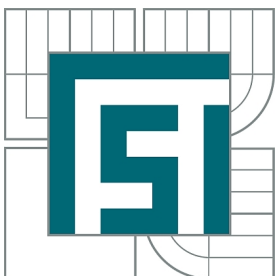


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

SROVNÁNÍ KVALITATIVNÍCH VLASTNOSTÍ INTERPOLAČNÍCH NURBS KŘIVEK

COMPARISON OF QUALITATIVE PROPERTIES OF NURBS INTERPOLATION CURVES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

DAVID HALAS

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Mgr. JANA HODEROVÁ, Ph.D.

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): David Halas

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Srovnání kvalitativních vlastností interpolačních NURBS křivek

v anglickém jazyce:

Comparison of qualitative properties of NURBS interpolation curves

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V počítačové geometrii a grafice se pro křivky technické praxe s výhodou užívají například NURBS křivky. Standartně je NURBS křivka zadávána řídicím polygonem, jde tedy o křivku aproximační. Uživatelsky příjemnější je však křivka, která prochází přímo zadanými body, tedy interpolační křivka. Vlastnosti interpolační NURBS křivky jsou zásadně ovlivněny například konstrukcí vektoru parametrizace a uzlového vektoru. Práce bude zaměřena na různé volby těchto faktorů a sledování chování výsledných křivek.

Cíle bakalářské práce:

Práce bude mít část teoretickou, kde bude vysvětlen princip NURBS křivek a část aplikační. V aplikační části bude na konkrétních datech provedena interpolace NURBS křivkami s různě nastavenými parametry.

Seznam odborné literatury:

Linkeová, I.: Interpolační NURBS křivky - článek

Piegl, L, Tiller, W.: The NURBS Book - monografie, Springer

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jana Hoderová, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 24.11.2014

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá prostými interpolačními křivkami, které jsou ukotvené. Konstrukce těchto křivek je řešena několika tvarovacími metodami. Také je uveden postup jejich výpočtu. Výsledkem je porovnání různých interpolačních metod. Práce je užitečná k porozumění interpolačních NURBS křivek a k výběru vhodných tvarovacích metod.

Summary

This thesis deals with simple interpolation curves, which are clamped. Construction of the curves is solved by several forming tools. There is also brought procedure of their calculation. Result is comparing different interpolation methods. The thesis is useful to understanding for interpolation NURBS curves and for choosing apposite forming methods.

Klíčová slova

NURBS, křivka, interpolace

Keywords

NURBS, curve, interpolation

HALAS, D. Srovnání kvalitativních vlastností interpolačních NURBS křivek. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 38 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jana Hoderová, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Srovnání kvalitativních vlastností NURBS křivek* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Jany Hoderové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

David Halas

Chtěl bych poděkovat své vedoucí Mgr. Janě Hoderové, Ph.D. za odborné vedení,
za pomoc a rady při zpracování této bakalářské práce.

Obsah

Úvod	1
1 Prostá interpolační NURBS křivka	2
1.1 Základní pojmy	2
1.2 Postup určení křivky	4
2 Tvarovací nástroje	5
2.1 Uzlový vektor	5
2.1.1 Uniformní uzlový vektor	5
2.1.2 Průměrový uzlový vektor	5
2.1.3 Těžišťový uzlový vektor	5
2.2 Vektor parametrizace	6
2.2.1 Uniformní vektor parametrizace	6
2.2.2 Tětivový vektor parametrizace	6
2.2.3 Dostředivý vektor parametrizace	7
2.3 Váhy řídicích bodů	7
3 Konstrukce prosté interpolační NURBS křivky	8
3.1 Vektor parametrizace	8
3.1.1 Uniformní vektor parametrizace	8
3.1.2 Tětivový vektor parametrizace	8
3.1.3 Dostředivý vektor parametrizace	8
3.2 Uzlový vektor	8
3.3 Bázové funkce	8
3.4 Těžišťové váhy definičních bodů a racionální bázové funkce	13
3.5 Výpočet řídicích bodů	16
3.6 Analytické vyjádření NURBS křivky	18
4 Porovnání metod interpolace	20
Závěr	23
Použitá literatura	24
Seznam použitých symbolů	25
Seznam příloh	26

Úvod

V počítačové geometrii se s velkou výhodou používají NURBS křivky. Uživatel používající program s těmito křivkami, může přistoupit k těmto křivkám dvěma způsoby. První způsob zahrnuje volbu řídicích bodů, kterými křivka neprochází (výjimka může nastat u počátečního a koncového bodu), potom půjde o aproximační křivky. Druhý způsob je takový, že si uživatel zvolí body, kterými musí křivka procházet, například při práci s přesnými daty. S tímto přístupem se křivky nazývají interpolační, a na ně je zaměřena tato práce.

NURBS (neuniformní racionální B-spliny) křivky jsou zobecněním B-spline křivek. Tím se nám i rozšiřují jejich možnosti. Racionální znamená, že zavádíme váhy řídicích bodů. Tyto váhy ovlivňují výsledný tvar křivky. Váha tedy určuje důležitost vlivu řídicího bodu na tvar křivky oproti ostatním řídicím bodům. Díky váhám je NURBS křivka analyticky vyjádřena racionálními funkcemi p -tého stupně. Jestliže rozdíly hodnot parametru, ve kterých dochází k napojení jednotlivých segmentů křivky jsou konstantní, užíváme pojem uniformní. V případě kdy rozdíly konstantní nejsou, bavíme se o neuniformnosti.

V první kapitole jsou uvedeny základní definice pro výpočet prosté interpolační NURBS křivky. Definice jsou seřazeny podle postupu sestavení křivky. Pokud se nebudeme zabývat vektorem parametrizace, můžeme sestavit aproximační NURBS křivku, ale potřebujeme znát řídicí body místo definičních bodů. Jestliže vynecháme výpočet vah, můžeme sestavit interpolační nebo aproximační B-spline křivku.

V druhé kapitole jsou uvedeny základní metody tvarování interpolačních NURBS křivek. Existuje více metod než je uvedeno, na ukázkou jsou vybrány uniformní, tětíkový a dostředivý vektor parametrizace a uniformní, průměrový a těžišťový uzlový vektor. Pro výpočet vah řídicích bodů je vybrána těžišťová metoda.

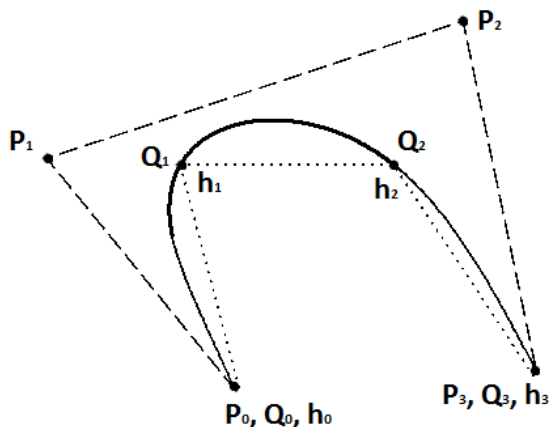
Ve třetí praktické kapitole je ukázán postup při sestavování prosté interpolační NURBS křivky s uniformním uzlovým vektorem. Jsou použity všechny tři vektory parametrizace uvedené v práci. Na konci výpočtu jsou zobrazeny všechny tři křivky do jednoho grafu pro porovnání.

V poslední kapitole jsou i obrázky dalších křivek s ostatními uzlovými vektory opět s různými vektory parametrizace. Použité metody porovnáváme a vybíráme ty nejpřesnější, tedy nejvhodnější pro modelování NURBS křivek.

1 Prostá interpolační NURBS křivka

V této kapitole budou zavedeny základní pojmy pro konstrukci prosté interpolační křivky. Prostou interpolaci si vybíráme, pokud chceme, aby počet ramen řídicího polygonu byl roven počtu ramen definičního polygonu. Také je zbytečné uvažovat okrajové podmínky. Na tvar křivky mají vliv definiční body \mathbf{Q}_i , stupeň p , vektor parametrizace H , uzlový vektor U a váhy řídicích bodů W . Z praktických důvodů se používá stupeň 2 a 3, aby při vyšších stupních nedocházelo k nevhodným tvarům křivky.

Obrázek 1 zobrazuje jednoduchou interpolační NURBS křivku a její základní popis. Jedná se o ukotvenou křivku, protože prochází počátečním a koncovým řídicím bodem. Řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^3$ je tvořen uspořádanými řídicími body \mathbf{P}_i a na Obrázku 1 je znázorněn čárkovanou čarou. Definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^3$ je vytvořen z uspořádaných definičních bodů \mathbf{Q}_i a na Obrázku 1 je ukázán tečkovanou čarou. Hodnoty parametru vektoru parametrizace h_i jsou parametry, ve kterých křivka prochází definičními body \mathbf{Q}_i . Uzlové rozteče $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ jsou zvýrazněny různými tloušťkami čar křivky.



Obrázek 1: Interpolační NURBS křivka a její popis

Definice z této kapitoly jsou čerpány ze zdrojů [1] a [3].

1.1 Základní pojmy

Definice 1 (Vektor parametrizace) *Nechť H je neklesající posloupnost $n+1$ reálných čísel $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_n$. Potom čísla $h_i, i = 0, \dots, n$, nazýváme hodnotami parametru, množinu $H = (h_i)_{i=0}^n$ nazýváme vektorem parametrizace.*

Definice 2 (Uzlový vektor) *Nechť U je neklesající posloupnost $(m+1)$ reálných čísel*

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m.$$

Potom čísla u_i , kde $i = 0, \dots, m$, nazýváme uzly, množinu $U = (u_i)_{i=0}^m = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ nazýváme uzlovým vektorem a polootevřený interval $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ nazýváme i -tou uzlovou roztečí (uzlovým intervalem).

Definice 3 (B-spline bázové funkce) Na daném uzlovém vektoru $U = (u_i)_{i=0}^m$, $u_0 = a, u_m = b, a, b \in \mathbb{R}$, jsou B-spline bázové funkce $N_{i,p}(u), i = 0, \dots, n, u \in \langle a, b \rangle$, stupně p definovány rekurentním vzorcem

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \\ 0, & u \notin \langle u_i, u_{i+1} \rangle \text{ nebo na uzlové rozteči nulové délky} \end{cases}, \quad (1)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u), k = 1, \dots, p. \quad (2)$$

Definice 4 (Váhy řídicích bodů) Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a posloupnost nezáporných reálných čísel $W = (w_0, w_1, \dots, w_n) = (w_i)_{i=0}^n$, která jsou přiřazena odpovídajícím řídicím bodům $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$. Potom čísla w_0, w_1, \dots, w_n označujeme jako váhy řídicích bodů.

Definice 5 (Racionální bázové funkce) Nechť jsou dány váhy řídicích bodů $W = (w_i)_{i=0}^n$. Potom jsou racionální bázové funkce $R_{i,p}(u), i = 0, \dots, n, u \in \langle a, b \rangle$, stupně p definovány

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j}, \quad (3)$$

kde $N_{i,p}(u), i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce.

Poznámka 1 U vzorce (3) si můžeme všimnout, že pokud budou všechny váhy w_i jednotkové nebo stejné, dostaneme vzorec (2) díky vlastnosti $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) = 1$ pro $\forall u \in \langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka 2 Útvar, který je dán uspořádanými definičními body \mathbf{Q}_i se nazývá definiční polygon a budeme ho značit $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$. Analogicky je zaveden pojem řídicí polygon.

Definice 6 (Prostá interpolační NURBS křivka) Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$, vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^n$, uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^n$ a stupeň křivky p . Nechť jsou dále známy kladné váhy $W = (w_i)_{i=0}^n$. Potom je vektorová rovnice prosté interpolační NURBS křivky $\mathbf{C}(u)$ stupně p

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, u \in \langle u_0, u_m \rangle, \quad (4)$$

kde $R_{i,p}(u), u \in \langle u_0, u_m \rangle, i = 0, \dots, n$, jsou racionální bázové funkce. $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$, jsou řídicí body, které obdržíme řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{C}(h_i) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(h_i) \mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i, i = 0, \dots, n, \quad (5)$$

jejíž maticový tvar je

$$\begin{pmatrix} R_{0,p}(h_0) & R_{1,p}(h_0) & \cdots & R_{n,p}(h_0) \\ R_{0,p}(h_1) & R_{1,p}(h_1) & \cdots & R_{n,p}(h_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{0,p}(h_n) & R_{1,p}(h_n) & \cdots & R_{n,p}(h_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{pmatrix}.$$

1.2 Postup určení křivky

Po zadání definičních bodů \mathbf{Q}_i se pro modelování křivky postupuje takto:

Začneme s určením vektoru parametrizace vybranou metodou z Kapitoly 2. V této práci jsou uvedeny dvě metody závislé na definičních bodech (těživová, dostředivá) a jedna metoda nezávislá na definičních bodech (uniformní). Dále postupujeme výpočtem uzlového vektoru, který například může být závislý na definičních bodech (těžišťový) nebo na vektoru parametrizace (průměrový). Uzlový vektor nám určí počet segmentů křivky. Metody jsou opět uvedeny v Kapitole 2.

V dalším kroku musíme určit B-spline bázové funkce p -tého stupně, které jsou dány rekurentním vzorcem (1) a (2). Tedy je zapotřebí nejdříve spočítat B-spline bázové funkce 0. stupně, díky kterým se postupně dopravujeme k bázovým funkcím dalších stupňů. Počítáme, dokud nedostaneme funkce stupně p . V dalším kroku musíme určit váhy řídicích bodů, jestliže chceme získat racionální bázové funkce p -tého stupně pro práci s NURBS křivkami. Bez tohoto kroku by se jednalo pouze o B-spline křivky, kde se považují váhy řídicích bodů za jednotkové nebo stejné.

Pro určení vah řídicích bodů v této práci uvádíme metodu těžišťovou, jejíž definice je obsažena v Kapitole 2. Racionální bázové funkce jdou dány vzorcem (3). Nyní přichází na řadu určit řídicí body, a to ze soustavy rovnic (5). Levá matice soustavy je dána funkčními hodnotami racionálních bázových funkcí v jednotlivých parametrech h_i . Z algebraického hlediska nám vznikne třídiagonální matice. Pravý vektor soustavy je posloupnost zadaných definičních bodů. Hledaným vektorem soustavy je posloupnost řídicích bodů. Tyto body použijeme pro analytické vyjádření prosté interpolační NURBS křivky p -tého stupně podle předpisu (4).

2 Tvarovací nástroje

Vektor parametrizace H a uzlový vektor U mají hlavní vliv na výsledný tvar NURBS křivky. Tyto dva vektory lze sestavit závisle i nezávisle na sobě. Definice v této kapitole jsou ze zdroje [1] a [3].

2.1 Uzlový vektor

2.1.1 Uniformní uzlový vektor

Uniformní uzlový vektor není závislý na hodnotách vektoru parametrizace ani na definičních bodech. Jeho uzlové rozteče jsou všechny stejné délky, proto se uzlový vektor nazývá uniformní.

Definice 7 (Uniformní uzlový vektor prosté interpolační NURBS křivky) *Nechť je dán definiční polygon $(Q_i)_{i=0}^n$ a stupeň p . Potom jsou uzly uniformního uzlového vektoru $U = (u_i)_{i=0}^m$ prosté interpolační NURBS křivky*

$$u_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, p \\ \frac{i-p}{m-2p}, & i = p+1, \dots, m-p-1 \\ 1, & i = m-p, \dots, m, \end{cases} \quad (6)$$

kde $m=n+p+1$ je počet uzlových roztečí.

2.1.2 Průměrový uzlový vektor

Podle této metody spočítáme průměry hodnot parametrů vektoru parametrizace, které tvoří vnitřní uzly uzlového vektoru. Krajní uzly zůstávají nezměněny a průměrový uzlový vektor je tedy závislý na parametrech vektoru parametrizace.

Definice 8 (Průměrový uzlový vektor prosté interpolační NURBS křivky) *Nechť je dán vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky a stupeň p . Potom jsou uzly průměrového uzlového vektoru $U = (u_i)_{i=0}^m$ prosté interpolační křivky*

$$\begin{aligned} u_i &= 0, i = 0, \dots, p \\ u_i &= \frac{1}{p} \sum_{j=i-p}^{i-1} h_j, i = p+1, \dots, m-p-1 \\ u_i &= 1, i = m-p, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$

kde $m=n+p+1$ je počet uzlových roztečí.

2.1.3 Těžišťový uzlový vektor

Tato metoda je nezávislá na vektoru parametrizace, avšak pro výpočet jsou potřeba definiční body. Tyto body jsou použity pro výpočet těžišť. Proto se takto sestavený uzlový vektor nazývá těžišťový.

Definice 9 (Těžišťový uzlový vektor prosté interpolační NURBS křivky) *Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky, stupeň p a nechť \mathbf{T}_i , je těžiště dílčího definičního polygonu*

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0 &= \mathbf{Q}_0, \\ \mathbf{T}_i &= \frac{1}{p+2} \sum_{j=i-1}^{i+p} \mathbf{Q}_j, i = 1, \dots, n-p \\ \mathbf{T}_{n-p+1} &= \mathbf{Q}_n.\end{aligned}\tag{8}$$

Potom jsou uzly těžišťového uzlového vektoru $U = (u_i)_{i=0}^m$ interpolační NURBS křivky

$$\begin{aligned}u_i &= 0, i = 0, \dots, p \\ u_i &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{i-p} l_j, i = p+1, \dots, m-p-1 \\ u_i &= 1, i = m-p, \dots, m,\end{aligned}\tag{9}$$

kde l_i , $i = 1, \dots, n-p$, je vzdálenost dvou po sobě následujících těžišť a L je součet všech těchto vzdáleností. $m=n+p+1$ je počet uzlových roztečí.

2.2 Vektor parametrizace

2.2.1 Uniformní vektor parametrizace

Vektor parametrizace se nazývá uniformní, protože vzdálenosti hodnot parametru jsou stejné. Hodnoty jsou stanoveny nezávisle na geometrii definičního polygonu.

Definice 10 (Uniformní vektor parametrizace interpolační NURBS křivky) *Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky. Potom jsou hodnoty parametru uniformního vektoru parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky*

$$h_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n.\tag{10}$$

2.2.2 Tětivový vektor parametrizace

Tato metoda patří mezi nejrozšířenější a snaží se přiblížit obecnou parametrizaci křivky na přirozenou parametrizaci obloukem. Parametry jsou závislé na geometrii definičního polygonu, přesněji na délkách ramen tohoto polygonu.

Definice 11 (Tětivový vektor parametrizace interpolační NURBS křivky) *Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky. Potom jsou hodnoty parametru tětivového vektoru parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky*

$$\begin{aligned}h_0 &= 0, \\ h_i &= \frac{\sum_{j=1}^i |\mathbf{Q}_{j-1} \mathbf{Q}_j|}{\sum_{j=1}^n |\mathbf{Q}_{j-1} \mathbf{Q}_j|}, i = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{11}$$

2.2.3 Dostředivý vektor parametrizace

Tato metoda je rozšířením těživové metody, kdy dostředivý vektor parametrizace omezí překmity, které vznikají při ostrých zlomech definičního polygonu.

Definice 12 (Dostředivý vektor parametrizace interpolační NURBS křivky) *Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky. Potom jsou hodnoty parametru dostředivého vektoru parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^n$ interpolační NURBS křivky*

$$\begin{aligned} h_0 &= 0, \\ h_i &= \frac{\sum_{j=1}^i \sqrt{|\mathbf{Q}_{j-1} \mathbf{Q}_j|}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{|\mathbf{Q}_{j-1} \mathbf{Q}_j|}}, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 Váhy řídicích bodů

NURBS křivky se liší od B-spline křivek tím, že každému řídicímu bodu \mathbf{P}_i je přiřazena váha w_i . U B-spline křivek jsou všechny váhy jednotkové nebo stejné. Se zvyšováním váhy w_i se příslušný řídicí bod \mathbf{P}_i přibližuje k definičnímu bodu \mathbf{Q}_i . Tento efekt platí u interpolační NURBS křivky. Při zvyšování vah také dochází k tlumení překmitů a oscilací. V této práci uvedeme jednu metodu (těžišťovou) určení vah, která křivce poskytuje lepší průběh než náhodné zadání vah.

Definice 13 (Těžišťové váhy řídicích bodů prosté interpolační křivky) *Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$ prosté interpolační NURBS křivky a nechť*

$$\mathbf{T} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i \quad (13)$$

je těžiště definičního polygonu. Potom je těžišťová váha řídicího bodu \mathbf{P}_i

$$w_i = \sqrt{|\mathbf{Q}_i \mathbf{T}|}, i = 0, \dots, n. \quad (14)$$

3 Konstrukce prosté interpolační NURBS křivky

V této kapitole uvedeme detailní postup konstrukce interpolační NURBS křivky 3. stupně, která je zadána 9-ti definičními body $\mathbf{Q}_0 = [1; 2]$, $\mathbf{Q}_1 = [3; 2]$, $\mathbf{Q}_2 = [5; 3, 5]$, $\mathbf{Q}_3 = [4; 5]$, $\mathbf{Q}_4 = [7; 5]$, $\mathbf{Q}_5 = [9, 5; 3, 5]$, $\mathbf{Q}_6 = [11; 4]$, $\mathbf{Q}_7 = [13; 3]$, $\mathbf{Q}_8 = [12; 2]$.

Váhy definičních bodů určíme těžišťovou metodou. Uzlový vektor na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ sestrojíme jako uniformní. Vektor parametrizace na stejném intervalu $u \in \langle 0, 1 \rangle$ určíme metodou uniformní, tětívovou a dostředivou, abychom následně vlastnosti těchto metod porovnali v Kapitole 4.

3.1 Vektor parametrizace

3.1.1 Uniformní vektor parametrizace

Pomocí vztahu (10) určíme uniformní vektor parametrizace

$$H_u = (0; 0, 125; 0, 25; 0, 375; 0, 5; 0, 625; 0, 75; 0, 875; 1). \quad (15)$$

3.1.2 Tětívový vektor parametrizace

Podle vzorce (11) dostáváme tětívový vektor parametrizace

$$H_t = (0; 0, 11; 0, 26; 0, 36; 0, 53; 0, 7; 0, 79; 0, 92; 1). \quad (16)$$

3.1.3 Dostředivý vektor parametrizace

Nakonec podle (12) dostáváme dostředivý vektor parametrizace

$$H_d = (0; 0, 12; 0, 26; 0, 37; 0, 52; 0, 66; 0, 77; 0, 9; 1). \quad (17)$$

3.2 Uzlový vektor

Uniformní uzlový vektor vypočítáme z rovnic (6)

$$U = \left(0; 0; 0; 0; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; 1; 1; 1. \right). \quad (18)$$

3.3 Bázové funkce

Nejprve potřebujeme získat B-spline bázové funkce 0. stupně. K tomu použijeme vzorec (1). Funkce jsou pouze jednotkové nebo nulové a jsou zobrazeny na Obrázku 2.

$$\begin{aligned} N_{0,0}(u) &= 0, u \in \langle 0, 1 \rangle \\ N_{1,0}(u) &= 0, u \in \langle 0, 1 \rangle \\ N_{2,0}(u) &= 0, u \in \langle 0, 1 \rangle \\ N_{3,0}(u) &= \begin{cases} 1, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{6}, 1 \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

$$N_{4,0}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 1, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{5,0}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 1, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{6,0}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 1, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

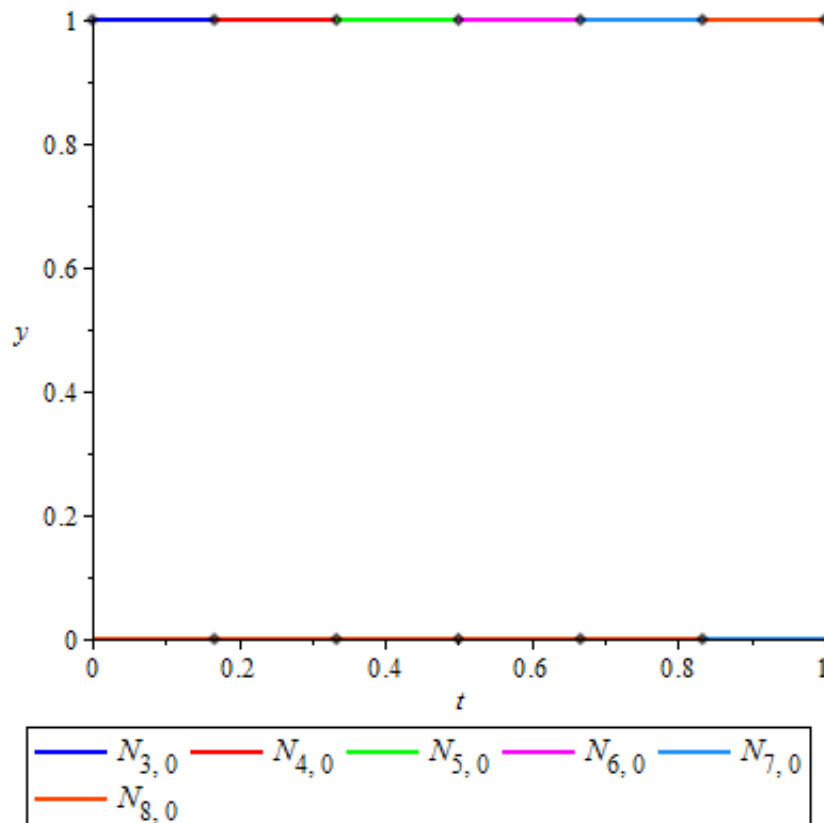
$$N_{7,0}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle \\ 1, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{8,0}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ 1, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{9,0}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$N_{10,0}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$N_{11,0}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$



Obrázek 2: Bázové funkce 0. stupně

Pokud do rekurentního vzorce (2) dosadíme $k=1$, dostaneme B-spline bázové funkce 1. stupně, které mají lineární průběh a jsou zobrazeny na Obrázku 3.

$$N_{0,1}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$N_{1,1}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$N_{2,1}(u) = \begin{cases} 1 - 6u, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{3,1}(u) = \begin{cases} 6u, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 2 - 6u, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{4,1}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 6u - 1, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 3 - 6u, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{5,1}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 6u - 2, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 4 - 6u, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{6,1}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 6u - 3, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 5 - 6u, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{7,1}(u) = \begin{cases} 6u - 4, & u \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle \\ 6 - 6u, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{8,1}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ 6u - 5, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{9,1}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

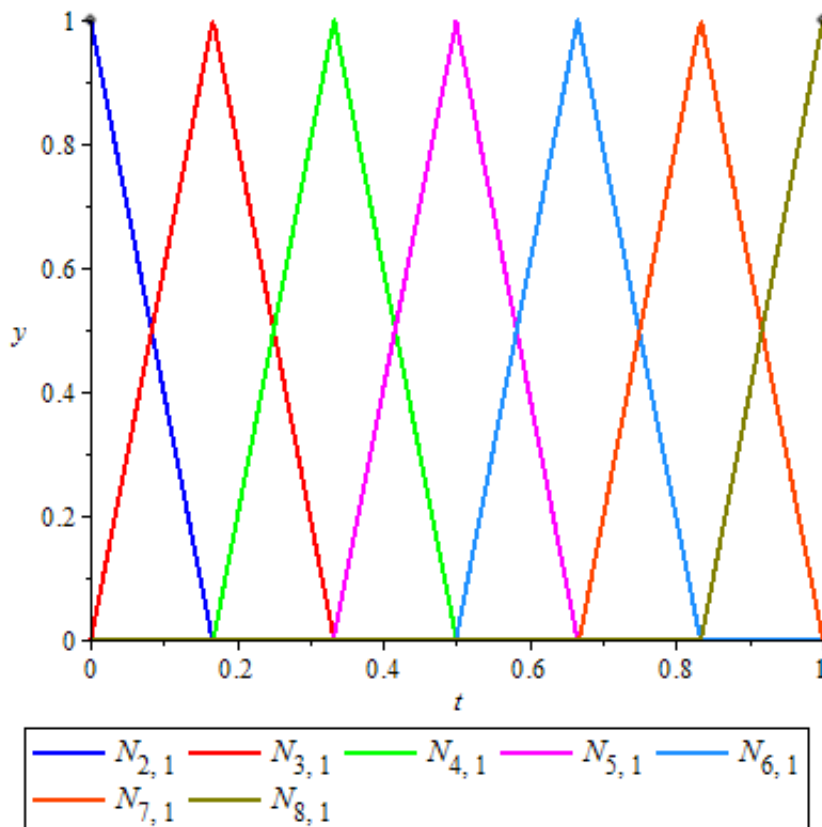
$$N_{10,1}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

Pro získání B-spline bázových funkcí 2. stupně, použijeme stejný vzorec (2), do kterého dosadíme $k=2$. Funkce jsou vyjádřeny kvadratickými polynomy na Obrázku 4.

$$N_{0,2}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$N_{1,2}(u) = \begin{cases} (6u - 1)^2, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{2,2}(u) = \begin{cases} -54u^2 + 12u, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 2(3u - 1)^2, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$



Obrázek 3: Bázové funkce 1. stupně

$$N_{3,2}(u) = \begin{cases} 18u^2, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ -36u^2 + 18u - \frac{3}{2}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{9}{2}(2u - 1)^2, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{4,2}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{1}{2}(6u - 1)^2, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ -36u^2 - 30u - \frac{11}{2}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 2(3u - 2)^2, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

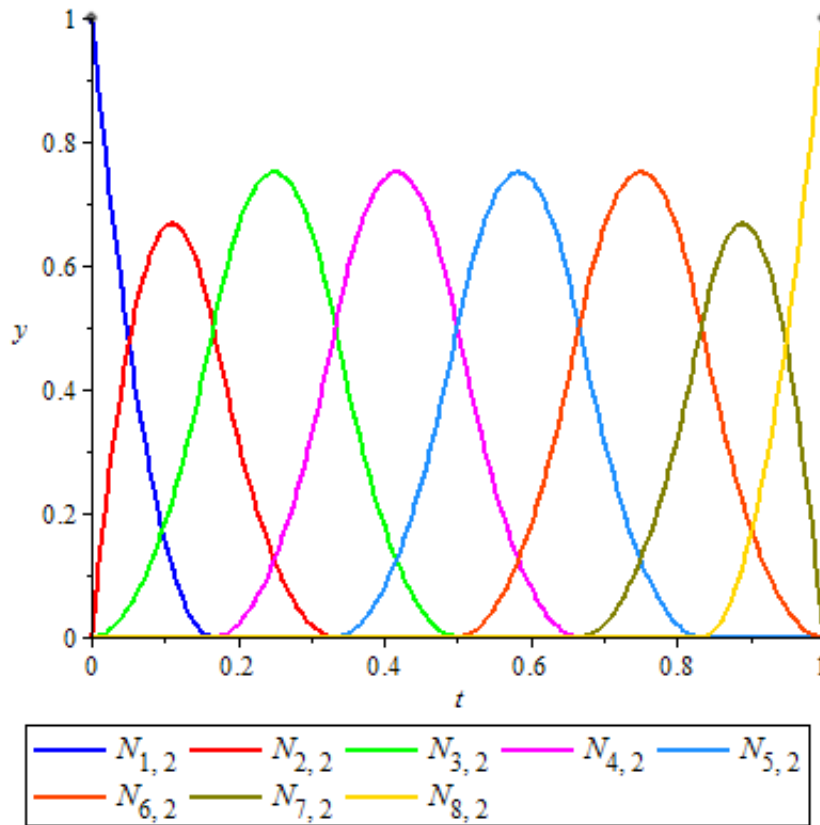
$$N_{5,2}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 2(3u - 2)^2, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ -36u^2 + 42u - \frac{23}{2}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{1}{2}(6u - 5)^2, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{6,2}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{9}{2}(2u - 1)^2, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ -36u^2 + 54u - \frac{39}{2}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 18(u - 1)^2, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{7,2}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle \\ 2(3u - 2)^2, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ -54u^2 + 96u - 42, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{8,2}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ (6u - 5)^2, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{9,2}(u) = 0, u \in \langle 0, 1 \rangle$$



Obrázek 4: Bázové funkce 2. stupně

Jako poslední spočítáme B-spline bázové funkce 3. stupně ze vzorce (2) pro $k=3$. Funkce jsou polynomy 3. stupně a jejich průběh je vyjádřen na Obrázku 5.

$$N_{0,3}(u) = \begin{cases} -(6u - 1)^3, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{1,3}(u) = \begin{cases} 378u^3 - 162u^2 + 18u, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ -2(3u - 1)^3, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{2,3}(u) = \begin{cases} -198u^3 + 54u^2, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 126u^3 - 108u^2 + 27u - \frac{3}{2}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ -\frac{9}{2}(2u - 1)^3, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{3,3}(u) = \begin{cases} 36u^3, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ -108u^3 + 72u^2 - 12u + \frac{2}{3}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 108u^3 - 144u^2 + 60u - \frac{22}{3}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ -\frac{4}{3}(3u-2)^3, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{4,3}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{1}{6}(6u-1)^3, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ -108u^3 + 126u^2 - 45u + \frac{31}{6}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 108u^3 - 198u^2 + 117u - \frac{131}{6}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ -\frac{1}{6}(6u-5)^3, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{5,3}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{4}{3}(3u-1)^3, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ -108u^3 + 180u^2 - 96u + \frac{50}{3}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 108u^3 - 252u^2 + 192u - \frac{142}{3}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ -36(u-1)^3, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{6,3}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{9}{2}(2u-1)^3, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ -126u^3 + 270u^2 - 189u + \frac{87}{2}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 198u^3 - 540u^2 + 486u - 144, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

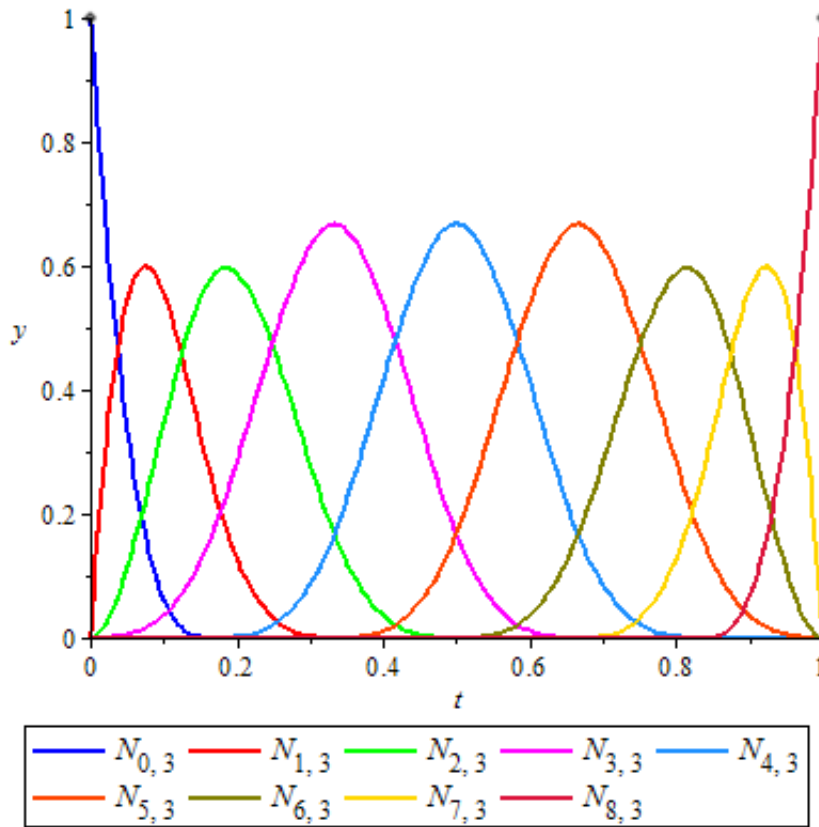
$$N_{7,3}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle \\ 2(3u-2)^3, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ -378u^3 + 972u^2 - 828u + 234, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$N_{8,3}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ (6u-5)^3, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$

3.4 Těžištové váhy definičních bodů a racionální bázové funkce

Podle vzorce (13) spočítáme těžiště z definičních bodů \mathbf{Q}_i .

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{9} \sum_{i=0}^8 \mathbf{Q}_i = \frac{1}{9} ([1; 2] + [3; 2] + [5; 3, 5] + [4; 5] + [7; 5] + [9; 5, 3, 5] + [11; 4] + [13; 3] + \\ &+ [12; 2]) \doteq [7, 28; 3, 33] \end{aligned}$$



Obrázek 5: Bázové funkce 3. stupně

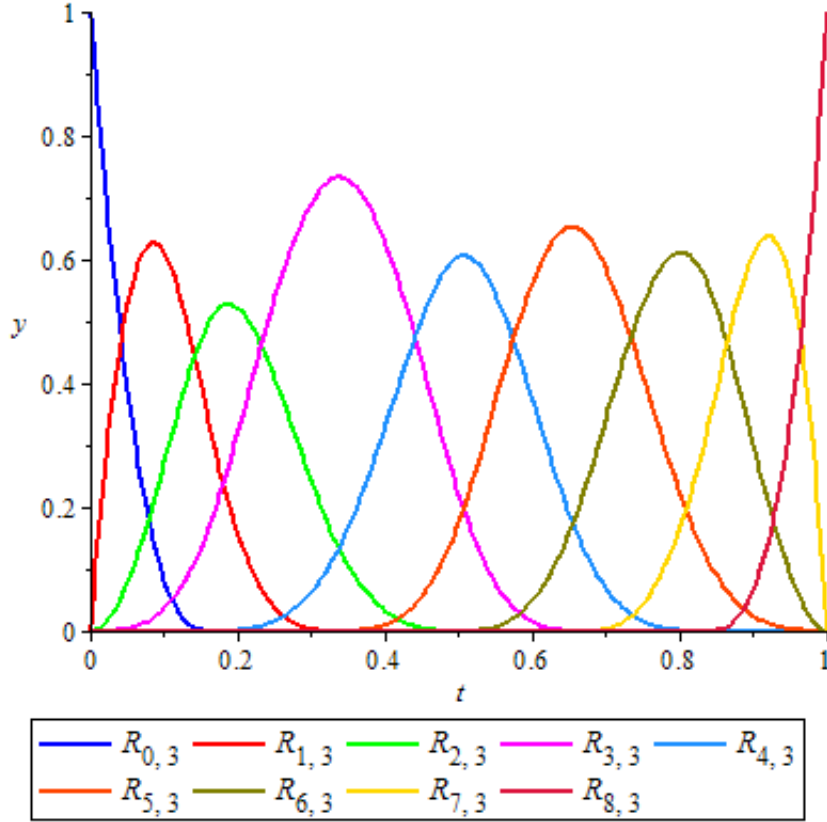
Použitím těžiště a definičních bodů vypočítáme váhy w_i řídicích bodů \mathbf{P}_i podle vzorce (14).

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_0\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 1)^2 + (3,33 - 2)^2}} \doteq 2,53 \\
 w_1 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_1\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 3)^2 + (3,33 - 2)^2}} \doteq 2,12 \\
 w_2 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_2\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 5)^2 + (3,33 - 3,5)^2}} \doteq 1,51 \\
 w_3 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_3\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 4)^2 + (3,33 - 5)^2}} \doteq 1,92 \\
 w_4 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_4\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 7)^2 + (3,33 - 5)^2}} \doteq 1,3 \\
 w_5 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_5\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 9.5)^2 + (3,33 - 3,5)^2}} \doteq 1,5 \\
 w_6 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_6\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 11)^2 + (3,33 - 4)^2}} \doteq 1,94 \\
 w_7 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_7\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 13)^2 + (3,33 - 3)^2}} \doteq 2,39 \\
 w_8 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_8\mathbf{T}|} = \sqrt{\sqrt{(7,28 - 13)^2 + (3,33 - 3)^2}} \doteq 2,21
 \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme racionální bázové funkce 3. stupně pomocí vzorce (3) pro $p=3$. Funkce jsou vyjádřeny jako racionální a jejich průběh je zobrazen na Obrázku 6.

$$\begin{aligned}
R_{0,3}(u) &= \begin{cases} \frac{-2,53(6u-1)^3}{22,74u^3+12,29u^2-7,5u+2,53}, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{6}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{1,3}(u) &= \begin{cases} \frac{2,12(378u^3-162u^2+18u)}{22,74u^3+12,29u^2-7,5u+2,53}, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{-4,24(3u-1)^3}{-84,19u^3+65,76u^2-16,4u+3,03}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{2,3}(u) &= \begin{cases} \frac{1,51(-198u^3+54u^2)}{22,74u^3+12,29u^2-7,5u+2,53}, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{1,51(126u^3-108u^2+27u-\frac{3}{2})}{-84,19u^3+65,76u^2-16,4u+3,03}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{-\frac{13,59}{2}(2u-1)^3}{66,05u^3-84,48u^2+33,67u-2,54}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{3,3}(u) &= \begin{cases} \frac{69,12u^3}{22,74u^3+12,29u^2-7,5u+2,53}, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{1,92(-108u^3+72u^2-12u+\frac{2}{3})}{-84,19u^3+65,76u^2-16,4u+3,03}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{1,92(108u^3-144u^2+60u-\frac{22}{3})}{66,05u^3-84,48u^2+33,67u-2,54}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{-\frac{7,68}{3}(3u-2)^3}{-19,87u^3+44,39u^2-30,77u+8,2}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{4,3}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{\frac{1,3}{6}(6u-1)^3}{-84,19u^3+65,76u^2-16,4u+3,03}, & u \in \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{1,3(-108u^3+126u^2-45u+\frac{31}{6})}{66,05u^3-84,48u^2+33,67u-2,54}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{1,3(108u^3-198u^2+117u-\frac{131}{6})}{-19,87u^3+44,39u^2-30,77u+8,2}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{-\frac{1,3}{6}(6u-5)^3}{-1,3u^3+7,27u^2-6,02u+2,7}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ 0, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{5,3}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{2(3u-1)^3}{66,05u^3-84,48u^2+33,67u-2,54}, & u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{1,5(-108u^3+180u^2-96u+\frac{50}{3})}{-19,87u^3+44,39u^2-30,77u+8,2}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{1,5(108u^3-252u^2+192u-\frac{142}{3})}{-1,3u^3+7,27u^2-6,02u+2,7}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ \frac{-54(u-1)^3}{-95,23u^3+242,07u^2-201,69u+57,06}, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{6,3}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\frac{17,46}{2}(2u-1)^3}{-19,87u^3+44,39u^2-30,77u+8,2}, & u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{1,94(-126u^3+270u^2-189u+\frac{87}{2})}{-1,3u^3+7,27u^2-6,02u+2,7}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ \frac{1,94(198u^3-540u^2+486u-144)}{-95,23u^3+242,07u^2-201,69u+57,06}, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases} \\
R_{7,3}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{4,78(3u-2)^3}{-1,3u^3+7,27u^2-6,02u+2,7}, & u \in \langle \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \rangle \\ \frac{2,39(-378u^3+972u^2-828u+234)}{-95,23u^3+242,07u^2-201,69u+57,06}, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}
\end{aligned}$$

$$R_{8,3}(u) = \begin{cases} 0, & u \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ \frac{2,21(6u-5)^3}{-95,23u^3+242,07u^2-201,69u+57,06}, & u \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$



Obrázek 6: Racionální bázové funkce 3. stupně

3.5 Výpočet řídicích bodů

Pro výpočet řídicích bodů \mathbf{P}_i sestavíme soustavu rovnic (5) jejíž maticový tvar je

$$\begin{pmatrix} R_{0,3}(h_0) & R_{1,3}(h_0) & \cdots & R_{7,3}(h_0) & R_{8,3}(h_0) \\ R_{0,3}(h_1) & R_{1,3}(h_1) & \cdots & R_{7,3}(h_1) & R_{8,3}(h_1) \\ R_{0,3}(h_2) & R_{1,3}(h_2) & \cdots & R_{7,3}(h_2) & R_{8,3}(h_2) \\ R_{0,3}(h_3) & R_{1,3}(h_3) & \cdots & R_{7,3}(h_3) & R_{8,3}(h_3) \\ R_{0,3}(h_4) & R_{1,3}(h_4) & \cdots & R_{7,3}(h_4) & R_{8,3}(h_4) \\ R_{0,3}(h_5) & R_{1,3}(h_5) & \cdots & R_{7,3}(h_5) & R_{8,3}(h_5) \\ R_{0,3}(h_6) & R_{1,3}(h_6) & \cdots & R_{7,3}(h_6) & R_{8,3}(h_6) \\ R_{0,3}(h_7) & R_{1,3}(h_7) & \cdots & R_{7,3}(h_7) & R_{8,3}(h_7) \\ R_{0,3}(h_8) & R_{1,3}(h_8) & \cdots & R_{7,3}(h_8) & R_{8,3}(h_8) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_6 \\ \mathbf{P}_7 \\ \mathbf{P}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \\ \mathbf{Q}_6 \\ \mathbf{Q}_7 \\ \mathbf{Q}_8 \end{pmatrix}.$$

Levá matice soustavy obsahuje v řádcích racionální bázové funkce 3. stupně jednotlivých segmentů křivky $R_{0,3}$ až po $R_{8,3}$. V i -tém řádku dosadíme do těchto funkcí hodnotu parametru h_i . Pravá matice je určena z definičních bodů \mathbf{Q}_0 až \mathbf{Q}_8 . Neznámý vektor soustavy představuje hledané řídicí body \mathbf{P}_0 až \mathbf{P}_8 .

Jestliže do racionálních funkcí dosadíme hodnoty parametru uniformního vektoru parametrizace (15), dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,021 & 0,528 & 0,377 & 0,073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,038 & 0,412 & 0,534 & 0,157 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,063 & 0,693 & 0,242 & 0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,223 & 0,604 & 0,173 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,003 & 0,279 & 0,624 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,016 & 0,414 & 0,527 & 0,0433 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,495 & 0,419 & 0,516 & 0,016 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_6 \\ \mathbf{P}_7 \\ \mathbf{P}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1; 2] \\ [3; 2] \\ [5; 3, 5] \\ [4; 5] \\ [7; 5] \\ [9, 5; 3, 5] \\ [11; 4] \\ [13; 3] \\ [12; 2] \end{pmatrix}.$$

Dosazením hodnot těživého vektoru parametrizace (16) dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,041 & 0,57 & 0,332 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,028 & 0,386 & 0,565 & 0,021 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,085 & 0,716 & 0,198 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,117 & 0,583 & 0,299 & 0,009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,069 & 0,586 & 0,342 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0,258 & 0,606 & 0,134 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,013 & 0,216 & 0,637 & 0,134 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_6 \\ \mathbf{P}_7 \\ \mathbf{P}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1; 2] \\ [3; 2] \\ [5; 3, 5] \\ [4; 5] \\ [7; 5] \\ [9, 5; 3, 5] \\ [11; 4] \\ [13; 3] \\ [12; 2] \end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic s dosazeným dostředivým vektorem parametrizace (17) je dána

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,029 & 0,547 & 0,357 & 0,066 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,031 & 0,394 & 0,556 & 0,019 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,07 & 0,702 & 0,226 & 0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,16 & 0,602 & 0,238 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,65 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,006 & 0,332 & 0,58 & 0,082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,025 & 0,31 & 0,604 & 0,605 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_6 \\ \mathbf{P}_7 \\ \mathbf{P}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1; 2] \\ [3; 2] \\ [5; 3, 5] \\ [4; 5] \\ [7; 5] \\ [9, 5; 3, 5] \\ [11; 4] \\ [13; 3] \\ [12; 2] \end{pmatrix}.$$

Po výpočtu těchto soustav získáme tři různé posloupnosti řídicích bodů \mathbf{P}_i . Tabulka 1 ukazuje vypočtené řídicí body všemi třemi metodami, které jsme použili. Můžeme si všimnout, že řídicí body \mathbf{P}_0 a \mathbf{P}_8 jsou totožné s definičními body \mathbf{Q}_0 a \mathbf{Q}_8 . Tento výsledek jsme získali, protože se zabýváme ukotvenými křivkami.

	uniformní	tětivový	dostředivý
\mathbf{P}_0	[1; 2]	[1; 2]	[1; 2]
\mathbf{P}_1	[-1,22; 1,85]	[-0,19; 2,2]	[-0,73; 2,09]
\mathbf{P}_2	[9,19; 1,57]	[8,79; 1,14]	[8,95; 1,3]
\mathbf{P}_3	[2,13; 5,04]	[2,6; 5,07]	[2,44; 5,05]
\mathbf{P}_4	[7,96; 5,81]	[7,01; 6,39]	[7,27; 6,01]
\mathbf{P}_5	[9,9; 2,13]	[8,68; 2,25]	[9,38; 2,4]
\mathbf{P}_6	[11,67; 5,66]	[11,37; 5,06]	[11,54; 5,17]
\mathbf{P}_7	[14,41; 0,95]	[13,85; 2,53]	[14; 2.01]
\mathbf{P}_8	[12; 2]	[12; 2]	[12; 2]

Tabulka 1: Vypočtené řídicí body NURBS křivek

3.6 Analytické vyjádření NURBS křivky

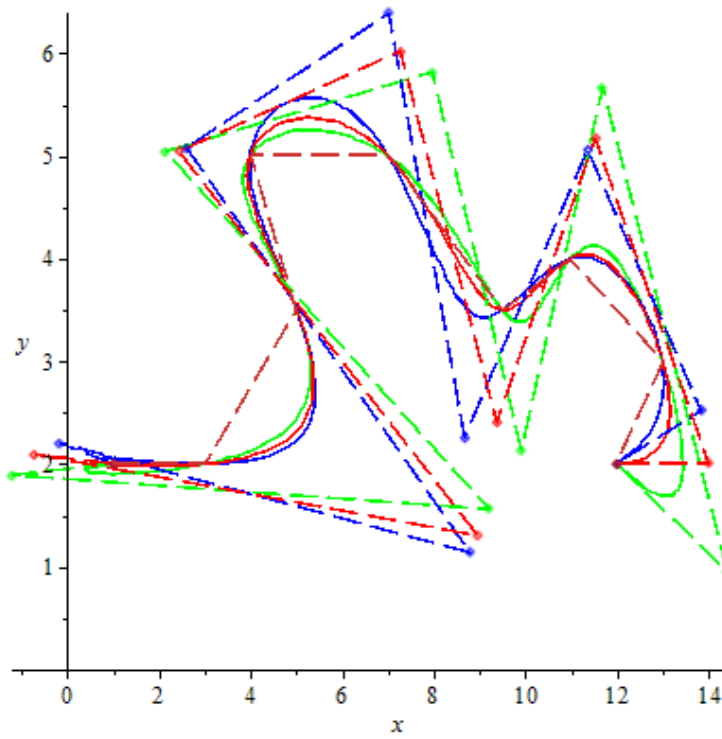
Nyní nám zbývá podle vzorce (4) získat parametrické vyjádření prosté interpolační NURBS křivky 3. stupně s uniformním uzlovým vektorem. Po dosazení do (19) získáme vektorovou funkci prosté interpolační NURBS křivky s uniformním vektorem parametrizace.

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^8 R_{i,3}(u)\mathbf{P}_i = R_{0,3}(u)\mathbf{P}_0 + R_{1,3}(u)\mathbf{P}_1 + R_{2,3}(u)\mathbf{P}_2 + R_{3,3}(u)\mathbf{P}_3 + R_{4,3}(u)\mathbf{P}_4 + R_{5,3}(u)\mathbf{P}_5 + R_{6,3}(u)\mathbf{P}_6 + R_{7,3}(u)\mathbf{P}_7 + R_{8,3}(u)\mathbf{P}_8. \quad (19)$$

Funkce (20) a (21) určují parametrické vyjádření prosté interpolační NURBS křivky. Na Obrázku 7 vidíme grafický výsledek.

$$x(u) \doteq \begin{cases} \frac{-4126,69u^3+1441,84u^2-92,04u+2,53}{22,75u^3+12,29u^2-7,5u+2,53}, & u \in \langle 0; \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{1822,23u^3-1532,62u^2+403,7u-25}{-84,19u^3+65,76u^2-16,41u+3,03}, & u \in \langle \frac{1}{6}; \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{-645,42u^3+935,03u^2-418,84u+66,39}{66,05u^3-84,48u^2+33,67u-2,54}, & u \in \langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{191,28u^3-320,02u^2+208,68u-38,2}{-19,87u^3+44,39u^2-30,77u+8,2}, & u \in \langle \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{227,58u^3-392,62u^2+257,08u-48,96}{-1,31u^3+7,27u^2-6,02u+2,7}, & u \in \langle \frac{2}{3}; \frac{5}{6} \rangle \\ \frac{-3336,97u^3+8518,75u^2-7169,06u+2013,86}{-95,23u^3+242,07u^2-201,69u+57,06}, & u \in \langle \frac{5}{6}; 1 \rangle \end{cases} \quad (20)$$

$$y(u) \doteq \begin{cases} \frac{292,62u^3+28,7u^2-19,37u+5,07}{22,75u^3+12,29u^2-7,5u+2,53}, & u \in \langle 0; \frac{1}{6} \rangle \\ \frac{-688,42u^3+519,22u^2-101,13u+9,6}{-84,19u^3+65,76u^2-16,41u+3,03}, & u \in \langle \frac{1}{6}; \frac{1}{3} \rangle \\ \frac{257,11u^3-426,13u^2+214,05u-25,41}{66,05u^3-84,48u^2+33,67u-2,54}, & u \in \langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{520,27u^3-821,05u^2+411,42u-58,31}{-19,87u^3+44,39u^2-30,77u+8,2}, & u \in \langle \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \rangle \\ \frac{-1192,02u^3+2603,52u^2-1871,62u+449,04}{-1,31u^3+7,27u^2-6,02u+2,7}, & u \in \langle \frac{2}{3}; \frac{5}{6} \rangle \\ \frac{2159,83u^3-5776,1u^2+5111,39u-1490,69}{-95,23u^3+242,07u^2-201,69u+57,06}, & u \in \langle \frac{5}{6}; 1 \rangle \end{cases} \quad (21)$$



Obrázek 7: Prostá interpolační NURBS křivka 3. stupně; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace uniformní (zelená), tětiový (modrá), dostředivý (červená)

4 Porovnání metod interpolace

Pro lepší přehlednost, jsou v Tabulce 2 všechny vytvořené metody sepsané a očíslované.

ozn.	uzlový vektor	vektor parametrizace
1	uniformní	uniformní
2	uniformní	tětivový
3	uniformní	dostředivý
4	průměrový	uniformní
5	průměrový	tětivový
6	průměrový	dostředivý
7	těžišťový	uniformní
8	těžišťový	tětivový
9	těžišťový	dostředivý

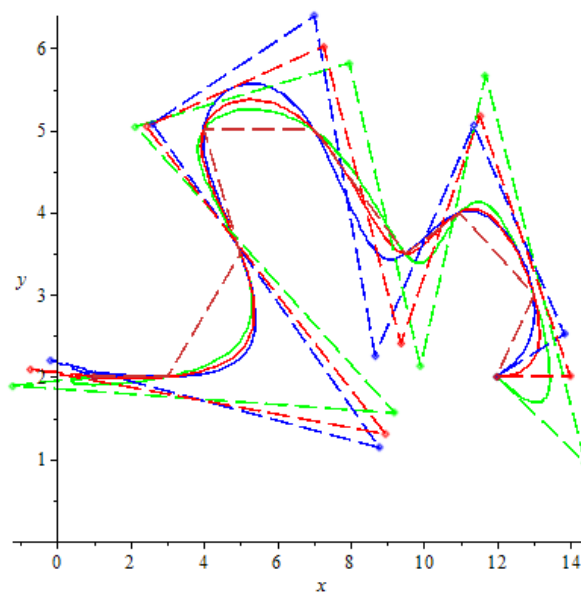
Tabulka 2: Tabulka vytvořených NURBS křivek

Metody, kterými interpolujeme NURBS křivky, lze rozdělit do tří skupin. Tyto skupiny jsou: velmi přesné metody ($chyba \leq 6\%$), středně přesné ($6\% < chyba \leq 8\%$) a nepřesné metody ($8\% < chyba$). Do těchto skupin zařadíme metody z Tabulky 2.

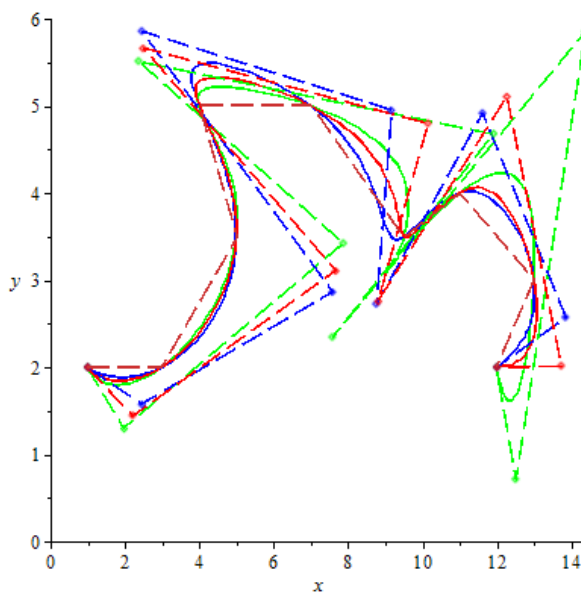
Mezi velmi přesné metody se řadí metoda označená číslem 4 s průměrovým uzlovým vektorem a uniformním vektorem parametrizace, která je vidět na Obrázku 10. Tato metoda je nejspolehlivější. Avšak metoda s číslem 6 s průměrovým uzlovým vektorem a dostředivým vektorem parametrizace je také velmi přesná a má dobré výsledky. Metodu číslo 6 znázorňuje opět Obrázek 10. Další velmi přesnou metodou je číslo 9 s těžišťovým uzlovým vektorem a dostředivým vektorem parametrizace, kterou vidíme na Obrázku 9.

Středně přesné metody mají tu nevýhodu, že jsou závislé na tvaru definičního polygonu. Tuto vlastnost má metoda označená číslem 1 s uniformním uzlovým vektorem a uniformním vektorem parametrizace. Použití této metody obsahuje Kapitola 3 a je zobrazena na Obrázku 8.

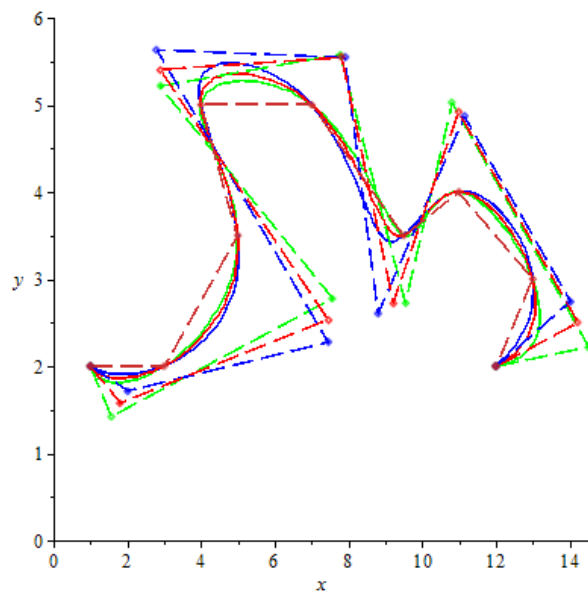
Nepřesné metody jsou nespolehlivé a nevhodné pro matematickou konstrukci. Do této skupiny patří ostatní metody z Tabulky 2. Metoda označená číslem 5 s průměrovým uzlovým vektorem a tětivovým vektorem parametrizace je znázorněna na Obrázku 10. Metody s uniformním uzlovým vektorem s vektorem parametrizace tětivovým s číslem 2 a dostředivým s číslem 3 ukazuje Obrázek 8. A nakonec Obrázek 9 zobrazuje metody s těžišťovým uzlovým vektorem a s vektory parametrizace uniformním číslo 7 a tětivovým číslo 8.



Obrázek 8: Prostá interpolační NURBS křivka 3. stupně; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace uniformní (zelená), těživový (modrá), dostředivý (červená)



Obrázek 9: Prostá interpolační NURBS křivka 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, vektor parametrizace uniformní (zelená), těživový (modrá), dostředivý (červená)



Obrázek 10: Prostá interpolační NURBS křivka 3. stupně; uzlový vektor průměrový, vektor parametrizace uniformní (zelená), tětiový (modrá), dostředivý (červená)

Závěr

V dnešních době většina geometrických a konstrukčních počítačových aplikací pracuje s NURBS křivkami, protože mají výhodnější vlastnosti oproti jiným. Programy, které s nimi pracují jsou například CAD, CAM, CAE, Rhinoceros...

NURBS křivky dokáží vymodelovat velké množství tvarů. K jejich největším výhodám patří schopnost přesně interpolovat kuželosečky. Tato vlastnost je způsobena racionalitou. Křivkami, které jsou popsány polynomem, nelze například vytvarovat přesně kružnici nebo elipsu. Algoritmy pro vykreslování NURBS křivek jsou také rychlé a numericky stabilní. Využívá se i toho, že NURBS křivky jsou invariantní vůči projektivním transformacím. To znamená, že pokud aplikujeme transformaci na křivku zadanou řídicími body, dostaneme stejný výsledek, jako kdybychom konstruovali křivku na stejně transformovaných řídicích bodech. B-spline splňují pouze afinní invarianci.

Obyčejný interpolační polynom prochází definičními body, ale vznikají mezi nimi nepěkné kmitající tvary, které se při vyšších stupních zhoršují. Tento problém dobře řeší spline, který se skládá z více spojitě napojených křivek nízkých stupňů. B-spline jsou zadány polynomy, nejsou racionální a označují se za speciální případ NURBS křivek.

Nejvhodnější a nejméně vhodné metody pro tvarování interpolačních NURBS křivek jsme uvedli v poslední kapitole této práce. Všechny tyto metody jsou naprogramovány v programu Maple. Soubory jsou součástí přílohy.

Použitá literatura

- [1] LINKEOVÁ, Ivana. NURBS křivky: NeUniformní Racionální B-Spline křivky. Vyd. 1. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007, 208 s. ISBN 978-80-01-03893-2.
- [2] Piegl, Les. The NURBS book /Berlin :Springer-Verlag,1997. 2nd ed. xiv, 300 s : il. ISBN 3540615458
- [3] LINKEOVÁ, Ivana. 2006. Interpolační NURBS křivky. 26. konference o geometrii a počítačové grafice. : 6.
Dostupné také z: http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova/vyuka/pubic/novemesto2006_li.pdf
- [4] Kundrátová, K. - Linkeová, I.: Interpolační NURBS křivky. Maple worksheet, portál Puma, 2015. <http://puma.feld.cvut.cz/cs/maple/17/Interpol%20NURBS%20krivka2.html>

Seznam použitých symbolů

$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval z množiny reálných čísel
(a, b)	otevřený interval z množiny reálných čísel
$[a; b]$	x -ová a y -ová souřadnice bodu
$ \mathbf{AB} $	vzdálenost dvou bodů
$\mathbf{C}(u)$	vektorová funkce
h_i	i -tá hodnota parametru vektoru parametrizace
$H, (h_0, h_1, \dots, h_n), (h_i)_{i=0}^n$	vektor parametrizace
H_u	uniformní vektor parametrizace
H_t	tětivový vektor parametrizace
H_d	dostředivý vektor parametrizace
l_i	i -tá vzdálenost dvou po sobě jdoucích těžišť
L	součet všech vzdáleností dvou po sobě jdoucích těžišť
m	počet uzlových roztečí
n	počet ramen řídicího nebo definičního polygonu
$N_{i,p}(u)$	i -tá B-spline bázevá funkce p -tého stupně
p	stupeň bázevých funkcí
\mathbf{P}_i	i -tý řídicí bod
$(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$	řídicí polygon
$(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^n$	definiční polygon
\mathbf{Q}_i	i -tý definiční bod
\mathbb{R}	množina reálných čísel
$R_{i,p}(u)$	i -tá racionální bázevá funkce p -tého stupně
u	parametr
\mathbf{T}	těžiště definičního polygonu
\mathbf{T}_i	těžiště i -tého dílčího definičního polygonu
$U, (u_0, u_1, \dots, u_m), (u_i)_{i=0}^m$	uzlový vektor
u_i	i -tý uzel
$\langle u_i, u_{i+1} \rangle$	i -tá uzlová rozteč
w_i	váha i -tého řídicího bodu
$W, (w_0, w_1, \dots, w_n), (w_i)_{i=0}^n$	váhy řídicích bodů
$x(u), y(u)$	souřadnicové funkce vektorové funkce jedné proměnné

Seznam příloh

K práci je přiložené CD obsahující:

- elektronickou verzi bakalářské práce ve formátu PDF
- Maple: uniknot.mw
- Maple: average.mw
- Maple: centerknot.mw