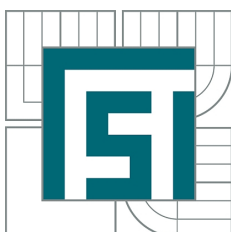


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

DYNAMIKA ROBOTICKÝCH HADŮ DYNAMICS OF SNAKE ROBOTS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAROMÍR KUBIENA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Mgr. ALEŠ NÁVRAT, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jaromír Kubiena

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Dynamika robotických hadů

v anglickém jazyce:

Dynamics of Snake Robots

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Popis dynamiky jednoduchých robotických systémů, zejména dvoučlankového a tříčlankového robotického hada a "trident" hada. Sestavení a řešení pohybových rovnic.

Cíle bakalářské práce:

Student by měl porozumět Lagrangeově formulaci klasické mechaniky a její aplikaci v robotice. Následně toto využít k sestavení pohybových rovnic jednoduchých robotických hadů.

Seznam odborné literatury:

1.

Richard M. Murray, S. Shankar Sastry, and Li Zexiang. 1994. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation (1st ed.). CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA.

2.

J. M. Selig. 2004. Geometric Fundamentals of Robotics (Monographs in Computer Science). SpringerVerlag.

3.

Zuzanna Pietrowska and Krzysztof Tchoń. 2014. Dynamics and Motion Planning of Trident Snake Robot. J. Intell. Robotics Syst. 75, 1 (July 2014), 17-28. DOI=10.1007/s10846-013-9858-y <http://dx.doi.org/10.1007/s10846-013-9858-y>

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Aleš Návrat, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 25.11.2014

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt

V této bakalářské práci se zabýváme matematickým popisem kinematiky a dynamiky neholonomních mechanických systémů. Následně se zaměříme na konkrétní mechanický systém, kterým je Čtyřnohý čtvercový robot s aktivními vazbami a pasivními kolečky, který se pohybuje na vodorovné rovině. V kinematice tento systém nejprve popíšeme pomocí pojmů distribuce a Lieova závorka. Ukážeme, že vazby jsou neholonomní a že robot je říditelný. Pak najdeme příslušnou kontrolní matici, kterou poté využijeme k vyjádření pohybových rovnic. K popisu dynamiky použijeme Lagrangeův formalismus.

Summary

In this thesis, we deal with the mathematical description of the kinematics and the dynamics of mechanical systems. Then we focus on the particular mechanical system which is the Square robot with four legs with active joints and passive wheels, which moves on horizontal plane. The kinematics of the mechanical system is described by the control matrix, then we use it to express the equations of motion. We compute the dynamics the robot by using Lagrange equations. We verify that the mechanical system is nonholonomic constrained and we verify controllability by using Lie bracket and distribution. We find the singular postures of the robot.

Klíčová slova

kinematika, říditelnost, dynamika, Lieova závorka, distribuce, neholonomní vazby, Lagrangeovy rovnice

Keywords

kinematics, controllability, dynamics, Lie bracket, distribution, Pfaffian constraints, Lagrange equations

KUBIENA, J. *Dynamika robotických hadů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 38 s. Vedoucí Mgr. Aleš Návrat, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Dynamika robotických hadů, vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jaromír Kubiena

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Mgr. Aleši Návratovi, Ph.D., za podporu a trpělivost při vedení bakalářské práce a za čas, který mi věnoval.

Jaromír Kubiena

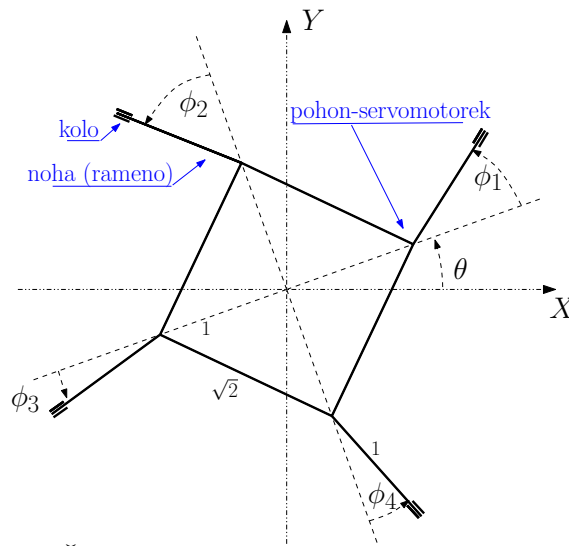
Obsah

Úvod	12
1 Úvod do diferenciální geometrie	15
1.1 Variety a jejich tečný a kotečný bandl	15
1.2 Vektorové pole, integrální křivky a tok generovaný vektorovým polem . . .	16
1.3 Lieova závorka, Lieova algebra	16
1.4 Distribuce	18
2 Řiditelnost mechanického systému	20
3 Dynamika mechanického systému	22
3.1 Newtonova formulace	22
3.2 Lagrangeovy rovnice	23
3.3 Lagrangeovy rovnice s vazbami	24
4 Čtyřnohý čtvercový robot	25
4.1 Kinematika	26
4.2 Řiditelnost a singulární body	27
4.3 Dynamika	33
5 Závěr	36
6 Seznam příloh	38

Úvod

Kolové mechanismy s aktivními pohony kol jsou dnes hojně využívané v dopravních prostředcích. Mají spoustu výhod, například jsou rychlé a dobře říditelné na relativně rovných plochách. Avšak nejsou vhodné do nerovného terénu s různými překážkami. V takovém prostředí se dobře pohybuje had, který ke svému pohybu nevyužívá aktivní kolečka, ale vykonává pohyb pomocí článků (těla) tím, že využívá třecích sil, které vznikají mezi jeho články a povrchem, na kterém se pohybuje. Model hada může být navržen tak, že na každý článek je umístěné pasivní kolečko. Tyto kolečka se nesmýkají, ale pouze se pasivně odvalují. Tedy třecí síly budou vždy působit ve směru osy kolečka. Těmto třecím silám se říká vazbové síly. Tyto vazbové síly omezují stupně volnosti hada, to znamená, že zobecněné souřadnice popisující tvar a polohu hada se nemůžou měnit libovolně. Had se tedy pohybuje po křivce v konfigurační varietě \mathcal{M} , která je v souladu s vazbami. V kinematice tato křivka popsána diferenciálním systémem. Ten ale nepopisuje jakou sílu musíme překonat, nebo jak rychle lze tyto zobecněné souřadnice měnit, když mechanický systém bude mít hmotné částice. Je tedy potřeba započítat jejich setrvačné vlastnosti, tj. sestavit pohybové rovnice mechanického systému. K získání těchto rovnic použijeme Lagrangeovy rovnice, které jsou vhodné zvláště tehdy, máme-li systém popsán zobecněnými souřadnicemi.

Dynamiku neholonomních systémů, mezi které patří robotičtí hadi, odvozenou v první části práce demonstrujeme na příkladu. Robotem, kterým se budeme v této práci zabývat je tzv. Čtyřnohý čtvercový robot, který se pohybuje na stejném principu jako had, ovšem zatím uvažujeme tento pohyb na vodorovné rovině xy . Čtyřnohý čtvercový robot je modifikací tzv. Trident snake robota, viz obrázek 2 [6]. Čtyřnohý čtvercový robot, viz obrázek 1, představuje čtyři spojené hady s jedním článkem. Tyto články (nohy) robota vytváří pohyb robota tak, že se mění u aktivních vazeb jednotlivé úhly ϕ_i a kolečka, které jsou pasivně uloženy na každé noze zvláště, se nesmýkají. Robot je tedy popsán polohovými souřadnicemi (x, y) , úhlem jeho natočení těla θ a úhly natočení jeho noh (ramen) ϕ_i . Máme tedy sedm zobecněných souřadnic $q = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ konfigurační variety



Obrázek 1: Čtyřnohý čtvercový robot: geometrické schéma

\mathcal{M} dimenze sedm. Časový vývoj stavu robota je tedy křivka $q(t)$ variety \mathcal{M} , která je na-

víc omezená čtyřmi tzv. Pfaffovými formami. Jedná se o rychlostní vazby, které omezují stupně volnosti robota a definují tak na \mathcal{M} distribuci dimenze tři. V dynamice tyto omezení představují vazbové síly, které působí na robota a musí se s nimi počítat při výpočtu pohybových rovnic, kde jsou zahrnuté jak externí síly tak i tyto.



Obrázek 2: Trident snake robot: fyzický model

V článku [4] se zjistilo, že Trident snake robot je říditelný, až na určité tzv. singulární polohy, což má určitou nevýhodu z hlediska spolehlivosti. Zde ukážeme, že Čtyřnohý čtvercový robot, který má oproti svému předchůdci jednu nohu navíc, je říditelný všude a je proto důležitou úpravou Trident snake robota z hlediska říditelnosti.

1. Úvod do diferenciální geometrie

V této kapitole uvedeme důležité pojmy z diferenciální geometrie, nezbytné k popisu kinematiky a říditelnosti robota. V této kapitole bylo čerpáno z [1], [2], [3].

1.1. Variety a jejich tečný a kotečný bandl

Stavový prostor mechanických systémů, které v této práci budeme uvažovat, je tzv. *hladká varieta*, kterou budeme značit \mathcal{M} . Jde o jeden ze základních pojmů diferenciální geometrie, viz např. [3]. Jde o prostor, který lokálně vypadá jako Eukleidovský prostor \mathbb{R}^n v tom to smyslu, že existuje tzv. atlas map, značeno (U_i, ϕ_i) tak, že otevřené množiny U_i pokrývají \mathcal{M} a ϕ_i jsou spojitá bijektivní zobrazení $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že ϕ_i^{-1} jsou také spojitá. Navíc tzv. přechodové funkce $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou hladké, tj. existují derivace libovolného řádu. Naše výpočty budou lokální v jediné mapě (souřadnicového systému), a proto si pro naše potřeby stačí představovat pro jednoduchost, že \mathcal{M} je otevřená množina v \mathbb{R}^n .

Pro hladkou varietu \mathcal{M} dimenze n a $P \in \mathcal{M}$ značíme $C^\infty(P)$ množinu hladkých reálných funkcí na \mathcal{M} , jejichž definiční obor je otevřené okolí bodu P . Zobrazení $X_P : C^\infty(P) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá derivace, pokud pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $f, h \in C^\infty(P)$ platí následující podmínky:

1. $X_P(\alpha f + \beta h) = \alpha(X_P f) + \beta(X_P h)$ (Linearita)
2. $X_P(fh) = (X_P f)h(P) + f(P)(X_P h)$ (Leibnizovo pravidlo)

Tečný prostor k hladké varietě \mathcal{M} v bodě $P \in \mathcal{M}$, značíme $T_P \mathcal{M}$, je vektorový prostor všech derivací $X_P : C^\infty(P) \rightarrow \mathbb{R}$. Prvky tečného prostoru jsou tečné vektory. Nechť \mathcal{M} je varieta dimenze n . Uvažujme souřadnicovou mapu (U, ϕ) na varietě \mathcal{M} s lokálními souřadnicemi (x_1, \dots, x_n) . Pak množina derivací $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ tvoří bázi tečného prostoru $T_P \mathcal{M}$, proto můžeme psát

$$X_P = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Tečný bandl variety \mathcal{M} , značený $T\mathcal{M}$, je opět varieta, dimenze $2n$, která je definovaná disjunktním sjednocením

$$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{P \in \mathcal{M}} T_P \mathcal{M}.$$

Prvek tečného bandlu $T\mathcal{M}$ budeme psát jako dvojici (P, X_P) nebo pro jednoduchost pouze X_P , kde $P \in \mathcal{M}$ a $X_P \in T_P \mathcal{M}$. Dále existuje přirozená projekce $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, definována $\pi(X_P) = P$.

Ještě si uvedeme jeden pojem a to *kotečný prostor*, značeno $T_P^* \mathcal{M}$. Jedná se o prostor, který je duální k tečnému prostoru, tj. vektorový prostor zobrazení $T_P \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Jeho prvky se nazývají *1-formy*. *Kotečný bandl* je pak definován

$$T^* \mathcal{M} = \bigsqcup_{P \in \mathcal{M}} T_P^* \mathcal{M}.$$

1.2. Vektorové pole, integrální křivky a tok generovaný vektorovým polem

Hladké vektorové pole X na varietě \mathcal{M} je definované jako hladké zobrazení $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ takové, že $\pi \circ X = id$, kde $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ je kanonická projekce a $id : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ je identické zobrazení na \mathcal{M} . Vzhledem k souřadnicové mapě (ϕ, U) , vektorové pole může být zapsáno jako

$$X(x) = X_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (1.1)$$

kde každé X_i je hladká funkce definovaná na otevřeném okolí $x = \phi(P)$. Vektorové pole (1.1) může být zapisováno do sloupcového vektoru

$$X(x) = \begin{pmatrix} X_1(x) \\ \vdots \\ X_n(x) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Nechť c je křivka na varietě definovaná na nějakém intervalu (a, b) , tedy $c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$. Křivku c nazveme *integrální křivkou* vektorového pole X , pokud platí:

$$\dot{c}(t) = X(c(t)).$$

Věta o existenci a jednoznačnosti obyčejných diferenciálních rovnic zaručuje lokálně existenci integrálních křivek. Vektorové pole je úplné, pokud definiční obor integrálních křivek je celý interval $(-\infty, \infty)$. Tok Φ_t generovaný vektorovým polem X je množina hladkých zobrazení $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, která je definovaná jako

$$\Phi_t : c(0) \rightarrow c(t).$$

To znamená, že bod $P \equiv c(0)$ variety \mathcal{M} je posunut podél integrální křivky $c(t)$ určené vektorovým polem X za čas t do bodu $\hat{P} = c(t)$. Platí tedy $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(P) |_{t=0} = X_P$. Tok Φ_t má tyto vlastnosti:

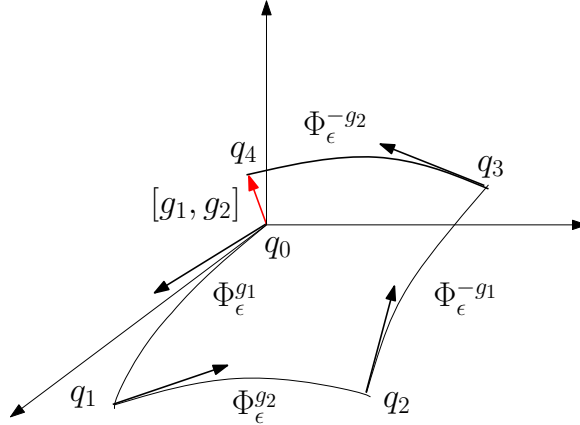
1. Φ_t je spojitě v parametru t
2. Φ_0 je identita
3. $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$, tj. skládání toků odpovídá sčítání parametrů
4. Φ_{-t} je inverzní k Φ_t .

1.3. Lieova závorka, Lieova algebra

Nechť máme tři vektorová pole g_1, g_2 a g_3 na varietě \mathcal{M} . Lieova závorka vektorových polí je definována:

$$[g_1, g_2](q) = \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q) - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2(q). \quad (1.3)$$

Lieovu závorku vektorových polí g_1 a g_2 si ilustrujeme na obrázku (1.1). Nechť máme dvě vektorová pole g_1 a g_2 a počáteční bod q_0 . Z tohoto bodu se posuneme podél toku $\Phi_t^{g_1}$



Obrázek 1.1: Tok generovaný podél vektorových polí g_1 , g_2 , $-g_1$ a $-g_2$

generovaným polem g_1 za čas ϵ do nového bodu q_1 . Z bodu q_1 se posuneme podél toku $\Phi_\epsilon^{g_2}$ generovaným polem g_2 do bodu q_2 za čas ϵ . Z bodu q_2 se posuneme podél toku $\Phi_\epsilon^{-g_1}$ do bodu q_3 za čas ϵ a z bodu q_3 se posuneme podél toku $\Phi_\epsilon^{-g_2}$ do bodu q_4 za čas ϵ . Pro ϵ , které se blíží k nule je rozdíl dvou bodů q_4 a q_0 přibližně roven $[g_1, g_2](q_0)$. Toto tvrzení vyjádříme přesnou formulací v následující Větě:

Věta 1.

$$\Phi_\epsilon^{-g_2} \circ \Phi_\epsilon^{-g_1} \circ \Phi_\epsilon^{g_2} \circ \Phi_\epsilon^{g_1}(q_0) = q_0 + \epsilon^2 [g_1, g_2](q_0) + O(\epsilon^3)$$

Důkaz. Necht' máme vektorová pole g_1 a g_2 , která generují toky $\Phi_t^{g_1}$ a $\Phi_t^{g_2}$. Toky vektorových polí aproximujeme Taylorovým polynomem následovně

$$\begin{aligned} q(\epsilon) &= \Phi_\epsilon^{g_1}(q(0)) \\ &= q(0) + \epsilon \dot{q}(0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ddot{q}(0) + O(\epsilon^3) \\ &= q_0 + \epsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + O(\epsilon^3), \end{aligned} \tag{1.4}$$

kdy za čas ϵ jsme se podél toku $\Phi_\epsilon^{g_1}$ dostali z bodu q_0 do bodu q_1 . Nyní budeme pokračovat z bodu q_1 podél toku $\Phi_\epsilon^{g_2}$ opět za stejný čas ϵ :

$$\begin{aligned} q(2\epsilon) &= \Phi_\epsilon^{g_2} \circ \Phi_\epsilon^{g_1}(q(0)) \\ &= \Phi_\epsilon^{g_2}(q_0 + \epsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + O(\epsilon^3)) \\ &= q_0 + \epsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + \epsilon g_2(q_0 + \epsilon g_1(q_0)) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + O(\epsilon^3) \\ &= q_0 + \epsilon(g_1(q_0) + g_2(q_0)) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + \frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) \right) + O(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{1.5}$$

V rovnic (1.5) se využil opět Taylorův polynom, tedy pro $g_2(q_0 + \epsilon g_1(q)) = g_2(q_0) + \epsilon \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) + O(\epsilon^2)$. Nyní se z bodu q_2 dostaneme za čas ϵ do bodu q_3 , ale podél toku $\Phi_\epsilon^{-g_1}$ generovaném polem $-g_1$:

$$\begin{aligned}
q(3\epsilon) &= \Phi_\epsilon^{-g_1} \circ \Phi_\epsilon^{g_2} \circ \Phi_\epsilon^{g_1}(q(0)) \\
&= \Phi_\epsilon^{-g_1}(q_0 + \epsilon(g_1(q_0) + g_2(q_0)) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\frac{\partial g_1}{\partial q}g_1(q_0) + \frac{\partial g_2}{\partial q}g_2(q_0) + 2\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1(q_0)) + O(\epsilon^3)) \\
&= q_0 + \epsilon(g_1(q_0) + g_2(q_0)) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\frac{\partial g_1}{\partial q}g_1(q_0) + \frac{\partial g_2}{\partial q}g_2(q_0) + 2\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1(q_0)) + O(\epsilon^3) - \\
&\quad -\epsilon g_1(q_0 + \epsilon(g_1(q_0) + g_2(q_0))) - \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial g_1}{\partial q}g_1(q_0) \\
&= q_0 + \epsilon g_2(q_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\frac{\partial g_2}{\partial q}g_2(q_0) + 2\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1(q_0) - 2\frac{\partial g_1}{\partial q}g_2(q_0)) + O(\epsilon^3),
\end{aligned}$$

a nakonec z bodu q_3 se dostaneme podél toku $\Phi_\epsilon^{-g_2}$ generovaném polem $-g_2$ do finálního bodu q_4 za čas ϵ :

$$\begin{aligned}
q(4\epsilon) &= \Phi_\epsilon^{-g_2} \circ \Phi_\epsilon^{-g_1} \circ \Phi_\epsilon^{g_2} \circ \Phi_\epsilon^{g_1}(q(0)) \\
&= \Phi_\epsilon^{-g_2}(q_0 + \epsilon g_2(q_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\frac{\partial g_2}{\partial q}g_2(q_0) + 2\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1(q_0) - 2\frac{\partial g_1}{\partial q}g_2(q_0)) + O(\epsilon^3)) \\
&= q_0 + \epsilon g_2(q_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\frac{\partial g_2}{\partial q}g_2(q_0) + 2\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1(q_0) - 2\frac{\partial g_1}{\partial q}g_2(q_0)) + O(\epsilon^3) - \\
&\quad -\epsilon g_2(q_0 + \epsilon g_2(q_0)) - \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial g_2}{\partial q}g_2(q_0) \\
&= q_0 + \epsilon^2\left(\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1(q_0) - \frac{\partial g_1}{\partial q}g_2(q_0)\right) + O(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Tím je věta dokázaná. □

Snadno se dá ověřit, že Lieova závorka vektorových polí má vlastnost antisymetrie a Jacobiho identity

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2] &= -[g_2, g_1], \\
[g_1, [g_2, g_3]] + [g_3, [g_1, g_2]] + [g_2, [g_3, g_1]] &= 0.
\end{aligned}$$

Obecně, vektorový V spolu s bilineárním zobrazením $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, které splňuje předchozí dvě vlastnosti, se nazývá *Lieova algebra*.

1.4. Distribuce

Vektorová pole g_1, \dots, g_m v okolí každého bodu $q \in \mathcal{M}$ definují podprostor tečného prostoru $T_q\mathcal{M}$, který značíme

$$\Delta_q = \text{span}\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \subset T_q\mathcal{M}.$$

Sjednocení všech těchto podprostorů tvoří podmnožinu tečného bandlu $T\mathcal{M}$

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}.$$

Této podmnožině se říká *Distribuce*. Distribuce je regulární, pokud dimenze podprostoru Δ_q je stejná pro všechny body $q \in \mathcal{M}$. Distribuce se nazývá involutivní právě tehdy, když je uzavřená na operaci Lieových závorek

$$\Delta \text{ je involutivní} \iff \forall g_1, g_2 \in \Delta, \quad [g_1, g_2] \in \Delta.$$

Involutivní uzávěr distribuce, značeno $\overline{\Delta}$, je nejmenší distribuce obsahující Δ , která je zároveň involutivní.

Množina hladkých vektorových polí na \mathcal{M} s operací Lieovy závorky tvoří Lieovu algebru, značena $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Pokud máme vektorová pole g_1, \dots, g_m , tak involutivní uzávěr $\overline{\Delta}$ je nejmenší Lieova algebra obsahující g_1, \dots, g_m . Další prvky se získávají jejich lineární kombinací nebo operací Lieovy závorky.

Regulární distribuce Δ dimenze m je integrabilní, když pro každý bod $q \in \mathcal{M}$ existuje množina hladkých funkcí $h_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, n - m$ takových, že vektory $\frac{\partial h_i}{\partial q}$ jsou lineárně nezávislé v q a pro každé $g_j \in \Delta$ platí

$$\frac{\partial h_i}{\partial q} g_j(q) = 0 \quad i = 1, \dots, n - m \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

Podmnožina \mathcal{M} definovaná body, na kterých jsou funkce h_i konstantní se nazývá integrální varieta. Integrabilní distribuce lze popsat následovně, viz např. [1].

Věta 2 (Frobeniova). *Regulární distribuce je integrabilní právě tehdy, když je involutivní.*

Distribuci $\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ lze také popsat duálním způsobem, pomocí 1-forem. Existuje právě $n - m$ 1-forem $\omega_i \in T^*\mathcal{M}$ takových, že vektory $g_1(q), \dots, g_m(q)$ se na nich v každém bodě $q \in \mathcal{M}$ nulují, tj. platí

$$\omega_i(q)g_j(q) = 0 \quad i = 1, \dots, n - m \quad j = 1, \dots, m \quad \forall q \in \mathcal{M}. \quad (1.7)$$

Distribuci Δ pak můžeme ekvivalentně popsat pomocí tzv. *Pfaffových forem*

$$\omega_i(q)\dot{q} = 0. \quad (1.8)$$

2. Řiditelnost mechanického systému

Zde se budeme zabývat lokální řiditelností mechanického systému, zejména řiditelností tzv. neholonomních systémů. V této kapitole bylo čerpáno z [1].

Uvažujeme mechanický systém, který je pohybově omezen tak, že zobecněné rychlosti \dot{q} leží v distribuci $\Delta \subset T\mathcal{M}$ definované Pfaffovými formami (1.8). Těchto $n - m$ podmínek lze kompaktně napsat pomocí matice, kterou značíme A a která má v řádcích formy ω_i , tj.

$$A(q)\dot{q} = 0. \quad (2.1)$$

Ekvivalentně můžeme vývoj systému popsat následujícím způsobem

$$\dot{q} = G(q)\mathbf{u}, \quad (2.2)$$

kde G je tzv. kontrolní matice a \mathbf{u} je vektor kontrolních parametrů. Matice A a G tedy podle (1.7) splňují $A(q)G(q) = \mathbf{0}$. Pokud distribuce Δ udávájí omezení vývoje systému je integrabilní, pak se systém nazývá *holonomní*. V opačném případě se nazývá *neholonomní*.

Nyní předpokládejme, že pohyb po křivce $q(t) \in \mathcal{M}$ konfigurační variety bude popsán systémem (2.2), kde kontrolní matice G je tvořena vektorovými poli g_1, \dots, g_m , které generují toky $\Phi_t^{g_i}$ definované pro všechny časy $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Teorie řiditelnosti se zabývá podmínkami potřebnými k tomu, aby se dalo dojít z počátečního bodu $q_0 \in \mathcal{M}$ do libovolného finálního bodu $q_f \in \mathcal{M}$, pomocí vhodné funkce $u(\cdot)$. Systém (2.2) je *řiditelný* pokud pro libovolné $q_0, q_f \in \mathcal{M}$ existuje $T > 0$ a $u : [0, T] \rightarrow U$ tak, že řešení systému (2.2) splňuje $q(0) = q_0$ a $q(T) = q_f$. Systém je lokálně řiditelný v bodě q_0 , pokud za libovolně malý časový interval z bodu q_0 jsme schopni dosáhnout blízkých bodů a zůstat v těchto bodech libovolně dlouhou dobu. Mějme otevřenou množinu $V \subseteq \mathbb{R}^n$, dále definujeme množinu $\mathcal{R}^V(q_0, T)$ stavů q takových, že existuje $u : [0, T] \rightarrow U$, která řídí systém (??) z $q(0) = q_0$ do $q(T) = q_f$ a platí $q(t) \in V$ pro $t \in \langle 0, T \rangle$. Dále definujeme množinu stavů dosažitelných až do času T jako

$$\mathcal{R}^V(q_0, \leq T) = \bigcup_{0 < \tau \leq T} \mathcal{R}^V(q_0, \tau).$$

Systém je *lokálně řiditelný*, když pro všechna okolí V bodu q_0 a časy $T > 0$ obsahuje $\mathcal{R}^V(q_0, \leq T)$ nějaké okolí bodu q_0 . Zhruba řečeno, systém je v q_0 lokálně řiditelný, pokud můžeme dosáhnout body v okolí q_0 ve všech směrech.

Povolené směry vývoje systému jsou ovšem jen ty ležící v distribuci, tj. v každém bodě je povolených jen m směrů z n . Věta 1 nám ukazuje, že se můžeme "oklikou" posunout i ve směru Lieových závorek vektorových polí. Tak například, když se chceme posunout ve směru $[g_1, g_2]$, půjdeme podél vektorových toků $\Phi_t^{g_i}$ tak, že na systému (2.2) měníme vstupy v následující sekvenci:

$$\begin{array}{lll} u_1 = 1 & u_2 = 0 & \text{pro } 0 \leq t < \epsilon \\ u_1 = 0 & u_2 = 1 & \text{pro } \epsilon \leq t < 2\epsilon \\ u_1 = -1 & u_2 = 0 & \text{pro } 2\epsilon \leq t < 3\epsilon \\ u_1 = 0 & u_2 = -1 & \text{pro } 3\epsilon \leq t < 4\epsilon, \end{array}$$

Kdybychom opakovali sekvenci, dostali bychom další pohyb ve směru dvojité Lieovy závorky, například ve směru $[g_3, [g_1, g_2]]$. Takto bychom mohli pokračovat až bychom generovali pohyby ve směrech daných všemi možnými Lieovými závorkami. Proto je možné řídit systém podél všech směrů zastoupených v $\overline{\Delta}$. Následující Věta je přesnou formulací předchozího tvrzení, viz např. [1].

Věta 3 (Chow). *Jestliže platí $\overline{\Delta}_q = T_q\mathcal{M}$, pak kontrolní systém (2.2) je lokálně říditelný v $q \in \mathcal{M}$.*

3. Dynamika mechanického systému

V této kapitole je popsáno, jakými způsoby lze získat pohybové rovnice holonomně a neholonomně omezených mechanických systémů, jejichž jednotlivé části mají určité kinematické a setrvačné vlastnosti. Pod pojmem mechanický systém si můžeme přestavit jakýkoliv systém navzájem pevně nebo pohyblivě spojených hmotných částí, na které působí externí síly. V této kapitole bylo čerpáno z [1], [5].

3.1. Newtonova formulace

Hledanými rovnicemi mechanického systému je soustava obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic druhého a prvního řádu. Tyto rovnice lze získat různými způsoby, avšak každé řešení má rozdílnou výpočetní složitost. První způsob zde uvedený je relativně jednoduchý, ale výpočetně náročný.

Uvažujme n částic v \mathbb{R}^3 , které se řídí druhým Newtonovým zákonem. Na každou částici o hmotnosti m_i a polohovém vektoru r_i bude působit síla F_i . Tedy

$$F_i = m_i \ddot{r}_i \quad r_i \in \mathbb{R}^3 \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Dále se bude uvažovat, že těchto n částic navzájem spojíme vazbami, čímž se omezí stupně volnosti jednotlivých částic. Uvažujme holonomní vazby dané funkcemi $h_j : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_j(r_1, \dots, r_n) = 0 \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

Vazby (3.2) určují hladkou plochu v \mathbb{R}^{3n} a směry rychlostí \dot{r}_i tohoto systému jsou vždy tečné k této ploše. Vazbové síly Γ_j mají směr vždy kolmý k této ploše, tj. ∇h_j . Tento dynamický systém přepíšeme jako vektor rovnic

$$F = \begin{pmatrix} m_1 E_3 & \dots & \mathbf{0}_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_3 & \dots & m_n E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_1 \\ \vdots \\ \ddot{r}_n \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \lambda_j, \quad (3.3)$$

kde E_3 je jednotková matice, vektor $F \in \mathbb{R}^{3n}$ představují externí síly působící na n částic, vektory $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \in \mathbb{R}^{3n}$ jsou vektory vazebných sil a pokud jsou ortonormální, tak Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou skaláry, které vyjadřují velikost těchto vazbových sil Γ_i . Lagrangeovy multiplikátory se řeší pomocí $3n + k$ rovnic z rovnic (3.2) a (3.3) s $3n + k$ proměnnými $r \in \mathbb{R}^{3n}$ a $\lambda \in \mathbb{R}^k$. Tento způsob je ovšem pro výpočet náročný a obsahuje mnoho proměnných. Navíc je třeba mít přehled o polohách všech částic systému, ačkoliv částice nejsou schopné nezávislého pohybu.

Příkladem holonomní vazby je pohybující se tyč stálé délky D se zanedbatelnou hmotností na jejichž obou koncích jsou uvažované hmotné body m_1, m_2 o polohách $r_1 \in \mathbb{R}^2$ a $r_2 \in \mathbb{R}^2$. Při pohybu tyče musí platit, že vzdálenost D mezi koncovými body se za čas nemění, tedy platí

$$h(r_1, r_2) = \|r_1(t) - r_2(t)\|^2 - D^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

Dále v této tyči působí silové napětí, které tyto dva hmotné body drží pohromadě. Takže prostřednictvím těchto vazebných sil Γ_1 a Γ_2 se přenášejí síly z jednoho hmotného bodu na druhý a tím se mění trajektorie dvou hmotných bodů. Vektor vazebných sil je

$$\Gamma = \lambda \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = 2\lambda \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_1 \end{pmatrix}$$

Máme tedy pět rovnic s pěti neznámými

$$F = \begin{pmatrix} m_1 \ddot{r}_1 \\ m_2 \ddot{r}_2 \end{pmatrix} + \lambda 2 \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_1 \end{pmatrix}, \quad h(r_1, r_2) = 0$$

Motivace: místo polohových vektorů r_1 a r_2 můžeme zvolit pouze r_1 a úhel θ mezi osou x vektorem $r_2 - r_1$. Polohový vektor r_2 pak dopočítáme

$$r_2 = r_1 + D \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme si zavedli nové souřadnice a navíc vazební podmínka je automaticky splněna. Dostaneme tedy tři rovnice o třech neznámých. V následující podkapitole využijeme výhody takového postupu.

3.2. Lagrangeovy rovnice

Nyní si zavedeme zobecněné souřadnice, které zmenší počet proměnných a tím i rovnic. Tedy pro n částic a k podmínek bude pouze $m = 3n - k$ zobecněných souřadnic q_1, \dots, q_m . Tyto proměnné jsou určeny hladkými funkcemi f_1, \dots, f_n takovými, že

$$r_i = f_i(q_1, \dots, q_m) \quad i = 1, \dots, n \quad \iff \quad h_j(r_1, \dots, r_n) = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Externí síly působící na částice systému podél těchto zobecněných souřadnic jsou *zobecněné externí síly*. Pokud se v zobecněných souřadnicích například vyskytují úhly, tak zobecněné síly jsou kroutící momenty s příslušnou osou otáčení. Základem Lagrangeova popisu je tzv. *Lagrangeova funkce* L , která závisí na zobecněných souřadnicích a jejich prvních derivacích. Je definována jako rozdíl kinetické a potenciální energie systému

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q).$$

Potom platí, že Newtonovy rovnice jsou ekvivalentní následujícím rovnicím, viz např. [1].

Věta 4 (Lagrangeovy rovnice). *Rovnice pohybu mechanického systému se zobecněnými souřadnicemi $q \in \mathbb{R}^m$ a Lagrangianem L jsou dány*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Upsilon_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

kde Υ_i je zobecněná externí síla.

Lagrangeovy rovnice lze psát ve vektorového tvaru

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \Upsilon. \quad (3.5)$$

3.3. Lagrangeovy rovnice s vazbami

Budeme předpokládat, že mechanický systém je omezen distribucí danou Pfaffovou podmínkou (2.1), kde matice $A(q)$ má maximální hodnost. V případě holonomního systému, tj. integrabilní distribuce, platí

$$A(q) = \frac{\partial h}{\partial q},$$

kde h je vektor vazebních funkcí h_i . Vazební síly Γ jsou evidentně kolmé k "integrální ploše" $h = konst$, tj. $\Gamma = \lambda \partial h / \partial q$. V případě neholonomního systému funkce h_i neexistují. Vazební síly tedy nemůžeme vyjádřit pomocí jejich gradientů. Stále brání vývoji systému ve směrech, které nepatří do distribuce definované (2.1), a proto mají tvar

$$\Gamma = A^T(q)\lambda.$$

Pokud uvažujeme pouze vratné stavy systému (nezdeformuje se), pak vazební síly nekonaají práci a můžeme použít Lagrangeove rovnice z Věty 4 ve vektorovém tvaru (3.5), přičemž se od zobecněných externích sil odečtou zobecněné síly vazební

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \Upsilon - A^T(q)\lambda. \quad (3.6)$$

Zopakujeme, že $A^T \lambda$ je matice vazebních sil a Υ jsou nekonzervativní a externí síly působící na mechanický systém. Skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou Lagrangeovy multiplikátory, vyjadřující poměry velikostí vazbových sil. Uvažujeme systém s konstantní potenciální energií, potom můžeme položit tuto energii rovno nule a tedy Lagrangeova funkce $L(q, \dot{q})$ je v tomto případě tvaru

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q},$$

kde $M(q)$ je symetrická a pozitivně definitní matice, která představuje matici zobecněných setrvačností. Rovnice pohybu našeho robota pak můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} := \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \Upsilon - A^T(q)\lambda, \quad (3.7)$$

kde $C(q, \dot{q})$ je matice Coriolisových a setrvačných sil. Protože pro mechanický systém (2.2) s Pfaffovými vazbami (2.1) platí $G(q)^T A(q)^T = \mathbf{0}$, vynásobíme rovnici (3.7) zleva maticí $G^T(q)$ a dostaneme rovnice bez vazbových sil

$$G^T(q)M(q)\ddot{q} + G^T(q)C(q, \dot{q})\dot{q} = G^T(q)\Upsilon. \quad (3.8)$$

Těchto m nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu spolu s k rovnicemi (2.1) tvoří pohybové rovnice mechanického systému.

4. Čtyřnohý čtvercový robot

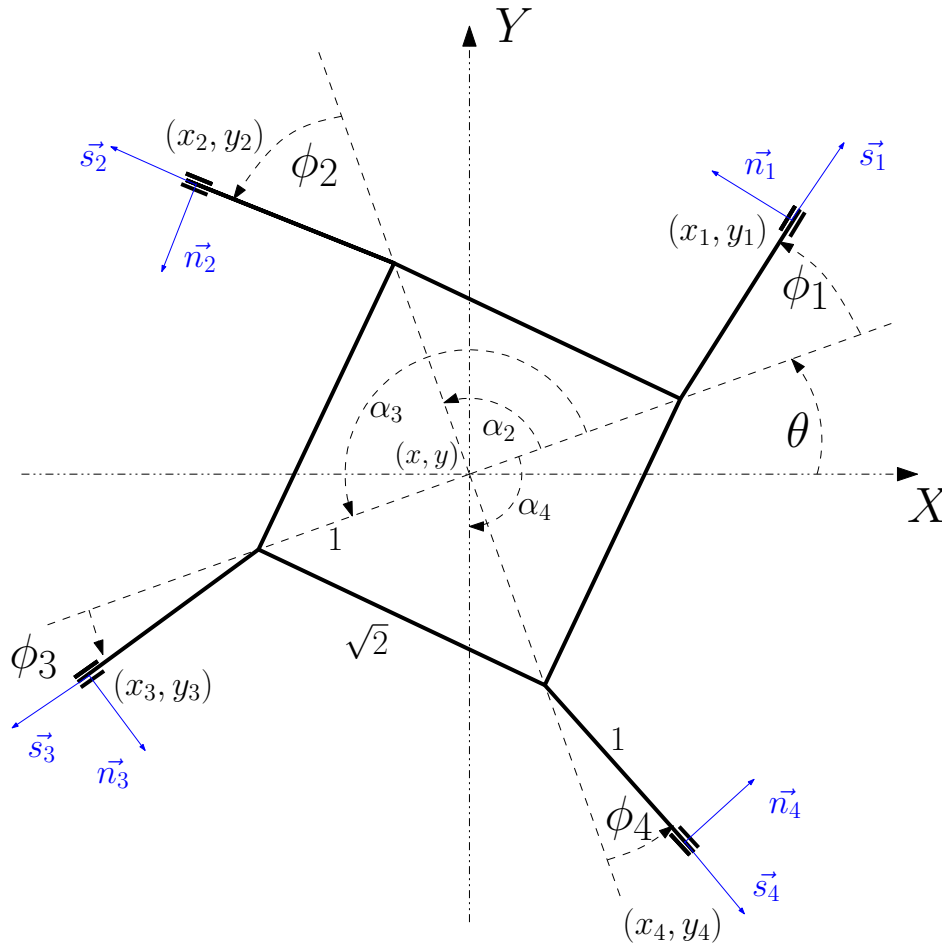
V této kapitole jsem čepal z [1], [4], [5], [6]. Ke složitějším výpočtům, které jsou součástí přílohy, byl použit software Maple.

Model robota, který můžete vidět níže na obrázku 4.1, je položen na rovině xy . Také jeho pohyb se bude uvažovat pouze na rovině xy .

Uprostřed robota je tělo (čtverec), jehož střed je popsán souřadnicemi (x, y) a úhlem natočení θ . Rozměry čtverce jsem pro jednoduchost zvolil $\sqrt{2}$. K tělu jsou připojeny čtyři ramena pomocí čtyř aktivních vazeb. Aktivní vazby jsou poháněny čtyřmi servomotorky, které umožňují robotovi se pohybovat. Pohyb je vytvářen měněními se úhly ramen ϕ_i . Pro jednoduchost byly zvoleny všechny ramena délky 1. Na koncích každého ramene je umístěno pasivní i -té kolečko, které je popsáno polohovými souřadnicemi (x_i, y_i) a úhlem ϕ_i . Dále si můžete všimnout, že se na obrázku vyskytují úhly α_i , to jsou ovšem pevně zvolené konstanty. V našem případě to bude:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_3 = \pi, \alpha_4 = \frac{3}{2}\pi.$$

Konfigurační varieta \mathcal{M} má tedy dimenzi 7 a zobecněné souřadnice jsou



Obrázek 4.1: Geometrické schéma čtyřnohého čtvercového robota

$$q = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, x, y, \theta)^T$$

4.1. Kinematika

Nyní popíšeme distribuci na $T\mathcal{M}$ popisující možné pohyby robota. Nejprve začneme tím, že si vyjádříme polohu i -té ho kolečka pomocí zobecněných souřadnic q :

$$x_i = x + \cos(\alpha_i + \theta) + \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) \quad (4.1)$$

$$y_i = y + \sin(\alpha_i + \theta) + \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i), \quad (4.2)$$

kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Náš robot má ve skutečnosti jisté omezení a to v podobě třecích sil, které vznikají mezi i -tým kolečkem a podložkou, na které se pohybuje. Musíme tedy předepsat podmínky, tak aby nedocházelo ke smýkání. To uděláme tak, že řekneme, že i -té kolečko se nesmí pohybovat ve směru normály \vec{n}_i . Směrový a normálový vektor i -té ho kolečka získáme z rovnic (4.1) a (4.2).

$$\vec{s}_i = (\cos(\alpha_i + \theta + \phi_i), \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)) \quad (4.3)$$

$$\vec{n}_i = (-\sin(\alpha_i + \theta + \phi_i), \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)) \quad (4.4)$$

Podmínka, kdy jednotlivé kolečka se nebudou smýkat ve směru svých normál \vec{n}_i , musí pro každé kolečko platit

$$\vec{n}_i \cdot (\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T = 0$$

Tímto dostáváme neholonomní rovnice

$$-\dot{x}_i \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i) + \dot{y}_i \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) = 0 \quad (4.5)$$

a po následném zderivování rovnic (4.1) a (4.2) a dosazením do rovnice (4.5) získáme

$$\begin{aligned} & -(\dot{x} - \sin(\alpha_i + \theta)\dot{\theta} - \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)) \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i) \\ & + (\dot{y} + \cos(\alpha_i + \theta)\dot{\theta} - \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)) \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Po další úpravě máme

$$-\dot{\phi}_i + \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)\dot{x} - \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)\dot{y} - (1 + \cos(\phi_i))\dot{\theta} = 0. \quad (4.7)$$

Dostali jsme Pfaffove vazby, které můžeme vyjádřit maticovým zápisem ve tvaru $A(q)\dot{q} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_1 + \theta + \phi_1) & -\cos(\alpha_1 + \theta + \phi_1) & -(1 + \cos \phi_1) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \sin(\alpha_2 + \theta + \phi_2) & -\cos(\alpha_2 + \theta + \phi_2) & -(1 + \cos \phi_2) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sin(\alpha_3 + \theta + \phi_3) & -\cos(\alpha_3 + \theta + \phi_3) & -(1 + \cos \phi_3) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sin(\alpha_4 + \theta + \phi_4) & -\cos(\alpha_4 + \theta + \phi_4) & -(1 + \cos \phi_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Nyní budeme hledat kontrolní matici $G(q)$ našeho mechanického systému robota $\dot{q} = G(q)\mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je vektor kontrolních parametrů u_i .

Definujeme vektory $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ a $\mathbf{g} = (x, y, \theta)^T$. Pak lze rovnici (4.7) vyjádřit ve tvaru $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \bar{A}\dot{\mathbf{g}}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1 + \theta + \phi_1) & -\cos(\alpha_1 + \theta + \phi_1) & -(1 + \cos \phi_1) \\ \sin(\alpha_2 + \theta + \phi_2) & -\cos(\alpha_2 + \theta + \phi_2) & -(1 + \cos \phi_2) \\ \sin(\alpha_3 + \theta + \phi_3) & -\cos(\alpha_3 + \theta + \phi_3) & -(1 + \cos \phi_3) \\ \sin(\alpha_4 + \theta + \phi_4) & -\cos(\alpha_4 + \theta + \phi_4) & -(1 + \cos \phi_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Úhel θ lze z matice \bar{A} vyloučit tak, že matici \bar{A} vynásobíme zprava maticí rotace R_θ

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & +\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což je rotace kolem osy z s úhlem θ . Dostaneme matici $A_1 = \bar{A}R_\theta$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1 + \phi_1) & -\cos(\alpha_1 + \phi_1) & -(1 + \cos \phi_1) \\ \sin(\alpha_2 + \phi_2) & -\cos(\alpha_2 + \phi_2) & -(1 + \cos \phi_2) \\ \sin(\alpha_3 + \phi_3) & -\cos(\alpha_3 + \phi_3) & -(1 + \cos \phi_3) \\ \sin(\alpha_4 + \phi_4) & -\cos(\alpha_4 + \phi_4) & -(1 + \cos \phi_4) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Protože $R_\theta R_\theta^T = E_3$, rovnice (4.8) můžeme zapsat jako:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = A_1\mathbf{u},$$

kde $\mathbf{u} = R_\theta^T \dot{\mathbf{g}}$ a $A_1 = \bar{A}R_\theta$. Odtud již dostáváme popis systému pomocí kontrolní matice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1 + \phi_1) & -\cos(\alpha_1 + \phi_1) & -(1 + \cos \phi_1) \\ \sin(\alpha_2 + \phi_2) & -\cos(\alpha_2 + \phi_2) & -(1 + \cos \phi_2) \\ \sin(\alpha_3 + \phi_3) & -\cos(\alpha_3 + \phi_3) & -(1 + \cos \phi_3) \\ \sin(\alpha_4 + \phi_4) & -\cos(\alpha_4 + \phi_4) & -(1 + \cos \phi_4) \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Můžeme se přesvědčit, že opravdu platí $A(q)G(q) = \mathbf{0}$, a proto vektorová pole g_1, g_2, g_3 , která jsou ve sloupcích kontrolní matice (4.10), jsou bází distribuce $\Delta_3 = \text{span}\{g_1, g_2, g_3\}$ dané rovnicemi (4.7).

4.2. Řiditelnost a singularní body

Zde se budeme zabývat pohyby, které jsou definovány vektorovými poli mechanického systému (4.10). Dále ukážeme, že robot je omezen neholonomními vazbami a určíme jeho kritické polohy z hlediska říditelnosti.

Mechanický systém (4.10) můžeme psát ve tvaru

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 + g_3(q)u_3, \quad (4.11)$$

kde g_1, g_2, g_3 jsou hladká vektorová pole, která tvoří jednotlivé sloupce kontrolní (4.10) matice $G(q)$. Tyto tři vektorová pole definují v každém bodě variety \mathcal{M} možné pohyby robota.

Nyní ukážeme, že distribuce $\Delta_3 = \text{span}\{g_1, g_2, g_3\}$ je neintegrabilní, tj. náš robot je neholonomní mechanický systém. Z Frobeniovy Věty 2 plyne, že Pfaffova vazba není integrabilní právě tehdy, když distribuce Δ_3 není involutivní, tj. není uzavřená na operaci Lieove závorky. Vektorová pole vytvořená Lieovou závorkou jsou tyto: $g_{12} := [g_1, g_2]$, $g_{23} := [g_2, g_3]$, $g_{13} := [g_1, g_3]$. Tato pole, spočítaná v příloze, jsou spolu s g_1, g_2 a g_3 lineárně nezávislá, viz příloha. To znamená, že základní vektorová pole spolu jejich Lieovými závorkami definují distribuci $\Delta_6 = \text{span}\{g_1, g_2, g_3, g_{12}, g_{23}, g_{13}\}$ dimenze šest. Těchto šest vektorových polí jsou ve stejné pořadí zapsané v blokové matici G_1 :

$$G_1(q) = \left(\begin{array}{c|ccc} A_1(\phi) & & & H_1(\phi) \\ \hline R_\theta & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (4.12)$$

kde $H_1(q)$ je

$$H_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\alpha_1 + \phi_1) + \sin \alpha_1 & + \cos(\alpha_1 + \phi_1) + \cos \alpha_1 \\ 1 & \sin(\alpha_2 + \phi_2) + \sin \alpha_2 & + \cos(\alpha_1 + \phi_1) + \cos \alpha_1 \\ 1 & \sin(\alpha_3 + \phi_3) + \sin \alpha_3 & + \cos(\alpha_1 + \phi_1) + \cos \alpha_1 \\ 1 & \sin(\alpha_4 + \phi_4) + \sin \alpha_4 & + \cos(\alpha_1 + \phi_1) + \cos \alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Ovšem, aby kontrolní systém (4.11) byl zcela říditelný, tak podle Věty 3 z druhé kapitoly se dimenze involutivního uzávěru distribuce $\bar{\Delta}$ musí rovnat dimenzi $T_q\mathcal{M}$, která je $\dim(T_q\mathcal{M}) = 7$. Musíme tedy najít ještě jedno vektorové pole. Pomocí dvojité Lieovy závorky vytvoříme dalších devět vektorových polí, které jsou spočítaná v příloze:

$$g_{ijk} = [g_i, [g_j, g_k]] \quad j < k \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Ty to vektorová pole jsou:

$$g_{112} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha_1 + \phi_1) \\ -\cos(\alpha_2 + \phi_2) \\ -\cos(\alpha_3 + \phi_3) \\ -\cos(\alpha_4 + \phi_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_{123} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \phi_1) \\ -\sin \alpha_2 \cos(\alpha_2 + \phi_2) \\ -\sin \alpha_3 \cos(\alpha_3 + \phi_3) \\ -\sin \alpha_3 \cos(\alpha_4 + \phi_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
g_{113} &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \phi_1) - 1 \\ -\cos \alpha_2 \cos(\alpha_2 + \phi_2) - 1 \\ -\cos \alpha_3 \cos(\alpha_3 + \phi_3) - 1 \\ -\cos \alpha_4 \cos(\alpha_4 + \phi_4) - 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_{212} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha_1 + \phi_1) \\ -\sin(\alpha_2 + \phi_2) \\ -\sin(\alpha_3 + \phi_3) \\ -\sin(\alpha_4 + \phi_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
g_{223} &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \phi_1) - 1 \\ -\sin \alpha_2 \sin(\alpha_2 + \phi_2) - 1 \\ -\sin \alpha_3 \sin(\alpha_3 + \phi_3) - 1 \\ -\sin \alpha_4 \sin(\alpha_4 + \phi_4) - 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_{213} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \phi_1) \\ -\cos \alpha_2 \sin(\alpha_2 + \phi_2) \\ -\cos \alpha_3 \sin(\alpha_3 + \phi_3) \\ -\cos \alpha_4 \sin(\alpha_4 + \phi_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
g_{312} &= \begin{pmatrix} -\sin \phi_1 \\ -\sin \phi_2 \\ -\sin \phi_3 \\ -\sin \phi_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_{323} = \begin{pmatrix} -(\cos(\phi_1) + 1) \cos \alpha_1 \\ -(\cos(\phi_2) + 1) \cos \alpha_2 \\ -(\cos(\phi_3) + 1) \cos \alpha_3 \\ -(\cos(\phi_4) + 1) \cos \alpha_4 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
g_{313} &= \begin{pmatrix} -(\cos(\phi_1) + 1) \sin \alpha_1 \\ -(\cos(\phi_2) + 1) \sin \alpha_2 \\ -(\cos(\phi_3) + 1) \sin \alpha_3 \\ -(\cos(\phi_4) + 1) \sin \alpha_4 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Distribuce je nyní definována sedmi vektorovými poli

$$\overline{\Delta}_7 = \text{span}\{g_1, g_2, g_3, g_{12}, g_{23}, g_{13}, g_*\}, \quad (4.14)$$

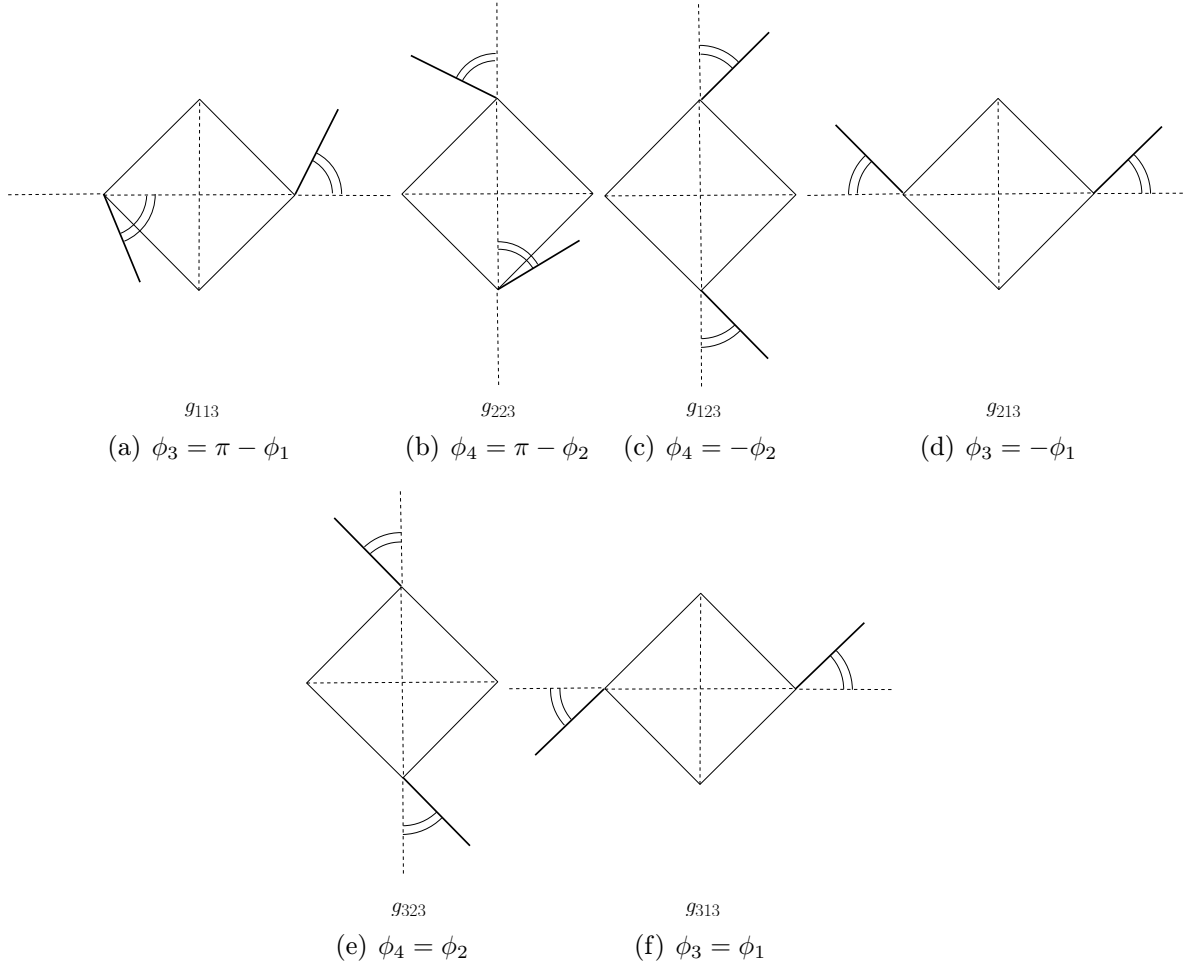
kde vektorové pole g_* znamená jednu z devíti dvojitých Lieových závorek a příslušná rozšířená kontrolní matice je $\overline{G} = \{g_1, g_2, g_3, g_{12}, g_{23}, g_{13}, g_*\}$. Ukážeme, že tato distribuce $\overline{\Delta}_7$ má, pro vhodně zvolené g_* , ve všech bodech variety \mathcal{M} dimenzi 7, tj. shodnou s dimenzí tečného prostoru $T_q\mathcal{M}$. Zkoumejme tedy rozšířenou matici \overline{G} pro jednotlivé volby g_* . Singulární hodnoty zjistíme z rovnice $\det \overline{G} = 0$. Jednotlivé singulární polohy pro jednotlivé g_* jsou zobrazeny v obrázku 4.2. Pokud dosadíme za g_* jedno z polí g_{112} , g_{212} , respektive g_{312} , jsou popsány následujícími rovnicemi:

$$\sin(\phi_2) - \cos(\phi_3) + \cos(\phi_1) - \sin(\phi_4) = 0 \quad (4.15)$$

$$\sin(\phi_3) - \cos(\phi_4) + \cos(\phi_2) - \sin(\phi_1) = 0 \quad (4.16)$$

$$\sin(\phi_1) - \sin(\phi_4) + \sin(\phi_3) - \sin(\phi_2) = 0. \quad (4.17)$$

Protože však jednotlivé závorky mají odlišné singulární body, jejichž průnik je prázdný, což můžeme například vidět z obrázku 4.2(a) a 4.2(b), tak robot je říditelný i v těchto bodech.



Obrázek 4.2: Některé singulární polohy našeho robota

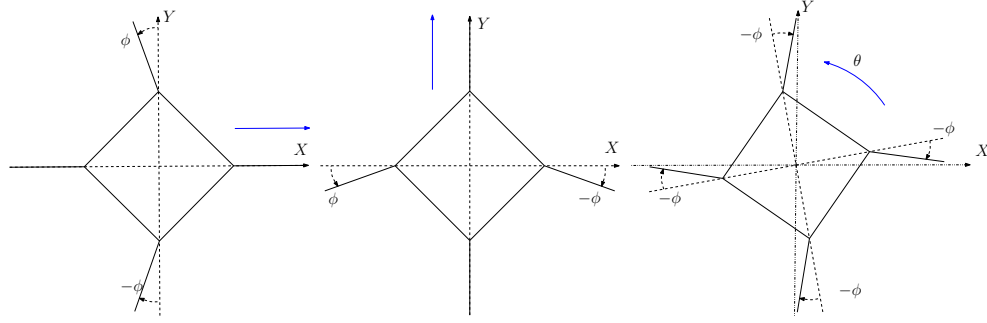
V momentě, kdy se robot dostane s nějakou dvojitou Lieovou závorkou do singulárního bodu, můžeme použít jinou dvojitou Lieovu závorku, abychom se ze singulárního bodu dostali.

Nyní ilustrujeme na příkladu, jak se robot pohybuje ve směrech vektorových polí g_1, g_2, g_3 . Pro názornost zvolíme $q = \mathbf{0}$. Kontrolní matice v tomto bodě je:

$$G(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Vektorová pole $g_1(\mathbf{0}), g_2(\mathbf{0}), g_3(\mathbf{0})$ jsou zobrazená v kontrolní matici (4.18) jako sloupce ve stejném pořadí.

Realizaci jednotlivých pohybů můžete vidět na obrázku (4.3). První pohyb ve směru vektorového pole $g_1(\mathbf{0})$ je posunutí robota ve směru $x = 1$, natočení druhého a čtvrtého ramene na úhel $\phi_2 = 1$ a $\phi_4 = -1$. Druhý pohyb ve směru vektorového pole $g_2(\mathbf{0})$ je posunutí robota ve směru $y = 1$, natočení prvního a třetího ramene na úhel $\phi_1 = -1$ a



(a) Pohyb ve směru $g_1(\mathbf{0})$ (b) Pohyb ve směru $g_2(\mathbf{0})$ (c) Pohyb ve směru $g_3(\mathbf{0})$
 Obrázek 4.3: Pohyb robota z počáteční polohy $q = \mathbf{0}$

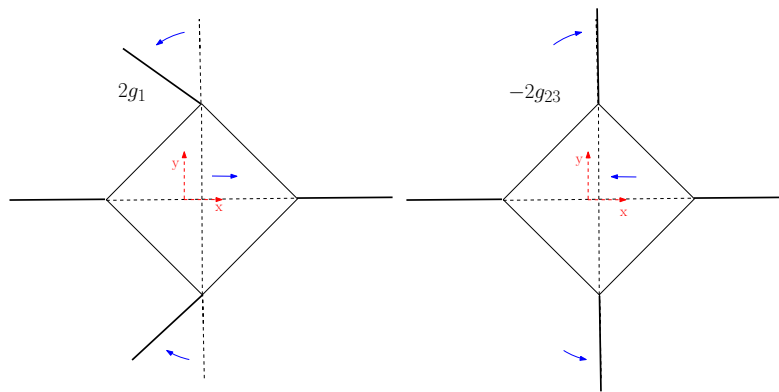
$\phi_3 = 1$. Třetí pohyb ve směru vektorového pole $g_3(\mathbf{0})$ je rotace robota kolem osy z s úhlem $\theta = 1$, natočení všech ramen na úhel $\phi_i = -2$.

Nyní demonstrujme říditelnost na $q = \mathbf{0}$. K tomu použijeme Lieovou závorkou $g_* = g_{223}$. Pak matice $\overline{G}(\mathbf{0})$ je regulární a je rovna

$$\overline{G}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jako první základní pohyb, obr. 4.4, budeme uvažovat posunutí ve směru $x = 1$, tj. robot přejde z počátečního stavu $q(0) = \mathbf{0}$ do finálního stavu $q(T) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$. Výpočet je následující

$$q(T) = 2g_1(\mathbf{0}) - g_{23}(\mathbf{0}).$$



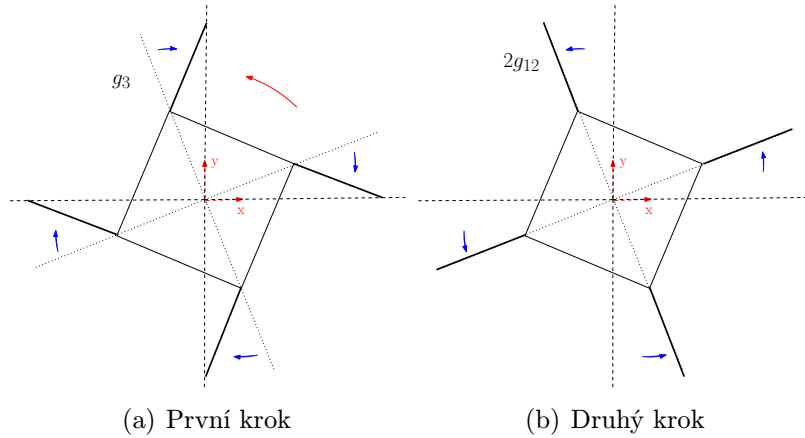
(a) První krok (b) Druhý krok
 Obrázek 4.4: Posunutí ve směru $x = 1$

Jako druhý základní pohyb budeme uvažovat posunutí ve směru $y = 1$, tj. robot přejde z počátečního stavu $q(0) = \mathbf{0}$ do finálního stavu $q(T) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$. Vzhledem k tomu, že robot je symetrický, pohyb ve směru y je podobný s pohybem ve směru x . Výpočet je následující

$$q(T) = 2g_2(\mathbf{0}) + g_{13}(\mathbf{0}).$$

Jako třetí základní pohyb, obr. 4.5, budeme uvažovat rotaci kolem osy z s $\theta = 1$, tj. robot přejde z počátečního stavu $q(0) = \mathbf{0}$ do finálního stavu $q(T) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$. Výpočet je následující

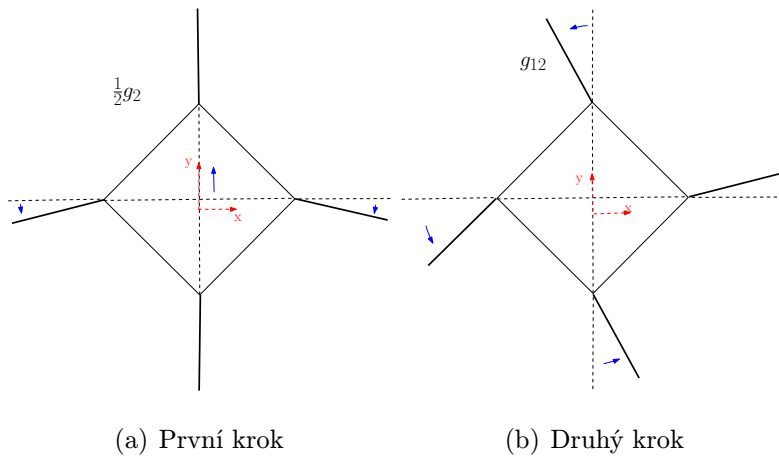
$$q(T) = g_3(\mathbf{0}) + 2g_{12}(\mathbf{0}).$$



Obrázek 4.5: Rotace kolem osy z

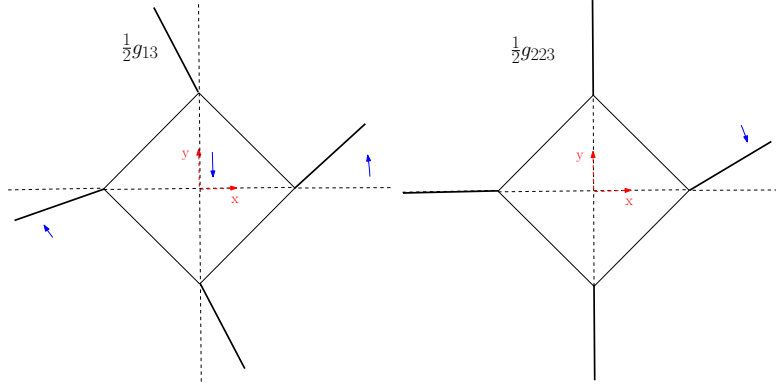
Jako čtvrtý základní pohyb, obr. 4.6 a 4.7, budeme uvažovat pohnutím jednoho ramene . Robot přejde z počátečního stavu $q(0) = \mathbf{0}$ do finálního stavu $q(T) = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$. Výpočet je následující

$$q(T) = \frac{1}{2}g_2(\mathbf{0}) + g_{12}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}g_{13}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}g_{223}(\mathbf{0}),$$



Obrázek 4.6: Pohnutí jednoho ramene

Poznamenejme, že předchozí první tři pohyby potřebovaly pouze jednoduché Lieovy závorky, ale v posledním pohybu byla zapotřebí poslední dvojitá Lieova závorka g_{223} .



(a) Třetí krok (b) Čtvrtý krok
Obrázek 4.7: Pohnutí jednoho ramene

4.3. Dynamika

Dynamika neholonomních systémů, mezi něž náš robot patří, je popsána soustavou nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu viz (3.8) ve třetí kapitole. V těchto rovnicích nám zbývá dopočítat matice $M(q)$ a $C(q, \dot{q})$. Dále popíšeme matice externích sil Υ a vazbových sil $A^T(q)\lambda$.

Pro jednoduchost se bude pouze uvažovat hmotnost koleček M_k a hmotnost těla robota M_t , která je homogenní na celém čtverci, ostatní hmotnosti jsou zanedbány, z důvodu složitosti výpočtu. Kolečka mají poloměr R a tloušťku d . Rozměr (čtverce) těla je opět $\sqrt{2}$ a délka ramene bude opět 1. Moment setrvačnosti těla (čtverce) vzhledem k ose, která je ve středu čtverce kolmá na rovinu xy je $I_t = \frac{1}{12}M_t a^2 = \frac{1}{6}M_t$. Moment setrvačnosti kola je $I_k = \frac{1}{4}M_k R^2 + \frac{1}{12}M_k d^2$.

Robot se pohybuje pouze v rovině xy , z tohoto důvodu se potenciální energie neuvažuje a uvažujeme pouze kinetickou energii. Dále se nebudou uvažovat žádné ostatní síly, jako například síly, které vznikají třením mechanických částí navzájem, síly vznikající valivými odpory koleček, rovněž zanedbáváme odpor vzduchu, který vzniká při pohybu robota.

Tělo robota koná translační pohyb ve směru vektoru (x, y) s rychlostí (\dot{x}, \dot{y}) a rotační pohyb s úhlovou rychlostí $\dot{\theta}$ kolem osy z , která je ve středu čtverce. Celková kinetická energie těla robota je součtem těchto kinetických energií vzniklých translačním a rotačním pohybem

$$E_t = \frac{1}{2}M_t(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_t\dot{\theta}^2. \quad (4.19)$$

i -té kolečko robota koná translační pohyb ve směru vektoru (x_i, y_i) rychlostí (\dot{x}_i, \dot{y}_i) a rotační pohyb s úhlovou rychlostí $(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)$ kolem osy z , která je ve středu čtverce. Kinetickou energii vzniklou rotací kolem vlastní osy kolečka zanedbáváme. Celková kinetická energie i -tého kolečka je

$$E_i = \frac{1}{2}M_k(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2}I_k(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)^2 \quad (4.20)$$

$$E_i = \frac{1}{2}M_k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)^2 + 2\dot{\theta}(\dot{y} \cos(\alpha_i + \theta) - \dot{x} \sin(\alpha_i + \theta)) + 2\dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i) \cos \phi_i + 2(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)(\dot{y} \cos(\alpha_i + \phi_i + \theta) - \dot{x} \sin(\alpha_i + \phi_i + \theta))) + \frac{1}{2}I_k(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i)^2$$

kde v rovnici (4.20) jsme za \dot{x}_i a \dot{y}_i dosadili rovnice (4.1) a (4.2),

Lagrangeova funkce $L(q, \dot{q})$ je součet celkových kinetických energií těla robota a čtyř koleček

$$L(q, \dot{q}) = E_t + \sum_{i=1}^4 E_i$$

Lagrangeovy rovnice, které jsou spočítány zvlášť pro každou souřadnici konfiguračního vektoru $q \in \mathcal{M}$ jsou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} &= \ddot{\theta}(I_k + M_k(1 + \cos \phi_i)) + \ddot{\phi}_i(I_k + M_k) - \\ &- \ddot{x}M_k \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i) + \ddot{y}M_k \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) + \dot{\theta}^2 M_k \sin \phi_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= -\ddot{\theta}M_k(\sin(\alpha_i + \theta) + \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)) + \ddot{x}(M_t + 4M_k) - \\ &- \ddot{\phi}_i M_k \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i) - \dot{\theta}^2 M_k(\cos(\alpha_i + \theta) + \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)) - \\ &- \dot{\phi}_i^2 M_k \cos(\alpha_i + \phi_i + \theta) - 2\dot{\phi}_i \dot{\theta} \cos(\alpha_i + \phi_i + \theta) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \ddot{\theta}M_k(\cos(\alpha_i + \theta) + \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)) + \ddot{y}(M_t + 4M_k) + \\ &+ \ddot{\phi}_i M_k \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) - \dot{\theta}^2 M_k(\sin(\alpha_i + \theta) + \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)) - \\ &- \dot{\phi}_i^2 M_k \sin(\alpha_i + \phi_i + \theta) - 2\dot{\phi}_i \dot{\theta} M_k \sin(\alpha_i + \phi_i + \theta) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \ddot{\theta}(I_t + 4I_k + 2M_k(4 + \cos \phi_i)) + \ddot{\phi}_i(I_k + M_k(1 + \cos \phi_i)) - \\ &- \ddot{x}(M_k(\sin(\alpha_i + \theta) + \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i))) + \ddot{y}(M_k(\cos(\alpha_i + \theta) + \\ &+ \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i))) - \dot{\phi}_i \dot{\theta} 2M_k \sin \phi_i - \dot{\phi}_i^2 M_k \sin \phi_i \end{aligned} \quad (4.24)$$

Z rovnice (4.21) až (4.24) získáme matice $M(q)$ a $C(q, \dot{q})$:

$$M(q) = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{15} & M_{25} & M_{35} & M_{45} & M_{55} & 0 & M_{57} \\ M_{16} & M_{26} & M_{36} & M_{36} & 0 & M_{66} & M_{67} \\ M_{17} & M_{27} & M_{37} & M_{47} & M_{57} & M_{67} & M_{77} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

Jednotlivé prvky matice $M(q)$ jsou:

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = M_{44} = I_k + M_k$$

$$M_{55} = M_{66} = 4M_k + M_t$$

$$M_{77} = 8M_k + 4I_k + I_t + 2M_k \sum_{i=1}^4 \cos \phi_i$$

$$\begin{aligned}
M_{i5} &= -M_k \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i) & 1 \leq i \leq 4 \\
M_{i6} &= M_k \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) & 1 \leq i \leq 4 \\
M_{i7} &= M_k(1 + \cos \phi_i) + I_k & 1 \leq i \leq 4 \\
M_{57} &= -M_k \sum_{i=1}^4 (\sin(\alpha_i + \theta + \phi_i) + \sin(\alpha_i + \theta)) \\
M_{67} &= M_k \sum_{i=1}^4 (\cos(\alpha_i + \theta + \phi_i) + \cos(\alpha_i + \theta))
\end{aligned}$$

Nyní matice $C(q, \dot{q})$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{47} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & 0 & 0 & C_{57} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & 0 & 0 & C_{67} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} & 0 & 0 & C_{77} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Prvky matice $C(q, \dot{q})$ jsou:

$$\begin{aligned}
C_{i7} &= M_k \dot{\theta} \sin \phi_i & 1 \leq i \leq 4 \\
C_{5i} &= -M_k \cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)(\dot{\phi}_i + \dot{\theta}) & 1 \leq i \leq 4 \\
C_{57} &= -M_k \dot{\theta} \sum_{i=1}^4 (\cos(\alpha_i + \theta + \phi_i)(\dot{\phi}_i + 1) + \cos(\alpha_i + \theta)) \\
C_{6i} &= -M_k \sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)(\dot{\phi}_i + \dot{\theta}) & 1 \leq i \leq 4 \\
C_{67} &= -M_k \dot{\theta} \sum_{i=1}^4 (\sin(\alpha_i + \theta + \phi_i)(\dot{\phi}_i + 1) + \sin(\alpha_i + \theta)) \\
C_{7i} &= -M_k \sin \phi_i (\dot{\phi}_i + \dot{\theta}) & 1 \leq i \leq 4 \\
C_{77} &= -M_k \sum_{i=1}^4 \dot{\phi}_i \sin(\phi_i)
\end{aligned}$$

Matice, která se vyskytuje v soustavě sedmi nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic (3.7) je matice zobecněných vazbových sil $A^T(q)\lambda$. Tyto vazbové síly představují třecí síly působící mezi kolečky a podložkou, které nekonají práci, pokud se kolečka nesmýkají, kde matice $A^T(q)$ jsou jejich směry v q a λ jsou Lagrangeovy multiplikátory, určující poměr velikostí těchto třecích sil. Jakmile by byla tato třecí síla překonána, robot by se nepohyboval v dané trajektorii a v takovém případě by robot konal práci, která by se přeměnila na teplo vzniklé třením.

Matice Υ představuje kontrolní matici externích sil $B(q)\varphi$, kde $B(q) = (E_4 \mathbf{0}_{3 \times 4})^T$ je bloková matice s jednotkovou maticí E_4 a nulovou maticí $\mathbf{0}_{3 \times 4}$ a $\varphi \in \mathbb{R}^4$ je kontrolní vektor externích sil. Tyto zobecněné externí síly jsou krouticí momenty vytvářeny čtyřmi servomotoriky (aktivními vazbami). Po vynásobení zprava transponovanou kontrolní maticí (4.10) soustavou rovnic (3.7), dostaneme soustavu třech nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic (3.8), které popisují dynamiku Čtyřnohého čtvercového robota bez vazbových sil $A^T(q)\lambda$.

5. Závěr

Náš Čtyřnohý čtvercový robot, jak bylo zjištěno v kapitole 4, se řadí mezi mechanické systémy s neholonomním omezením. Kinematika robota je popsána mechanickým systémem s kontrolní maticí, viz strana 27 (4.10). Spočítali jsme singulární body rozšířené kontrolní matice \bar{G} , viz strana 29 a 30. Podstatná modifikace z hlediska říditelnosti u Čtyřnohého čtvercového robota byla, že jsme robotovi přidali jednu nohu navíc. Tato úprava poskytla Čtyřnohému čtvercovému robotovi úplnou říditelnost, viz strana 21 - 33, kde jsou provedeny čtyři základní pohyby. Pohybové rovnice jsme odvodili z Lagrangeových rovnic, viz (3.8) strana 24 a pomocí kontrolní matice (4.10) odvozené z kinematiky robota. Tvoří je soustava ODR čtyř rovnic prvního řádu a třech rovnic druhého řádu.

Literatura

- [1] MURRAY, Richard M, Zexiang LI a S. Shankar SASTRY. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 456 s. : il. ISBN 9780849379819.
- [2] PODOLSKÝ, Jiří. Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie. In: *Proseminář teoretické fyziky I* [online]. 2006. [cit. 2015-05-04]. Dostupné z: <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF069/tmf069.pdf>
- [3] FECKO, Marián. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. [1. vyd.]. Bratislava: Iris, 2004, 722 s. ISBN 8089018106.
- [4] ISHIKAWA, Masato. TRIDENT SNAKE ROBOT: LOCOMOTION ANALYSIS AND CONTROL. ALLGOWER, Frank a M ZEITZ. *Nonlinear control systems 2004: a proceedings volume from the 6th IFAC symposium, Stuttgart, Germany, 1-3 September 2004*. Oxford: Published for the International Federation of Automatic Control by Elsevier, 2005, s. 895-901. IFAC proceedings series. ISBN 0080443036.
- [5] PIETROWSKA, Zuzanna a Krzysztof TCHOŃ. Dynamics and Motion Planning of Trident Snake Robot. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, 201407, roč. 75, č. 1, s. 17-28 [cit. 2015-05-08]. DOI: 10.1007/s10846-013-9858-y. Dostupné z: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10846-013-9858-y>
- [6] RATAJCZAK, A. a K. TCHOŃ. Multiple-task motion planning of non-holonomic systems with dynamics. *Mechanical Sciences* [online]. Copernicus GmbH, 2013, vol. 4, issue 1, s. 153-166 [cit. 2015-05-10]. DOI: 10.5194/ms-4-153-2013. Dostupné z: <http://www.mech-sci.net/4/153/2013/>

6. Seznam příloh

Součástí přílohy je příložené CD, které obsahuje:

1. MAPLE mw-file:Controllability.mw
2. bakalářskou práci ve formátu PDF