VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TEORIE HER NA GRAFECH
GAME THEORY ON GRAPHS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE ONDŘEJ OSIČKA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Mgr. JAROSLAV HRDINA, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Ondřej Osička

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Teorie her na grafech

v anglickém jazyce:

Game theory on graphs

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Zkoumáme algoritmy teorie her na grafech a sítích s vybranou aplikací v dopravě, energetice nebo vodním hospodářství.

Cíle bakalářské práce:

Studium algoritmické teorie her a teorie her na grafech. Návrh řešení konkrétního problému.

Seznam odborné literatury:

[1] David Easley, Jon Kleinberg, Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World, Cambridge University Press (2010)

[2] James N. Webb, Game Theory (Springer Undergraduate Mathematics Series) (2013)

[3] Magdalena Hykšová, Teorie her a optimální rozhodování, online texty (http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_ her/)

[4] Robert P. Gilles, The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies,(Theory and Decision Library C) Springer (2010)

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 22.11.2013

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt
Tato práce se zabývá studiem teorie her a kooperativní teorie her v kombinaci s teorií grafů. Využívaným matematickým modelem hry je zde hra ve tvaru s charakteristickou funkcí. Pro určení optimálního rozdělení zisku u kooperativních her je zavedeno jádro hry a Shapleyho hodnota. Na příkladech je ukázán význam jejich použití. Z teorie grafů jsou zde využity orientované i neorientované ohodnocené či neohodnocené grafy pro reprezentaci vztahů mezi hráči a sítí, na kterých se hra a možná rozhodnutí hráčů odehrávají.

Summary
The subject of this thesis is to introduce game theory and cooperative game theory in relation to graph theory. Game in characteristic function form is used to model the cooperative game. The optimal division of payoff among the players is determined by means of Shapley value and game kernel. Examples of practical use are presented. To examine more complicated game network or to express relationship between players both directed and undirected graphs are used.

Klíčová slova
teorie her, kooperativní hra, Shapleyho hodnota, teorie grafů

Keywords
game theory, cooperative game, Shapley value, graph theory

OSIČKA, O. *Teorie her na grafech.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 36 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Teorie her na grafech* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Osička

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, kteří mi jakkoliv s tvorbou této práce pomohli, zejména pak Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za příkladné vedení práce a četné konzultace a Mgr. Janu Meitnerovi za ochotu a přínosné rady a připomínky.

Ondřej Osička

Obsah

Úvod

Představte si sami sebe v situaci, kdy se ocitnete před nějakým důležitým rozhodnutím. Nejste však v této tzv. rozhodovací situaci sami. Jsou zde zároveň i jiné subjekty, které se současně rozhodují. Tato rozhodnutí se samozřejmě mohou do značné míry ovlivňovat. Vy například víte, co by pro vás ve finále bylo nejvýhodnější, ale s neurčitostí rozhodnutí ostatních nevíte, které vaše rozhodnutí k nejvýhodnějšímu výsledku povede. Jak se tedy v takové situaci zachovat?

Na tuto a ostatní s ní spojené otázky odpovídá matematická disciplína zvaná *teorie her*. S tou se seznámíme v první kapitole. V té další se potom zaměříme na specifičtější oblast teorie her, a to na hry kooperativní. Není totiž od věci uvažovat, že někteří účastníci tohoto rozhodování spojí síly a domluví se na společné strategii. Potom se ale okamžitě nabízí další otázka. Jak se za takovou spolupráci odvděčit? I na to budeme hledat odpověď.

A co když ještě k tomu uvažujeme specifické vztahy mezi účastníky rozhodování? Nebo se ono rozhodování může týkat nějaké sítě, např. silniční sítě mezi městy. Potom už je třeba zapojit i teorii grafů. Takové situace jsou pak náplní třetí a čtvrté kapitoly, kde je vše názorně ukázáno na konkrétních příkladech.

Kapitola 1

Teorie her

Tato i následující kapitola vychází z [2], [3], [5], [6].

Nejprve se seznámíme s teorií her. Rozhodovací situaci zde nazveme *hrou* a její účastníky *hráči*. Možná rozhodnutí všech hráčů označíme jako *strategie* a pro vyjádření výhodnosti neboli zisku pro určitého hráče při volbě určitých strategií zavedeme hodnotu, kterou budeme nazývat *výplata*.

Nyní potřebujeme hru vyjádřit ve tvaru, se kterým budeme schopni dále operovat. Takových matematických modelů hry existuje více, my si zde představíme pouze ty hlavní a pro nás užitečné.

1.1 Hra v explicitním tvaru

Explicitní tvar je nejkomplexnější popis dané hry. V tomto modelu uvažujeme nad postupnými po sobě probíhajícími rozhodnutími. Neomezuje nás to však pouze na hry, ve kterých nemůže více rozhodnutí nastat ve stejný moment. V takovém případě můžeme zavést tzv. informační množiny, které nám rozliší předešlá rozhodnutí na ta, která aktuálně jednající hráč zná, a ta, která nikoliv. Tento model tedy dokáže zaznamenat všechny situace, které ve hře mohou nastat, tak, že je vyjádří ve stromovém diagramu, kde uzly představují každou konkrétní situaci, hrany z uzlu vycházející představují možná učinitelná rozhodnutí a každému hráči odpovídá určité patro či patra onoho diagramu.

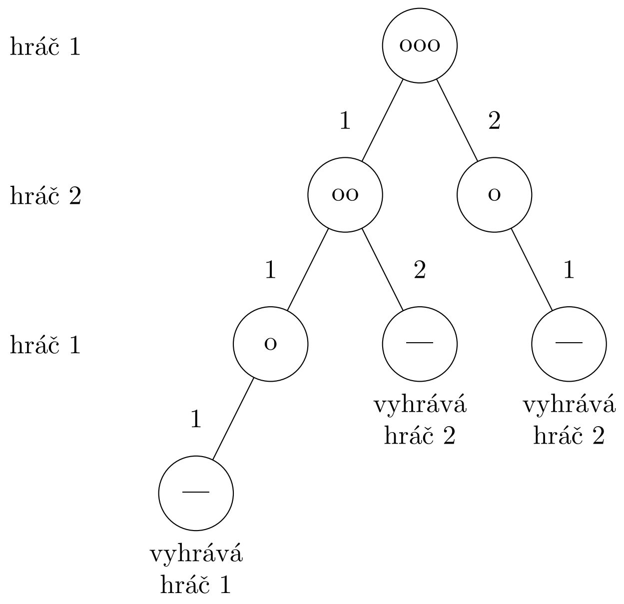
Pro každou hru je model velice specifický a musíme na každou hru nahlížet jednotlivě. Zde tento model nebudeme dále používat. Uvedeme jen příklad.

Příklad 1.1. *Mějme hromádku se třemi kuličkami a dva hráče, kteří postupně kuličky z hromádky tahají. Každý z hráčů má možnost vzít jednu či dvě kuličky. Hráč, který vytáhne poslední kuličku, hru vyhrává.*

Model nám zobrazuje obrázek 1.1, kde uzly znázorňují zbývající kuličky na hromádce a hrany počet kuliček, které hráč na tahu v daném kole bere.

1.2 Hra v normálním tvaru

Pro snadnější operace s modelem je třeba ve hře v explicitním tvaru něco zanedbat. A když zanedbáme, že všechna rozhodnutí přichází v určitém pořadí, dostaneme tzv. hru v normálním tvaru. Jedná se o změnu v tom, že v tomto modelu provádí hráči všechna rozhodnutí současně. Lze však ukázat, že každou hru v explicitním tvaru jde na hru v normálním tvaru převést se zachováním i této vlastnosti, nemusíme o ni tedy nutně přijít.



Obrázek 1.1: Hra v explicitním tvaru z příkladu 1.1

Definice 1.2. Nechť $N = \{1, \dots, n\}$ je neprázdná množina o n prvcích, které představují hráče, jež budeme pro přehlednost značit čísly $1, \dots, n$. Dále mějme n množin $A_1, \dots, A_n$, kde A_i je *množina strategií i-tého hráče*, a kartézský součin těchto množin označme $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Nakonec budiž dána funkce $\pi\colon A \to \mathbb{R}^n$, kde $\pi(a) = (\pi_1(a), \dots, \pi_n(a))$ pro všechna $a \in A$. Funkci $\pi_i\colon A \to \mathbb{R}$ pak budeme nazývat *výplatní funkcí i-tého hráče. Hrou v normálním tvaru* potom rozumíme trojici (N, A, π).

Opět si užití modelu ukážeme na příkladu konkrétní hry.

Příklad 1.3. *Uvažujme aukci se třemi zájemci o jeden prodávaný předmět. Prodej probíhá systémem tzv. Vickreyovy aukce, ve které aukci vyhrává ten, kdo nabídne nejvyšší nabídku, ale zaplatí cenu, kterou nabídl účastník s druhou nejvyšší nabídkou. První zájemce si předmět cení na hodnotu 100, druhý na hodnotu 150 a třetí na hodnotu 200. Tyto hodnoty tedy budou i jejich nejvyššími nabídkami. Nejnižší nabídku limituje minimální cena, za kterou bude předmět prodán, která činí 10. Při shodě nabídek vyhrává aukci zájemce s vyšším pořadovým číslem.*

Množina hráčů je zřejmá:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

Strategie vyjádříme následovně:

$$A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 \in \langle 10, 100\rangle, a_2 \in \langle 10, 150\rangle, a_3 \in \langle 10, 200\rangle\}$$

Výplatní funkce obdržíme v následujícím tvaru:

$$\pi_1(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 100 - \max\{a_2, a_3\} & \text{když} \quad a_1 > a_2 \quad \text{a} \quad a_1 > a_3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\pi_2(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 150 - \max\{a_1, a_3\} & \text{když} \quad a_2 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_2 > a_3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\pi_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 200 - \max\{a_1, a_2\} & \text{když} \quad a_3 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_3 \geq a_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

1.3 Hra ve tvaru s charakteristickou funkcí

Jelikož se v druhé kapitole budeme bavit o kooperativních hrách s přenosnou výhrou, tj. hrách, kde mohou určití hráči vytvořit dohodu, spolupracovat při volbě strategií a následně si výplatu hry přerozdělit, jsou zde nejdříve uvedeny definice některých důležitých pojmů.

Definice 1.4. Mějme hru v normálním tvaru s množinou hráčů $N = \{1, \ldots, n\}$. Množinu $S \subset N$ nazveme *koalicí*. Speciálně množinu $S = \varnothing$ budeme nazývat *prázdná koalice* a množinu $S = N$ *velká koalice*. Množinu všech koalic budeme značit $2^N = \{S \mid S \subset N\}$. *Množinu strategií koalice* S potom definujeme jako $A_S = \prod_{i \in S} A_i$.

Pro výplatní funkci koalice S budeme užívat označení $\pi_S(a)$, kde $a \in A$. Protože se nám bude jednat o přenosnou výhru a její následné přerozdělení, můžeme za výplatu koalice považovat součet výplat jednotlivých členů této koalice. Výplatní funkce libovolné koalice S bude tedy pro všechna $a \in A$ vypadat následovně:

$$\pi_S(a) = \sum_{i \in S} \pi_i(a)$$

Zřejmě $a = f(S, a_S, a_{N \setminus S})$, kde f je funkce sloužící k uspořádání jednotlivých složek vektorů a_S a $a_{N \setminus S}$ do vektoru a pro každou koalici S maticově definovaná ve tvaru $f(S, a_S, a_{N \setminus S}) = a_S \cdot K + a_{N \setminus S} \cdot L$, kde $a_S \in A_S, a_{N \setminus S} \in A_{N \setminus S}$, K je matice $|S| \times |N|$ ve schodovitém tvaru, která má právě jednu jedničku v každém řádku a v každém i-tém sloupci, jestliže i-tý hráč je v koalici S, jinak nuly, a L je matice $(|N| - |S|) \times |N|$ ve schodovitém tvaru, která má právě jednu jedničku v každém řádku a v každém i-tém sloupci, jestliže i-tý hráč není v koalici S, jinak nuly. Můžeme tedy výplatní funkci značit $\pi_S(f(S, a_S, a_{N \setminus S}))$. Je zřejmé, že koalice S bude volit strategii ve snaze tuhle hodnotu maximalizovat. Pokud se však dále budeme bavit o minimální dosažitelné výplatě, je třeba uvažovat výplatu, kterou má koalice zaručenu při libovolné volbě strategií ostatních hráčů. Můžeme předpokládat, že ti vytvoří koalici $N \setminus S$ a my potom hledáme minimální výplatu koalice S přes všechny strategie koalice $N \setminus S$. Tuhle úvahu vyjádříme jako dvě funkce pro $S \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\}$:

$$v^\alpha(S) = \max_{a_S \in A_S} \left(\min_{a_{N \setminus S} \in A_{N \setminus S}} \left(\pi_S(f(S, a_S, a_{N \setminus S})) \right) \right) \tag{1.1}$$

$$v^\beta(S) = \min_{a_{N \setminus S} \in A_{N \setminus S}} \left(\max_{a_S \in A_S} \left(\pi_S(f(S, a_S, a_{N \setminus S})) \right) \right) \tag{1.2}$$

Pro libovolnou funkci $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro niž následující minimum a maximum existuje, zřejmě pro všechna x, y, na kterých je funkce definována platí tato nerovnost:

$$\min_y (F(x,y)) \leq \max_x (F(x,y))$$

Jelikož nerovnost platí pro všechna x, y, nezmění se znaménko nerovnosti ani při této úpravě:

$$\max_x \left(\min_y (F(x,y)) \right) \leq \min_y \left(\max_x (F(x,y)) \right)$$

Pro libovolnou koalici $S \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\}$ tak snadno vidíme platnost následující nerovnosti:

$$v^\alpha(S) \leq v^\beta(S)$$

Z tohoto důvodu, když se budeme dále bavit o minimální dosažitelné výplatě, budeme mít na mysli funkci ve tvaru (1.1). Funkci v nyní zavedeme pomocí v^α a dodefinováním hodnot pro prázdnou koalici $S = \varnothing$ a velkou koalici $S = N$:

$$v(S) = \begin{cases} \max\limits_{a_S \in A_S} \left(\min\limits_{a_{N\setminus S} \in A_{N\setminus S}} \left(\pi_S(f(S, a_S, a_{N\setminus S})) \right) \right) & \text{pro} \quad S \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\} \\ \max\limits_{a_S \in A_S} \left(\pi_S(a_S) \right) & \text{pro} \quad S = N \\ 0 & \text{pro} \quad S = \varnothing \end{cases} \tag{1.3}$$

Nyní můžeme přejít k samotné definici hry ve tvaru s charakteristickou funkcí.

Definice 1.5. Nechť N je množina hráčů a $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je funkce, která přiřazuje každé koalici $S \in 2^N$ minimální dosažitelnou výplatu $v(S)$ ve tvaru (1.3). Tuto funkci nazveme *charakteristická funkce. Hrou ve tvaru s charakteristickou funkcí* potom rozumíme dvojici (N, v).

Vidíme, že použitím tohoto modelu zanedbáme mnoho informací o samotné hře. Nevíme například, která volba strategií povede k jakému výsledku, ale pouze, jaký výsledek mají hráči zajištěn. Nicméně budeme model používat z toho důvodu, že přímo podává informace o výhodnosti tvorby určitých koalic.

Opět si užití modelu přiblížíme příkladem.

Příklad 1.6. *Pokračujme v rozboru aukce uvedené v příkladu 1.3 a převeďme hru do tvaru s charakteristickou funkcí.*

Množina hráčů zůstává nezměněna.

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$2^N = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Nyní z výplatních funkcí jednotlivých hráčů určíme výplatní funkce koalic a následně hodnoty charakteristické funkce.

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 100 - \max\{a_2, a_3\} & \text{když} \quad a_1 > a_2 \quad \text{a} \quad a_1 > a_3 \\ 150 - \max\{a_1, a_3\} & \text{když} \quad a_2 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_2 > a_3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\sum_{i \in \{1,3\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 100 - \max\{a_2, a_3\} & \text{když} \quad a_1 > a_2 \quad \text{a} \quad a_1 > a_3 \\ 200 - \max\{a_1, a_2\} & \text{když} \quad a_3 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_3 \geq a_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\sum_{i \in \{2,3\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 150 - \max\{a_1, a_3\} & \text{když} \quad a_2 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_2 > a_3 \\ 200 - \max\{a_1, a_2\} & \text{když} \quad a_3 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_3 \geq a_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\sum_{i \in \{1,2,3\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 100 - \max\{a_2, a_3\} & \text{když} \quad a_1 > a_2 \quad \text{a} \quad a_1 > a_3 \\ 150 - \max\{a_1, a_3\} & \text{když} \quad a_2 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_2 > a_3 \\ 200 - \max\{a_1, a_2\} & \text{když} \quad a_3 \geq a_1 \quad \text{a} \quad a_3 \geq a_2 \end{cases}$$

$$v(\varnothing) = 0$$

$$v(\{1\}) = \max_{a_1} \left(\min_{a_2, a_3} (\pi_1(a_1, a_2, a_3)) \right) = 0$$

$$v(\{2\}) = \max_{a_2} \left(\min_{a_1, a_3} (\pi_2(a_1, a_2, a_3)) \right) = 0$$

$$v(\{3\}) = \max_{a_3} \left(\min_{a_1, a_2} (\pi_3(a_1, a_2, a_3)) \right) = 50$$

$$v(\{1,2\}) = \max_{a_1, a_2} \left(\min_{a_3} \left(\sum_{i \in \{1,2\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) \right) \right) = 0$$

$$v(\{1,3\}) = \max_{a_1, a_3} \left(\min_{a_2} \left(\sum_{i \in \{1,3\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) \right) \right) = 50$$

$$v(\{2,3\}) = \max_{a_2, a_3} \left(\min_{a_1} \left(\sum_{i \in \{2,3\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) \right) \right) = 100$$

$$v(\{1,2,3\}) = \max_{a_1, a_2, a_3} \left(\sum_{i \in \{1,2,3\}} \pi_i(a_1, a_2, a_3) \right) = 190$$

Hru tedy tímto máme vyjádřenu dvojicí (N, v).

Kapitola 2

Kooperativní hry

Existuje mnoho různých dělení her, jako například hry kooperativní a nekooperativní, hry konečné a nekonečné, hry s konstantím součtem a s nekonstantním součtem a další. My se zde zaměříme na první zmíněné dělení, přesněji na hry kooperativní. Půjde o hry, kde spolu mohou hráči tvořit koalice a následně si přerozdělit výplatu ze hry. Pro vyjádření těchto her budeme využívat uvedený model hry ve tvaru s charakteristickou funkcí.

Nejprve si představíme některé důležité vlastnosti takových her a potom přejdeme k různým pohledům na přerozdělení výplat mezi hráče.

2.1 Základní vlastnosti

Definice 2.1. Nechť M je systém množin takový, že pokud $S, T \in M$, pak i $S \cup T \in M$. Řekneme, že funkce $F\colon M \to \mathbb{R}$ je *superaditivní*, pokud pro všechny množiny $S, T \in M$ takové, že $S \cap T = \emptyset$, splňuje nerovnost

$$F(S \cup T) \geq F(S) + F(T). \tag{2.1}$$

Pokud je splněna pouze rovnost

$$F(S \cup T) = F(S) + F(T), \tag{2.2}$$

funkce F se nazývá *aditivní*.

Věta 2.2. *Charakteristická funkce v je superaditivní.*

Větu není složité dokázat, vyžaduje to však jisté přeznačení, a proto pro její důkaz odkazuji na [5].

Definice 2.3. Nechť v je charakteristická funkce hry (N, v). Je-li funkce v aditivní, potom hru (N, v) nazveme *nepodstatnou*. Hru, která není aditivní, nazveme *podstatnou*.

Věta 2.4. *Hra (N, v) je nepodstatná právě tehdy, když platí*

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N). \tag{2.3}$$

Hra (N, v) je podstatná právě tehdy, když platí

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N). \tag{2.4}$$

Důkaz. Pro nepodstatnou hru vlastnost plyne přímo z definice aditivity.

Z vlastnosti (2.4) vidíme, že není splněna aditivita, čili se jedná o hru podstatnou.

V opačném směru ze superaditivity charakteristické funkce v dostaneme nerovnici

$$\sum_{i\in N} v(\{i\}) \leq v(N),$$

ale jelikož dle definice je podstatná ta hra, která není aditivní, musí platit i

$$\sum_{i\in N} v(\{i\}) \neq v(N),$$

z čehož dostáváme vlastnost (2.4). □

Když budeme dále přemýšlet nad vytvořením velké koalice a následném přerozdělení výhry, je třeba jej určit tak, aby pro žádného hráče nebylo výhodné koalici opustit. Proto zde definujeme vektor možných výplat jednotlivých hráčů, který budeme nazývat imputace.

Definice 2.5. *Imputace* hry n hráčů (N, v) je vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pro který platí

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i\in N} x_i = v(N),$$

$$\text{(ii)} \qquad x_i \geq v(\{i\}) \quad \text{pro všechna } i \in N.$$

Pro množinu všech imputací hry potom budeme používat značení $I(v)$.

Vlastnost (i) představuje tzv. *kolektivní racionalitu* a vlastnost (ii) tzv. *individuální racionalitu.*

Příklad 2.6. *Určeme množinu všech imputací námi rozebrané aukce (příklady 1.3, 1.6).*

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1, 2, 3\}) = 190,$$
$$x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 50$$

$$I(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 190, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 50\}$$

U her tří hráčů budeme ke grafickému znázornění často užívat tzv. $2-$simplex (tj. trojúhelník), kde je řešení názorné. Obecně můžeme použít $n-$simplex ke znázornění pro hry $n + 1$ hráčů. Množina všech imputací této hry je znázorněna na obrázku 2.1.

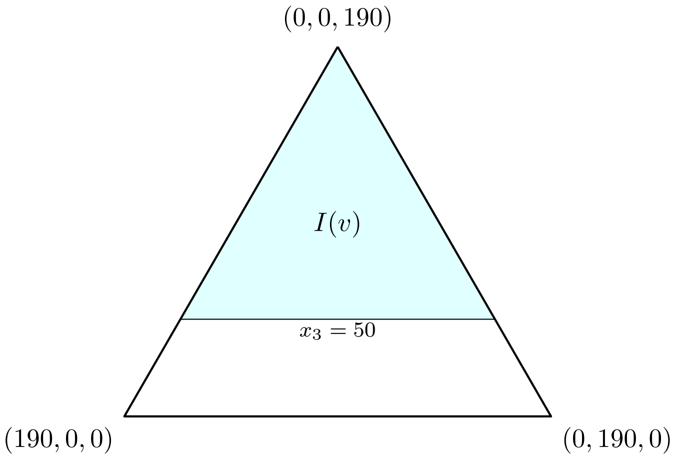
Z definice imputace snadno vidíme, že nepodstatné hry budou mít právě jednu imputaci a podstatné hry nekonečně mnoho imputací. Řešení rozdělení výplat mezi hráče je tedy pro nepodstatné hry elementární. Ve zbylé části této kapitoly se budeme zabývat způsoby rozdělení výplat pro hry podstatné.

2.2 Jádro hry

Definice 2.7. Řekneme, že imputace $x \in I(v)$ *dominuje* imputaci $y \in I(v)$, pokud existuje neprázdná koalice $S \in 2^N$ taková, že platí

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i\in S} x_i \leq v(S),$$

$$\text{(ii)} \qquad x_i > y_i \quad \text{pro všechna } i \in S.$$



Obrázek 2.1: 2−simplex zobrazující množinu všech imputací pro příklad 2.6

Tedy pokud imputace x dominuje imputaci y, pak existuje koalice, která upřednostňuje rozdělení výplat x před y a může si je sama zajistit.

Definice 2.8. *Jádrem* hry n hráčů (N, v) nazveme množinu $C(v)$ představující množinu vektorů $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pro které platí

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \text{pro všechny koalice } S \in 2^N.$$

Z definice je tedy zřejmé, že $C(v) \subset I(v)$.

Věta 2.9. *Imputace $x \in I(v)$ je prvkem $C(v)$ právě tehdy, když neexistuje imputace $y \in I(v)$, která by imputaci x dominovala.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že taková imputace y existuje. Potom existuje neprázdná koalice $S \in 2^N$ taková, že platí

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$$

a zároveň

$$y_i > x_i \quad \text{pro všechna } i \in S$$

a tedy i

$$\sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i.$$

Tím se však dostáváme ke sporu

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Nyní předpokládejme, že $x \in I(v)$ není prvkem $C(v)$. Pak existuje koalice $S \in 2^N$ taková, že platí

$$\sum_{i \in S} x_i < v(S).$$

Koalice S si však výplatu $v(S)$ dokáže zajistit, čili existuje imputace $y \in I(v)$ splňující

$$\sum_{i \in S} y_i = v(S)$$

a tedy

$$\sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i.$$

Pak lze zřejmě zvolit imputaci y takovou, která pro všechna $i \in S$ splňuje

$$y_i > x_i,$$

a ta imputaci x dominuje. Tím se opět dostáváme ke sporu a věta je dokázána. $\square$

Příklad 2.10. *Nyní pro naši aukci (příklady 1.3, 1.6, 2.6) určeme jádro hry.*

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 190,$$

$$x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 50,$$

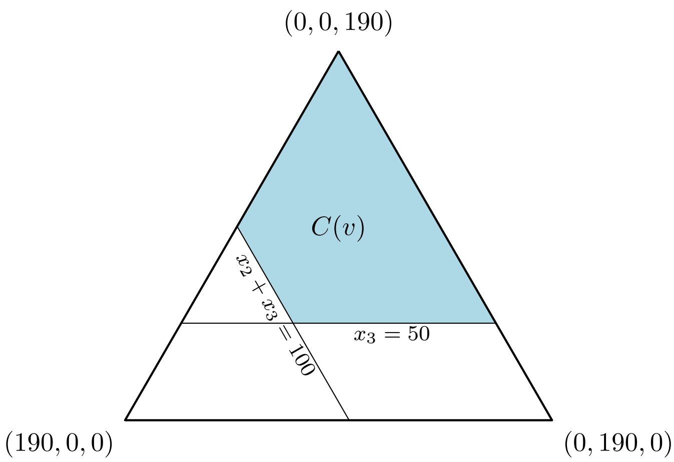
$$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 0,$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 50,$$

$$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 100$$

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 190, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 50, x_2 + x_3 \geq 100\}$$

Obrázek 2.2 nám zobrazuje jádro hry graficky.



Obrázek 2.2: Grafické řešení příkladu 2.10

Jádro však nemusí pokaždé nějakou imputaci obsahovat. Ukážeme si příklad, kde $C(v) = \varnothing$.

Příklad 2.11. *Určeme jádro hry tří hráčů s následující charateristickou funkcí:*

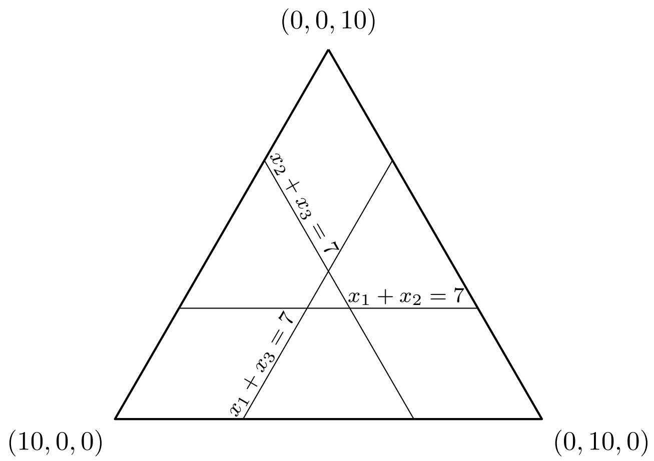
$$v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1,2\}) = 7,$$

$$v(\{1,3\}) = 7, \quad v(\{2,3\}) = 7, \quad v(\{1,2,3\}) = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$
$$x_1 + x_2 \geq 7, \quad x_1 + x_3 \geq 7, \quad x_2 + x_3 \geq 7$$

$$C(v) = \varnothing$$

Obrázek 2.3 nám ukazuje grafické řešení.



Obrázek 2.3: Grafické řešení příkladu 2.11, kde $C(v) = \varnothing$

Jelikož jádro mnoha her vychází prázdné, je na místě uvažovat nad vytvořením i jiných koalic než velké, s kterou počítá jádro. Proto definujeme, kdy je koalice stabilní.

Definice 2.12. Koalici S označíme jako *stabilní*, existuje-li řešení soustavy

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S),$$
$$\sum_{i \in T} x_i \geq v(T) \quad \text{pro všechna } T \subset S.$$

Je zřejmé, že jádro hry je prázdné právě tehdy, když velká koalice není stabilní.

Příklad 2.13. *Určeme stabilní koalice hry s prázdným jádrem uvedené v příkladu 2.11.*

$\varnothing$:

$$0 = v(\varnothing) = 0$$

$\{1\}$:

$$x_1 = v(\{1\}) = 0$$

$\{2\}$:

$$x_2 = v(\{2\}) = 0$$

$\{3\}$:

$$x_3 = v(\{3\}) = 0$$

$\{1, 2\}$:

$$x_1 + x_2 = v(\{1, 2\}) = 7, \quad x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0$$

$\{1, 3\}$:

$$x_1 + x_3 = v(\{1, 3\}) = 7, \quad x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 0$$

$\{2, 3\}$:

$$x_2 + x_3 = v(\{2, 3\}) = 7, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 0$$

$\{1, 2, 3\}$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1, 2, 3\}) = 10, \quad x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 7,$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = 7, \quad x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 7,$$

$$x_1 \geq v(\{1\}) = 0, \quad x_2 \geq v(\{2\}) = 0, \quad x_3 \geq v(\{3\}) = 0$$

Snadno vidíme, že existuje řešení všech soustav kromě poslední. Velká koalice tedy není stabilní, všechny ostatní koalice stabilní jsou.

Pro úplnost příkladu naší aukce (příklady 1.3, 1.6, 2.6, 2.10) si pouze uvedeme, že zde všechny koalice jsou stabilní. Není složité to ověřit.

Další problém může představovat, že hráči vždy nemusí být schopni vytvořit všechny koalice. Není těžké si představit situaci, kdy například jeden hráč může spolupracovat s druhým hráčem pouze za přítomnosti hráče třetího. Pro tyto situace použijeme lehce upravenou definici jádra hry.

Definice 2.14. Nechť $\Omega \subset 2^N$ je množina všech koalic, které jsou hráči schopni vytvořit. *Ω–jádrem* hry n hráčů (N, v) pak nazveme množinu $C(\Omega, v)$ představující množinu vektorů $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pro které platí

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \text{pro všechny koalice } S \in \Omega.$$

Zde však již obecně nemusí platit $C(\Omega, v) \subset I(v)$.

Když to nyní shrneme, jádro hry nám při vytvoření velké koalice vyjadřuje ty imputace, které jsou pro všechny hráče výhodné v tom smyslu, že si žádný z nich nepomůže k vyššímu zisku vytvořením koalice jiné.

2.3 Shapleyho hodnota

Definice 2.15. Nechť $\mathcal{G}^N$ je množina všech charakteristických funkcí na množině hráčů $N = \{1, \ldots, n\}$. *Shapleyho hodnotou* potom rozumíme funkci $\varphi \colon \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ s následujícími vlastnostmi pro všechna $v, w \in \mathcal{G}^N$:

(i) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

(ii) $\varphi_i(v) = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ taková, že $v(S) = v(S \setminus \{i\})$ pro všechna $S \in 2^N$

(iii) $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$ taková, že $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ pro všechna $S \in 2^N$ taková, že $i, j \notin S$

(iv) $\varphi_i(v + w) = \varphi_i(v) + \varphi_i(w)$ pro všechna $i \in N$

Z předchozích vlastností jednoznačně plyne následovné vyjádření Shapleyho hodnoty.

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \in 2^N :\, i \in S} \frac{(|S| - 1)!\,(|N| - |S|)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{2.5}$$

Pro odvození odkazuji na [2] či [6].

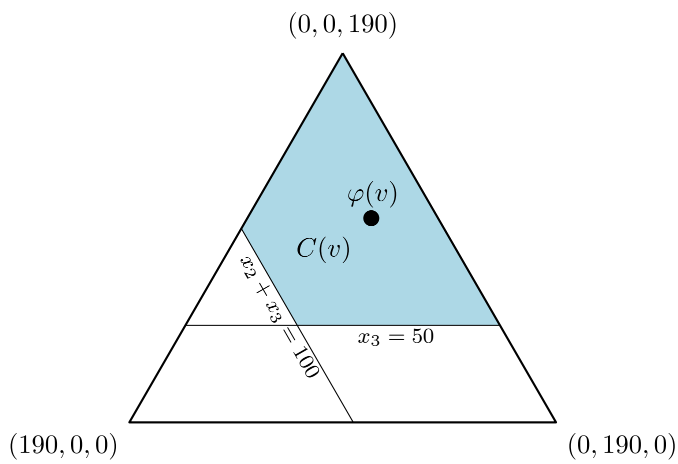
Vidíme, že narozdíl od jádra hry je rozdělení výplat určeno Shapleyho hodnotou vždy a jednoznačně.

Příklad 2.16. *Nyní určeme Shapleyho hodnotu pro námi rozebranou aukci (příklady 1.3, 1.6, 2.6, 2.10).*

$$\begin{aligned}
\varphi_1(v) &= \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 0 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 90 = 30 \\
\varphi_2(v) &= \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 50 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 140 = 55 \\
\varphi_3(v) &= \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 50 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 50 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 100 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 190 = 105
\end{aligned}$$

$$\varphi(v) = (30, 55, 105)$$

Graficky znázorněnou Shapleyho hodnotu můžeme vidět na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Grafické znázornění řešení příkladu 2.16

Příklad 2.17. *Uvažujme hru s prázdným jádrem zavedenou v příkladu 2.11 a vypočítejme pro ni Shapleyho hodnotu.*

$$v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1,2\}) = 7,$$

$$v(\{1,3\}) = 7, \quad v(\{2,3\}) = 7, \quad v(\{1,2,3\}) = 10$$

$$\varphi_1(v) = \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 7 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 7 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 3 = \frac{10}{3}$$
$$\varphi_2(v) = \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 7 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 7 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 3 = \frac{10}{3}$$
$$\varphi_3(v) = \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 7 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 7 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 3 = \frac{10}{3}$$

$$\varphi(v) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

V následujícím příkladu si ještě ukážeme, že Shapleyho hodnota nutně nemusí být imputací ležící v jádru hry i v případě, že je jádro neprázdné.

Příklad 2.18. *Určeme jádro a Shapleyho hodnotu hry tří hráčů s následující charakteristickou funkcí:*

$$v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1,2\}) = 5,$$

$$v(\{1,3\}) = 10, \quad v(\{2,3\}) = 0, \quad v(\{1,2,3\}) = 10$$

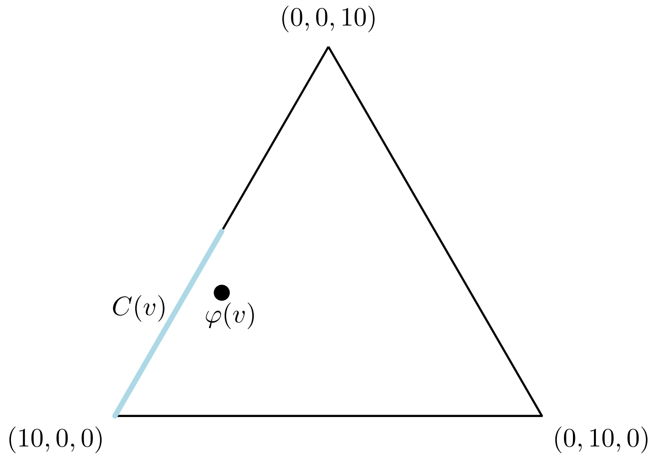
$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 10,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$
$$x_1 + x_2 \geq 5, \quad x_1 + x_3 \geq 10, \quad x_2 + x_3 \geq 0$$
$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = 0, x_1 + x_3 = 10, x_1 \geq 5\}$$

$$\varphi_1(v) = \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 5 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 10 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 10 = \frac{35}{6}$$
$$\varphi_2(v) = \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 5 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 0 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 0 = \frac{5}{6}$$
$$\varphi_3(v) = \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 10 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 0 + \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 5 = \frac{10}{3}$$

$$\varphi(v) = \left(\frac{35}{6}, \frac{5}{6}, \frac{10}{3}\right)$$

Graficky vyznačené jádro $C(v)$ a Shapleyho hodnotu $\varphi(v) \notin C(v)$ nám ukazuje obrázek 2.5.

Shapleyho hodnotu můžeme využít také u her, kde zisk má pouze určitý počet hráčů a ostatní tento zisk pouze zvyšují případnou spoluprací. Rozdělení dané Shapleyho hodnotou pak může sloužit jako určitá kompenzace za spolupráci. Všechno bude zřejmé z následujícího příkladu.



Obrázek 2.5: Grafické řešení příkladu 2.18, kde $\varphi(v) \notin C(v)$

Příklad 2.19. *Tři podnikatelé provozují každý svou webovou stránku. První má 100 odběratelů novinek a prodává zde produkt za cenu 100 Kč. Přibližně každý druhý čtenář si produkt zakoupí. Zbylí dva nic neprodávají. Mají však 250 a 150 odběratelů. Možná spolupráce by spočívala ve vzájemné reklamě a tedy přesměrování svých odběratelů na odkazovanou stránku. Otázka potom zní, kolik by měl prodávající za takovou reklamu nabídnout.*

Příklad na první pohled nemusí vypadat jako problém z teorie her. My však i zde využijeme Shapleyho hodnotu. Nejdříve určíme charakteristickou funkci hry.

$$v(\{1\}) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 5000, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = (100 + 250) \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 17500, \quad v(\{1,3\}) = (100 + 150) \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 12500,$$

$$v(\{2,3\}) = 0, \quad v(\{1,2,3\}) = (100 + 250 + 150) \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 25000$$

Shapleyho hodnota dané hry potom vychází následovně:

$$\varphi(v) = (15000, 6250, 3750)$$

Dle Shapleyho hodnoty by tedy měl prodávající za reklamu nabídnout 6250 Kč a 3750 Kč a stále bude mít trojnásobný zisk, než by měl bez reklamy.

Shapleyho hodnotu dokážeme určit pro každou charakteristickou funkci hry, tedy funkci $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$. Pokud uvažujeme schopnost hráčů vytvořit pouze koalice z množiny $\Omega \subset 2^N$, kde $\varnothing \in \Omega$, můžeme pomocí funkce $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ vytvořit novou funkci $v_\Omega\colon 2^N \to \mathbb{R}$. Potom již nebude problém Shapleyho hodnotu $\varphi(v_\Omega)$ určit.

Funkci v_Ω definujeme následovně:

$$v_\Omega(S) = \max_{\{T_1,\dots,T_n\}\colon n\in\mathbb{N};\, T_i\in\Omega,\forall i;\, T_i\cap T_j=\varnothing,\, i\neq j;\, \bigcup_{i=1}^{n} T_i \subset S} \left(\sum_{i=1}^{n} v(T_i) \right) \tag{2.6}$$

Definičním oborem je nyní 2^N a pro každou koalici $S \in \Omega$ ze superaditivity funkce v plyne $v_\Omega(S) = v(S)$.

Výpočet Shapleyho hodnoty takto upravené hry si na příkladech ukážeme v kapitole 3.

Nyní si shrneme poznatky o Shapleyho hodnotě. Zatímco jádro určuje imputace, proti kterým nemůže žádný z hráčů nic udělat, jelikož by si tím nepolepšil, Shapleyho hodnota určuje konkrétní rozdělení férové z hlediska přínosu jednotlivých hráčů do každé utvořitelné koalice a je pro každou hru jednoznačně definovaná.

Dále jako $\mathcal{G}$ budeme značit množinu všech her definovaných na konečné množině hráčů.

$$\mathcal{G} = \bigcup_{N=\{1,\ldots,n\}:\, n\in\mathbb{N}} \{(N,v) \mid v \in \mathcal{G}^N\}$$

Definice 2.20. Mějme libovolnou funkci $F\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$. Potom definujeme *marginální příspěvek i-tého hráče* dle vztahu

$$D_i F(N,v) = F(N,v) - F(N\backslash\{i\},v).$$

Definice 2.21. *Hart – Mas-Colellovou potenciálovou funkcí* (dále jen HM – potenciálová funkce) nazveme funkci $\Psi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$\sum_{i\in N} D_i\Psi(N,v) = v(N)$$

pro každou hru $(N,v) \in \mathcal{G}$ a

$$\Psi(\varnothing,v) = 0$$

pro každou hru $\Psi(\varnothing,v)$.

Věta 2.22. *Na množině všech her $\mathcal{G}$ existuje právě jedna HM – potenciálová funkce a je dána ve tvaru*

$$\Psi(N,v) = \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\, v(S).$$

Důkaz. Ve vlastnosti

$$\sum_{i\in N} D_i\Psi(N,v) = v(N)$$

rozepíšeme marginální příspěvek následovně:

$$|N|\cdot\Psi(N,v) - \sum_{i\in N}\Psi(N\backslash\{i\},v) = v(N)$$

Nyní z rovnice vyjádříme funkci Ψ.

$$\begin{aligned}
\Psi(N,v) &= \frac{v(N)}{|N|} + \sum_{i\in N}\frac{\Psi(N\backslash\{i\},v)}{|N|}\\
&= \frac{v(N)}{|N|} + \sum_{i\in N}\frac{v(N\backslash\{i\})}{|N|\cdot(|N|-1)} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N:\, j\neq i}\frac{\Psi(N\backslash\{i,j\},v)}{|N|\cdot(|N|-1)}\\
&= \sum_{S\in 2^N:\,|S|=|N|}\frac{v(S)}{|N|} + \sum_{S\in 2^N:\,|S|=|N|-1}\frac{v(S)}{|N|\cdot(|N|-1)} + \sum_{S\in 2^N:\,|S|=|N|-2}\frac{2\cdot\Psi(S,v)}{|N|\cdot(|N|-1)}
\end{aligned}$$

Snadno vidíme, že

$$\Psi(N,v) = \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing}(|N|-|S|)!\,\frac{(|S|-1)!}{|N|!}\,v(S),$$

a věta je tím dokázána. □

Důsledek 2.23. *Pro každou hru (N, v) a každé $i \in N$ platí*

$$D_i\Psi(N,v) = \varphi_i(N,v).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
D_i\Psi(N,v) &= \Psi(N,v) - \Psi(N\backslash\{i\},v) \\
&= \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\,v(S) - \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\notin S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-1-|S|)!}{(|N|-1)!}\,v(S) \\
&= \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\in S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\,v(S) \\
&\qquad + \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\notin S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)! - |N|\,(|S|-1)!\,(|N|-1-|S|)!}{|N|!}\,v(S) \\
&= \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\in S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\,v(S) - \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\notin S} \frac{|S|!\,(|N|-1-|S|)!}{|N|!}\,v(S) \\
&= \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\in S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\,v(S) - \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\in S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\,v(S\backslash\{i\}) \\
&= \sum_{S\in 2^N\backslash\varnothing\colon\, i\in S} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}\,(v(S) - v(S\backslash\{i\})) = \varphi_i(N,v)
\end{aligned}$$

Tím je tedy důsledek dokázán. □

Snadno vidíme, že nám HM – potenciálová funkce značně zjednodušuje výpočet Shapleyho hodnoty hry (N, v) a jejích podher (S, v), kde $S \subsetneq N$.

Příklad 2.24. *Naposledy se vraťme k naší aukci (příklady 1.3, 1.6, 2.6, 2.10, 2.16) a určeme Shapleyho hodnotu její a jejích podher užitím HM – potenciálové funkce.*

Dle věty 2.22 a důsledku 2.23 snadno vypočteme hodnoty v následující tabulce.

S	$v(S)$	$\Psi(S,v)$	$\varphi_1(S,v)$	$\varphi_2(S,v)$	$\varphi_3(S,v)$
$\{1\}$	0	0	0	—	—
$\{2\}$	0	0	—	0	—
$\{3\}$	50	50	—	—	50
$\{1,2\}$	0	0	0	0	—
$\{1,3\}$	50	50	0	—	50
$\{2,3\}$	100	75	—	25	75
$\{1,2,3\}$	190	105	30	55	105

Kapitola 3

Vztahy mezi hráči

Mnoho reálných situací lze znázornit grafem, tedy určitou množinou bodů, které jsou spolu nějak propojeny. Může se jednat o dopravní síť, hierarchické uspořádání či např. znázornění nějakého procesu a samozřejmě i mnoho dalšího. Grafem vlastně dokážeme vyjádřit jakoukoliv binární relaci. Proto se jeví výhodné se na grafy soustředit i v rámci teorie her. My se nyní zaměříme na grafy, které vyjadřují nějaké uspořádání hráčů a vztahy mezi nimi.

Tato kapitola čerpá z [1], [2], [7].

3.1 Graf

Teorii her však nejprve na chvíli opustíme a uvedeme si několik podstatných pojmů z teorie grafů, bez nichž nemůžeme pokračovat.

Definice 3.1. *Orientovaný graf* je dvojice $G = (V, E)$ tvořená neprázdnou konečnou množinou V, jejíž prvky nazýváme *vrcholy*, a konečnou množinou $E \subset \{(x, y) \mid x, y \in V\}$, jejíž prvky nazýváme *orientovanými hranami*. O hraně $e = (x, y)$ říkáme, že je incidentní s vrcholy x a y, vrchol x nazýváme *počátečním vrcholem hrany* e a y *koncovým vrcholem hrany* e. Hrana $e = (x, x)$ se nazývá *orientovaná smyčka*.

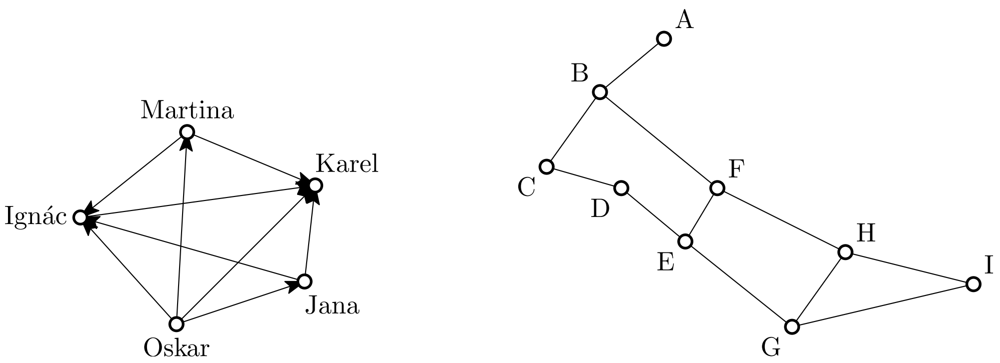
Neorientovaný graf je dvojice $G = (V, E)$ tvořená neprázdnou konečnou množinou V, jejíž prvky nazýváme *vrcholy*, a konečnou množinou $E \subset \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$, jejíž prvky nazýváme *neorientovanými hranami*. O hraně $e = \{x, y\}$ říkáme, že je incidentní s vrcholy x a y. Hrana $e = \{x\}$ se nazývá *neorientovaná smyčka*.

Při kreslení grafu vyznačujeme vrcholy jako body a hrany jako čáry spojující příslušné vrcholy. Směr hran orientovaného grafu potom rozlišujeme šipkami vedoucími od počátečního ke koncovému vrcholu.

Příklad 3.2. Na obrázku 3.1 vidíme ukázku orientovaného i neorientovaného grafu. Zobrazený orientovaný graf vyjadřuje skupinu lidí jako vrcholy a hrana zde vede z vrcholu x do vrcholu y, pokud je člověk x starší než člověk y. V neorientovaném grafu vrcholy představují města a hrany silnice mezi městy existující.

Nebude-li nám záležet na tom, zda se jedná o graf orientovaný či neorientovaný, budeme dále psát pouze graf.

Definice 3.3. Graf, jehož hrany nebo vrcholy jsou opatřeny nějakými hodnotami, nazýváme *ohodnocený graf* nebo též *síť*.

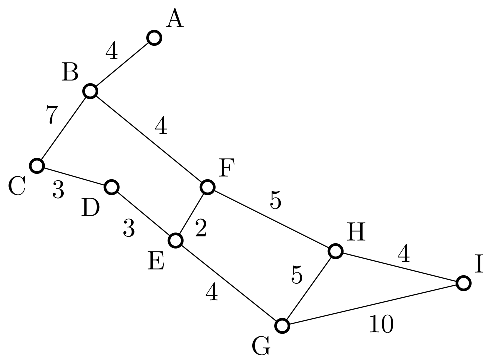


(a) Orientovaný graf (b) Neorientovaný graf

Obrázek 3.1: Orientovaný a neorientovaný graf z příkladu 3.2

Tyto hodnoty můžou vyjadřovat např. čas potřebný k průchodu hranou, cenu za průchod, propustnost atd. Slouží k odpovídajícímu popisu situace, když samotný graf nestačí.

Příklad 3.4. Vezměme si neorientovaný graf z příkladu 3.2. Jeho hranám přiřadíme hodnoty tak, že ohodnocení hrany mezi vrcholy x a y bude rovno délce cesty mezi městy těmto vrcholům příslušejícími. Takto ohodnocený graf vidíme na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Ohodnocený graf z příkladu 3.4

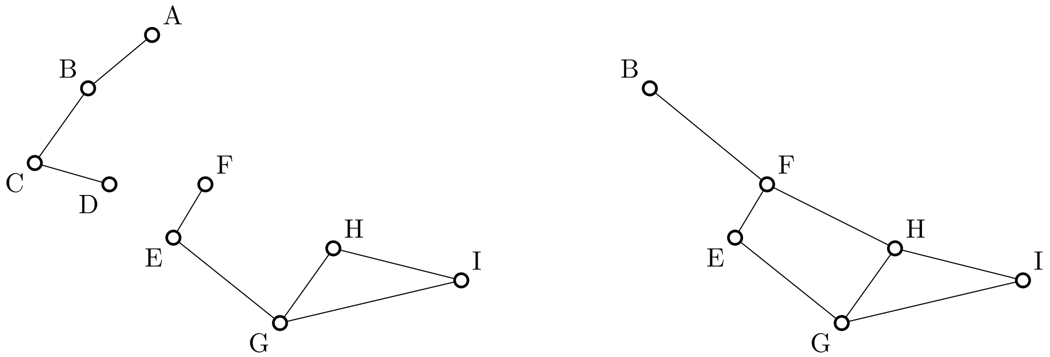
Definice 3.5. Graf $G' = (V', E')$, kde $V' \subset V$ a $E' \subset E$, budeme nazývat *podgraf grafu* $G = (V, E)$, jestliže pro každou hranu z E' platí, že vrcholy, s kterými je hrana incidentní, jsou prvky V'.

Podgraf $G' = (V', E')$ grafu $G = (V, E)$ nazveme *faktor grafu* G, jestliže $V' = V$.

Podgraf $G' = (V', E')$ grafu $G = (V, E)$ nazveme *podgraf indukovaný množinou vrcholů* V', jestliže E' je množina všech hran z E incidentních pouze s vrcholy z V'.

Příklad 3.6. Opět použijeme neorientovaný graf z příkladu 3.2 a tentokrát budeme předpokládat, že například v zimě nejsou všechny cesty sjízdné, tyto tedy odstraníme a tím dostaneme faktor grafu. Když naopak předpokládáme sjízdnost všech cest, ale možnou uzavřenost některých křižovatek a tedy nemožnost průjezdu některým z vrcholů, odstraníme tyto vrcholy z množiny vrcholů a obdržíme podgraf indukovaný touto novou množinou vrcholů.

Oba tyto podgrafy vidíme na obrázku 3.3.



(a) Faktor grafu

(b) Podgraf indukovaný množinou vrcholů

Obrázek 3.3: Podgrafy z příkladu 3.6

Definice 3.7. Mějme orientovaný graf $G = (V, E)$. Potom posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$$

takovou, že $v_0, \ldots, v_k \in V$, $e_1, \ldots, e_k \in E$ a $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pro $1 \leq i \leq k$, nazveme *orientovaný sled.*

Podobně u neorientovaného grafu $G = (V, E)$ posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$$

takovou, že $v_0, \ldots, v_k \in V$, $e_1, \ldots, e_k \in E$ a e_i je incidentní s vrcholy v_{i-1} a v_i pro $1 \leq i \leq k$, nazveme *neorientovaný sled.*

Sled, ve kterém se neopakuje žádná hrana, označíme *tah.* Sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol, označíme *cesta.*

Tah i cesta se také značí jako orientované či neorientované. U nich i u sledu budeme tento přívlastek vynechávat, nebude-li na něm záležet nebo bude-li zřejmý z vlastností diskutovaného grafu.

Definice 3.8. Sled, který má alespoň jednu hranu a u kterého platí $v_0 = v_k$, nazveme *uzavřený sled.* Podobně tah, který má alespoň jednu hranu a u kterého platí $v_0 = v_k$, nazveme *uzavřený tah.*

Uzavřený sled, v němž se neopakují hrany ani vrcholy (kromě $v_0 = v_k$), nazveme *uzavřená cesta.* Neorientovanou uzavřenou cestu označíme *kružnice* a orientovanou uzavřenou cestu označíme *cyklus.*

Definice 3.9. *Délku sledu* v ohodnoceném grafu definujeme jako součet ohodnocení všech hran a vrcholů v daném sledu. Analogicky zavedeme *délku cesty, tahu, kružnice, cyklu.*

Definice 3.10. Neorientovaný graf nazveme *souvislým*, pokud každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

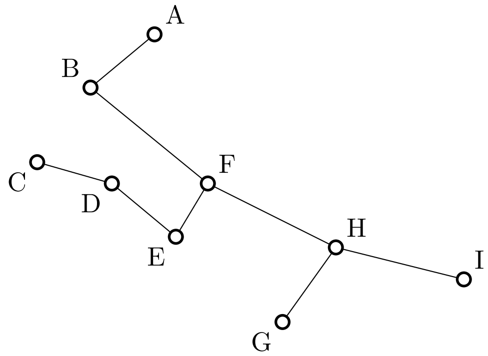
Příklad 3.11. Jako ukázka souvislého a nesouvislého grafu nám poslouží podgrafy z příkladu 3.6. U podgrafu indukovaného množinou vrcholů na obrázku 3.3 vidíme, že mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. Jedná se tedy o graf souvislý. Naopak u zde uvedeného faktoru grafu např. mezi městy D a E žádnou cestu nenajdeme. Tudíž jde o graf nesouvislý.

Definice 3.12. Souvislý graf, který neobsahuje kružnici, budeme nazývat *strom.*

V takovém grafu tedy existuje mezi každými dvěma vrcholy právě jedna cesta (respektive právě jeden tah).

Definice 3.13. Faktor grafu, který je stromem, budeme nazývat *kostra grafu.*

Příklad 3.14. Nyní opět použijeme neorientovaný graf z příkladu 3.2. Jak už jsme jednou zmínili, nejsou vždy všechny cesty sjízdné, proto se může vyplatit udržovat cesty tak, aby mezi každými dvěma vrcholy vedla právě jedna cesta. Ostatní cesty se potom nemusí udržovat a tyto hrany se můžou z takového grafu odstranit. Tímto postupem dostaneme kostru grafu jako například tu na obrázku 3.4.

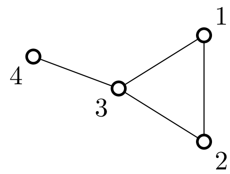


Obrázek 3.4: Kostra grafu z příkladu 3.14

3.2 Hry s omezenou tvorbou koalic

Nyní, když jsme se již seznámili se základními pojmy teorie grafů, je na čase se opět vrátit k teorii her. Zde si uvedeme několik příkladů her, kde graf slouží jako informace o vztazích mezi hráči a omezuje tak vytváření některých koalic.

Příklad 3.15. *Čtyřem osobám se naskytla příležitost jednorázové práce. Osoba č. 4 je nejzkušenější, ostatní jsou zkušení méně a nedokážou zajistit takový zisk. Čím více osob bude spolupracovat, tím vyšší zisk každému připadne. Jelikož však práce obnáší i určité riziko, jsou všichni ochotni spolupracovat pouze v koalici, kde mají alespoň jednoho známého. Vztahy mezi osobami nám zobrazuje graf na obrázku 3.5 a hrana spojující dvě osoby vyjadřuje, že se znají. Zisk jednotlivých koalic bude uveden dále. Otázka zní, zda se nějaká spolupráce vyplatí a jak si v případě jejího uskutečnění rozdělit zisk.*



Obrázek 3.5: Graf zobrazující vztahy mezi hráči z příkladu 3.15

Nejprve určíme množinu všech utvořitelných koalic Ω. Hráč vstoupí do koalice pouze tehdy, je-li v koalici hráč, kterého zná. Utvořitelnými koalicemi jsou tedy všechny koalice S takové, že podgraf grafu z obrázku 3.5 indukovaný množinou vrcholů S je souvislý.

$$\Omega = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Na této množině je definována charakteristická funkce hry, jejíž zadání je následovné:

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(\{1\}) = 3000, \quad v(\{2\}) = 3000, \quad v(\{3\}) = 3000, \quad v(\{4\}) = 9000,$$
$$v(\{1,2\}) = 6000, \quad v(\{1,3\}) = 6000, \quad v(\{2,3\}) = 6000, \quad v(\{3,4\}) = 15000,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 12000, \quad v(\{1,3,4\}) = 18000, \quad v(\{2,3,4\}) = 18000,$$
$$v(\{1,2,3,4\}) = 24000$$

Již z charakteristické funkce vidíme, že každá spolupráce se vyplatí. Rozdělení zisku potom určíme Shapleyho hodnotou. Jelikož $\Omega \neq 2^N$, je však třeba nejprve upravit hru dle vztahu (2.6).

$$v_\Omega(S) = v(S) \qquad \text{pro } S \in \Omega,$$
$$v_\Omega(\{1,4\}) = v(\{1\}) + v(\{4\}) = 3000 + 9000 = 12000,$$
$$v_\Omega(\{2,4\}) = v(\{2\}) + v(\{4\}) = 3000 + 9000 = 12000,$$
$$v_\Omega(\{1,2,4\}) = v(\{1,2\}) + v(\{4\}) = 6000 + 9000 = 15000$$

Shapleyho hodnota takto upravené hry a tedy hledané rozdělení zisku vychází následovně:

$$\varphi(v_\Omega) = (4000, 4000, 5500, 10500)$$

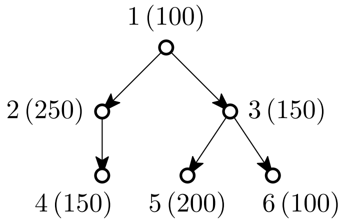
Shapleyho hodnota určuje třetímu hráči viditelně vyšší zisk než prvním dvěma. Tato skutečnost je způsobena pozicí v grafu, kde třetí hráč spojuje prvního a druhého hráče s hráčem čtvrtým. Odstoupení třetího hráče od spolupráce by tedy mělo horší následky než odstoupení některého z prvních dvou hráčů.

Příklad 3.16. *Připomeňme si provozovatele webových stránek z příkladu 2.19. První podnikatel opět na své stránce prodává produkt za cenu 100 Kč. Přibližně každý druhý čtenář si produkt zakoupí. Spolupráce spočívá v reklamě a přesměrování svých odběratelů na odkazovanou stránku. Nyní však spolupráci nenabízí pouze dvěma dalším. Ti dále, pokud do toho půjdou, mohou spolupráci nabídnout dalším podnikatelům. Bližší pohled na tuto situaci nám poskytne graf na obrázku 3.6. Počet odběratelů novinek jednotlivých webových stránek je uveden v závorce u popisu vrcholů v grafu. Kolik by měl prodávající za takovou reklamu nabídnout nyní, pokud na spolupráci všichni kývnou?*

Z grafu na obrázku 3.6 zapíšeme všechny utvořitelné koalice, pro které potom určíme hodnoty charakteristické funkce.

$$\Omega = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,3,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(\{1\}) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 5000, \quad v(\{1,2\}) = 350 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 17500,$$
$$v(\{1,3\}) = 250 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 12500, \quad v(\{1,2,3\}) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 25000,$$



Obrázek 3.6: Orientovaný graf z příkladu 3.16

$$v(\{1,2,4\}) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 25000, \quad v(\{1,3,5\}) = 450 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 22500,$$
$$v(\{1,3,6\}) = 350 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 17500, \quad v(\{1,2,3,4\}) = 650 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 32500,$$
$$v(\{1,2,3,5\}) = 700 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 35000, \quad v(\{1,2,3,6\}) = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 30000,$$
$$v(\{1,3,5,6\}) = 550 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 27500, \quad v(\{1,2,3,4,5\}) = 850 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 42500,$$
$$v(\{1,2,3,4,6\}) = 750 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 37500, \quad v(\{1,2,3,5,6\}) = 800 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 40000,$$
$$v(\{1,2,3,4,5,6\}) = 950 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 = 47500$$

Nyní pro výpočet Shapleyho hodnoty upravíme hru dle vztahu (2.6) a spočteme $\varphi(v_\Omega)$.

$$v_\Omega(S) = v(S) \qquad \text{pro } S \in \Omega,$$
$$v_\Omega(\{1,4\}) = v(\{1\}) = 5000, \quad v_\Omega(\{1,5\}) = v(\{1\}) = 5000, \quad v_\Omega(\{1,6\}) = v(\{1\}) = 5000,$$
$$v_\Omega(\{1,2,5\}) = v(\{1,2\}) = 17500, \quad v_\Omega(\{1,2,6\}) = v(\{1,2\}) = 17500,$$
$$v_\Omega(\{1,3,4\}) = v(\{1,3\}) = 12500, \quad v_\Omega(\{1,4,5\}) = v(\{1\}) = 5000,$$
$$v_\Omega(\{1,4,6\}) = v(\{1\}) = 5000, \quad v_\Omega(\{1,5,6\}) = v(\{1\}) = 5000,$$
$$v_\Omega(\{1,2,4,5\}) = v(\{1,2,4\}) = 25000, \quad v_\Omega(\{1,2,4,6\}) = v(\{1,2,4\}) = 25000,$$
$$v_\Omega(\{1,2,5,6\}) = v(\{1,2\}) = 17500, \quad v_\Omega(\{1,3,4,5\}) = v(\{1,3,5\}) = 22500,$$
$$v_\Omega(\{1,3,4,6\}) = v(\{1,3,6\}) = 17500, \quad v_\Omega(\{1,4,5,6\}) = v(\{1\}) = 5000,$$
$$v_\Omega(\{1,2,4,5,6\}) = v(\{1,2,4\}) = 25000, \quad v_\Omega(\{1,3,4,5,6\}) = v(\{1,3,5,6\}) = 27500,$$
$$v_\Omega(S) = v(\emptyset) = 0 \qquad \text{jinak}$$

$$\varphi(v_\Omega) = \left(22500, 8750, 8750, 2500, \frac{10000}{3}, \frac{5000}{3}\right) \doteq (22500, 8750, 8750, 2500, 3333, 1667)$$

Prvnímu podnikateli by tentokrát měl připadnout zisk 22500 Kč a za reklamu by měl ostatním zaplatit dle vypočtené Shapleyho hodnoty.

Kapitola 4

Hry na sítích

Graf vždy nemusí vyjadřovat pouze vztahy mezi hráči či nějaké jejich uspořádání. Zde si představíme příklady her, kde se graf vyskytuje ve formě sítě, která nám poskytuje lepší náhled na zkoumanou situaci.

Dále se budou v grafech hledat nejkratší cesty, minimální kostry a další. K tomu existuje mnoho různých algoritmů. My si je zde nebudeme uvádět. V našich příkladech bude řešení snadno viditelné. Pro bližší informace k těmto algoritmům odkazuju např. na [1] a [4].

4.1 Vlastnictví hran

Jednou z možností výše uvedených her jsou hry, kde různí hráči vlastní různé hrany. Kooperací v takových hrách by se potom mohlo chápat poskytování či propůjčování hran mezi hráči.

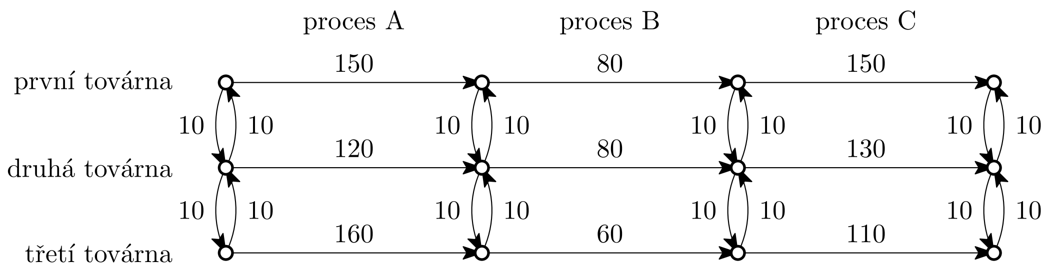
Jako první příklad budeme uvažovat ohodnocený graf, kde každá z hran je ve vlastnictví jednoho či více hráčů. Zájmem některých hráčů může být hledání nejkratší cesty (tj. s nejmenší délkou) mezi nějakými dvěma vrcholy. Hráči tuto cestu vybírají pouze z cest tvořených hranami vlastními nebo hráčů, se kterými jsou v koalici. Délka této nejkratší cesty se projeví v charakteristické funkci hry.

Příklad 4.1. *Ve městě sídlí tři továrny se stejným zaměřením. Tím je výroba rozdělená na tři po sobě jdoucí technologické procesy (dále značené A, B, C). Vlastník první továrny má domluveného odběratele, který zaplatí 400 Kč za výsledný produkt. Procesy A, B, C pro zpracování jednoho výrobku stojí postupně 150, 80 a 150 Kč v první továrně, 120, 80 a 130 Kč ve druhé továrně a 160, 60 a 110 Kč ve třetí továrně. Převoz jednoho výrobku mezi první a druhou a mezi druhou a třetí továrnou vyjde na 10 Kč. Mezi první a třetí továrnou není přímý převoz možný. Naskytuje se možnost provádět různé procesy v různých továrnách. Jaký postup bude nejvýhodnější a jak si dále rozdělit zisk?*

Procesy a ceny znázorníme v orientovaném grafu na obrázku 4.1.

V tomto grafu nyní hledáme nejkratší cestu z prvního do posledního vrcholu první továrny. Určíme tedy charakteristickou funkci hry.

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1\}) = 400 - 150 - 80 - 150 = 20,$$
$$v(\{1,2\}) = 400 - 10 - 120 - 80 - 130 - 10 = 50,$$
$$v(\{1,3\}) = 400 - 150 - 10 - 10 - 60 - 110 - 10 - 10 = 40,$$

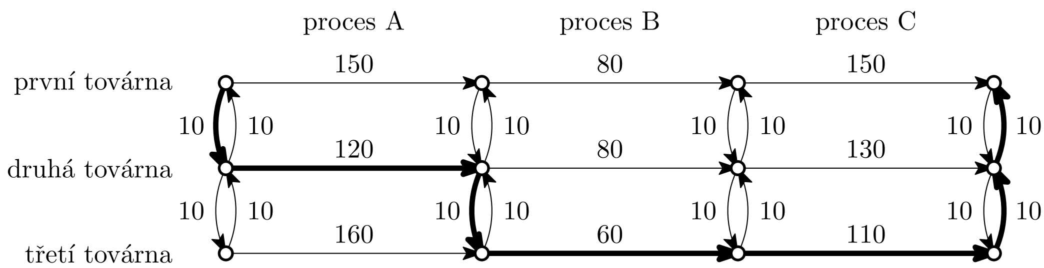


Obrázek 4.1: Orientovaný graf znázorňující situaci z příkladu 4.1

$$v(\{1,2,3\}) = 400 - 10 - 120 - 10 - 60 - 110 - 10 - 10 = 70$$

Shapleyho hodnota vychází následovně:

$$\varphi(v) = (45, 15, 10)$$



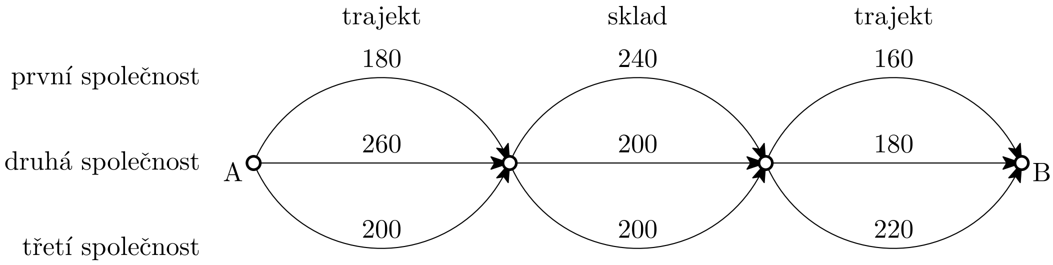
Obrázek 4.2: Nejkratší cesta v grafu z příkladu 4.1

Nejvýhodnějším postupem tedy je provedení procesu A ve druhé továrně a procesů B a C v továrně třetí. Tato cesta je v grafu znázorněna na obrázku 4.2. Rozdělení zisku určené Shapleyho hodnotou potom bude postupně 45, 15 a 10 Kč na jeden výrobek pro první, druhou a třetí továrnu.

Další příklad bude analogický, pouze místo hledání nejkratší cesty budeme tentokrát hledat cestu nejpropustnější. Propustnost cesty je minimální ohodnocení přes všechny hrany a vrcholy v dané cestě. Zde tedy hledáme cestu s největší propustností.

Příklad 4.2. *Společnost zabývající se lodní přepravou aut dostala zakázku k převezení co nejvíce aut z města A do města B. Mezi těmito městy však musí dojít k uskladnění aut přes noc a přeložení na jiný trajekt. Společnost má k dispozici na obou částech trasy trajekty o kapacitě 180 aut a sklad o kapacitě 240 aut. Zákazník zaplatí 1000 Kč za každé převezené auto. Má však podmínku, že se auta nesmí rozdělit na více lodí či do více skladů a musí celou dobu zůstat pohromadě. Proto uvažuje majitel firmy o spolupráci s dalšími společnostmi. Na stejné trase zprostředkovávají dopravu další dvě firmy. Ty mají na první části trasy trajekty o kapacitách 260 a 200 aut, na druhé 180 a 220 aut a sklady o kapacitě 200 aut. Zřejmější náhled na situaci poskytne obrázek 4.3. Majitel první společnosti chce nyní vědět, jak je to s výhodností spolupráce s ostatními společnostmi a jak v případě jejího uskutečnění rozdělit zisk.*

Pro každého hráče či koalici nyní hledáme nejpropustnější cestu, jejíž propustnost zaznamenáme v charakteristické funkci hry.



Obrázek 4.3: Orientovaný graf znázorňující situaci z příkladu 4.2

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1\}) = \min(180, 240, 160) \cdot 1000 = 160000,$$
$$v(\{1,2\}) = \min(260, 240, 180) \cdot 1000 = 180000,$$
$$v(\{1,3\}) = \min(200, 240, 220) \cdot 1000 = 200000,$$
$$v(\{1,2,3\}) = \min(260, 240, 220) \cdot 1000 = 220000$$

Nejvýhodnější tedy bude využití nejprve trajektu druhé společnosti, skladu první společnosti a poté trajektu společnosti třetí. Shapleyho hodnota a tedy hledané rozdělení zisku pak vychází následovně:

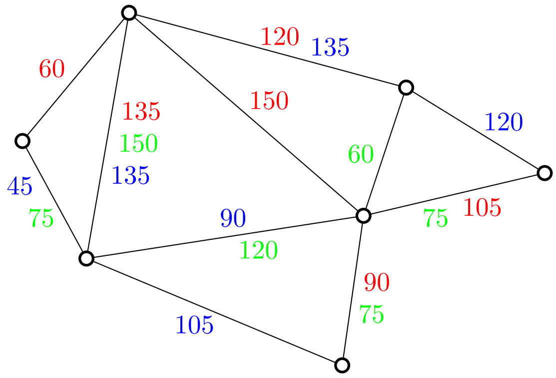
$$\varphi(v) = (190000, 10000, 20000)$$

Další možností hry může být zájem jednoho z hráčů o vytvoření minimální kostry. Tedy ze všech utvořitelných koster grafu té, která má nejmenší součet ohodnocení všech hran, ze kterých se sestává. Tato minimální kostra se hledá pouze mezi kostrami utvořitelnými z hran onoho hráče či hráčů s ním v koalici.

Příklad 4.3. *Mezi sedmi městy působí tři letecké společnosti. Společnosti vlastní různá letadla, proto se ceny i na stejných trasách mohou lišit. Také je každá společnost oprávněna užívat pouze určité trasy. Tato situace je znázorněna na obrázku 4.4, kde jsou hrany ohodnoceny cenou v tisících Kč za uskutečnění jednoho letu. Ohodnocení má barvu pouze těch hráčů, kteří danou hranu mohou využít. První společnost vyjadřuje červená barva, druhou zelená a třetí modrá. Každá ze společností má přibližně 500 zákazníků týdně, kteří za letenku zaplatí v průměru 2000 Kč. K pokrytí požadavků zákazníků každé společnosti je potřeba týdně na každé lince jedno letadlo. Jeví se výhodné uzavřít dohodu a využít tzv. code-sharing (let uskutečněný jinou společností než tou, která s ním obchoduje). Jak si potom rozdělit zisk?*

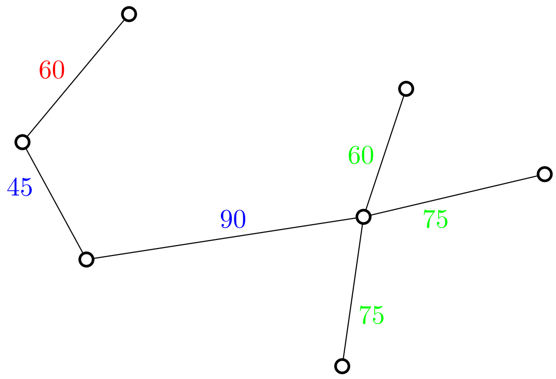
Hráči a koalice hledají nejvýhodnější řešení ve tvaru minimální kostry. Na této kostře je potom potřeba týdně na každé lince tolik letadel, kolik je v koalici hráčů. Nyní tedy určíme charakteristickou funkci hry.

$$v(\varnothing) = 0,$$
$$v(\{1\}) = 500 \cdot 2000 - (60 + 135 + 150 + 120 + 90 + 105) \cdot 1000 = 340000,$$
$$v(\{2\}) = 500 \cdot 2000 - (75 + 150 + 120 + 60 + 75 + 75) \cdot 1000 = 445000,$$
$$v(\{3\}) = 500 \cdot 2000 - (45 + 135 + 90 + 105 + 135 + 120) \cdot 1000 = 370000,$$



Obrázek 4.4: Síť linek z příkladu 4.3

$$v(\{1,2\}) = 2 \cdot 500 \cdot 2000 - 2 \cdot (60 + 75 + 120 + 60 + 75 + 75) \cdot 1000 = 1070000,$$
$$v(\{1,3\}) = 2 \cdot 500 \cdot 2000 - 2 \cdot (60 + 45 + 90 + 120 + 105 + 90) \cdot 1000 = 980000,$$
$$v(\{2,3\}) = 2 \cdot 500 \cdot 2000 - 2 \cdot (135 + 45 + 90 + 60 + 75 + 75) \cdot 1000 = 1040000,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 3 \cdot 500 \cdot 2000 - 3 \cdot (60 + 45 + 90 + 60 + 75 + 75) \cdot 1000 = 1785000$$



Obrázek 4.5: Minimální kostra z příkladu 4.3

Minimální kostru při spolupráci všech tří společností vidíme na obrázku 4.5. Rozdělení týdenního zisku určíme Shapleyho hodnotou.

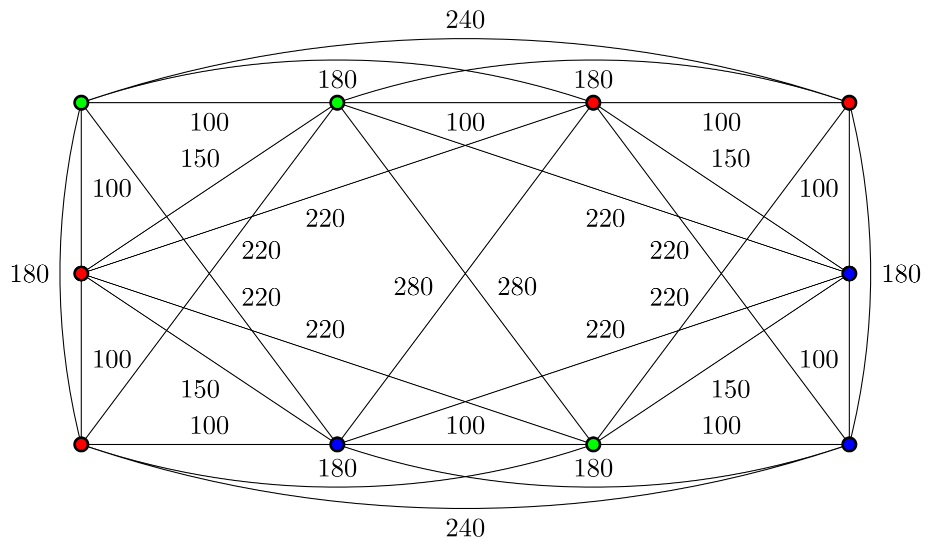
$$\varphi(v) = (567500, 650000, 567500)$$

4.2 Vlastnictví vrcholů

Když můžou hráči vlastnit hrany, je zřejmé, že můžou rovněž představovat vlastníky vrcholů.

Mějme nyní ohodnocený graf, kde každý z vrcholů je ve vlastnictví jednoho či více hráčů. Hráči můžou chtít propojit všechny své vrcholy, a to co možná nejlevněji. Tedy nyní hledají minimální kostru podgrafu indukovaného množinou svých vrcholů. Pro koalici více hráčů může být levnější vytvoření společné minimální kostry podgrafu indukovaného množinou vrcholů všech nebo některých hráčů.

Příklad 4.4. *V jednom patře budovy sídlí tři společnosti. Všechny plánují propojit kanceláře všech svých pracovníků a vytvořit tak počítačovou síť. Kanceláře jedné firmy však spolu vždy nesousedí. Všechno bude zřejmější z obrázku 4.6, kde vidíme graf zobrazující kanceláře všech společností jako barevně rozlišené uzly a hrany mezi nimi ohodnocené cenou možného přímého propojení v Kč. Nabízí se možnost vytvořit síť společnou, pokud to bude výhodnější, a celkové náklady si rozdělit.*



Obrázek 4.6: Kanceláře a jejich možná propojení z příkladu 4.4

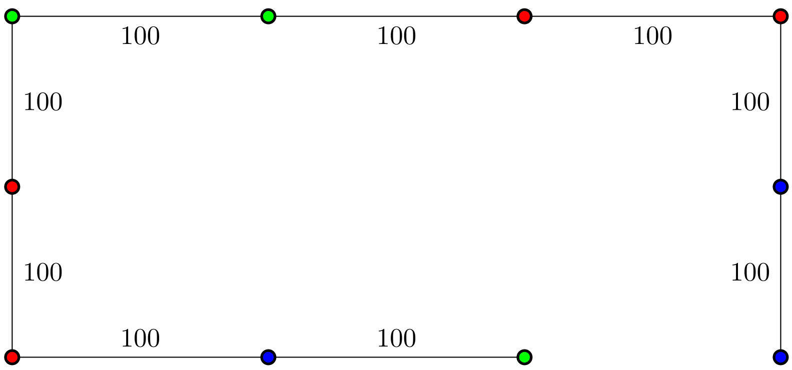
Každá ze společností se snaží vytvořit co nejlevnější propojení, tedy minimální kostru podgrafu indukovaného množinou svých vrcholů. Jestliže označíme červené vrcholy za vrcholy prvního hráče, zelené za vrcholy hráče druhého a modré za vrcholy hráče třetího, dostaneme následující charakteristickou funkci hry. Jelikož nejde o zisk, nýbrž o náklady, bude se jednat o záporné hodnoty.

$$v(\varnothing) = 0,$$
$$v(\{1\}) = -(100 + 220 + 100) = -420,$$
$$v(\{2\}) = -(100 + 280) = -380,$$
$$v(\{3\}) = -(100 + 180) = -280,$$
$$v(\{1,2\}) = -(5 \cdot 100 + 180) = -680,$$
$$v(\{1,3\}) = -(2 \cdot 100 + 180 + 3 \cdot 100) = -680,$$
$$v(\{2,3\}) = -(3 \cdot 100 + 220 + 100) = -620,$$
$$v(\{1,2,3\}) = -(9 \cdot 100) = -900$$

Nejvýhodnější se tedy jeví spolupráce všech tří společností. Tuto minimální kostru vidíme na obrázku 4.7. Rozdělení celkových nákladů určíme Shapleyho hodnotou.

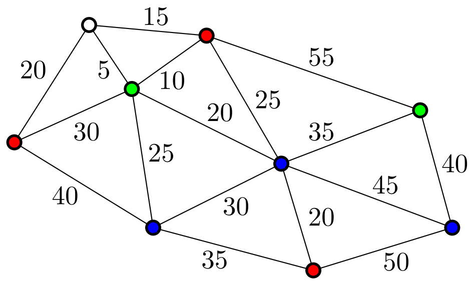
$$\varphi(v) = (-350, -300, -250)$$

Jinou možností je, že můžou hráči požadovat propojení všech svých vrcholů uzavřeným sledem s minimální délkou. Opět se může pro koalici hráčů vyplatit vytvoření společného sledu, který pokryje vrcholy více hráčů.



Obrázek 4.7: Minimální kostra z příkladu 4.4

Příklad 4.5. *V regionu na obrázku 4.8 působí tři dodavatelské firmy. Každá má jedno auto a místa, která musí navštívit a doručit zde balíček v ceně 250 Kč. Zanedbáme místo, odkud se vyjíždí a kam se následně vrací, a budeme předpokládat, že auto může vyjet odkudkoliv, ale po navštívení všech zastávek se tam musí i vrátit. Místa k navštívení první dodavatelskou firmou jsou znázorněna červeně, druhou firmou zeleně a třetí firmou modře. Ohodnocení hran vyjadřuje cenu za projetí onou hranou. Vyplatí se firmám spojit a použít pouze jedno auto k navštívení všech zastávek? Jak si potom rozdělit zisk?*



Obrázek 4.8: Síť z příkladu 4.5, na které působí dodavatelské firmy

Pro každého hráče a každou koalici nalezneme nejvýhodnější možnost, kterou je zde ve všech příkladech jeden nejkratší uzavřený sled. Dále určíme charakteristickou funkci hry.

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 3 \cdot 250 - 20 - 15 - 25 - 20 - 20 - 20 - 5 - 20 = 605,$$

$$v(\{2\}) = 2 \cdot 250 - 35 - 20 - 20 - 35 = 390,$$

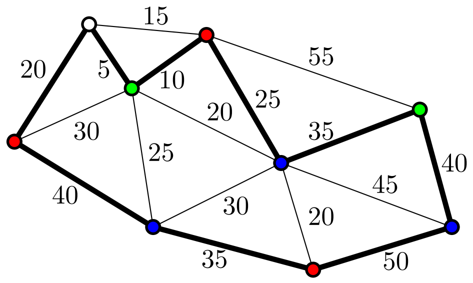
$$v(\{3\}) = 3 \cdot 250 - 30 - 45 - 45 - 30 = 600,$$

$$v(\{1,2\}) = 5 \cdot 250 - 20 - 5 - 20 - 20 - 20 - 35 - 55 - 15 - 20 = 1040,$$

$$v(\{1,3\}) = 6 \cdot 250 - 20 - 15 - 25 - 45 - 50 - 35 - 40 = 1270,$$

$$v(\{2,3\}) = 5 \cdot 250 - 30 - 45 - 40 - 35 - 20 - 25 = 1055,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 8 \cdot 250 - 20 - 5 - 10 - 25 - 35 - 40 - 50 - 35 - 40 = 1740$$



Obrázek 4.9: Nejvýhodnější sled z příkladu 4.5

Vyplatí se tedy spolupráce všech tří firem a vytvoření sledu na obrázku 4.9. Následné rozdělení zisku stanovíme Shapleyho hodnotou.

$$\varphi(v) = (650, 435, 655)$$

4.3 Toky v síti

Nyní se podíváme na asi nejčastěji aplikované úlohy z teorie grafů. Jedná se o tok v síti. V mnoha aplikacích se však řeší pouze optimalizace takového toku. My se zde zaměříme na situaci, kdy se v jedné síti nachází více toků a my tak můžeme využít znalosti z teorie her.

Definice 4.6. *Tokem v síti* $G = (V, E)$ rozumíme ohodnocení hran čísly $f\colon E \to \mathbb{R}$, které splňuje

$$\sum_{e\in E\colon e=(x,v),\, x\in V} f(e) = \sum_{e\in E\colon e=(v,x),\, x\in V} f(e)$$

pro každý vrchol $v \in V$ kromě dvou, které nazveme *zdroj* a *spotřebič*.

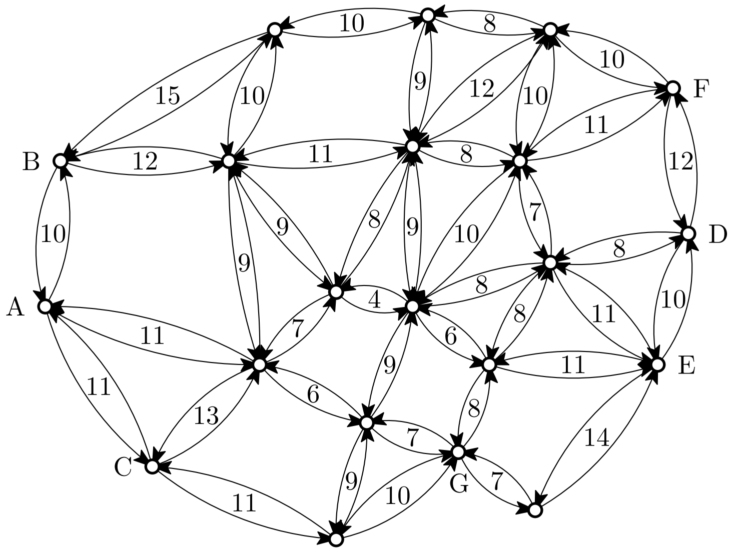
V případě, že je vlastnost splněna pro všechny vrcholy $v \in V$, bavíme se o *cirkulaci*.

Velikost toku v jednotlivých hranách je často omezena na interval $f(e) \in \langle l(e), c(e)\rangle$. Číslo $c(e)$ nazýváme *horním omezením toku v hraně* e a $l(e)$ *dolním omezením toku v hraně* e. Pokud je $l(e) = 0$, číslu $c(e)$ říkáme *kapacita hrany* e.

V prvním příkladu budeme předpokládat situaci, kdy se v jedné síti vyskytuje více hráčů, z nichž každý má svůj vlastní zdroj i spotřebič. Hrany grafu jsou ohodnoceny cenou (respektive délkou) a kapacitou. Střet zájmů nastane při nedostatečné kapacitě hran, jejichž využití je výhodné pro více hráčů.

Příklad 4.7. *Tři firmy potřebují dostat své výrobky k zákazníkům. Na obrázku 4.10 vidíme síť aerolinek, kterou mají v plánu použít k přepravě. Každá z firem má k dispozici 150 výrobků denně a za každý úspěšně přepravený obdrží 70 Kč. První firma sídlí ve vrcholu A a dodává výrobky do vrcholu D, druhá je dopravuje z vrcholu B do vrcholu E a třetí z vrcholu C do vrcholu F. Ohodnocení hran na obrázku se vztahuje vždy k oběma hranám, mezi nimiž se nachází, a vyjadřuje cenu za přepravu jednoho výrobku onou linkou. Zároveň má každá z linek kapacitu 180 výrobků denně. Aerolinky uspokojují zájem o místo v letadle rovnoměrně. Firmy zjišťují, zda se vyplatí nějaká spolupráce a jak si v případě jejího uskutečnění rozdělit zisk.*

U každého hráče či koalice nyní hledáme nejlevnější tok sítí za předpokladu, že ostatní hráči se jej snaží minimalizovat. Tak získáváme následující charakteristickou funkci, z které spočteme Shapleyho hodnotu.



Obrázek 4.10: Síť k příkladům 4.7, 4.8, 4.9, 4.10

$$
\begin{aligned}
v(\varnothing) &= 0,\\
v(\{1\}) &= 150\cdot 70 - ((11+7+4+8+8)\cdot 60 + (11+11+10+8+11+10)\cdot 60\\
&\quad + (10+12+11+8+11+12)\cdot 30) = 2640,\\
v(\{2\}) &= 150\cdot 70 - ((12+9+4+6+11)\cdot 60 + (10+11+6+7+7+14)\cdot 60\\
&\quad + (15+10+9+8+7+11)\cdot 30) = 2880,\\
v(\{3\}) &= 150\cdot 70 - ((13+7+4+10+11)\cdot 60 + (11+9+9+8+8+12)\cdot 60\\
&\quad + (11+11+9+11+12+10)\cdot 30) = 2460,\\
v(\{1,2\}) &= 2\cdot 150\cdot 70 - ((11+6+9+8+8)\cdot 120 + (12+9+4+6+11)\cdot 120\\
&\quad + (11+11+10+7+14+10)\cdot 30 + (15+10+9+8+7+11)\cdot 30) = 7230,\\
v(\{1,3\}) &= 2\cdot 150\cdot 70 - ((11+6+9+8+8)\cdot 120 + (13+7+4+10+11)\cdot 120\\
&\quad + (11+11+10+8+11+10)\cdot 30 + (11+10+8+11+10+12)\cdot 30) = 6870,\\
v(\{2,3\}) &= 2\cdot 150\cdot 70 - ((12+9+4+6+11)\cdot 120 + (13+7+8+8+11)\cdot 120\\
&\quad + (10+11+6+7+7+14)\cdot 30 + (11+9+9+8+8+12)\cdot 30) = 6960,\\
v(\{1,2,3\}) &= 3\cdot 150\cdot 70 - ((11+7+4+8+8)\cdot 150 + (12+9+4+6+11)\cdot 30\\
&\quad + (13+7+8+8+11)\cdot 30 + (12+11+9+6+11)\cdot 120\\
&\quad + (13+6+9+10+11)\cdot 120) = 11490
\end{aligned}
$$

$$\varphi(v) = (3850, 4015, 3625)$$

Vidíme, že se zde jakákoliv spolupráce vyplatí. Shapleyho hodnota nám potom určuje hledané denní rozdělení zisku při spolupráci všech tří firem.

Dále budeme uvažovat podobně, pouze tentokrát místo toho, aby měl každý z hráčů svůj vlastní spotřebič, bude se v síti nacházet pouze jeden společný.

Příklad 4.8. *Zadání nyní bude stejné jako v příkladu 4.7, jenom budou všechny firmy dopravovat své výrobky pouze do vrcholu D.*

Charakteristickou funkci určíme analogicky a opět spočteme Shapleyho hodnotu dané hry.

$$
\begin{aligned}
v(\emptyset) &= 0,\\
v(\{1\}) &= 150 \cdot 70 - ((11+7+4+8+8) \cdot 60 + (11+11+10+8+11+10) \cdot 60\\
&\qquad + (10+12+11+8+11+12) \cdot 30) = 2640,\\
v(\{2\}) &= 150 \cdot 70 - ((12+9+4+8+8) \cdot 60 + (15+10+8+10+12) \cdot 60\\
&\qquad + (10+11+6+7+8+11+10) \cdot 30) = 2850,\\
v(\{3\}) &= 150 \cdot 70 - ((13+7+4+8+8) \cdot 60 + (11+10+8+11+10) \cdot 60\\
&\qquad + (11+11+9+11+8+11+12) \cdot 30) = 2910,\\
v(\{1,2\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((12+9+4+8+8) \cdot 120 + (11+6+7+8+11+10) \cdot 120\\
&\qquad + (15+10+8+10+12) \cdot 30 + (10+15+10+8+10+12) \cdot 30) = 6120,\\
v(\{1,3\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+7+4+8+8) \cdot 120 + (11+10+8+11+10) \cdot 120\\
&\qquad + (10+12+11+8+11+12) \cdot 30 + (13+6+9+10+11+12) \cdot 30) = 6690,\\
v(\{2,3\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((12+9+4+8+8) \cdot 120 + (11+10+8+11+10) \cdot 120\\
&\qquad + (15+10+8+10+12) \cdot 30 + (13+6+9+10+11+12) \cdot 30) = 6600,\\
v(\{1,2,3\}) &= 3 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+7+4+8+8) \cdot 150 + (12+9+4+8+8) \cdot 30\\
&\qquad + (12+11+8+11+12) \cdot 120 + (11+10+8+11+10) \cdot 150) = 10590
\end{aligned}
$$

$$\varphi(v) = (3385, 3445, 3760)$$

Tímto máme tedy určeno denní rozdělění zisku v případě pouze jednoho spotřebiče v síti.

Nyní se dostáváme ke zbývající možnosti, kdy budeme mít libovolný počet spotřebičů, které může využít kterýkoliv z hráčů.

Příklad 4.9. *Zadání bude opět stejné jako v příkladu 4.7, jenom nyní budou firmy své výrobky přepravovat do kteréhokoliv z vrcholů D, E, F, G.*

Opět určíme charakteristickou funkci a Shapleyho hodnotu hry tak, jako v předchozích příkladech.

$$
\begin{aligned}
v(\emptyset) &= 0,\\
v(\{1\}) &= 150 \cdot 70 - ((11+6+7) \cdot 60 + (11+11+10) \cdot 60\\
&\qquad + (10+12+9+4+6+8) \cdot 30) = 5670,\\
v(\{2\}) &= 150 \cdot 70 - ((10+11+6+7) \cdot 60 + (12+9+4+6+8) \cdot 60\\
&\qquad + (15+10+8+10) \cdot 30) = 4830,\\
v(\{3\}) &= 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 60 + (13+6+7) \cdot 60\\
&\qquad + (11+11+7+4+6+8) \cdot 30) = 6270,\\
v(\{1,2\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+6+7) \cdot 120 + (11+11+10) \cdot 30\\
&\qquad + (12+9+4+6+8) \cdot 120 + (10+11+11+10) \cdot 30) = 11220,\\
v(\{1,3\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 120 + (13+6+7) \cdot 30 + (11+6+7) \cdot 90\\
&\qquad + (11+7+4+6+8) \cdot 30 + (10+12+9+4+6+8) \cdot 30) = 12990,\\
v(\{2,3\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 120 + (13+6+7) \cdot 30\\
&\qquad + (10+11+6+7) \cdot 90 + (12+9+4+8+8) \cdot 60) = 12180,\\
v(\{1,2,3\}) &= 3 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 150 + (11+6+7) \cdot 150\\
&\qquad + (12+9+6+7) \cdot 30 + (12+9+4+6+8) \cdot 120) = 19050
\end{aligned}
$$

$$\varphi(v) = (6365, 5540, 7145)$$

Tak tedy máme určeno rozdělení denního zisku i pro případ využití libovolného spotřebiče.

Jako poslední příklad pouze upravíme předchozí tak, že na hranách budeme uvažovat neomezenou kapacitu. Naproti tomu v tomto případě budou mít spotřebiče kapacitu omezenou.

Příklad 4.10. *Uvažujme nyní, že firmy z příkladu 4.7 k přepravě využijí silniční síť. Vezměme si opět síť z obrázku 4.10. Jako v příkladu 4.9, i zde firmy své výrobky přepravují do kteréhokoliv z vrcholů D, E, F, G. Ohodnocení hran opět vyjadřuje cenu za přepravu jednoho výrobku touto hranou. Hrany však nemají žádnou kapacitu. Naopak je omezena poptávka v každém z cílových vrcholů na 120 výrobků.*

Opět hledáme nejlevnější tok sítí za předpokladu, že ostatní hráči se jej snaží minimalizovat. Získáváme charakteristickou funkci hry a Shapleyho hodnotu.

$$
\begin{aligned}
v(\emptyset) &= 0,\\
v(\{1\}) &= 150 \cdot 70 - ((11+6+7) \cdot 40 + (11+7+4+8+8) \cdot 40\\
&\quad + (11+7+4+6+11) \cdot 40 + (11+7+4+10+11) \cdot 30) = 5170,\\
v(\{2\}) &= 150 \cdot 70 - ((10+11+6+7) \cdot 40 + (12+9+4+8+8) \cdot 40\\
&\quad + (12+9+4+6+11) \cdot 40 + (12+11+8+11) \cdot 30) = 4560,\\
v(\{3\}) &= 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 40 + (13+7+4+8+8) \cdot 40\\
&\quad + (11+10+8+11) \cdot 40 + (13+7+4+10+11) \cdot 30) = 5110,\\
v(\{1,2\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+6+7) \cdot 80 + (11+7+4+6+11) \cdot 70\\
&\quad + (12+9+4+8+8) \cdot 80 + (12+11+8+11) \cdot 70) = 10130,\\
v(\{1,3\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 80 + (11+10+8+11) \cdot 70\\
&\quad + (11+7+4+8+8) \cdot 80 + (11+7+4+10+11) \cdot 70) = 10470,\\
v(\{2,3\}) &= 2 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 80 + (11+10+8+11) \cdot 70\\
&\quad + (12+9+4+8+8) \cdot 80 + (12+11+8+11) \cdot 70) = 10300,\\
v(\{1,2,3\}) &= 3 \cdot 150 \cdot 70 - ((11+10) \cdot 120 + (11+7+4+8+8) \cdot 120\\
&\quad + (12+11+8+11) \cdot 120 + (11+7+4+6+11) \cdot 30\\
&\quad + (12+9+4+6+11) \cdot 30 + (11+10+8+11) \cdot 30) = 15750\\
\varphi(v) &= \left(\frac{16085}{3}, \frac{14915}{3}, \frac{16250}{3}\right) \doteq (5362, 4972, 5417)
\end{aligned}
$$

Tak máme určeno denní rozdělení zisku i v případě neomezené kapacity hran a omezené kapacity spotřebičů.

Závěr

Cílem práce bylo studium teorie her a teorie her na grafech s její následnou aplikací při řešení konkrétních problémů.

Nejprve byly představeny hlavní myšlenky teorie her, především pak kooperativní teorie her. Soustředili jsme se na hledání výhodné kooperace a následného rozdělení zisku ze hry mezi spolupracující hráče. Pro takové rozdělení jsme si představili jádro hry a Shapleyho hodnotu a studovali jsme jejich vlastnosti. Uvedli jsme si i varianty pro hry, ve kterých nejsou hráči schopni utvořit všechny koalice.

Dále jsme se zaměřili na základy teorie grafů, po jejichž uvedení jsme již pokračovali konkrétními příklady her. Prvním druhem her z kombinace teorie her a teorie grafů byly hry, v nichž jsme měli uspořádání hráčů zobrazené orientovaným či neorientovaným grafem. Toto uspořádání představovalo omezení na tvorbu koalic a my jsme si u takových her ukázali použití Shapleyho hodnoty.

Jiným druhem takových her byly hry, kde graf znázorňoval situaci s možnými rozhodnutími. Na tomto grafu hledal každý z hráčů nějaké optimum. Jednalo se o hry, kde jsou ve vlastnictví hráčů hrany či vrcholy grafu nebo je zájmem hráčů najít optimální tok oním grafem. U těchto her jsme opět využili znalosti o Shapleyho hodnotě a ukázali si jeho využití a výhodnost.

Literatura

[1] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace.* Vydání 1. Praha: Academia, 2002. 258 s. ISBN 80-200-0990-6.

[2] GILLES, Robert P. *The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies.* Heidelberg: Springer, ©2010, xi, 255 s. ISBN 978-3-642-05282-8.

[3] HYKŠOVÁ, Magdalena. *Teorie her* [online]. [b.r.] [cit. 2013-11-30]. Dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/hry.pdf

[4] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování.* První vydání. Praha: Professional Publishing, 2002. 323 s. ISBN 80-86419-23-1.

[5] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a optimální rozhodování.* Vydání první. Praha: SNTL, 1974. 256 s.

[6] OWEN, Guillermo. *Game Theory.* Philadelphia: W. B. Saunders, 1968. xii, 228 s.

[7] ŠLAPAL, Josef. *Grafy 1* [online]. 2.1.2014 [cit. 2014-01-27]. Dostupné z: http://www.math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=3605