.2	Sústavy nelineárnych rovníc	11
4.2.1	Newtonova metóda	12
4.3	Aplikácia	13
4.3.1	Diskretizácia	14
4.3.2	Newtonova metóda	15
4.3.3	Algoritmus riešenia	18
5	Výsledky	19
6	Diskusia	21
7	Záver	23
	Literatúra	25
	Zoznam použitých skratiek a symbolov	27
	Zoznam príloh	29
A	Prílohy	30
A.1	Hlavný program	30
A.2	Gaussova eliminačná metóda	35

1. Úvod

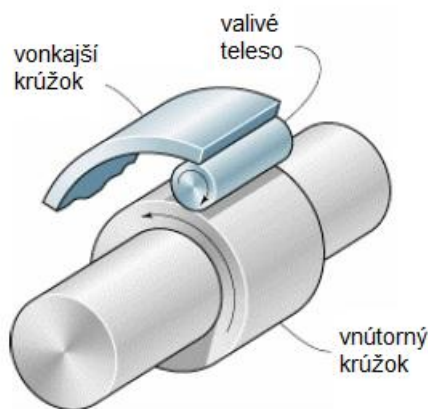
Pri štúdiu konkrétneho reálneho problému si uvedomíme, že je potrebné popísať skúmanú skutočnosť pomocou matematického modelu a následne tento model vyriešiť. K tomuto nám slúžia numerické metódy. Vedná disciplína zaoberajúca sa vytváraním efektívnych metód výpočtu a približného riešenia rôznych úloh sa nazýva numerická matematika. V súčasnosti, s rozvojom technológií, je nám umožňované realizovať toto riešenie aj na počítači.

Táto práca sa zaoberá skúmaním elastohydrodynamicky mazaného líniového kontaktu a riešením jeho matematického modelu. V druhej kapitole sú uvedené hlavné pojmy pre popis problematiky a priebeh historického vývoja. Tretia kapitola zahŕňa predovšetkým základné analytické rovnice popisujúce elastohydrodynamicky mazaný líniový kontakt, ktorými sú Reynoldsova rovnica, rovnica hrúbky maziva a rovnica silovej rovnováhy. Taktiež obsahuje diskretný tvar týchto rovníc. V prvej časti štvrtej kapitoly je uvedený obecný popis numerického riešenia sústavy lineárnych a nelineárnych rovníc, ktoré sú v modeli následne využívané. V druhej časti sa štvrtá kapitola venuje aplikácii numerických metód na líniový kontakt. Výsledky numerického riešenia elastohydrodynamicky mazaného líniového kontaktu pre konkrétne stanovené hodnoty a následná diskusia sú uvedené v piatej a šiestej kapitole.

Cieľom tejto práce je charakteristika matematického modelu, štúdium základných rovníc, ich zavedenie v diskretnom a bezrozmernom tvare. Následné vytvorenie numerického modelu na základe získaných teoretických znalostí, ktorý znázorňuje priebeh tlaku a hrúbky mazacej vrstvy v danom líniovom kontakte. Tento model je naprogramovaný v programovacom prostredí MATLAB.

2. Súčasný stav poznania

Tribológia je veda, ktorá sa zaoberá vzájomnou interakciou povrchov pri ich relatívnom pohybe. Vzájomné pôsobenie povrchov je sprevádzané trením, ktorého dôsledkom je následné opotrebenie. Toto trenie a opotrebenie sa snažíme eliminovať mazaním - oddeľovaním dvoch povrchov vrstvou maziva tak, aby v ideálnom prípade nedochádzalo k ich dotyku. Existuje niekoľko typov režimov mazania a to napr. hydrostatické, hydrodynamické (HD), elastohydrodynamické (EHD)[2]. Táto bakalárska práca rieši elastohydrodynamické mazanie, ktoré je charakteristické pre nekonformné povrchy, t. j. pre povrchy, ktoré sa stýkajú na veľmi malej ploche (obr. 2.1). Režim elastohydrodynamického mazania je charakteristický vysokými kontaktnými tlakmi (maximálne hodnoty v jednotkách GPa), tlakovo viskóznym správaním maziva a výraznou elastickou deformáciou. Veľkosť tejto deformácie je rádovo väčšia ako minimálna hrúbka vrstvy maziva. Základné sledované parametre v práci sú veľkosť a rozloženie tlaku a hrúbka maziva v mazacej vrstve.



Obrázok 2.1: Nekonformný povrch

Pre štúdium problému EHD mazania je dôležitý rok 1886, v ktorom Osborne Reynolds formuloval teóriu mazania. Odvodil diferenciálnu rovnicu popisujúcu rozloženie tlaku v kvapalinovej mazacej vrstve. V tejto rovnici, známej ako *Reynoldsova rovnica*, využil redukovanú formu *Navier-Stokesových* rovníc a rovnicu *kontinuity* za predpokladu, že platí Newtonov zákon pre viskózne kvapaliny [14]. Martin a Gümbel následne aplikovali Reynoldsovú rovnicu pre nekonformné povrchy.

Grubin sa v roku 1949 zaslúžil o prvú významnú teoretickú prácu v oblasti EHD mazania. Dal do súvislosti elastickú deformáciu telies a tlakovo-viskózne správanie maziva pri skúmaní nekonformného líniového kontaktu. [5] Tieto teoretické predpoklady experimentálne overil v roku 1951 Petrusevič a publikoval prvé analyticko-numerické riešenie [13].

Do 50. rokov minulého storočia sa daný problém riešil analyticky. Toto riešenie bolo ale veľmi obtiažne a vyžadovalo mnoho zjednodušení. S rozvojom výpočtovej techniky a numerických metód sa objavili prvé kompletné numerické riešenia EHD modelu. Uvažovali sa hlavne EHD modely s ideálne hladkým povrchom a newtonským správaním maziva. Výzkum bol v prvom rade zameraný na líniový kontakt (t. j. jednorozmerný prípad),

neskôr na bodový kontakt (t. j. dvojrozmerný prípad). V prípade líniového kontaktu sa uvažovala symetria v línii kontaktu. Toto sa neskôr využilo pri formulácii jednorozmernej *Reynoldsovej rovnice*, ktorá zjednodušila teoretický popis a tak uľahčila matematické riešenie líniového EHD problému.

Prvé iteratívne numerické riešenie líniového kontaktu sa v roku 1959 podarilo v štúdií Dowsonovi a Higginsovi [4]. Využitie numerického prístupu im umožnilo formulovať empirické vzťahy popisujúce hrúbku maziva v spomínaných líniových kontaktoch. V roku 1961 Crook experimentálne overil Dowsonovu a Higginsovu štúdiu a potvrdil ich predpoklady o hrúbke mazacieho filmu. Treba poznamenať, že v tejto dobe išlo o veľmi malé tlaky medzi kontaktnými povrchmi, čo bolo zapríčinené obmedzenou možnosťou matematického (numerického) riešenia EHD problému. Vyššie hodnoty nebolo možné uvažovať z dôvodu nestability použitého numerického riešenia. Simulácie boli obmedzené aj malým rozlíšením výpočtovej oblasti, to znamená počtom uzlových bodov v diskretizovanej oblasti [14].

Tento problém v roku 1987 riešila práca Lubrechta [10]. Bola to prelomová štúdia, ktorá mala veľký prínos v oblasti riešenia EHD problému hlavne z toho dôvodu, že priniesla úplne nový prístup k numerickému riešeniu. Metóda nazývaná *multigrid method* (*viac-vrstvová metóda*) rieši EHD problém ako aj pre líniový, tak pre bodový kontakt a má mnoho výhod oproti vyššie uvedeným metódam. Medzi hlavné výhody patrí predovšetkým väčšia stabilita riešenia, ktorá umožňuje riešiť vyššie zaťaženia medzi kontaktnými povrchmi a výrazné zrýchlenie výpočtov, ktoré umožňuje vykonávať rozsiahlejšie výpočtové štúdie.

Ako už bolo spomínané, v prvých publikáciách numerických riešení EHD problému bolo mnoho zjednodušení. Výsledky simulácií sa približne zhodovali s experimentálnym riešením, ale modely boli stále veľmi idealizované. Ako príklad môžeme uviesť použitie newtonských mazív, hladké kontaktné povrchy, atď. V 70. rokoch prichádzajú prvé práce riešenia bodového kontaktu, kde sa začali skúmať aj ďalšie parametre ako napríklad tlakovo-viskózne správanie maziva, zmena hustoty maziva pri zmene tlaku alebo vlastností použitého maziva. Tieto mazivá sa jednoznačne neoznačujú za newtonské a nezanedbávajú sa ani termálne javy.

V súčasnosti sa pre riešenie líniového kontaktu popri viacvrstvovej metóde používa aj Newtonova metóda. Prvýkrát bola prezentovaná v roku 1982 Okamurom [12], ktorý spolu s Hamrockom a Houpertom [6] aplikovali Newtonovu metódu pre riešenie diskretizovanej formy Reynoldsovej rovnice. Ďalšie aplikácie Newtonovej metódy pre 1-D kontakt môžeme nájsť taktiež v prácach Kumára [8] - [9].

Pre 2-D kontakt sa na riešenie aplikuje rada zložitých numerických metód. Ako najviac využívané spomenieme *viacvrstvovú metódu*, *metódu združených gradientov* alebo *metódu konečných prvkov*. Pomerne novou metódou je v súčasnosti metóda nazývaná *Computational fluid dynamics - CFD*. Viac o týchto metódach a ich aplikácie na problémy EHD mazania je možné nájsť v [1] a [15].

3. Matematický model

Táto kapitola popisuje matematický model EHD mazaného líniového kontaktu. Model je tvorený troma základnými rovnicami:

1. Reynoldsova rovnica,
2. rovnica hrúbky maziva,
3. rovnica silovej rovnováhy.

Pri elasto-hydrodynamicky mazaných kontaktoch je potrebné počítať aj s ďalšími rovnicami, ktorými sú závislosť viskozity a hustoty na tlaku. Musíme si uvedomiť, že tvar rovníc nie je v každom prípade rovnaký a môže sa líšiť podľa toho, či ide o líniový alebo bodový kontakt, hladký alebo nehladký povrch, či uvažujeme stacionárne, alebo nestacionárne riešenie a aké mazivo pri riešení používame. V práci sú využité isté zjednodušenia a to:

- hladký povrch skúmaných kontaktov,
- newtonské správanie maziva,
- stacionárny jav (zanedbáva sa závislosť niektorých členov rovnice na čase).

3.1. Reynoldsova rovnica

Reynoldsova rovnica je diferenciálna rovnica popisujúca rozloženie tlaku v kvapalinovej mazacej vrstve. Je najdôležitejšou rovnicou pre popis EHD mazaného kontaktu. Obecne bola odvodená z *Navier-Stokesových* rovníc a rovnice *kontinuity* za predpokladu, že platí Newtonov zákon pre viskózne kvapaliny. Vonkajšie a zotrvačné sily sa zanedbávajú. Reynoldsova rovnica pre líniový kontakt má nasledujúci tvar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - u_m \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

kde p je tlak, h hrúbka, x priestorová súradnica, η viskozita a ρ hustota maziva a $u_m = (u_a + u_b)/2$ je stredná povrchová rýchlosť. Prvý člen rovnice (3.1) je tlakový člen (tzv. *Poissevillov*) a popisuje viskózný tok v dôsledku tlakového spádu. Druhý člen Reynoldsovej rovnice je klinový člen alebo sa tiež nazýva *Couetteov člen* a popisuje tok v dôsledku strednej rýchlosti kontaktných povrchov.

Riešenie uvedenej Reynoldsovej rovnice je popis rozloženia tlaku v kvapalinovej mazacej vrstve na oblasti, ktorú označíme Ω . Táto oblasť musí byť ohraničená Dirichletovými okrajovými podmienkami:

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{pre } x = x_{in} \\ p &= 0 \quad \text{pre } x = x_{out}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vo výsledku očakávame, že tlak v mazacej vrstve bude kladný. Obecne ale môže nastať prípad, kedy pre výsledok riešenia rovnice (3.1) bude platiť, že tlak je záporný. Z fyzikálneho hľadiska je tento jav nemožný a to práve preto, lebo kvapalina nemôže pri podtlaku preniesť ťahové zaťaženia. V literatúre sa jav záporného tlaku nazýva *kavitácia* a podmienku, ktorá nám obmedzí spodnú hranicu tlaku na nulovú hodnotu nazveme *kavitačnou podmienkou*. Platí:

$$p(x) \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

3.2. Rovnica hrúbky maziva

Pri pôsobení tlaku medzi dvoma kontaktnými plochami dochádza k elastickým deformáciám. Dôsledok týchto elastických deformácií je zmena kanálu, ktorým dané mazivo prúdi. Táto zmena je spôsobovaná oboma kontaktnými telesami a je popísaná nasledujúcou rovnicou:

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} - \frac{2}{\pi E_r} \int_{-\infty}^{\infty} p(x') \ln \left| \frac{(x-x')}{x_0} \right| dx' \quad (3.4)$$

kde h_0 je konštanta a uvádza priblíženie telies, R_x je redukovaný polomer krivosti a E_r je redukovaný modul pružnosti materiálov kontaktných telies. Druhý člen rovnice popisuje geometriu a posledný člen elastickú deformáciu.

3.3. Rovnica silovej rovnováhy

Vonkajšie zaťaženie kontaktu w , ktoré je prenášané mazacou vrstvou, je na celej oblasti riešenia Ω v rovnováhe so silovou výslednicou tlaku v mazacej vrstve. Je taktiež dôležitou rovnicou modelu, lebo slúži ako kontrolná rovnica hodnôt tlaku a hrúbky maziva. Pre jednorozmerný prípad má nasledujúci tvar:

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \quad (3.5)$$

3.4. Závislosť viskozity na tlaku

Závislosť viskozity od zmeny na tlaku najjednoduchšie popisuje Barusov vzťah [10]

$$\eta(p) = \eta_0 \exp(\alpha p), \quad (3.6)$$

kde η_0 je viskozita pri atmosférickom tlaku a α je tlakovo viskóznym parameter pre daný typ maziva. Pri riešení EHD problému sa používa aj zložitejšia, ale fyzikálne presnejšia rovnica, ktorú navrhol Roelands:

$$\eta(p) = \eta_0 \exp \left\{ (\ln(\eta_0) + 9.67) \left[-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right] \right\}, \quad (3.7)$$

kde z je tlakovo viskóznym index. Treba uviesť, že prvý vzťah (3.6) sa používa pre hodnoty tlaku do 0,1 GPa. Druhý, Roelandsov (3.7), možno použiť pre tlaky až do hodnoty 1 GPa [10].

3.5. Závislosť hustoty na tlaku

Tak isto ako aj viskozita, tak aj hustota použitého maziva je závislá na tlaku. Downson a Higginson [4] stanovili túto závislosť nasledovne:

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34p}{5,9 \cdot 10^8 + p}, \quad (3.8)$$

kde ρ_0 je hustota pri atmosférickom tlaku.

Ako zjednodušenie, predovšetkým v jednorozmernom prípade, sa často zanedbáva vplyv hustoty, a uvažuje sa nestlačiteľná kvapalina. To znamená, že $\rho(p) = 1$.

Pri numerickom riešení uvedených rovníc nastáva jeden základný problém a to, že hodnoty tlaku a hrúbky maziva sú v rozdielnych jednotkách. V prípade tlaku ide o hodnoty rádovo v GPa, kdežto v prípade hrúbky mazacieho filmu ide o jednotky v μm . Preto je potrebné previesť rovnice do bezrozmerného tvaru, aby sa nám s nimi lepšie pracovalo pri simulácii daného problému.

3.6. Bezrozmerné rovnice

Z dôvodu zefektívnenia výpočtov sa Reynoldsova rovnica (3.1), rovnica hrúbky maziva (3.4), rovnica silovej rovnováhy (3.5) a rovnice (3.6) - (3.8) zapíšu v bezrozmernom tvare.

Máme k dispozícii niekoľko typov zavedení bezrozmerných parametrov. V tejto práci budeme využívať nasledujúce [10]:

$$X = \frac{x}{b}, \quad P = \frac{p}{P_h}, \quad H = \frac{hR}{b^2}, \quad \bar{\alpha} = \alpha P_h, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

kde pre Hertzov tlak, resp. polomer Hertzovho kontaktu platí:

$$P_h = \frac{2w}{\pi b}, \quad b = \sqrt{\left(\frac{8wR}{\pi E'}\right)}$$

Rovnice (3.1), (3.4) a (3.5) v bezrozmernom tvare vyzerajú nasledovne:

Reynoldsova rovnica

$$\frac{d}{dX} \left(\exp(-\bar{\alpha}P) \bar{\rho} H^3 \frac{dP}{dX} \right) = \lambda \frac{d}{dX} (\bar{\rho} H) \quad (3.9)$$

kde

$$\lambda = \frac{12\eta_0 u_m R^2}{b^3 P_h}$$

Rovnica hrúbky maziva

Rovnica hrúbky maziva sa s využitím rovnakých parametrov redukuje na:

$$H(X) = H_0 + \frac{X^2}{2} + \frac{1}{2\pi\bar{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(q(X')) \ln(X - X')^2 dX' \quad (3.10)$$

Rovnica silovej rovnováhy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(q(X)) dX' + \frac{\pi\bar{\alpha}}{2} = 0 \quad (3.11)$$

Závislosť viskozity na tlaku

$$\eta(p) = \exp(-\bar{\alpha}p) \quad (3.12)$$

Závislosť hustoty na tlaku

Pre zjednodušenie výpočtov budeme uvažovať nestlačiteľnú kvapalinu.

4. Numerické riešenie

Numerickým riešením úlohy rozumieme jasný a jednoznačný popis vzťahu medzi konečným počtom vstupných a výstupných dát. Cieľom numerických metód je, aby toto riešenie (algoritmus) bolo čo najefektívnejšie a najpresnejšie. Medzi základné úlohy numerických metód patrí riešenie sústav rovníc. Tieto sústavy môžu byť *lineárne* a *nelineárne* [3], [11].

4.1. Sústavy lineárnych rovníc

Riešiť sústavu lineárnych rovníc je veľmi častý problém. Sústavy môžu byť veľmi rozsiahle až s niekoľkými miliónmi neznámych, ale súčasná výpočtová technika umožňuje tieto sústavy riešiť v relatívne prijateľnom čase. Metódy riešenia delíme na *priame* a *nepriame*.

Priame metódy

Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou priamej metódy je založené na eliminácií neznámych. Z niektorej rovnice vyjadríme neznámu, ktorú následne dosadíme do ostatných rovníc a tým sa po eliminácií sústava stáva jednoduchšie riešiteľnou ako sústava pôvodná. V konečnom počte krokov dostávame presné riešenie, ak výpočet prebieha bez zaokrúhľovacích chýb. Medzi priame metódy patria:

- Gaussova eliminačná metóda
- LU-rozklad
- Choleského rozklad

Nepriame metódy

Nepriame metódy, inak nazývané aj *iteračné* poskytujú iba približné riešenie sústavy lineárnych rovníc. To ale vôbec nevadí, ak je približné riešenie dobrou aproximáciou presného riešenia. Počet krokov danej iteračnej metódy závisí na požadovanej presnosti. Medzi nepriame metódy patria:

- Jacobiova metóda
- Gaussova-Seidelova metóda

4.1.1. Gaussova eliminačná metóda

Uvažujme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sústavu (4.1) môžeme taktiež písať v maticovom tvare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

kde \mathbf{A} je *matica sústavy*, \mathbf{x} je *vektor neznámych* a \mathbf{b} je *vektor pravých strán*.

Gaussova eliminačná metóda (stručne GEM) je základnou priamou metódou pre riešenie sústav lineárnych rovníc. Toto riešenie spočíva v dvoch základných chodoch, a to *priamom* a *spätnom*.

Priamy chod

V priamom chode GEM sa sústava (4.2) prevedie na sústavu $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, kde matica \mathbf{U} vyzera nasledovne:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Maticu \mathbf{U} nazývame *horná trojuholníková matica*, pretože pod hlavnou diagonálou sa vyskytujú samé nulové prvky. Táto upravená matica odpovedá sústave rovníc, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou sústavou.

Spätný chod

V spätom chode GEM riešime už sústavu $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ z priameho chodu. Predpokladáme, že matica sústavy \mathbf{A} je regulárna a tým pádom má sústava jediné riešenie. Z toho plynie, že aj matica \mathbf{U} je regulárna. To znamená, že prvky matice \mathbf{U} , ktoré sa vyskytujú na diagonále, sú nenulové. Na základe tejto úvahy z poslednej rovnice veľmi ľahko spočítame neznámu x_n , ktorú dosadíme do predposlednej rovnice a dopočítame x_{n-1} . Postup opakujeme n-krát až pokým z prvej rovnice vypočítame x_1 .

4.2. Sústavy nelineárnych rovníc

Metódy, ktoré sú známe pre riešenie nelineárnych rovníc s jednou neznámou (ako napr. Newtonova metóda alebo metóda prostej iterácie) môžeme zovšeobecniť aj na sústavy. Na rozdiel od metód uvedených v odstavci 4.1 o sústavách lineárnych rovníc tieto metódy nie sú priame, ale iba iteračné. Má to veľkú nevýhodu a to tú, že pre sústavy nelineárnych rovníc nepoznáme žiadnu univerzálnu metódu, ktorá by nám dokázala určiť dostatočne dobrú počiatočnú aproximáciu riešenia. Preto je dobré ju určiť (odhadnúť) na základe

konkrétneho problému o ktorom vieme, že vedie na riešenie nelineárnej úlohy a ktorý je nám vopred známy.

Uvažujme sústavu n nelineárnych rovníc o n neznámych

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

alebo v maticovom tvare

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \tag{4.3}$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešením sústavy (4.3) je každý číselný vektor \mathbf{x}^* , pre ktorý $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{o}$.

4.2.1. Newtonova metóda

Sústavu rovníc môžeme linearizovať pomocou Taylorovho rozvoja. Všeobecne pre $n = 1$

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \text{chyba} \doteq f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k)$$

Chybu zanedbáme a približnú rovnosť nahradíme rovnosťou. Následne namiesto x^* píšeme x_{k+1} , čiže dostávame

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

Pre sústavu vyzerá linearizácia pomocou Taylorovho rozvoja nasledovne:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{o}, \tag{4.4}$$

kde $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ je *Jacobiho matica* funkcie $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, t. j.

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Výpočet prebieha tak, že v prvom rade vyriešime sústavu lineárnych rovníc

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

a potom určíme nasledujúci krok $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$. Ak platí, že matica $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ je *regulárna*, potom môžeme sústavu lineárnych rovníc vyriešiť metódami popísanými v prvom odseku tejto kapitoly. Ak je táto matica *singulárna*, metódu treba vhodne modifikovať, alebo výpočet ukončiť a označiť za neúspešný.

Konvergencia

Newtonova metóda konverguje, pokiaľ je počiatková aproximácia \mathbf{x}_0 dostatočne blízko koreňa \mathbf{x}^* . Naopak Newtonova metóda nemusí konvergovať, ak štartujeme ďaleko od koreňa. Samozrejme, že je možné oblasť konvergence rozšíriť, a na to nám slúžia niektoré metódy, ako napríklad *tlmená Newtonova metóda*, alebo *Newtonova metóda s lokálne obmedzeným krokom*. Viac v [3].

Rýchlosť konvergence je kvadratická, to znamená, že existuje okolie $O(\mathbf{x}^*)$ bodu x^* a konštanta C taká, že pre $\forall \mathbf{x}_k \in O(\mathbf{x}^*)$ platí:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq C\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2$$

Ukončenie iterácií

Výpočet nemôže bežať donekonečna, preto pre ukončenie iterácií použijeme niektoré z nasledujúcich stop kritérií: $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon\|\mathbf{x}_k\|$ alebo $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})\| \leq \varepsilon$, kde ε je zadaná presnosť.

Zjednodušenie

V každom kroku Newtonovej metódy je potrebné riešiť sústavu lineárnych rovníc. Toto môže spôsobiť značný problém, ak je objem výpočtov n veľmi obsiahly. Navyiac je potrebné v každom kroku prepočítať *Jacobiho maticu* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ a jej n^2 zložiek. Zjednodušenie v tomto prípade spočíva v tom, že jednotlivé členy $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ Jacobiho matice sa prepočítavajú len občas, napríklad každých m krokov. To znamená, že každý nasledujúci krok \mathbf{x}_{k+1} počítame podľa upraveného vzorca:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_p)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = p, p+1, \dots, p+m-1, \quad p = 0, m, 2m, \dots$$

4.3. Aplikácia

Newtonova metóda (v literatúrach tiež označovaná aj ako Newton-Raphsonova metóda) je jednou zo základných metód pri riešení líniového kontaktu. Prvýkrát bola použitá Okamurom [12], Houpertom a Hamrockom [6]. Zostavili algoritmus, ktorý rieši sústavu rovníc tak, že do Jacobiho matice sú ukladané jednotlivé derivácie, a v každej aproximácii sú tieto hodnoty prepočítavané. Hlavné výhody Newton-Raphsonovej metódy aplikovanej na elastohydrodynamický model zhrnul vo svojej práci Lubrecht [10] do nasledujúcich bodov:

- malý počet iterácií (približne 20)
- rýchla konvergencia, ak je dobrá počiatočná aproximácia
- malé výpočtové časy pre malý počet uzlových bodov v diskretizovanej oblasti
- ideálne pre jednorozmerný líniový kontakt

Vo svojej práci Lubrecht taktiež poukázal aj na niektoré nevýhody tejto metódy:

- vďaka elastickým deformáciám má táto metóda všetky členy v Jacobiho matici nenulové, čo môže spôsobiť značné problémy pri výpočte jej inverznej matice
- ak sú rovnice riešené súčasne, potom výsledný tlak nemôže byť menší ako nula (3.3), z toho vyplýva, že matica je skoro singulárna pri vyšších hodnotách zaťaženia.

Pre numerické riešenie použijeme rovnice (3.9) - (3.12), bezrozmerné rovnice z kapitoly 3.6. Aby sa zjednodušila diskretizácia, zavedieme nasledujúcu substitúciu:

$$q = \exp(\bar{\alpha}p). \quad (4.5)$$

S využitím rovnice redukovaného tlaku (4.5) sa rovnica (3.9) upraví na rovnicu:

$$\frac{d}{dX} \left(\bar{\rho} H^3 \frac{dq}{dX} \right) + \bar{\alpha} \lambda \frac{d}{dX} (\bar{\rho} H) = 0 \quad (4.6)$$

Túto rovnicu môžeme využiť v prípade aplikácie Barusovho vzťahu (3.6) pre popis závislosti viskozity od zmeny na tlaku. V prípade Roelandsovej rovnice (3.7) nie je možné využiť tento vzťah.

4.3.1. Diskretizácia

Pri numerickom riešení je teda potrebné previesť rovnice (3.1), (3.4)-(3.8) na diskrétny tvar.

Reynoldsova rovnica

Pre Reynoldsovu rovnicu, ktorá je popísaná v kapitole 3.1, môžeme použiť jej integrovaný tvar:

$$\frac{dp}{dx} = 12u_m \eta \frac{h - h_c}{h^3} \quad (4.7)$$

kde $h = h_c$ pre $\frac{dp}{dx} = 0$.

Spolu s Barusovým vzťahom (3.6) pre závislosť viskozity na tlaku dostaneme:

$$F = \frac{\partial q}{\partial X} + \lambda \bar{\alpha} \frac{H - H_c}{H^3} = 0 \quad (4.8)$$

kde H_c je integračná konštanta. V tejto integračnej konštante je taktiež zahrnutý vzťah závislosti hustoty na tlaku, ktorý sa už ďalej vo výpočte nepoužíva. Uvažujeme, že kvapalina je nestlačiteľná, takže H_c je konštanta. Diskretizáciou prvého rádu (centrálnej diskretizácia) a vynásobením rovnice (4.8) členom $H_i^3 \Delta$ dostávame:

$$f_i = (q_{i+1} - q_i) H_i^3 + \bar{\alpha} \lambda \Delta (H_i - H_c) \quad (4.9)$$

kde

- $q_1 = 1, q_N = 1$ sú okrajové podmienky
- N je počet diskrétnych bodov
- $\Delta = X_{i+1} - X_i$ je krok
- $q_i \leq 1$ je kavitačná podmienka

Rovnica hrúbky maziva

$$H(i) = H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \frac{1}{\bar{\alpha} \pi} \sum_{j=1}^N \ln(q_j) \left\{ (X_{j+\frac{1}{2}} - X_i) (\ln |X_{j+\frac{1}{2}} - X_i| - 1) - (X_{j-\frac{1}{2}} - X_i) (\ln |X_{j-\frac{1}{2}} - X_i| - 1) \right\} \quad (4.10)$$

Rovnica silovej rovnováhy

$$g = \sum_{j=1}^N \Delta \ln(q_j) + \frac{\bar{\alpha} \pi}{2} = 0 \quad (4.11)$$

4.3.2. Newtonova metóda

V nasledujúcej časti je uvedená aplikácia Newtonovej metódy na konkrétne riešenie matematického modelu EHD mazaného líniového kontaktu. Newtonova metóda je spôsob, akým určíme body, v ktorých je funkcia nulová. Ak je funkcia závislá na niekoľkých premenných, tak je problém popísaný nasledovne:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

kde neznámou je vektor \mathbf{u} (obdobne ako (4.3), kde neznámou bol vektor \mathbf{x})

N premenných je písaných ako vektor \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = [H_c, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}, H_0] \quad (4.13)$$

Sústava rovníc (4.4) má tvar:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}, \quad (4.14)$$

kde \mathbf{R} je vektor pravých strán, a je definovaný nasledovne:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ g \end{pmatrix}$$

Pre jednotlivé členy platí, že $R_i = -f_i$.

Jacobiho matica modelu s členmi $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_c} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_{N-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial H_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_c} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_{N-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial H_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N-1}}{\partial H_c} & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial q_2} & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial q_{N-1}} & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial H_0} \\ \frac{\partial g}{\partial H_c} & \frac{\partial g}{\partial q_2} & \frac{\partial g}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial q_{N-1}} & \frac{\partial g}{\partial H_0} \end{pmatrix}.$$

Derivácie jednotlivých zložiek Jacobiánu sú konštruované nasledovne:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = H_i^3 (\delta_{i+1,j} - \delta_{i,j}) + \{3H_i^2 (q_{i+1} - q_i) + \bar{\alpha}\lambda\Delta\} \frac{\partial H_i}{\partial q_j}, \quad (4.15)$$

kde pre posledný člen platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} = & \frac{1}{\pi\bar{\alpha}q_j} + \left\{ (X_{j+\frac{1}{2}} - X_i) (\ln |X_{j+\frac{1}{2}} - X_i| - 1) - \right. \\ & \left. (X_{j-\frac{1}{2}} - X_i) (\ln |X_{j-\frac{1}{2}} - X_i| - 1) \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{pre } i \neq j. \end{cases}$$

Prvý stĺpec matice:

$$\frac{\partial f_i}{\partial H_c} = -\bar{\alpha}\lambda\Delta \quad (4.17)$$

Posledný stĺpec matice:

$$\frac{\partial f_i}{\partial H_0} = 3(q_{i+1} - q_i) H_i^2 + \bar{\alpha}\lambda\Delta \quad (4.18)$$

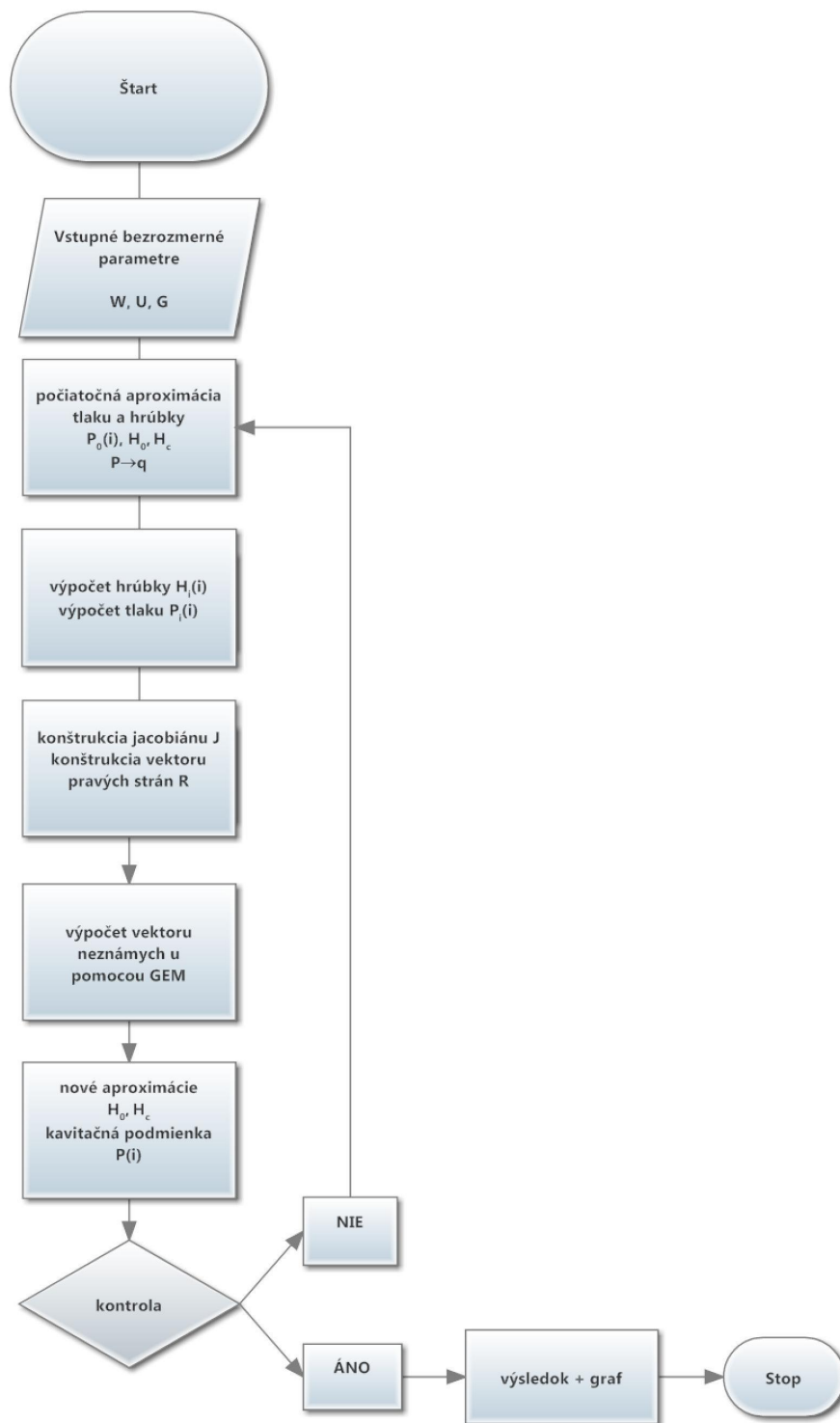
Posledný riadok matice:

$$\frac{\partial g}{\partial H_0} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial g}{\partial H_c} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial g}{\partial q_j} = \frac{\Delta}{q_j} \quad (4.21)$$

4.3.3. Algoritmus riešenia



Obrázok 4.1: Algoritmus riešenia

5. Výsledky

V predchádzajúcej kapitole bol popísaný numerický model EHD mazaného líniového kontaktu. Súčasná kapitola zhrňa výsledky získané pomocou navrhnutého algoritmu, ktorý je nasimulovaný v programovacom prostredí MATLAB (kód je dostupný v prílohe A).

Pre simuláciu dejov prebiehajúcich v EHD mazanom kontakte je potrebné definovať via- cero vstupných parametrov, medzi ktoré patria napríklad vlastnosti maziva a materiálov (tlakovo-viskóznny koeficient, moduly pružnosti), geometria telies v kontakte (redukovaný polomer krivosti, priblíženie telies), prevádzkové podmienky (sila, rýchlosti telies).

Hamrock a Dowson [7] definovali bezrozmerné parametre, pomocou ktorých sa dá znížiť počet vstupných parametrov. Pre líniový kontakt sú definované nasledovne:

- parameter zaťaženia

$$W = \frac{w}{ER},$$

- parameter rýchlosti

$$U = \frac{\eta_0 u_m}{ER},$$

- parameter materiálov

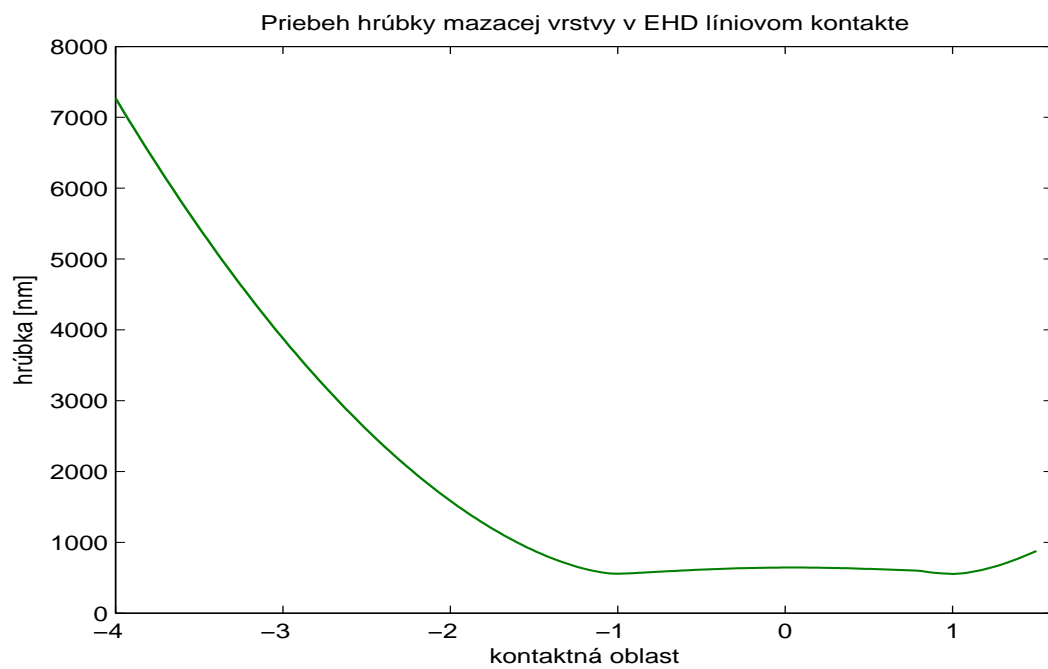
$$G = \alpha E.$$

Vďaka zavedeniu týchto parametrov je možné zredukovať počet vstupných veličín na tri. Výpočet požaduje aj definíciu parametrov, ktorými sú počet diskretných bodov N , veľkosť kroku Δ , tolerancia alebo maximálny počet iterácií, resp. počiatočné aproximácie tlaku P a priblíženia telies H_0 . Výstupom je priebeh tlaku a hrúbky mazacej vrstvy.

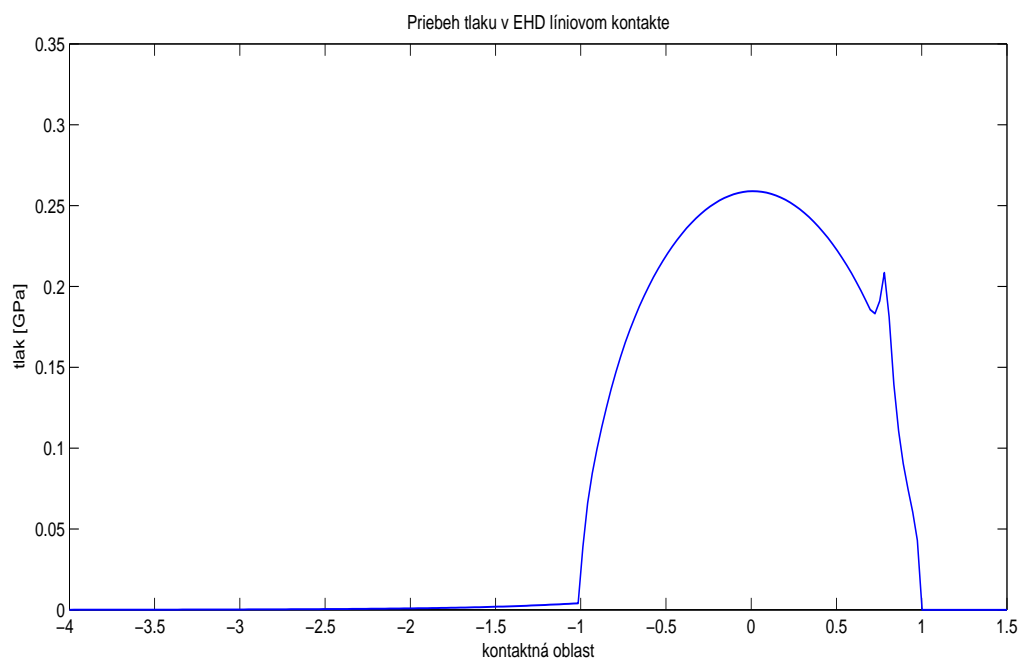
Súčasná kapitola obsahuje výsledky konkrétneho zadania. Všetky vstupné parametre sú uvedené v tabuľke (5.1).

parameter	označenie	jednotka	hodnota
zaťaženie	W	[-]	$2,0 \cdot 10^{-5}$
rýchlosť	U	[-]	$1,0 \cdot 10^{-11}$
materiál	G	[-]	$4,0 \cdot 10^3$
redukovaný model pružnosti	E_r	[GPa]	123,8
redukovaný polomer krivosti	R_x	[m]	0,02
počiatočná aproximácia priblíženia telies	H_0	[-]	0,5
počiatočná aproximácia integračnej konštanty	H_c	[-]	1
max počet iterácií	$MaxIter$	[-]	30
tolerancia	$TolFun$	[-]	$1 \cdot 10^{-4}$

Tabuľka 5.1: Vstupné parametre.



Obrázok 5.1: Pribeh hrúbky mazacej vrstvy v EHD líniiovom kontakte



Obrázok 5.2: Pribeh tlaku v EHD líniiovom kontakte

6. Diskusia

Riešenie a následná analýza konkrétneho problému EHD mazaného líniového kontaktu prináša dôležité závery. Tieto zahŕňajú aj komplikácie, ktoré môžu pri výpočtoch a simuláciách nastať.

Už samotné použitie Newtonovej metódy je pri simulácii dosť obmedzené. Táto metóda je síce jednoduchá a priamočiara, prináša rýchle a celkom presné riešenie pre slabé zaťaženia a malý počet diskretných bodov (v našom prípade 200), ale problém prichádza so zvyšujúcim sa zaťažením.

Algoritmus rieši sústavu rovníc, kde do Jacobiho matice sú ukladané jednotlivé derivácie (4.3.2). Tieto hodnoty sú v každej aproximácii prepočítavané. Ak je počet derivácií malý, výpočty sú rýchle. S rastúcim počtom derivácií sa objem výpočtov zväčšuje, a prináša tiež značné nevýhody tejto metódy. Vedie to k dlhším výpočtovým časom, alebo k porušeniu stability riešenia.

Kavitačná podmienka (3.3) nám zaručí, že ak sú rovnice riešené súčasne, potom výsledný tlak nemôže byť záporný. To má za dôsledok fakt, že Jacobiho matica je singularná pri vyšších hodnotách zaťaženia. Toto následne prináša obmedzenia pri výpočte požadovaného riešenia pomocou Gaussovej eliminačnej metódy.

Ako už bolo spomínané v 4.2.1., Newtonova metóda konverguje, ak je zvolená počiatočná aproximácia dostatočne blízko koreňa. Ak by toto nebolo zaručené, konvergencia by nemusela vôbec nastať.

V konečnom dôsledku môžeme zhodnotiť výpočet v tomto modeli ako čiastočne úspešný. Pre hodnoty uvedené v tabuľke 5.1 sa podarilo nájsť dobrú konvergenciu riešenia, čo možno vidieť aj v grafickom znázornení. V programe, ktorý je súčasťou práce, si užívateľ môže nastaviť iné hodnoty vstupných parametrov. Treba brať v úvahu fakt, že program je citlivý na voľbu počiatočnej aproximácie priblíženia telies H_0 a taktiež aj na voľbu počiatočnej aproximácie integračnej konštanty H_c . Najčajstejším problémom je avšak singularita Jakobiánu, ku ktorej dochádza, ako už bolo spomínané, so zvyšujúcou sa hodnotou zaťaženia W .

7. Záver

Táto bakalárska práca obsahuje popis matematického modelu a numerického riešenia elastohydrodynamicky mazaného líniového kontaktu. Zahŕňa taktiež výsledky simulácií, ktorými sú grafické znázornenie veľkosti a rozloženia tlaku spolu s rozmermi hrúbky mazacej vrstvy v EHD líniovom kontakte.

Druhá kapitola zhrňa historický vývoj riešenia danej problematiky. Tretia a štvrtá kapitola je zameraná hlavne na rešerš v oblasti EHD mazaného líniového kontaktu a popis numerických metód, ktoré sú pri výpočte a simulácií využívané. Druhá časť štvrtej kapitoly sa venuje konkrétnej aplikácii numerických metód na líniový kontakt. Výsledky konkrétneho zadania, ktoré je nasimulované v programovacom prostredí MATLAB, popisuje a zhrňa piata kapitola. V diskusii sú uvedené zhodnotenia výsledkov, analýzy problémov a komplikácií, ktoré môžu pri výpočte nastať. Medzi najčastejšie patria predovšetkým konvergencia Newtonovej metódy, pretože nie vždy je zaručená dobrá počiatočná aproximácia. Ďalej problém pri výpočtoch značne komplikuje Jacobiho matica využívaná v Newtonovej metóde. Častým problémom je jej singularita, čo opäť vedie k obmedzeniam pri výpočte. Prepočet jednotlivých členov pri väčšom objeme dát je podstatne dlhší a náročnejší, čo má za následok dlhšie výpočtové časy.

Štúdium práce je značne obmedzené na líniový kontakt (t. j. jednorozmerný prípad). Obsahuje isté zjednodušenia. Uvažujú sa predovšetkým stacionárne javy, hladké povrchy skúmaných kontaktov a newtonské správanie maziva. Model je možné rozšíriť o tieto obmedzenia. V praxi má väčšie uplatnenie aplikácia numerického riešenia na bodový kontakt (t. j. dvojrozmerný prípad).

Literatúra

- [1] ALMQVIST, T.; LARSSON, R. : The Navier-Stokes approach for thermal EHL line contact solutions. *Tribology International* 2002, vol. 35, s. 163-170.
- [2] BLAŠKOVIČ, P., BALLA, J. a DZIMKO, M.: *Tribológia*. 1.vydanie Bratislava: Vydavateľstvo Alfa, 1990. 360 s. ISBN 80-05-00 633-0.
- [3] ČERMÁK, L., HLAVIČKA, R.: *Numerické metody*. 2.vydanie Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. 110 s. ISBN 978-80-214-3752-4.
- [4] DOWSON, D. and HIGGINSON, G.R. (1959): A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem., *J. Mech, Eng. Sci.*, vol.1, no. 1, s. 6-15.
- [5] GRUBIN, A.N.: Fundamentals of the hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces. *Central Scientific Research Institute for Technology and Mechanical Engineering*, 1949, Book no 30, Moscow, D.S.I.R. transactions, s. 115-166.
- [6] HOUPERT, L.G. and HAMROCK, B.J.: Fast Approach for Calculating of Film Thicknesses and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads. *J. Tribol.*, 1986, vol.108, no. 3, s. 411-420.
- [7] HAMROCK, B.J., DOWSON, D.: Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point contacts, part I, Theoretical Formulation. *ASME J. of Lub. Tech*, 1976, vol. 98, s. 223-229.
- [8] KUMAR P., SAINI, P.K., TANDON, P.: *Surface roughness effects in elastohydrodynamic lubrication line contacts using couple stress fluid*. *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 222, s. 151-155, 2008.
- [9] KUMAR P., KHONSARI, M.M.: *Combined Effects of Shear Thinning and Viscous Heating on EHL Characteristics of Rolling/Sliding Line Contacts*. *ASME Journal of Tribology*, Vol. 130, 2008.
- [10] LUBRECHT, A.A.: The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques. *Ph.D. Thesis*, University Enschede, The Netherlands, 1987.
- [11] MIKLÍČEK, J.: *Numerické metody*, VUT, FS, Ediční středisko Brno, 1982, ISBN 55-617-82.
- [12] OKAMURA, H.: A contribution to the numerical analysis of isothermal elastohydrodynamic lubrication. *Proc. 9th Leeds-Lyon Symp. on Tribology, Leeds, 1982, s. 313-320*.
- [13] PETRUSEVICH, A.I.: Fundamental conclusions from the contact hydrodynamic theory of lubrication. *Izv. Akad. Nauk SSR (OTN)*, 1951, 3, s. 209-223.

- [14] URBANEC, L.: Numerická simulace elastohydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu nehladkých povrchů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. 81 s.
- [15] VENNER, C.H., LUBRECHT, A.A. *Multilevel Methods in Lubrication*. Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2000.

Zoznam použitých skratiek a symbolov

b	Hertzov polomer kontaktu
E_r	redukovaný modul pružnosti
G	bezrozmerný parameter materiálov
$h(x)$	hrúbka mazacieho filmu
h_0	priblíženie kontaktných telies
H	bezrozmerná hrúbka mazacieho filmu
N	počet diskretných bodov
p	tlak
P	bezrozmerný tlak
p_h	hertzov tlak
R_x	redukovaný polomer krivosti
u_m	stredná povrchová rýchlosť
U	bezrozmerný parameter rýchlosti
w	sila
W	bezrozmerný parameter zaťaženia
x	priestorová súradnica
x'	priestorová súradnica
X	bezrozmerná priestorová súradnica
z	tlakovo-viskózný index
α	tlakovo-viskózný parameter
η	dynamická viskozita maziva
$\bar{\eta}$	bezrozmerná viskozita maziva
η_0	viskozita pri atmosférickom tlaku
π	konštanta

ρ	hustota maziva
$\bar{\rho}$	bezrozmerná hustota maziva
ρ_0	hustota maziva pri atmosférickom tlaku
Ω	oblasť riešenia

Zoznam príloh

A.1. Hlavný program

A.2. Gaussova eliminačná metóda

A. Prílohy

A.1. Hlavný program

```
1 clc; clear all;
2 % počet diskretných bodov
3 N=200;
4 % tolerancia
5 TolFun=1e-4;
6 % maximálny počet iterácií (Newtonova metóda)
7 MaxIter=30;
8 % vektory a matice:
9 % priestorová súradnica
10 x=zeros(N,1); xx=zeros(N,1);
11 % tlak a redukovaný tlak (substitúcia)
12 p=zeros(N,1); P=zeros(N,1); q=zeros(N,1);
13 % hrúbka mazacej vrstvy
14 H=zeros(N,1); h=zeros(N,1);
15 % vektor koeficientov – výpočet elastickej deformácie
16 K=zeros(N,1);
17 % vektor neznámych a pravej strany, Jacobián
18 u=zeros(N,1); f=zeros(N,1); R=zeros(N,1);
19 J=zeros(N,N);
20 % pomocné vektory
21 Pprev=zeros(N,1); qprev=zeros(N,1);
22
23 % bezrozmerné parametre
24 W=2.0e-5; % bezrozm. param. zaťaženia
25 U=1.0e-11; % bezrozm. param. rýchlosti
26 G=4.0e3; % bezrozm. param. materiálu
27
28 H0=0.5; % počiatočná aproximácia priblíženia telies
29 Hc=1; % počiatočná aproximácia integračnej konštanty
30 % (zahrňuje vplyv hustoty)
31 E=123.8e9; % redukovaný modul pružnosti
32 Rx=0.02; % redukovaný polomer krivosti
33 alfa=G/E; % tlakovo-viskózny koeficient
34 w=W*E*Rx; % sila
35 b=sqrt((8*w*Rx)/(pi*E)); % Hertzov polomer kontaktu
36 Ph=2*w/(pi*b); % Hertzov tlak
37 alfabar=alfa*Ph; % bezrozmerný koeficient alfa
38 u0eta0=U*2*E*Rx; % konštanta stredná rýchlosť * viskozita
```



```

39 lambda=12*u0eta0*Rx*Rx/(Ph*b*b*b); % lambda (substitúcia v
    Reynoldsovej rovnici)
40
41 % prvý a posledný bod
42 xin=-4; xout=1.5;
43 % krok
44 dx=abs(xin-xout)/(N-1);
45 % def. počiatočnej min. hodnoty hrúbky
46 Hmin=1e6;
47
48 % definícia diskrétnych bodov a počiatočná aproximácia tlaku
49 for i=1:N
50     x(i)=xin+(i-1)*dx;
51     xx(i)=1-x(i)^2;
52     if (xx(i))>0
53         P(i)=sqrt(xx(i));
54     else P(i)=0;
55     end
56 end
57 % substitúcia: tlak --> redukovaný tlak
58 for i=1:N
59     q(i)=exp(-alfabar*P(i));
60 end
61 % aproximácia hodnôt priblíženia a integračnej konštanty
62 H0prev=H0; Hcprev=Hc;
63
64 % Newtonova metóda
65 for k=1:MaxIter
66     if (k>1) % hodnoty P (resp. q), H0 a Hc – predchádzajúca
        iterácia
67         qprev=q; Pprev=P; H0prev=H0; Hcprev=Hc;
68     end
69     % výpočet hrúbky
70     for i=1:N
71         for j=1:N
72             H(i)=H0+(x(i)^2)/2 +(1/(alfabar*pi))*sum(log(q(j))
                *...
73                 ((x(i)-x(j)+0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)+0.5*dx))
                    -1) -...
74                 (x(i)-x(j)-0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)-0.5*dx))
                    -1)));
75         end
76         % min. hodnota hrúbky
77         if (H(i)<Hmin)
78             Hmin=H(i);

```

```

79         end
80     end
81     % pravá strana f
82     for i=1:N-1
83         f(i)=(q(i+1)-q(i))*(H(i)^3)+alfabar*lambda*dx*(H(i)-Hc);
84     end
85     % rovnica silovej rovnováhy
86     for j=1:N
87         g=sum(dx*log(q(j)))+0.5*pi*alfabar;
88     end
89     % vektor neznámých
90     for i=2:(N-1)
91         u(i)=q(i);
92     end
93     u(1)=Hc; u(N)=H0; % prvý a posledný člen vektoru – okr. podm
94     .
95     % vektor pravej strany
96     for i=1:(N-1)
97         R(i)=f(i);
98     end
99     R(N)=g; % posledný člen vektoru pravej strany
100
101     % Jacobián
102     for j=2:N-1
103         J(N,j)=dx/q(j);
104     end
105     J(N,N)=0; J(N,1)=0;
106     for i=1:N-1
107         for j=2:N-1
108             dij=0;
109             if (i==j)
110                 dij=1;
111             end
112             di1j=0;
113             if ((i+1)==j)
114                 di1j=1;
115             end
116             dHdq=((x(i)-x(j)+0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)+0.5*dx))-1)-...
117                 (x(i)-x(j)-0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)-0.5*dx))-1))/...
118                 (pi*alfabar*q(j)));
119             J(i,j)=(H(i)^3)*(di1j-dij)+(3*(H(i)^2)*(q(i+1)-q(i))
120                 +...
121                 alfabar*dx*lambda)*(dHdq);

```

```

120     end
121 end
122 for i=1:N-1
123     J(i,1)=-alfabar*lambda*dx;
124 end
125 for i=1:N-1
126     J(i,N)=3*(q(i+1)-q(i))*(H(i)^2)+alfabar*lambda*dx;
127 end
128
129 for i=1:N
130     R(i)=-R(i);
131 end
132 % relaxačný faktor
133 RF=0.1;
134 % pomocou GEM určím nové u
135 zmena=gauss(J,R);
136 for i=2:N-1
137     u(i)=u(i)+RF*zmena(i);
138 end
139
140 % nové aproximácie H0 a Hc
141 H0=H0prev+RF*zmena(N);
142 Hc=Hcprev+RF*zmena(1);
143
144 % substitúcia
145 P=-log(u)/alfabar;
146 % kavitačná podmienka
147 for i=1:N
148     if (P(i)<=0)
149         P(i)=0;
150     end
151 end
152 % okrajové podmienky
153 P(N)=0; P(1)=0;
154
155 % kontrola
156 SIGNP1=sum(Pprev); SIGNP2=sum(P);
157 SIGNH01=H0prev; SIGNH02=H0;
158 SIGNHc1=Hcprev; SIGNHc2=Hc;
159
160 ERRP=abs(SIGNP2-SIGNP1)/abs(SIGNP1);
161 ERRH0=abs(SIGNH02-SIGNH01)/abs(SIGNH01);
162 ERRHc=abs(SIGNHc2-SIGNHc1)/abs(SIGNHc1);
163
164 if (ERRP < TolFun) && (ERRH0 < TolFun) && (ERRHc < TolFun);

```

```

165         break;
166     end
167
168 end
169
170 disp(ERRH0)
171 disp(ERRHc)
172 disp(ERRP)
173 disp(k)
174
175 % výsledky
176 % tlak (previesť z bezrozmerného tvaru)
177 for i=1:N
178     p(i)=P(i)*Ph;
179 end
180 % hrúbka (previesť z bezrozmerného tvaru)
181 for i=1:N
182     for j=1:N
183         K(j)=((x(i)-x(j)+0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)+0.5*dx))-1)
184             -...
185             (x(i)-x(j)-0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)-0.5*dx))-1));
186     end
187 end
188 for i=1:N
189     H(i)=H0+(x(i)^2)/2;
190     for j=1:N
191         H(i)=H(i)-(1/pi)*P(j)*((x(i)-x(j)+0.5*dx)*(log(abs(x(i)-
192             x(j)+...
193             0.5*dx))-1)-(x(i)-x(j)-0.5*dx)*(log(abs(x(i)-x(j)
194             -0.5*dx))-1));
195     end
196 end
197
198
199 % výstup:
200 figure(1)
201     title('Pribeh tlaku v EHD líniovom kontakte')
202     xlabel('kontaktná oblasť')
203     ylabel('Tlak [GPa]')
204     plot(x,p*1e-9); % výsledok v [GPa]
205
206 figure(2)

```

```

207     title('Pribeh hrúbky mazacej vrstvy v EHD líniom kontakte
          ')
208     xlabel('kontaktná oblasť')
209     ylabel('Hrúbka [ $\mu\text{m}$ ]\')
210     plot(x,h*1e9); % výsledok v [nm]

```

A.2. Gaussova eliminačná metóda

```

1  function x = gauss(A,B)
2  %požadované rozmery matíc majú tvar NA x NA a NA x NB
3  %funkcia rieši sústavu rovníc Ax = B Gaussovou eliminačnou
   metódou
4  NA = size(A,2); [NB1,NB] = size(B);
5  if NB1 ~= NA, error('A a B musí mať požadovaný rozmer'); end
6  N = NA + NB; AB = [A(1:NA,1:NA) B(1:NA,1:NB)];
7  eps = eps*ones(NA,1);
8  for k = 1:NA
9  [akx, kx] = max(abs(AB(k:NA,k)) ./ ...
10 max(abs([AB(k:NA,k + 1:NA) eps(1:NA - k + 1)]')));
11 if akx < eps, error('Matica je singulárna, nemá jednoznačné
   riešenie'); end
12 mx = k + kx - 1;
13 if kx > 1
14 tmp_row = AB(k,k:N);
15 AB(k,k:N) = AB(mx,k:N);
16 AB(mx,k:N) = tmp_row;
17 end
18 % Priamy chod
19 AB(k,k + 1:N) = AB(k,k+1:N)/AB(k,k);
20 AB(k,k) = 1;
21 for m = k + 1: NA
22 AB(m,k+1:N) = AB(m,k+1:N) - AB(m,k)*AB(k,k+1:N);
23 AB(m,k) = 0;
24 end
25 end
26 % spätný chod
27 %vytvorí hornú trojuholníkovú maticu
28 x(NA,:) = AB(NA,NA+1:N);
29 for m = NA-1: -1:1
30 x(m,:) = AB(m,NA + 1:N)-AB(m,m + 1:NA)*x(m + 1:NA,:);
31 end

```