



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELY V HYDRODYNAMICE (A AERODYNAMICE)

MATHEMATICAL MODELS IN HYDRODYNAMICS (AND AERODYNAMICS)

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JITKA JEŽKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. LUDĚK NECHVÁTAL, Ph.D.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jitka Ježková

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické modely v hydromechanice (a aerodynamice)

v anglickém jazyce:

Mathematical models in hydromechanics (and aerodynamics)

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Matematický popis pohybu částic tzv. ideálních kapalin (a plynů) vede na Eulerovy pohybové rovnice, které je možné odvodit na základě známých fyzikálních principů. Tyto rovnice spolu s rovnicí kontinuity a vhodnými podmínkami umožňují určit složky rychlosti a tlak jako funkce polohy a času.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Odvození Eulerových pohybových rovnic (rovnice kontinuity)
- 2) Transformace rovnic do jiných souřadnic
- 3) Speciální případy (nestlačitelné kapaliny)
- 4) Analytické (popř. numerické) řešení vybraných úloh

Seznam odborné literatury:

- [1] A. Kneschke: Používanie diferenciálných rovníc v praxi, Alfa, Bratislava, 1969.
- [2] M. Potter, D.C. Wiggert: Fluid Mechanics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2008.
- [3] U.A. Warsi: Fluid Dynamics, Theoretical and Computational Approaches, 2nd ed., CRC Press, 1998.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 20.11.2012

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato Bakalářská Práce je přehledovým textem, který se zabývá stavem a pohybem ideální kapaliny a ideálního plynu. Hlavním cílem je odvodit Eulerovy pohybové rovnice, které popisují pohyb tekutiny a z nichž lze získat Bernoulliho rovnici, která se přímo využívá při řešení problémů proudění. Dalším krokem je odvození rovnice kontinuity, podle které je v systému zachována hmotnost tekutiny. V případě ideálních plynů se k těmto rovnicím přidává stavová rovnice ideálního plynu a pomocí uvedených zákonů lze získat řešení vybraných úloh hydrodynamiky a aerodynamiky.

Abstract

Bachelor thesis is a summarizing text which deals with the state and the motion of ideal liquid and gas. The main goal is to derive Euler equations describing the flow of fluids. From these equations we can obtain Bernoulli equation that is directly used to solve problems of fluid flow. The next step is to derive the continuity equation expressing the fact that the mass is preserved in the system. In the case of ideal gas the state equation of ideal gas is added and therefore solutions of various types of tasks of hydrodynamics and aerodynamics can be achieved.

klíčová slova

Eulerovy rovnice, rovnice kontinuity, stavová rovnice ideální plynu, proudění ideální kapaliny, proudění ideálního plynu

key words

Euler equations, continuity equation, state equation of ideal gas, flow of ideal liquid, flow of ideal gas

JEŽKOVÁ, J.: *Matematické modely v hydromechanice (a aerodynamice)*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013, 31 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matematické modely v hydromechanice (a aerodynamice)* vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Lud'ka Nechvátala, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jitka Ježková

Děkuji svému školiteli doc. Ing. Lud'ku Nechvátalovi, Ph.D. za četné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Jitka Ježková

Obsah

Přehled symbolů a označení	7
1 Úvod	9
2 Odvození Eulerových rovnic	10
2.1 Silová rovnováha	10
2.2 Pascalův zákon	11
2.3 Eulerovy pohybové rovnice	13
2.4 Odvození rovnice kontinuity	15
2.5 Stavová rovnice ideálních plynů	16
3 Transformace souřadnic	18
3.1 Válcové souřadnice	18
4 Bezvířivé proudové pole	23
5 Příklady	25
5.1 Kapalina v rotujícím válci	25
5.2 Kapalina vytékající z nádoby	28
5.3 Plyn vytékající z nádoby	29
6 Závěr	30

Přehled symbolů a označení

symbol	jednotka	význam symbolu
x, y, z	m	kartézské souřadnice
r, φ, z	m	válcové souřadnice
V	m^3	objem
dV	m^3	elementární objem
S	m^2	obsah
dS	m^2	elementární obsah
ρ	kg m^{-3}	hustota
m	kg	hmotnost
dm	kg	elementární hmotnost
p	Pa	tlak
dp	Pa	elementární tlak
t	s	čas
\mathbf{v}	m s^{-1}	vektor rychlosti
\mathbf{A}	m s^{-2}	vektor objemového zrychlení
\mathbf{F}	N	vektor síly
\mathbf{a}	m s^{-2}	vektor zrychlení
\mathbf{g}	m s^{-2}	vektor gravitačního zrychlení
\mathbf{n}	-	jednotkový normálový vektor
U	J kg^{-1}	potenciál objemového zrychlení
Φ	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	rychlostní potenciál
T	K	teplota
\tilde{r}	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	měrná plynová konstanta
κ	-	Poissonova konstanta
n	-	polytropický koeficient
c_p	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	měrná telená konstanta za konstantního tlaku
c_v	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	měrná telená konstanta za konstantního objemu
ω	s^{-1}	úhlová rychlost
r	m	poloměr

symbol význam symbolu

\times	znaménko pro vektorový součin
\cdot	znaménko pro skalární součin
\mathbf{u}	obecný vektor ve 3D, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$
\mathbf{u}^T	transpozice vektoru \mathbf{u}
∇	nabla operátor, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
grad f	gradient skalární funkce f , $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
grad \mathbf{u}	gradient vektorové funkce \mathbf{u} , $\text{grad} \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}$
rot \mathbf{u}	rotace vektorové funkce, $\text{rot} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$
div \mathbf{u}	divergence vektorové funkce \mathbf{u} , $\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$
Δ	Laplaceův operátor, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

1 Úvod

S hydrodynamikou i aerodynamikou se dnes setkáváme téměř na každém kroku. Řešíme problémy proudění plynů v plynovodech, proudění vody v potrubí, s hydrodynamikou se také setkáváme v lékařství při proudění krve v žilách. Při návrzích motorů letadel řešíme úlohy spojené s prouděním vzduchu v turbínách motorů, mnohé tekutiny jsou dnes pracovními látkami v obráběcích strojích nebo například v lednicích. Smyslem práce je seznámit čtenáře s problematikou proudění ideálních tekutin a vytvořit základ pro porozumění a další studium reálných tekutin.

Počátky teorie hydromechaniky a aerodynamiky spadají až do 4. století před Kristem, kdy již Aristoteles začal přemýšlet o proudění. Poté ve 3. století před Kristem vyslovil Archimedes zákon o plavání těles v tekutině. Na přelomu 15. a 16. století objevil da Vinci zákon kontinuity, také se zabýval letem ptáků a studoval principy letu, k tomu přidal Torricelli v 17. století zákon pro výtokovou rychlost. Několik let potom vyslovil Pascal zákon o tlaku, v 18. století odvodil Euler energetické a pohybové rovnice. Dalším důležitým krokem byla představa o laminárním proudění, kterou světu dal v témže století d'Alembert. Tím se dovršil rozvoj dynamiky ideálních tekutin a dále následovalo několik významných objevů, které vylepšily a rozšířily dosavadní teorie. Byli to např. Navier a Stokes, kteří se věnovali tomuto tématu, Kelvin, Reynolds nebo Prandtl.

Práce čerpá z uvedených zdrojů a je členěna následovně. Ve druhé kapitole odvodíme pomocí silové rovnováhy a Pascalova zákona Eulerovy pohybové rovnice a také rovnici kontinuity. Rovnice rozšíříme o případ ideálního plynu a uvedeme stavovou rovnici ideálního plynu. Třetí kapitola obsahuje odvození Eulerových rovnic a rovnice kontinuity ve válcových souřadnicích, které se hojně v technické praxi používají. Ve čtvrté kapitole upravíme Eulerovy pohybové rovnice pro speciální proudění, a to pro nevířivé proudění. Dostaneme Bernoulliho rovnici, kterou kromě předchozích odvozených rovnic využijeme v páté kapitole pro řešení vybraných typových úloh o kapalinách a plynech.

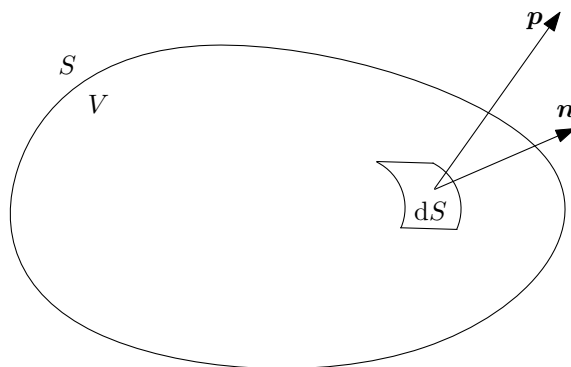
2 Odvození Eulerových rovnic

V této části odvodíme Eulerovy rovnice pro pohyb kapalin a plynů. Vybereme libovolný objem kapaliny, který uvažujeme v silové rovnováze. Po úvaze, které síly na kapalinu působí, sestavíme silovou rovnici rovnováhy a následně z ní odvodíme diferenciální rovnice pro pohyb kapaliny. Je nutné dodat, že se budeme zabývat výhradně ideálními kapalinami a plyny, to znamená, že tření na povrchu, vnitřní tření a jiné ztráty uvažovat nebudeme.

Tři Eulerovy pohybové rovnice tvoří spolu s rovnicí kontinuity soustavu rovnic, kterou lze řešit pro neznámé složky rychlostí a neznámý tlak. U ideálních plynů (tedy stlačitelných kapalin) místo rovnic čtyř potřebujeme pět rovnic, neznámé jsou složky rychlosti, tlak a navíc hustota. Proto jako pátou rovnici použijeme stavovou rovnici plynu, která nám dá s ostatními čtyřmi rovnicemi řešení.

2.1 Silová rovnováha

Nejdříve libovolně zvolíme objem kapaliny V a následně malý element v tomto objemu, který nazveme element kapaliny dV o povrchové ploše dS , a řešíme silové působení na tento element.



Obrázek 1: Objem kapaliny V

Na element dV s hustotou ρ působí objemové síly, které jsou určeny hmotností tohoto elementu a nezávisí na okolních částicích kapaliny. Vezmeme sílu působící na jednotku hmotnosti a označíme $\mathbf{A} dm = \rho \mathbf{A} dV$, kde \mathbf{A} je vektor objemového zrychlení se složkami (A_x, A_y, A_z) (poznamenejme, že toto zrychlení neznamená pohyb tělesa; jako objemové zrychlení si můžeme představit např. gravitační nebo odstředivé zrychlení) a ρ je hustota kapaliny. Potom síla působící na celý objem V je

$$\int_V \rho \mathbf{A} dV$$

a jednotlivé složky sil jsou $\int_V \rho A_x dV$, $\int_V \rho A_y dV$, $\int_V \rho A_z dV$.

Kromě těchto sil působí na element také povrchové síly, které vznikají interakcí elementu kapaliny s okolními částicemi.

Další působící síly jsou vnitřní síly, které si můžeme představit jako reakce okolní kapaliny na element, pokud element z kapaliny vyjmeme. Tlak na povrchu dS elementu dV označíme \mathbf{p} . Pak máme sílu, která působí na plochu elementu kapaliny, danou výrazem

$\mathbf{p} dS$ a sílu působící na celý povrch kapaliny danou výrazem

$$\int_S \mathbf{p} dS.$$

Na element kapaliny působí dále setrvačné síly, které lze vyjádřit ve tvaru

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV,$$

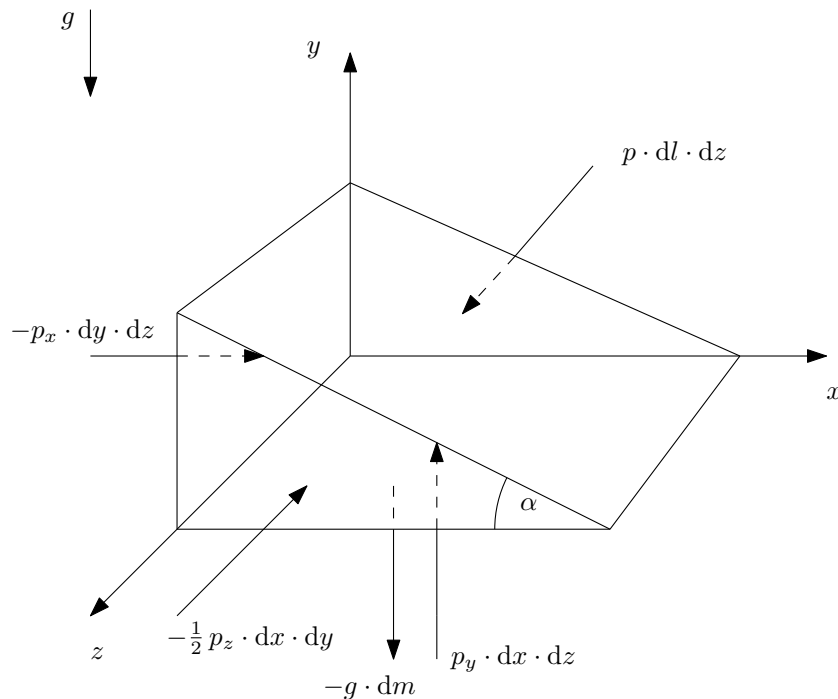
kde \mathbf{v} je vektor rychlosti se složkami $(v_x, v_y, v_z)^T$, takže tento integrál vyjadřuje pohyb tělesa. Tyto setrvačné síly podle druhého Newtonova zákona $\mathbf{F} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ (nebo také podle d'Alembertova principu) jsou v rovnováze s ostatními silami, takže můžeme napsat podmínku rovnováhy pro pohyb elementu kapaliny

$$\int_V \rho \left(\mathbf{A} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV + \int_S \mathbf{p} dS = 0. \quad (2.1)$$

2.2 Pascalův zákon

Abychom mohli pracovat se silovou rovnicí rovnováhy (2.1) a odvodit z ní Eulerovy rovnice, musíme nejdříve zjistit, zda je tlak veličina skalární či vektorová. Zatím jsme ji považovali obecně za vektor, nyní ukážeme, že tlak je veličina skalární.

Bez újmy na obecnosti uvažujme pětistěn o hranách dx , dy , dz podle obrázku 2, na který působí několik sil. Síly jsou v rovnováze, takže vytvoříme složkové rovnice rovnováhy.



Obrázek 2: Uvažovaný objem kapaliny

Uvažujeme, že na těleso působí objemové síly. Pro jednoduchost zde máme jen gravitační sílu, která je rovna

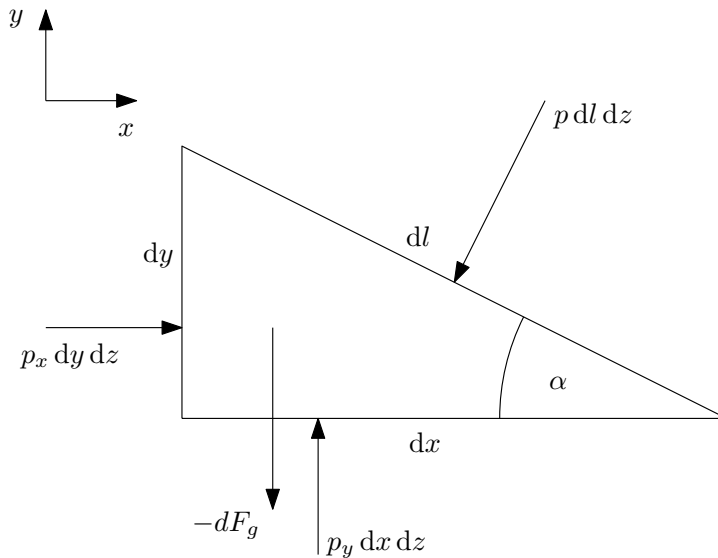
$$dF_g = g \cdot dm = g \cdot \rho \cdot dV = g \cdot \rho \cdot \frac{1}{2} dx dy dz$$

a působí v záporném směru osy y . Další síly jsou tlakové síly na jednotlivé stěny tělesa a jsou vyjádřeny součinem tlaku a plochy, na kterou tlak působí

$$p_x dy dz, \quad p_y dx dz, \quad p_z dx dy.$$

Dál působí na vrchní stěnu tělesa tlak $p dl dz$, kde dl je délka nejdelší hrany.

Těleso nyní promítneme do roviny a vytvoříme silovou rovnováhu předního trojúhelníka (obrázek 3), tedy sestavíme silovou rovnováhu v osách x a y .



Obrázek 3: Síly působící na přední trojúhelník

V ose x působí dvě stejně velké síly, tj.

$$p_x dy dz = p dz dl \sin \alpha.$$

Protože $dl \sin \alpha = dy$, dostáváme rovnost

$$p_x = p.$$

Stejnou úvahou dojdeme k silové rovnováze v ose y , kde navíc působí gravitační síla. Tato síla je v celkovém působení sil malá a tedy ji zanedbáme. Celkově

$$p_y dx dz = p dz dl \cos \alpha + \frac{1}{2} g \rho dx dy dz$$

$$p_y dx dz = p dz dx + \frac{1}{2} g \rho dx dy dz$$

$$p_y = p + \frac{1}{2} g \rho dy$$

$$p_y = p.$$

Vidíme, že pro osy x a y jsme ukázali, že tlak není vektorovou veličinou. Analogicky bychom to stejně ukázali pro tlak p_z .

2.3 Eulerovy pohybové rovnice

Protože jsme ukázali, že tlak je skalární veličina, můžeme přepsat silovou rovnici rovnováhy (2.1) do tvaru

$$\int_V \rho \left(\mathbf{A} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV - \int_S p \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.2)$$

kde \mathbf{n} je normálový vektor k ploše dS . Plošný integrál lze přepsat na objemový pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty [4]

$$\int_S p \mathbf{n} dS = \int_V \text{grad } p dV.$$

Potom lze podmínku rovnováhy (2.2) přepsat na tvar

$$\int_V \left[\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{A} \right) + \text{grad } p \right] dV = 0.$$

Uvažovaný objem kapaliny V lze volit libovolně, proto rovnost nastane tehdy, když se integrand rovná nule

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{A} \right) + \text{grad } p = 0.$$

Tuto vektorovou rovnici upravíme do tvaru

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Rozepsáním do složek dostáváme tři Eulerovy pohybové rovnice

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_x &= \frac{dv_x}{dt}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_y &= \frac{dv_y}{dt}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + A_z &= \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned}$$

Derivací složené funkce máme

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Pokud stejný postup použijeme pro y a z složku rychlosti a využijeme vztah $\frac{dx}{dt} = v_x$ (opět také pro další dvě složky), dostáváme finální verzi Eulerových rovnice ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + A_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

přičemž výrazy $\frac{\partial v_x}{\partial t}$, $\frac{\partial v_y}{\partial t}$, $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ představují lokální neboli místní zrychlení, které je při stacionárním proudění nulové, výrazy $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$, $v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$ a $v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$ znamenají konvektivní zrychlení (např. při změně průřezu potrubí), vektor \mathbf{A} je objemové zrychlení a $-\frac{1}{\rho} \text{grad } p$ je zrychlení, které uděluje tlakový spád.

Pokud bychom uvažovali rovné potrubí a vše v jedné proměnné l , rovnice se zjednoduší a bude vypadat následovně

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + A_l = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l}.$$

Vraťme se ke 3D případu Eulerových rovnic. Použijeme-li vztah

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}),$$

Eulerova rovnice přejde na tvar

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} (\nabla \mathbf{v}).$$

Použijeme-li dále vztah

$$\mathbf{v} (\nabla \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

který lze snadno dokázat rozepsáním jednotlivých členů. Levá strana rovnosti vypadá následovně

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T \quad \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} (\nabla \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Pravá strana rovnosti

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \nabla (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{v} (\nabla \mathbf{v}).$$

Pomocí (2.3) dostaneme ekvivalentní tvar Eulerovy rovnice

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Tento speciální tvar lze ještě dále upravit. Vezmeme-li v úvahu, že objemové zrychlení má potenciál U , potom $\mathbf{A} = -\operatorname{grad} U$ a Eulerovu rovnici lze podle [1] přepsat do tvaru

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} U = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Eulerova rovnice ve vektorovém tvaru pro pohyb ideální kapaliny popisuje proudění kapaliny. Kromě těchto rovnic musí platit při proudění zákon zachování hmotnosti kapaliny. Proto si zde tento zákon odvodíme a upravíme na vhodný tvar.

2.4 Odvození rovnice kontinuity

Pro kapalinu vyžadujeme, aby vyplňovala celý uvažovaný prostor a byla v prostoru zachována její hmotnost. Abychom tuto podmínku mohli matematicky zapsat, uvažujeme kapalinu o objemu V , který si libovolně zvolíme. Hmotnost kapaliny v tomto objemu popisuje integrál $\int_V \rho \, dV$. Potom lze změnu hmotnosti kapaliny v objemu V vyjádřit jako

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV,$$

a navíc platí, že je tento výraz větší než nula.

Tato změna hmotnosti kapaliny je způsobena tokem kapaliny přes povrch S . Tok obecně závisí na rychlosti proudění kapaliny, směru (tedy na ploše S) a dá se zapsat výrazem

$$\int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor, který má směr vnější normály plochy dS . Pak platí rovnost mezi změnou hmotnosti kapaliny a tokem kapaliny

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS. \quad (2.6)$$

Protože uvažujeme, že $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV > 0$ a \mathbf{n} je vektor vnější normály, dostaneme na pravé straně rovnice znaménko minus. Použijeme Gaussovu-Ostrogradského větu a přepíšeme plošný integrál na objemový

$$\int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dV$$

a rovnici (2.6) můžeme přepsat na

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) \, dV = 0.$$

Protože objem V jsme vybrali libovolně, platí uvedená rovnost, je-li

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Rovnice (2.7) se nazývá rovnice kontinuity a tvoří spolu s Eulerovými rovnicemi soustavu čtyř rovnic pro určení řešení úloh hydrodynamiky s neznámými v_x , v_y , v_z , p . Rovnice kontinuity lze dále přepsat na jiný tvar rozepsáním druhého členu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

Pro případ ideálních plynů a stlačitelných kapalin obsahuje rovnice (2.8) hustotu, která se zde mění. Pokud uvažujeme ideální (nestlačitelné) kapaliny, přejde tato rovnice podle [3] do tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.9)$$

Jak už bylo zmíněno, rovnice kontinuity (2.7) a Eulerovy rovnice (2.4) spolu s okrajovými podmínkami stačí pro určení rychlosti a tlaku v případě nestlačitelných kapalin. Pokud chceme řešit ideální plyny, musíme hustotu považovat také za neznámou a proto potřebujeme další, pátou, rovnici.

2.5 Stavová rovnice ideálních plynů

Pro ideální plyny platí obecně stavová rovnice

$$pV = m\tilde{r}T,$$

kde p je tlak, V je objem plynu, m je jeho hmotnost, r je měrná plynová konstanta a T je teplota v kelvinech. Tato rovnice má několik ekvivalentních tvarů. Pro naše úvahy je vhodnější tvar, kde se hustota vyskytuje přímo

$$p = \rho\tilde{r}T.$$

Měrná plynová konstanta je pro různé plyny různá, avšak pro jeden konkrétní plyn je konstantní, např. pro oxid uhličitý je $\tilde{r} = 188,9 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Příklady měrné plynové konstanty jiných plynů naleznete v [2]. Další neznámá, která přibude k rychlosti a tlaku, je hustota.

Rozeznáváme různé druhy dějů, které popisují chování plynů. Jeden ze základních termomechanických dějů je izotermická změna stavu. Při tomto ději nedochází ke změně teploty, ta je tedy konstantní. Ze stavové rovnice nám vyplyne, že pro izotermický děj platí rovnost

$$\frac{p}{\rho} = \textit{konst},$$

kteřá tvoří pátou rovnici k Eulerovým rovnicím a rovnici kontinuity a řeší úlohy o ideálních plynech.

Ačkoli je izotermická změna stavu jedním ze základních dějů, není moc častá. Málokdy se stane, že dokážeme plyn převést z jednoho stavu na jiný tak pomalu, že udržíme teplotu konstantní. Daleko častější je děj adiabatický, který probíhá rychle a teplota se při něm mění. Při tomto ději nedochází k výměně tepla s okolím. Pro adiabatický děj lze psát rovnost

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \textit{konst}. \quad (2.10)$$

Symbol κ zde představuje Poissonovu konstantu (neboli adiabatický exponent). Je to bezrozměrné číslo a vyjadřuje podíl mezi měrnými tepelnými kapacitami

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku a c_v je měrná tepelná kapacita při konstantním objemu. Obě kapacity jsou pro různé plyny různé, ale pro jeden konkrétní existuje jedna hodnota c_p a jedna hodnota c_v . Dále platí, že

$$c_p = c_v + \tilde{r} \quad \longrightarrow \quad c_p > c_v,$$

takže Poissonova konstanta je vždy větší než jedna, např. pro vzduch $\kappa = 1,4$. Další příklady konstanty κ a konstant c_p, c_v naleznete v [2].

Pro adiabatický děj tvoří rovnice (2.10) pátou rovnici a lze tedy opět řešit úlohy pro ideální plyny.

Adiabatický děj je spíše teoretickým dějem, který ve skutečnosti neprobíhá. Je vhodné definovat jiný děj, který probíhá téměř jako adiabatický, ale je více podobný skutečnosti. Takový děj se nazývá polytropický. Rovnost, která tento děj vystihuje, vypadá následovně

$$\frac{p}{\rho^n} = konst. \quad (2.11)$$

V rovnosti vystupuje místo exponentu κ polytropický exponent n , který se většinou pohybuje mezi 1 až 1,41, záleží na použitém plynu. Opět tedy vidíme, že rovnice (2.11) tvoří pátou rovnici pro řešení ideálních plynů.

3 Transformace souřadnic

Pro řešení problémů s ideálními kapalinami či plyny máme k dispozici potřebné rovnice. V mnoha případech je vhodné řešit úlohy ve sférických nebo válcových souřadnicích, namísto v kartézských. Proto odvodíme Eulerovy rovnice i rovnici kontinuity v těchto souřadnicích.

3.1 Válcové souřadnice

Pro řešení problémů v praxi je často zapotřebí použít válcové, neboli cylindrické souřadnice. Využití těchto souřadnic lze vidět například u válcového potrubí, kterým protéká kapalina nebo plyn.

Parametrické rovnice válcových souřadnic jsou

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\z &= z,\end{aligned}$$

kde x , y a z jsou původní kartézské souřadnice a r , φ a z jsou nové válcové souřadnice, které vyjádříme z uvedených parametrických rovnic

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x}, \\ z &= z.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Nejprve rozepíšeme derivace složené funkce $f = f(x(r, \varphi, z), y(r, \varphi, z), z(r, \varphi, z))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Je potřeba spočítat jednotlivé partiální derivace r , φ a z podle x , y , z ze vztahů (3.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= 0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin \varphi}{r}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

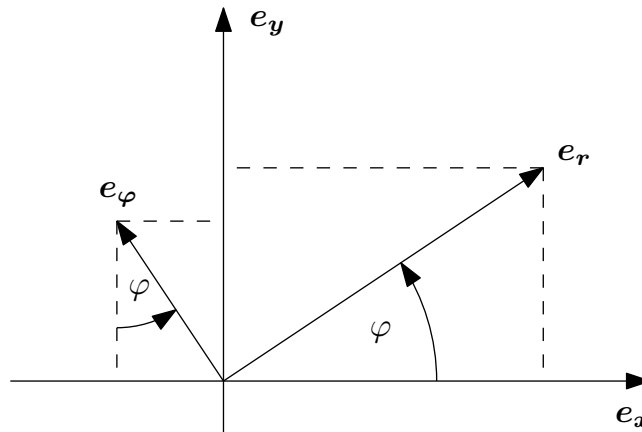
Dosadíme derivace (3.14) do rovnic pro složenou funkci (3.13) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{-\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nyní je potřeba uvědomit si, že se pohybujeme z jedné báze do jiné. Nechť v kartézském systému máme bázi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ a ve válcovém systému bázi $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$. Vztah mezi bázemi vystihují rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi, \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3.16)$$

viz obrázek 4.



Obrázek 4: Grafické znázornění vztahů mezi bázovými vektory

Gradient funkce f v bázi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ je

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (3.17)$$

Pro vyjádření gradientu v bázi $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ dosadíme vztahy (3.15) a (3.16) do rovnice (3.17) a upravíme na konečný tvar

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) (\mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi) + \\
&+ \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) (\mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \\
&= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r \cos^2 \varphi - \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r \cos \varphi \sin \varphi + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin^2 \varphi + \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r \sin^2 \varphi + \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r \cos \varphi \sin \varphi + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \cos^2 \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Tedy gradient vyjádřený v bázi válcového systému je

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Kromě gradientu vystupuje v Eulerových rovnicích také rotace, proto si nyní obdobně odvodíme rotaci ve válcových souřadnicích. Budeme pracovat s obecnou vektorovou funkcí \mathbf{g} . Protože rotaci funkce lze vyjádřit jako vektorový součin gradientu a vektorové funkce, můžeme psát

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{g} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (g_r \mathbf{e}_r + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi + g_z \mathbf{e}_z) = \\
&= \mathbf{e}_r \times \frac{\partial}{\partial r} (g_r \mathbf{e}_r + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi + g_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial \varphi} (g_r \mathbf{e}_r + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi + g_z \mathbf{e}_z) + \\
&+ \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} (g_r \mathbf{e}_r + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi + g_z \mathbf{e}_z) = \tag{3.18} \\
&= \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial g_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} g_r + \frac{\partial g_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} g_\varphi + \frac{\partial g_z}{\partial r} \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} g_z \right) + \\
&+ \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial g_r}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} g_r + \frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} g_\varphi + \frac{\partial g_z}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} g_z \right) + \\
&+ \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\partial g_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} g_r + \frac{\partial g_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} g_\varphi + \frac{\partial g_z}{\partial z} \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} g_z \right).
\end{aligned}$$

Protože platí vztahy (inverzní transformace (3.16))

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi, \\
\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi,
\end{aligned}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi = \mathbf{e}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\mathbf{e}_x \cos \varphi - \mathbf{e}_y \sin \varphi = -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Derivace bázových vektorů postupně dosadíme do (3.18) a využijeme vztah $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = -(\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_z$, který platí pro všechny tři bázové vektory

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{g} &= \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial g_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial g_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial g_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g_r}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi g_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r} \mathbf{e}_r g_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial g_z}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z \right) + \\ &+ \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\partial g_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial g_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial g_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \\ &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial g_r}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial g_\varphi}{\partial r} + \frac{g_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial g_r}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}$$

Finální tvar rotace funkce \mathbf{g} ve válcových souřadnicích

$$\text{rot } \mathbf{g} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial g_r}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial r}, \frac{\partial g_\varphi}{\partial r} + \frac{g_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial g_r}{\partial \varphi} \right).$$

Odvozený gradient a rotaci pro válcové souřadnice aplikujeme na veličiny v Eulerově rovnici (2.5)

$$\begin{aligned}\nabla p &= \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T \\ \nabla U &= \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)^T \\ \nabla \mathbf{v}^2 &= \begin{pmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ v_r \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \\ v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial r}, \\ \frac{v_z}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \\ v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Dosazením jednotlivých členů (3.20) do Eulerovy rovnice (2.5) a rozepsáním do složek r , φ a z dostáváme Eulerovy rovnice ve válcových souřadnicích

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r} v_\varphi^2, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r}, \\ -\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Zbývá převést rovnici kontinuity do tvaru ve válcových souřadnicích. Pro případ nestlačitelné kapaliny, kdy je ρ konstantní upravujeme rovnici (2.9). Je nutno spočítat

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

kde symbol \cdot znázorňuje skalární součin. Využijeme vztahy (3.19) a vztahy pro skalární součin bázových vektorů

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r &= 1, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Potom divergence vektorové funkce

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (g_r \mathbf{e}_r + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi + g_z \mathbf{e}_z) = \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial g_r}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial g_\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{\partial g_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial g_r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi g_r - \mathbf{e}_r g_\varphi + \mathbf{e}_z \frac{\partial g_z}{\partial \varphi} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_z \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial g_r}{\partial z} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial g_\varphi}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial g_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial g_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g_r + \frac{\partial g_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Aplikací tohoto vztahu dostáváme rovnici kontinuity ve válcových souřadnicích

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Analogicky bychom postupovali při odvození Eulerových rovnic a rovnice kontinuity ve sférických souřadnicích. Jiný postup získání těchto rovnic lze nalézt např. v [1].

4 Bezvřívé proudové pole

Jedním z typů proudění ideální kapaliny je bezvřívé, též potenciální proudění. Vyznačuje se tím, že částice kapaliny se pohybují po přímých či křivočarých drahách tak, že nerotují kolem své osy. Částice mohou vykonávat i deformační pohyb, nikoli však otáčivý. V případě potenciálního proudění lze v každém místě psát

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (4.21)$$

viz [1], jak odvodíme dále. Předchozí vztah lze také vyjádřit ve složkách

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (4.22)$$

Složky rychlosti přepíšeme na tvar

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (4.23)$$

vektorově

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi,$$

kde funkce Φ se nazývá rychlostní potenciál. V případě nestacionárního proudění závisí funkce Φ na poloze částice kapaliny a také na čase. Při řešení stacionárního problému bereme Φ pouze jako funkce polohy $\Phi = \Phi(x, y, z)$.

Nyní si odvodíme již zmíněný vztah (4.21) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, platící pro potenciální proudění. Vyjdeme z rovnic (4.23), které popisují složky rychlosti pomocí potenciálu rychlosti $\Phi(x, y, z)$ a dosadíme do (4.22)

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 0, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = 0, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Z důvodu rovnosti smíšených derivací vyplývá, že $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$.

Pro potenciální proudění lze upravit rovnici kontinuity (2.8) pomocí vztahů (4.23) na tvar

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Delta \Phi = 0,$$

kde

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

a

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

je Laplaceův operátor. V případě nestlačitelné kapaliny má rovnice kontinuity jednodušší tvar

$$\Delta \Phi = 0.$$

V tomto případě můžeme snadno řešit úlohu, protože rychlostní potenciál je řešením Laplaceovy rovnice.

Přejdeme k Eulerově pohybové rovnici a upravíme ji pro potenciální pole. Vyjdeme z rovnice (2.4) a přepíšeme rychlost pomocí potenciálu rychlostí, čímž obdržíme rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 = -\operatorname{grad} U - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (4.24)$$

Za předpokladu, že ρ je známá funkce tlaku, tj. $\rho = \rho(p)$, můžeme Eulerovu rovnici (4.24) přepsat na tvar

$$\text{grad} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + U \right] = 0, \quad (4.25)$$

protože platí rovnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Phi = \text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Integrací rovnice (4.25) dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + U = f(t), \quad (4.26)$$

kde $f(t)$ je funkce času t a $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Rovnici (4.26), platnou pro nestacionární bezvířivé proudění, nazýváme Bernoulliho rovnice. Pro nestlačitelné kapaliny lze psát

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = f(t).$$

Z Bernoulliho rovnice lze hydrodynamický tlak vyjádřit, pokud známe rychlostí potenciál Φ . V případě stacionárního proudění stlačitelné kapaliny vypadá Bernoulliho rovnice následovně

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + U = c, \quad (4.27)$$

přičemž c je libovolná konstanta. Rychlostní potenciál nezávisí na čase a jeho derivace je tedy nulová. Pro případ stacionárního proudění nestlačitelné kapaliny píšeme

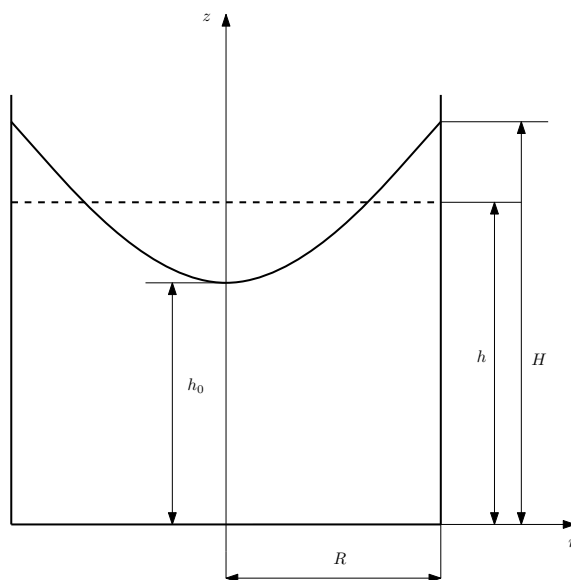
$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = c. \quad (4.28)$$

5 Příklady

Aplikujme nyní odvozené rovnice na několik typových situací.

5.1 Kapalina v rotujícím válci

Uvažujme ideální kapalinu, kterou vlijeme do válcové nádoby bez horního víka. Celá soustava se nachází v gravitačním poli. Předpokládejme, že pokud je kapalina v klidu, její hladina dosahuje výšky $z = h$. Pokud začneme nádobu otáčet kolem její svislé osy konstantní úhlovou rychlostí $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, hladina kapaliny ve středu nádoby poklesne a při okraji nádoby stoupne nad výšku h . Úkolem je stanovit tlak ve všech místech kapaliny a zjistit, jaký tvar hladina kapaliny při otáčení nádoby zaujímá.



Obrázek 5: Kapalina v rotující nádobě

V tomto případě dobře poslouží válcové souřadnice

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Víme, že k pohybu dochází ve směru souřadnice φ , proto

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad v = v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega.$$

Potenciál gravitační síly $U = gz$, kde g je tíhové zrychlení. Potom Eulerovy rovnice mají tvar

$$\omega^2 r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad (5.30)$$

$$g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.31)$$

Z rovnice (5.30) vyplývá, že p nezávisí na φ . Z rovnice (5.29) integrací dostaneme

$$p(r, z) = \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 + f(z),$$

kde $f(z)$ je funkce výšky. Vyjádřený tlak dosadíme do rovnice (5.31) a upravíme

$$f'(z) = -\rho g \quad \Rightarrow \quad f(z) = -\rho g z + c.$$

Dostáváme tlak

$$p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z + c. \quad (5.32)$$

Víme, že tlak na povrchu kapaliny je roven atmosferickému tlaku p_0 . Odtud dostaneme rovnici povrchu kapaliny

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{c}{\rho g} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0, \quad (5.33)$$

kde

$$h_0 = \frac{1}{\rho g} (c - p_0) \quad (5.34)$$

je výška nejnižšího bodu povrchu kapaliny ve středu válcové nádoby.

Síla působící na dno válce v klidu o poloměru R je podle vztahu pro hydrostatický tlak

$$p = \pi R^2 (p_0 + \rho g h).$$

Odtud dosazením a vypočtením dostaneme

$$\begin{aligned} \pi R^2 (p_0 + \rho g h) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R p r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z + c \right) dr \, d\varphi = \\ &= \pi R^2 \left(\frac{\rho \omega^2 R^2}{4} + c \right). \end{aligned}$$

Z předešlé rovnosti vyjádříme konstantu c

$$c = p_0 + \rho g h - \frac{\rho \omega^2 R^2}{4},$$

dosadíme do rovnice (5.34) a získáme hodnotu nejnižšího bodu hladiny kapaliny při rotaci válce

$$h_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

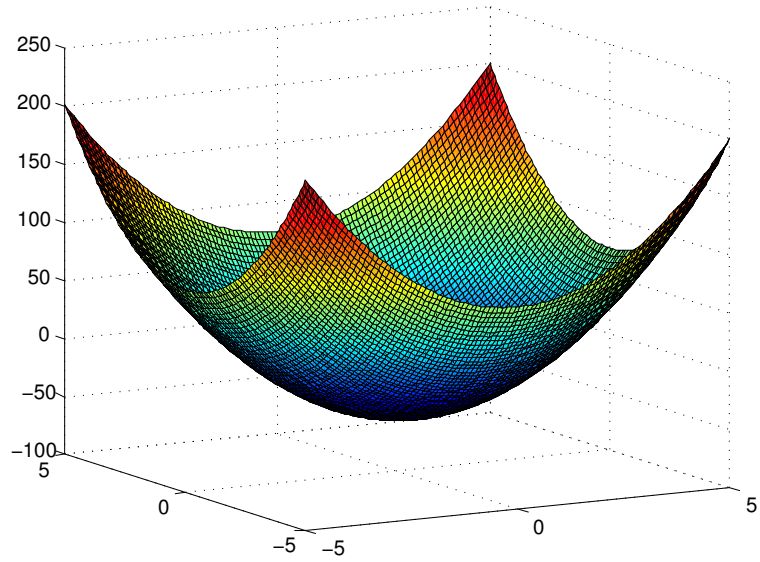
Vypočtené hodnoty c a h_0 dosadíme do rovnice hladiny (5.33) a rovnice tlaku (5.32)

$$z = z(r) = h + \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right), \quad (5.35)$$

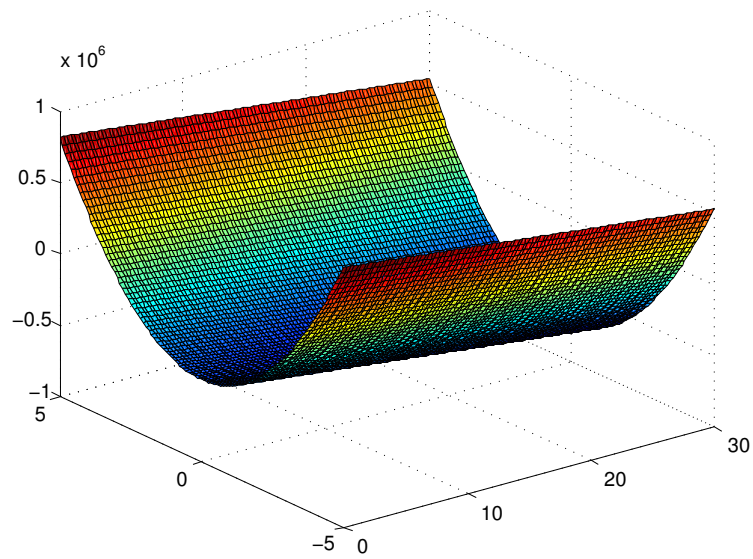
$$p = p(r, z) = p_0 + \rho g (h - z) + \rho \frac{\omega^2}{2} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right).$$

Z rovnice (5.35) poznáme, že hladina má tvar rotačního paraboloidu, jehož osa je osa válcové nádoby. Znázornění hladiny kapaliny a průběh tlaku je vidět na obrázcích 6 a 7. Dále z rovnice (5.35) je vidět, že pokles hladiny v $r = 0$ je roven jejímu zvýšení v $r = R$

$$H - h = h - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$



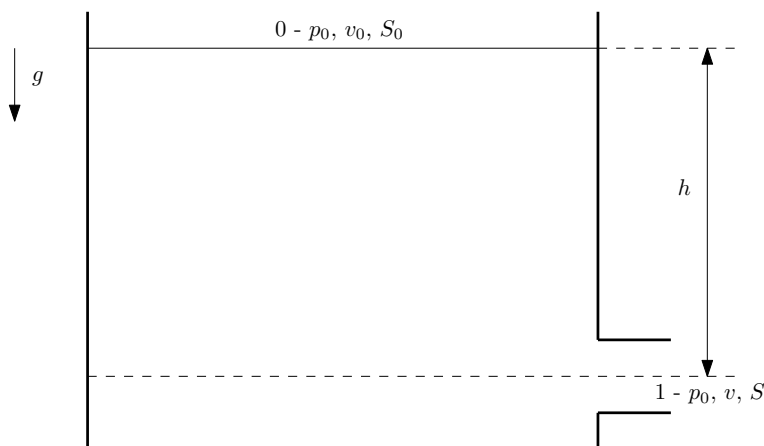
Obrázek 6: Plocha hladiny vody v rotující nádobě při hodnotách $R = 5$, $H = 30$, $h = 10$, $\omega = 10$ a $g = 9.81$.



Obrázek 7: Znázornění průběhu tlaku při hodnotách $R = 5$, $H = 30$, $h = 10$, $\omega = 10$, $g = 9.81$ a $\rho = 1000$.

5.2 Kapalina vytékající z nádoby

Uvažujme velkou nádobu v gravitačním poli, která je naplněna ideální kapalinou. Hladina kapaliny necht' se nemění. Toho lze dosáhnout tak, že budeme kapalinu do nádoby průběžně dolévat. Na boku spodní části nádoby ve vzdálenosti h od hladiny je otvor, kterým kapalina vytéká do okolního tlaku. Okolní tlak prostředí je p_0 , rychlost na hladině kapaliny je v_0 a plocha hladiny S_0 . Průřez otvoru označme S a neznámou výtokovou rychlost v . Označme bod 0 na hladině a bod 1 u výtoku kapaliny z nádoby podle obrázku 8.



Obrázek 8: Nádoba naplněná kapalinou, která vytéká malým otvorem

Mezi body 0, 1 lze sestavit Bernoulliho rovnici (4.26), která přejde díky nestlačitelnosti kapaliny a stacionárnímu proudění na rovnici (4.28). Můžeme psát

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} - g h = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}. \quad (5.36)$$

Pro bod 0 a 1 můžeme vytvořit rovnici kontinuity

$$v_0 S_0 = v S,$$

a tedy

$$v_0 = v \frac{S}{S_0}. \quad (5.37)$$

Dosazením (5.37) do Bernoulliho rovnice (5.36) a po úpravě dostáváme vyjádření pro výtokovou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2 g h}{1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^2}}. \quad (5.38)$$

V případě, kdy se jedná o velkou nádobu s rozsáhlou plochou hladiny S_0 a malým otvorem je výraz

$$\frac{S}{S_0}$$

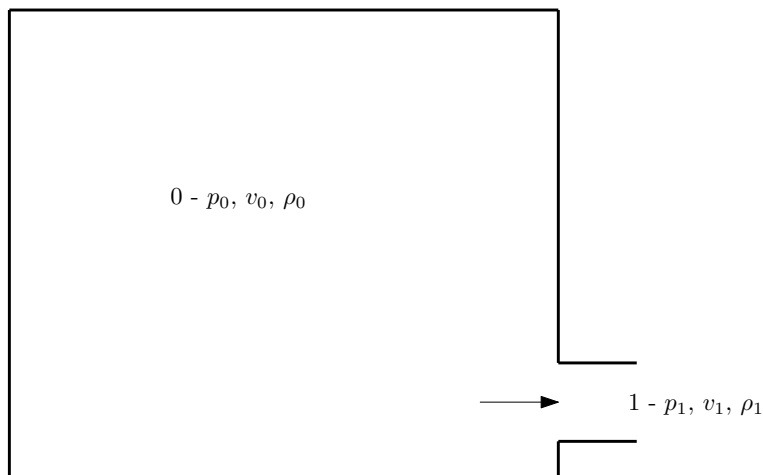
blízký nule. Jeho zanedbáním přejde výpočet výtokové rychlosti z (5.38) na

$$v = \sqrt{2 g h},$$

což je známý Torricelliho vzorec pro výpočet výtokové rychlosti.

5.3 Plyn vytékající z nádoby

Uvažujeme velkou nádobu, ve které se nachází ideální plyn o tlaku p_0 a hustotě ρ_0 . Plyn adiabaticky vychází z nádoby do okolního tlaku p_1 přes malý otvor, přičemž rychlost úniku je konstantní. Protože nádoba je dostatečně velká, je v ní možné zanedbat rychlost pohybu plynu $v_0 = 0$. Označme si bod 0 ve velké nádobě a bod 1 na výtoku plynu z nádoby. Pro jednoduchost zanedbejme gravitaci.



Obrázek 9: Nádoba naplněná ideálním plynem, který vytéká malým otvorem do vnějšího prostředí

Díky konstantní výtokové rychlosti se jedná o stacionární proudění. Protože jde o plyn, nelze hustotu ρ považovat za konstantní a mezi body 0 a 1 lze napsat Bernoulliho rovnice (4.27) ve tvaru

$$\frac{v_1^2}{2} = \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{\rho}. \quad (5.39)$$

Jelikož se jedná o adiabatický děj, můžeme hustotu vyjádřit ze stavové rovnice pro adiabatický děj (2.10)

$$\frac{p_0}{\rho_0^\kappa} = \frac{p}{\rho^\kappa},$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (5.40)$$

Dosazením (5.40) do Bernoulliho rovnice (5.39) dostáváme

$$\frac{v_1^2}{2} = \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} p_0^{\frac{1}{\kappa}} \int_{p_1}^{p_0} p^{-\frac{1}{\kappa}} dp = \frac{\kappa}{1 - \kappa} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]. \quad (5.41)$$

Z upravené rovnice (5.41) dostáváme výpočtový vzorec pro výtokovou rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}.$$

6 Závěr

Cílem práce bylo shrnout problematiku proudění ideálních kapalin a ideálních plynů a řešit několik typových příkladů. Proudění kapalin se zjednodušuje jejich nestlačitelností, ideální plyny jsou stlačitelné a tedy je potřeba sestavit více rovnic pro řešení problémů tekoucích plynů.

Uvedli jsme čtyři základní rovnice pro popis proudění ideálních kapalin a pět základních rovnic pro popis proudění ideálních plynů. Tyto rovnice jsou nezbytné k určení neznámých parametrů při proudění jak ideální kapaliny, tak ideálního plynu. V praxi se ve většině případů hledá rychlost proudění, např. při vytékání z nádob, potrubí apod. Neznámé jsou ve trojrozměrném proudění tři složky rychlosti. Dále je někdy třeba určit tlak v určitém místě proudění nebo pokles tlaku při proudění zužujícím se potrubím.

Odvodili jsme také válcové souřadnice, které se využívají při řešení problémů v praxi, kde kapalina i plyn proudí většinou válcovými tělesy. Válcové souřadnice umožňují lépe uchopit a řešit úlohy, značně se zjednoduší a zkrátí výpočty úloh. Analogicky bychom postupovali při odvození a aplikaci sférických souřadnic.

Při řešení konkrétních příkladů jsme využili Eulerovy rovnice, Bernoulliho rovnici, rovnici kontinuity i stavovou rovnici ideálního plynu. Zákony, které jsou popsány těmito rovnicemi, jsou základem pro pochopení proudění a pro řešení mnoha úloh, které se vyskytují v běžném životě.

Pokud bychom řešili situaci s reálnými kapalinami či plyny, uvedené rovnice poslouží jako základ, ale je potřeba je upravit. Při proudění reálných tekutin dochází vlivem tření mezi tekutinou a okolím (např. potrubím) a vlivem vnitřního tření tekutiny ke ztrátám. Veličina, která popisuje reálné tekutiny a vystupuje ve výpočtu ztrát je tzv. viskozita. Vlivem tření se také mění rychlostní profil proudění, tj. na stěnách potrubí je rychlost nulová, uprostřed potrubí je rychlost maximální. Potom je potřeba řešit úlohy s tzv. střední rychlostí. Celkově, při řešení úloh o reálných kapalinách a plynech je nutné uvažovat ztráty, které se v případě ideálních tekutin nevyskytují.

Reference

- [1] Kneschke, A.: *Používanie diferenciálnych rovníc v praxi*, 1. slov. vyd., Alfa, 1969.
- [2] Potter, M., Wiggert, D.C.: *Fluid Mechanics, Schaum's Outline Series*, McGraw-Hill, 2008.
- [3] Warsi, U.A.: *Fluid Dynamics, Theoretical and Computational Approaches*, 2nd ed., CRC Press, 1998.
- [4] Škrášek, J., Tichý Z.: *Základy aplikované matematiky II.*, 1. vyd., SNTL, 1986.