



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# TEORIE ŘÍZENÍ ROBOTICKÉHO HADA S CHYBĚJÍCÍMI KOLEČKY

CONTROL THEORY OF ROBOTIC SNAKES WITH MISSING WHEELS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

BARBORA REICHMANOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. JAROSLAV HRDINA, Ph.D.

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Barbora Reichmanová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Teorie řízení robotického hada s chybějícími kolečky**

v anglickém jazyce:

### **Control Theory of robotic snakes with missing wheels**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Popsání neholonomní kinematiky tříčlankového robotického hada s jedním chybějícím kolečkem (diskutujeme všechny možnosti). Nalezení příslušných řídicích distribucí. Pro každou nalezení obalu Lieovy algebry a diskuze lokální říditelnosti. Návrh na realizaci pohybů neležících v distribuci.

Cíle bakalářské práce:

Nastudování základů neholonomní mechaniky. Použití příslušného aparátu pro řízení zvoleného mechanismu.

Seznam odborné literatury:

[1] Mathematical Introduction to Robotic Manipulation by R. M. Murray, Z. X. Li, and S. S. Sastry (CRC Press, 1994) ([http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki/index.php/Main\\_Page](http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki/index.php/Main_Page))

[2] P

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 19.11.2014

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá matematickým popisem tříčlánkového robota. Práce se věnuje případům, kdy mechanismu chybí kolečka na prostředním či posledním článku, nebo případu s kolečky pouze na prostředním článku. Nejprve jsou uvedeny teoretické základy obsahující pojmy vektorový a afinní prostor, Lieova algebra, distribuce či říditelný systém. Následně jsou zde předloženy vyjádření neholonomních rovnic popisujících robota s chybějícími kolečky, jejich řešení, výpočet Lieových závorek a diskuze říditelnosti. Výpočty jsou demonstrovány na příkladech různých konfigurací robota.

## **Abstract**

This thesis looks into the mathematical description of a three-sectional robot. The thesis deals with cases of wheels missing either on the middle or the last section or solely on the middle section. At first theoretical basis is mentioned including the terms such as vector and affine space, Lie algebra, distribution or controllable system. Subsequently, there is presented formulation of equations describing a snake robot with missing wheels, solutions of equations, calculation of Lie brackets and discussion of controllability. The calculations are demonstrated on examples of various configurations of the robot.

## **klíčová slova**

Lieova algebra, neholonomní systém, robotický had, distribuce

## **key words**

Lie algebra, nonholonomic system, robotic snake, distribution

REICHMANOVÁ, B. *Teorie řízení robotického hada s chybějícími kolečky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojíního inženýrství, 2015. 41 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Teorie řízení robotického hada s chybějícími kolečky* vypracovala samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D., s použitím odborných materiálů uvedených v seznamu literatury.

Barbora Reichmanová





Děkuji svému školiteli doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph. D., za odborné vedení mé bakalářské práce, cenné rady, připomínky a trpělivost.

Barbora Reichmanová



# Obsah

Úvod	2
<b>1 Matematické základy</b>	<b>3</b>
1.1 Lineární algebry . . . . .	3
1.2 Lieovy algebry . . . . .	7
1.3 Afinity prostory . . . . .	10
1.4 Řídicí systémy . . . . .	12
<b>2 Neholonomní mechanika</b>	<b>15</b>
2.1 Metoda pohyblivého repéru . . . . .	15
2.2 Kinematické rovnice . . . . .	17
2.3 Neholonomní podmínky . . . . .	18
<b>3 Modely</b>	<b>20</b>
3.1 Parametrické řešení . . . . .	20
3.2 Řídicí distribuce . . . . .	23
3.3 Příklady . . . . .	28
<b>4 Řiditelnost vzhledem k aktivním prvkům</b>	<b>35</b>
<b>Závěr</b>	<b>38</b>
<b>Seznam literatury</b>	<b>39</b>
<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>40</b>

# Úvod

Výzkumy v oblasti robotických hadů se začaly objevovat již v 70. letech minulého století [3], kdy Shigeo Hirose začal studovat pohyby živých hadů a poznatky převáděl do rozvoje vlastních mechanismů. V současnosti je teorie robotických hadů již částečně vybudována a objevují se i další hadům podobné mechanismy, jako například tzv. trident snake, mobilní mechanismus tvořený třemi větvemi spojenými se základním blokem, uvedený Masato Ishikawou na počátku našeho tisíciletí. V dnešní době se teorií robotických hadů zabývá více vědeckých skupin po celém světě a vznikají první specializované monografie, jako např. [5].

Tato bakalářská práce se zabývá teorií řízení robotického hada tvořeného třemi články, na nichž jsou uprostřed situována pasivní kolečka. Mezi každými dvěma články jsou umístěné servomotory, aktivní prvky, které způsobují pohyb hada změnou úhlu mezi články. My se konkrétně zaměříme na situace, kdy hadovi chybí kolečka na jednom nebo dvou člancích.

Práce je strukturována do čtyř kapitol, z nichž první se věnuje teoretickému základu. Zavádíme pojmy vektorový prostor, afinní prostor, algebra a její modifikace. Za pomoci pojmů Lieova algebra či distribuce zavádíme řídicí systém a definujeme pojem lokální říditelnost. Protože pojem Lieovy algebry hraje v našem textu klíčkovou roli, demonstrujeme ho na řadě příkladů.

Ve druhé kapitole je popsána neholonomní mechanika. Tento oddíl obsahuje odvození dopředných kinematických rovnic pro tříčlánkového hada pomocí metody pohyblivého repéru. Výsledkem je vyjádření hlavy hada a všech koleček jako bodů afinního prostoru v souřadnicích referenčního afinního systému (repéru). Zderivované rovnice dopředné kinematiky jednotlivých koleček musí být vždy kolmé k normálovým vektorům příslušných článků. Toto omezení nám dává soustavu diferenciálních rovnic, kterou označujeme jako neholonomní podmínky systému.

Třetí kapitola se už zabývá jednotlivými případy pro chybějící kolečka, pro které nalezneme parametrické řešení neholonomních rovnic, tedy příslušnou distribuci, a pomocí Lieových závorek dopočítáme Lieovu algebru říditelnosti jako involutivní uzávěr. Nakonec pro názornost uvádíme příklady v jednotlivých konfiguracích společně s příslušnými výpočty parametrických řešení a diskuzí lokální říditelnosti. Všimneme si, že takto diskutovaná říditelnost neakcentuje rozdíl mezi hnacím a hnaným prvkem.

V poslední kapitole zavádíme pojem říditelnost vzhledem k aktivním prvkům, kterými jsou v našem případě servomotory v kloubech mezi jednotlivými články. Jedinými hnacími souřadnicemi našeho systému jsou tedy úhly  $\phi_1$  a  $\phi_2$ . Pro demonstraci využijeme již dříve vypočítaných příkladů z třetí kapitoly.

# Kapitola 1

## Matematické základy

V následující pasáži se seznámíme s teoretickými pojmy, které budeme využívat v dalším textu. Kapitola je rozdělena do čtyř částí, v nichž se zabýváme otázkou vektorových prostorů a jejich bázemi, dále se věnujeme algebraickým strukturám, a to především Lieově algebře. V posledním úseku definujeme řídicí systém a jeho vlastnosti. Veškeré poznatky z tohoto oddílu využijeme pro nalezení neholonomních rovnic potřebných k popisu robotického hada. Tato kapitola vychází z [4], [6] a [8].

### 1.1 Lineární algebry

#### Vektorové prostory

**Definice 1.** Komutativní grupa  $(V, +)$  se nazývá vektorový prostor (nad  $\mathbb{R}$ ), jestliže pro každý prvek  $\mathbf{v} \in V$  a každé reálné číslo  $r \in \mathbb{R}$  je definovaný prvek  $r \cdot \mathbf{v} = r\mathbf{v}$  z množiny  $V$  a přitom platí  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V; r, s \in \mathbb{R}$ :

- $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$ ,
- $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$ ,
- $(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u})$ ,
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

V našem textu budeme vždy pracovat s vektorovým polem nad  $\mathbb{R}$ .

**Definice 2.** Necht'  $\mathbb{V} = (V, +)$  je vektorový prostor a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V (k \in \mathbb{N})$ . Řekneme, že vektor  $\mathbf{v} \in V$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ , jestliže existují reálná čísla  $r_1, \dots, r_k$  tak, že platí

$$\mathbf{v} = r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_k \mathbf{v}_k.$$

Jinými slovy říkáme, že vektor  $\mathbf{v}$  leží v lineárním obalu generovaným vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  a píšeme

$$\mathbf{v} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

Vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  se nazývají lineárně závislé, jestliže existují  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ , z nichž alespoň jedno je různé od nuly tak, že platí

$$r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o}.$$

V opačném případě nazýváme vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  lineárně nezávislé.

**Definice 3.** Necht'  $\mathbb{V} = (V, +)$  je vektorový prostor a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V (k \in \mathbb{N})$ . Soustava vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  se nazývá báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$ , jestliže vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou lineárně nezávislé a každý vektor  $\mathbf{v} \in V$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

## Algebry

**Definice 4.** Algebra  $\mathbb{A}$  je vektorový prostor (nad  $\mathbb{R}$ ) s definovanou binární operací  $\bullet : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , pro kterou platí

$$\begin{aligned} a \bullet (b + \lambda c) &= a \bullet b + \lambda(a \bullet c), \\ (b + \lambda c) \bullet a &= b \bullet a + \lambda(c \bullet a), \end{aligned} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \quad \forall a, b, c \in \mathbb{A}.$$

**Definice 5.** Algebra se nazývá unitární, jestliže v  $\mathbb{A}$  existuje prvek  $e \in \mathbb{A}$ , pro který platí

$$e \bullet a = a \bullet e = a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

Prvek  $e$  nazýváme jednotkový prvek.

**Příklad 1.** a) Prvním příkladem algebry je vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$  spolu s operací vektorového součinu definovaného předpisem

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1),$$

kde  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Algebra není unitární, tj. neexistuje jednotkový prvek  $e$ , pro nějž by platilo  $\mathbf{e} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{e} = \mathbf{u}$ , protože vektorový součin je antikomutativní, tedy platí  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ .

b) Komplexní čísla  $\mathbb{C}$  tvoří vektorový prostor nad reálnými čísly a spolu s operací násobení

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i,$$

kde  $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ , tvoří algebru, která je unitární, protože existuje prvek  $e = 1 + 0i$ , pro nějž platí že  $(1 + 0i)(a + bi) = (a + bi)(1 + 0i) = a + bi$ .

c) Vektorový prostor Hamiltonových kvaternionů  $\mathbb{H}$  spolu s operací násobení definovanou předpisem

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + cd' + ba' - dc')i \\ &+ (ac' + bd' + ca' - db')j + (ad' + bc' + da' - cb')k, \end{aligned}$$

kde  $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}$ , splňující podmínky:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij = k \quad ji = -k \quad jk = i \quad kj = -i \quad ki = j \quad ik = -j, \end{aligned}$$

tvoří algebru. Algebra je unitární, tj. existuje prvek  $e = 1 + 0i + 0j + 0k$ , pro který platí  $(1 + 0i + 0j + 0k)(a + bi + cj + dk) = (a + bi + cj + dk)(1 + 0i + 0j + 0k) = a + bi + cj + dk$ .

d) Vektorový prostor matic  $\text{Mat}_2\mathbb{R}$  řádu 2 s operací komutátoru definovanou

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in \text{Mat}_2\mathbb{R},$$

tvoří algebru. Algebra není unitární, neboť neexistuje jednotkový prvek, protože algebra je antikomutativní, tj. platí  $[A, B] = -[B, A]$ .

e) Posledním příkladem algebry je vektorový prostor spojitých funkcí  $C^\infty$  s operací

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x},$$

kde  $f, g \in C^\infty$ . Na algebře neexistuje jednotkový prvek, algebra tedy není unitární, protože je antikomutativní, platí  $[f, g] = -[g, f]$ .

## Asociativní algebry

**Definice 6.** Jestliže na algebře  $\mathbb{A}$  platí tzv. asociativní zákon

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{A},$$

potom se algebra nazývá asociativní.

**Příklad 2.** a) Na vektorové prostoru  $\mathbb{R}^3$  spolu s operací vektorového součinu  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ověříme asociativitu této operace, tj.

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

Pro  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  a  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  rozepíšeme levou a pravou stranu jako

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3, \\ &\quad u_3v_2w_3 - u_3v_3w_2 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1, \\ &\quad u_1v_3w_1 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 + u_2v_3w_2), \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (u_3v_1w_3 - u_1v_3w_3 - u_1v_2w_2 + u_2v_1w_2, \\ &\quad u_1v_2w_1 - u_2v_1w_1 - u_2v_3w_3 + u_3v_2w_3, \\ &\quad u_2v_3w_2 - u_3v_2w_2 - u_3v_1w_1 + u_1v_3w_1) \end{aligned}$$

Vidíme, že levá a pravá strana se obecně nerovnají, např. máme-li vektory

$$\mathbf{u} = (1, 2, 3),$$

$$\mathbf{v} = (4, 5, 6),$$

$$\mathbf{w} = (7, 8, 9),$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (-24, 6, 12),$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (78, 6, -66).$$

Pravá a levá strana se nerovnají, algebra není asociativní.

b) Pro vektorový prostor komplexních čísel  $\mathbb{C}$  s operací násobení ověříme, že platí asociativní zákon, tj.

$$(a + bi)[(a' + b'i)(a'' + b''i)] = [(a + bi)(a' + b'i)](a'' + b''i),$$

pro  $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathbb{R}$ . Postupně si rozepíšeme pravou a levou stranu následovně

$$\begin{aligned} (a + bi)[(a' + b'i)(a'' + b''i)] &= (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - bb'a'') \\ &\quad + (aa'b'' + ab'a'' + ba'a'' - bb'b'')i, \\ [(a + bi)(a' + b'i)](a'' + b''i) &= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - ba'b'') \\ &\quad + (aa'b'' - bb'b'' + ab'a'' + ba'a'')i. \end{aligned}$$

Pravá a levá strana se rovnají, tato algebra je asociativní.

c) Na vektorovém prostoru  $\mathbb{H}$  s operací násobení ověříme asociativitu danou rovností

$$(a + bi + cj + dk)[(a' + b'i + c'j + d'k)(a'' + b''i + c''j + d''k)] = [(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)](a'' + b''i + c''j + d''k),$$

kde  $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d, d', d'' \in \mathbb{R}$ . Po rozepsání pravé a levé strany vidíme, že

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk)[(a' + b'i + c'j + d'k)(a'' + b''i + c''j + d''k)] \\ &= (aa'a'' - ab'b'' - ac'c'' - ad'd'' - ba'b'' - bc'd'' - bb'a'' + bd'c'' \\ &\quad - ca'c'' - cb'd'' - cc'a'' + cd'b'' - da'd'' - db'c'' + dc'b'' - dd'a'') \\ &\quad + (aa'b'' + ac'd'' + ab'a'' - ad'c'' + ba'a'' - bb'b'' - bc'c'' + bd'd'' \\ &\quad + ca'd'' + cb'c'' - cc'b'' + cd'a'' - da'c'' - db'd'' - dc'a'' + dd'b'')i \\ &\quad + (aa'c'' + ab'd'' + ac'a'' - ad'b'' + ca'a'' - cb'b'' - cc'c'' - cd'd'' \\ &\quad + ba'd'' + bb'c'' - bc'b'' + bd'a'' - da'b'' - dc'd'' - db'a'' + dd'c'')j \\ &\quad + (aa'd'' + ab'c'' - ac'b'' + ad'a'' + da'a'' - db'b'' - dc'c'' - dd'd'' \\ &\quad + ba'c'' + bb'd'' + bc'a'' - bd'b'' - ca'b'' - cc'd'' - cb'a'' + cd'c'')k, \\ &[(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)](a'' + b''i + c''j + d''k) \\ &= (aa'a'' - bb'a'' - cc'a'' - dd'a'' - ab'b'' - cd'b'' - ba'b'' + dc'b'' \\ &\quad - ac'c'' - bd'c'' - ca'c'' + db'c'' - ad'd'' - bc'd'' - da'd'' + cb'd'') \\ &\quad + (aa'b'' - bb'b'' - cc'b'' - dd'b'' + ac'd'' + bd'd'' + ca'd'' - bd'd'' \\ &\quad - ad'c'' - bc'c'' - da'c'' + cb'c'' + ab'a'' + cd'a'' + ba'a'' - dc'a'')i \\ &\quad + (aa'c'' - bb'c'' - cc'c'' + dd'c'' + ab'd'' + cd'd'' + ba'd'' - dc'd'' \\ &\quad + ac'a'' + bd'a'' + ca'a'' - bd'a'' - ad'b'' - bc'b'' - da'b'' + cb'b'')j \\ &\quad + (aa'd'' - bb'd'' - cc'd'' - dd'd'' + ab'c'' + cd'c'' + ba'c'' - dc'c'' \\ &\quad - ac'b'' - bd'b'' - ca'b'' + bd'b'' + ad'a'' + bc'a'' + da'a'' - cb'a'')k. \end{aligned}$$

Levá i pravá strana se rovnají, algebra je asociativní.

d) Na vektorovém prostoru matic řádu 2  $\text{Mat}_2\mathbb{R}$  s operací komutátoru ověříme asociativitu

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C],$$

kde  $A, B, C \in \text{Mat}_2\mathbb{R}$ . Rozepíšeme pravou a levou strany jako

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= [A, BC - CB] = ABC - ACB - BCA + CBA, \\ [[A, B], C] &= [AB - BA, C] = ABC - BAC - CAB + CBA. \end{aligned}$$

Výsledky pravé a levé strany se obecně nerovnají, např. pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$



dostaneme

$$[A, [B, C]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[[A, B], C] = \begin{pmatrix} -26 & -186 & 212 \\ -30 & -190 & 220 \\ -22 & -194 & 216 \end{pmatrix}.$$

Výsledky operací se nerovnají, tato algebra není asociativní.

- e) Posledním příkladem je vektorový prostor spojitých funkcí  $C^\infty$  s operací  $[\cdot, \cdot]$ . Ověříme vlastnost asociativity, tj.

$$[f, [g, h]] = [[f, g], h],$$

pro  $f, g, h \in C^\infty$  rozepíšeme pravou a levou stranu jako

$$[f, [g, h]] = \left[ f, \frac{\partial g}{\partial x} h - g \frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} h - g \frac{\partial h}{\partial x} \right) - f \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} h - g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right),$$

$$[[f, g], h] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x}, h \right] = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g - f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) h - \left( \frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Levá a pravá strana si obecně neodpovídají, např. pro funkce

$$f = x^2,$$

$$g = x + 1,$$

$$h = \sin x,$$

$$[f, [g, h]] = x^2(\cos x - x \sin x - \sin x - \cos x) - (x \cos x + \cos x - \sin x)2x$$

$$= -x^2 \cos x - 3x \sin x - 2x \cos x - \sin x - \cos x,$$

$$[[f, g], h] = (-x^2 - 2x) \cos x - \sin x(-2x - 2)$$

$$= -x^2 \cos x - 2x \cos x + 2x \sin x + 2 \sin x.$$

Výsledky operací levé a pravé strany se nerovnají, algebra není asociativní.

## 1.2 Lieovy algebry

**Definice 7.** Algebra  $\mathbb{A}$  se nazývá Lieova algebra, jestliže platí

$$\text{a) } x \bullet y = -y \bullet x \quad \text{antisymetrie}$$

$$\text{b) } x \bullet (y \bullet z) + z \bullet (x \bullet y) + y \bullet (z \bullet x) = 0 \quad \text{Jacobiho identita}$$

pro  $x, y, z \in \mathbb{A}$ .

**Poznámka 1.** Vlastnost antisymetrie se dá nahradit alternativní podmínkou

$$\text{a*) } x \bullet x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

**Poznámka 2.** V případě Lieovy algebry se lineární operace  $\bullet$  obvykle označuje závorkou  $[x, y] := x \bullet y$ , které říkáme Lieova závorka.

**Příklad 3.** a) Na vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^3$  s operací vektorového součinu ověřujeme nejdříve první vlastnost - antisymetrie:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Rozepsáním pravé a levé strany zjistíme, že

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1), \\ -\mathbf{v} \times \mathbf{u} &= -(u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_2v_1 - u_1v_2) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1),\end{aligned}$$

a tedy první vlastnost platí. Ověříme i druhou vlastnost Jacobiho identity:

$$(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})) + (\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) + (\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u})) = \mathbf{0}.$$

Rozepsáním výrazu získáme

$$\begin{aligned}(u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3; u_3v_2w_3 - u_3v_3w_2 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1; \\ u_1v_3w_1 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 + u_2v_3w_2) + (u_1v_2w_2 - u_2v_1w_2 - u_3v_1w_3 + u_1v_3w_3; \\ u_2v_3w_3 - u_3v_2w_3 - u_1v_2w_1 + u_2v_1w_1; u_3v_2w_2 - u_2v_3w_2 - u_1v_3w_1 + u_3v_1w_1) \\ + (u_2v_2w_1 - u_1v_2w_2 - u_1v_3w_3 + u_3v_3w_1; u_3v_3w_2 - u_2v_3w_3 - u_2v_1w_1 + u_1v_1w_2; \\ u_1v_1w_3 - u_3v_1w_1 - u_3v_2w_2 + u_2v_2w_3) = (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Tento vektorový prostor splňuje obě vlastnosti a je Lieovou algebrou.

b) Vektorový prostor  $\mathbb{C}$  s operací násobení obecně nesplňuje vlastnost antisymetrie:

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= (aa' - bb') + (ab' + ba')i, \\ -(a + bi)(a' + b'i) &= (bb' - aa') - (ab' + ba')i,\end{aligned}$$

např. pro komplexní čísla

$$\begin{aligned}s &= 1 + i, \\ t &= 1 + 2i, \\ st &= (1 - 2) + (2 + 1)i = -1 + 3i, \\ -ts &= -(1 - 2) - (1 + 2)i = 1 - 3i.\end{aligned}$$

Vidíme, že se výrazy nerovnají, antisymetrie neplatí a prostor není Lieovou algebrou.

c) Pro vektorový prostor  $\mathbb{H}$  nejdřív ověříme antisymetrii jako

$$(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = -(a' + b'i + c'j + d'k)(a + bi + cj + dk).$$

Rozepsáním pravé a levé strany dostaneme

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) &= (aa' - bb' - cc' - dd') \\ &\quad + (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + bd' - db')j + (ad' + da' + bc' - cb')k, \\ -(a' + b'i + c'j + d'k)(a + bi + cj + dk) &= -(aa' - bb' - cc' - dd') \\ &\quad - (ba' + ab' + dc' - cd')i - (ca' + ac' + db' - bd')j - (da' + d'a + cb' - bc')k.\end{aligned}$$

Vidíme, že se obě strany se sobě obecně nerovnaj, např. pro kvaterniony

$$\begin{aligned} e &= 1 + i + j + k, \\ f &= 1 + 2i + 2j + k, \\ ef &= (1 - 2 - 2 - 1) + (2 + 1 + 1 - 2)i + (2 + 1 + 1 - 2)j + (1 + 1 + 2 - 2)k \\ &= -4 + 2i + 2j + 2k, \\ -fe &= -(1 - 2 - 2 - 1) - (1 + 2 + 2 - 1)i - (2 + 1 + 2 - 1)j - (1 + 1 + 2 - 2)k \\ &= 4 - 4i - 4j - 2k. \end{aligned}$$

Prostor nespĺňuje první podmínku a proto není Lieovou algebrou.

- d) Na vektorovém prostoru reálných matic druhého řádu s operací komutátoru ověřujeme nejdřív první podmínku antisymetrie jako

$$[A, B] = -[B, A].$$

Rozepíšeme-li levou a pravou stranu, dostaneme

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA, \\ -[B, A] &= -(BA - AB) = AB - BA. \end{aligned}$$

Pravá a levá strana se rovnají, tedy první vlastnost je overěna. Nyní ověříme druhou vlastnost Jacobiho identity

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0.$$

Opět rozepíšeme jednotlivé operace a dostaneme

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &\quad + B(CA - AC) - (CA - AC)B = ABC - CBA - BCA + CBA \\ &\quad + CAB - CBA - ABC + BAC + BCA - BAC - CAB + ACB = 0. \end{aligned}$$

Obě vlastnosti platí a vektorový prostor je Lieovou algebrou.

- e) Pro vektorový prostor  $C^\infty$  spojitých funkcí nejdřív ověříme antisymetrii jako

$$[f, g] = -[g, f].$$

Rozepíšeme si obě strany rovnice

$$\begin{aligned} [f, g] &= \frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}, \\ -[g, f] &= -\left(\frac{\partial g}{\partial x}f - g\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}, \end{aligned}$$

a vidíme, že se strany rovnají. Ověříme taktéž druhou vlastnost

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0.$$

Rozepíšeme si jednotlivé výrazy a dostaneme

$$\begin{aligned}
[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] &= h \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} - g \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - fh \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + g \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \\
&\quad - f \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} - gh \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fh \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} - gf \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + gh \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0.
\end{aligned}$$

Jelikož vektorový prostor splňuje i podmínku Jacobiho identity, je Lieovou algebrou.

Přehled vlastností algeber z příkladu 1 uvádíme v následující tabulce.

	unitární algebra	asociativní algebra	Lieova algebra
$\mathbb{R}^3$			✓
$\mathbb{C}$	✓	✓	
$\mathbb{H}$	✓	✓	
$Mat_2\mathbb{R}$			✓
$C^\infty$			✓

**Poznámka 3** (viz [8]). a) Vektorový prostor, pro něž platí  $[X, Y] = 0, \forall X, Y$ , se nazývá *Abelovská Lieova algebra*.

b) *Speciální Lieova algebra* je tvořena vektorovým polem reálných matic  $M$  typu  $n \times n$  s nulovou stopou  $Tr(M) = 0$  a operací komutátoru. Je izomorfní s algebrou z příkladu 3.a) a je Lieovou podalgebrou matic  $2 \times 2$  nad reálnými čísly z příkladu 3.d).

c) Vektorový prostor nad maticemi řádu 2 s nulovým druhým řádkem s operací komutátoru, se nazývá *afinní Lieova algebra přímky*. Bázi prostoru tvoří prvky

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a platí  $[X_1, X_2] = X_2$ .

### 1.3 Afinní prostory

**Definice 8.** Necht'  $\mathcal{A}$  je neprázdná množina, jejíž prvky nazýváme body. Necht'  $\mathbb{V}$  je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel  $\mathbb{R}$  a dále necht'  $\vec{\cdot} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}$  je zobrazení splňující:

1. Pro libovolný bod  $A \in \mathcal{A}$  a libovolný vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  existuje jediný bod  $B \in \mathcal{A}$  s vlastností  $\vec{\cdot}(A, B) := \overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ .
2. Pro libovolné body  $A, B, C \in \mathcal{A}$  platí  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Potom  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, \vec{\cdot})$  se nazývá *afinní prostor*. Vektorový prostor  $\mathbb{V}$  se nazývá *zaměření* afinního prostoru  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, \vec{\cdot})$  a označuje se  $Z(\mathcal{A})$ .

Je-li  $\dim \mathbb{V} = n$ , pak říkáme, že afinní prostor  $\mathcal{A}$  je *n-rozměrný* (nebo též *dimenze n*), a píšeme  $\dim \mathcal{A} = n$ .

**Věta 1.** Necht'  $A, B \in \mathcal{A}$ ;  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{A})$  a necht'  $\mathbf{o}$  značí nulový vektor zaměření  $Z(\mathcal{A})$ . Pak platí:

$$1. \overrightarrow{AB} = \mathbf{o} \Leftrightarrow A = B.$$

$$2. \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

*Důkaz.* 1. "  $\Leftarrow$  " Platí  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ . Přičteme-li opačný vektor k oběma stranám rovnice, dostaneme  $\overrightarrow{AA} = \mathbf{o}$ .

"  $\Rightarrow$  " Necht'  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{o}$ . Podle předchozí je  $\overrightarrow{AA} = \mathbf{o}$ , tzn.  $A = B$ .

$$2. \text{ Platí } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{o}, \text{ tzn. } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

□

Připomeňme, že když  $\mathbb{V}$  je vektorový prostor a systém vektorů  $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  je bází  $\mathbb{V}$ , pak libovolný vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  lze jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů této báze jako

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n.$$

Uspořádanou  $n$ -tici koeficientů  $(u_1, \dots, u_n)$  nazýváme souřadnicemi vektoru  $\mathbf{u}$  v bázi  $\mathcal{B}$ .

**Definice 9.** Necht'  $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  a  $\mathcal{B}' = \langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n \rangle$  jsou báze vektorového prostoru  $\mathbb{V}$  a platí

$$\mathbf{d}_j = a_{1j} \mathbf{e}_1 + a_{2j} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj} \mathbf{e}_n,$$

kde  $j = 1, \dots, n$ , pak matice  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , tj. matice, v jejíchž sloupcích vystupují souřadnice vektorů  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  vyjádřené v bázi  $\mathcal{B}$ , se nazývá matice přechodu od báze  $\mathcal{B}$  k bázi  $\mathcal{B}'$ .

**Definice 10.** Necht'  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, \rightarrow)$  je afinní prostor,  $\dim \mathcal{A} \geq 1$ , necht'  $P \in \mathcal{A}$  je pevný bod a necht'  $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  je báze zaměření  $Z(\mathcal{A})$ . Afinním repérem (nebo afinním souřadnicovým systémem) v  $\mathcal{A}$  rozumíme systém

$$\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Bod  $P$  se nazývá počátek a vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  se nazývají základní vektory afinního repéru.

Přímky  $x_i = \{P; \text{span}(\mathbf{e}_i)\}$  se nazývají osy afinních souřadnic (nebo souřadné osy afinního repéru).

**Definice 11.** Necht'  $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  je afinní repér v  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, \rightarrow)$  a  $X \in \mathcal{A}$  je bod. Uspořádaná  $n$ -tice reálných čísel  $x_i, i = 1, \dots, n$  splňující

$$\overrightarrow{PX} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

se nazývá souřadnicemi bodu  $X$  v afinním repéru  $\mathcal{R}$  (nebo afinními souřadnicemi bodu  $X$  vzhledem k repéru  $\mathcal{R}$ ).

Souřadnicemi vektoru  $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A})$  v  $\mathcal{R}$  nazýváme souřadnice vektoru  $\mathbf{u}$  v bázi  $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ , tzn. uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel  $u_i, i = 1, \dots, n$  splňující

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n.$$

Nechť jsou v  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, \rightarrow)$  dány dva repéry  $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  a  $\mathcal{R}' = \langle P'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ , přičemž  $P' = [b_1, \dots, b_n]$  je souřadnicové vyjádření bodu  $P'$  vzhledem k repéru  $\mathcal{R}$  a matice  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  je matice přechodu od báze  $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  k bázi  $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$  zaměření  $Z(\mathcal{A})$ , tzn. platí

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Nechť  $X \in \mathcal{A}$  je pevný bod, přičemž  $X = [x_1, \dots, x_n]$  vzhledem k repéru  $\mathcal{R}$ , resp.  $X = [x'_1, \dots, x'_n]$  vzhledem k repéru  $\mathcal{R}'$ . Platí

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PX} &= x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \\ \overrightarrow{P'X} &= x'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n, \\ \overrightarrow{PP'} &= b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Dosazením za  $\mathbf{e}'_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  dostaneme

$$\overrightarrow{P'X} = x'_1 \sum_{i=1}^n a_{i1} \mathbf{e}_i + \dots + x'_n \sum_{i=1}^n a_{in} \mathbf{e}_i.$$

Zřejmě platí  $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X}$ . Po dosazení a úpravách dostaneme rovnice, které můžeme stručně zapsat jako

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i + b_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Maticově získáme vyjádření jako

$$X = AX' + B. \quad (1.2)$$

**Definice 12.** Rovnice (1.1) a (1.2) nazýváme transformační rovnice souřadnice bodů při přechodu od repéru  $\mathcal{R}$  k repéru  $\mathcal{R}'$ .

Matice  $A$  se nazývá matice přechodu od repéru  $\mathcal{R}$  k repéru  $\mathcal{R}'$ .

## 1.4 Řídicí systémy

Hladkým vektorovým polem na afinním prostoru  $\mathcal{A}$  rozumíme vektorovou funkci  $f : \mathcal{A} \rightarrow Z(\mathcal{A})$ . V souřadnicích můžeme psát:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

kde  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\dim Z(\mathcal{A}) = n$ ,  $f_i(x) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(x) \in C^\infty$ .

Vektorová pole na  $\mathcal{A}$  tvoří vektorový prostor označovaný  $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ , kde příslušnými operacemi jsou

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) + g_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) + g_n(x) \end{pmatrix},$$

$$r \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r f_1(x) \\ \vdots \\ r f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Na vektorovém prostoru hladkých vektorových polí  $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$  zavedeme operaci  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{A})$  jako

$$[a, b] = (a(b_1) - b(a_1)) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \dots + (a(b_n) - b(a_n)) \frac{\partial}{\partial \alpha_n}, \quad (1.3)$$

kde  $a(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial \alpha_i}$ ,  $b(a_j) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial a_j}{\partial \alpha_i}$ . Vektorový prostor  $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$  spolu s operací  $[\cdot, \cdot]$  tvoří Lieovu algebru. Důkaz můžeme nalézt např. v [6].

**Definice 13.** Necht'  $\{g_1, \dots, g_m\}$  je množina hladkých vektorových polí, distribucí generovanou vektorovými poli  $g_1, \dots, g_m$  rozumíme podprostor

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \subseteq \mathfrak{X}(\mathcal{A}),$$

kde lineární obal konstruujeme přes množinu hladkých reálných funkcí na  $\mathcal{A}$ .

Distribuce vyčíslená v jakémkoliv bodě  $q \in \mathcal{A}$  definuje podprostor zaměření

$$\Delta_q = \text{span}\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \subset Z(\mathcal{A}).$$

**Definice 14.** Řídicím systémem asociovaným k distribuci  $\Delta$ , generované hladkými vektorovými poli  $g_1, \dots, g_m$ , rozumíme diferenciální rovnici  $\dot{q} \in \Delta$ ,  $q \in \mathcal{A}$ , tj.

$$\dot{q} = u_1 g_1(q) + \dots + u_m g_m(q), \quad q \in \mathcal{A}, \quad u_i \in C^\infty, \quad (1.4)$$

kde  $m > 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  a  $g_1, \dots, g_m$  jsou hladká vektorová pole na  $\mathcal{A}$ .

**Definice 15.** Trajektorie řídicího systému (1.4) je zobrazení  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{A}$ , pro které existuje funkce  $u_i \in C^\infty$  taková, že  $\gamma$  je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(q(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

Funkce  $u(\cdot)$  se nazývá řízení přidružené k zobrazení  $\gamma$ .

Každá trajektorie je tedy absolutně spojitě zobrazení  $\gamma$  na množině  $\mathcal{A}$  takové, že  $\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t))$  pro všechna  $t \in [0, T]$ .

**Definice 16.** Distribuce je regulární, jestliže dimenze podprostoru  $\Delta_q$  nezávisí na  $q$ .

**Definice 17.** Distribuce je involutivní, jestliže je uzavřená na operaci Lieovy závorky, tj.

$$\forall f, g \in \Delta, \quad [f, g] \in \Delta.$$

**Definice 18.** Involutivní uzávěr  $\bar{\Delta}$  je uzávěr distribuce  $\Delta$  vzhledem k Lieově závorce, tj.  $\bar{\Delta}$  je nejmenší involutivní distribuce obsahující distribuci  $\Delta$ .

**Poznámka 4.** Involutivní uzávěr  $\bar{\Delta}$  je Lieovou algebrou nazývanou také Lieova algebra generovaná množinou hladkých vektorových polí  $g_1, \dots, g_m$  a bývá označován jako  $\mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)$ . Hodnost  $\mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)$  v bodě  $q \in \mathcal{A}$  definujeme jako dimenzi podprostoru  $\bar{\Delta}_q$ .

**Definice 19.** Dosažitelná množina z bodu  $q \in \mathcal{A}$  je definována jako množina  $\mathcal{R}_q$  bodů dosažitelných pomocí trajektorie  $\gamma$  systému (1.4) z bodu  $q$ .

**Definice 20.** Řekneme, že systém (1.4) vyhovuje Chowově podmínce, když

$$\mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)(q) = Z(\mathcal{A}), \forall q \in \mathcal{A}.$$

**Poznámka 5.** Tato vlastnost je známá jako podmínka hodnosti Lieovy algebry v teorii řízení a jako Hörmanderova podmínka v kontextu parciálních diferenciálních rovnic [1].

Důkazy následujících vět je možné nalézt např. v pracích [1] a [6].

**Věta 2.** Jestliže systém (1.4) splňuje Chowovu podmínku, potom dosažitelnou množinou  $\mathcal{R}_q$  je okolí bodu  $q$ ,  $\forall q \in \mathcal{A}$ .

**Definice 21.** Říkáme, že řídicí systém v bodě  $q \in \mathcal{A}$  je lokálně říditelný, pokud  $\mathcal{R}_q$  je okolí bodu  $q$ .

**Věta 3** (Chow-Rashevského teorém). Jestliže množina  $\mathcal{A}$  je souvislá a systém (1.4) splňuje Chowovu podmínku, potom lze každé dva body množiny  $\mathcal{A}$  spojit trajektorií tohoto systému.

**Poznámka 6.** Lieova algebra  $\bar{\Delta} = \mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)$  generovaná vektory  $g_1, \dots, g_m$  se někdy označuje jako Lieova algebra říditelnosti.

**Věta 4** (Chowova věta). Řídicí systém (1.4) je lokálně říditelný v bodě  $q$ , jestliže

$$\bar{\Delta}_q = Z(\mathcal{A}).$$



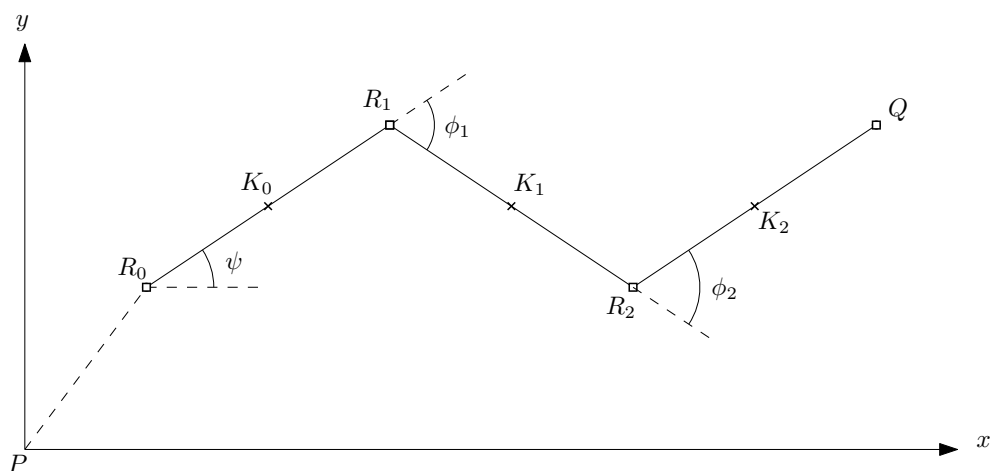
# Kapitola 2

## Neholonomní mechanika

Mějme obecného tříčlankového robotického hada podle obrázku 2.1 na afinním prostoru  $\mathcal{A}$  dimenze tři. Bod  $P = [0, 0, 0] \in \mathcal{A}$  je počátkem referenčního souřadného systému. Bod  $R_0 = [x_0, y_0, z_0] \in \mathcal{A}$  je počátkem hada a bod  $Q \in \mathcal{A}$  je jeho hlavou, v místech bodů  $R_1 = [x_1, y_1, z_1] \in \mathcal{A}$ ,  $R_2 = [x_2, y_2, z_2] \in \mathcal{A}$  jsou umístěny servomotory. Uprostřed článků o délce  $l$  jsou umístěna pasivní kolečka v bodech  $K_0, K_1, K_2 \in \mathcal{A}$ .

### 2.1 Metoda pohyblivého repéru

Díky metodě pohyblivého repéru, či pohyblivé báze, můžeme vyjádřit souřadnice hlavy (případně kolečka) robotického hada ve zvoleném afinním repéru.



Obrázek 2.1: Popis tříčlankového robotického hada

Mějme afinní repéry tvořené počátečními body a bázemi zaměření

$$\beta_0 = (P, x, y, z), \quad \beta_1 = (R_0, x_0, y_0, z_0), \quad \beta_2 = (R_1, x_1, y_1, z_1), \quad \beta_3 = (R_2, x_2, y_2, z_2).$$

Vyjádříme matice přechodu mezi jednotlivými bázemi zaměření. Pro přechod od repéru  $\beta_1$  k  $\beta_0$  dostáváme jako matici přechodu matici rotace kolem osy  $z$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále máme matici rotace  $A_1$  kolem osy  $z$ , která vyjadřuje přechod od repéru  $\beta_2$  k repéru  $\beta_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poslední maticí rotace je matice přechodu  $A_2$  od repéru  $\beta_3$  k repéru  $\beta_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní si postupně vyjádříme souřadnice hlavy v jednotlivých repérech. Budeme bod hlavy vyjadřovat vždy jako souřadnice vektoru mezi počátkem systému a bodem hlavy ve vhodné bázi zaměření.

$$\begin{aligned} (R_2Q)_{\beta_3} &= (l, 0, 0)^T, \\ (R_1Q)_{\beta_2} &= (R_1R_2)_{\beta_2} + (R_2Q)_{\beta_2} = (l, 0, 0)^T + A_2 (R_2Q)_{\beta_3} = (l, 0, 0)^T + A_2 (l, 0, 0)^T, \\ (R_0Q)_{\beta_1} &= (R_0R_1)_{\beta_1} + (R_1R_2)_{\beta_1} + (R_2Q)_{\beta_1} = (l, 0, 0)^T + A_1 (R_1R_2)_{\beta_2} + A_2 A_1 (R_2Q)_{\beta_3} \\ &= (l, 0, 0)^T + A_1 (l, 0, 0)^T + A_2 A_1 (l, 0, 0)^T, \\ (PQ)_{\beta_0} &= (PR_0)_{\beta_0} + (R_0R_1)_{\beta_0} + (R_1R_2)_{\beta_0} + (R_2R_3)_{\beta_0} \\ &= (x_0, y_0, z_0)^T + A_0 (R_0R_1)_{\beta_1} + A_0 (R_1R_2)_{\beta_1} + A_0 (R_2Q)_{\beta_1} \\ &= (x_0, y_0, z_0)^T + A_0 (l, 0, 0)^T + A_1 A_0 (R_1R_2)_{\beta_2} + A_1 A_0 (R_2Q)_{\beta_2} \\ &= (x_0, y_0, z_0)^T + A_0 (l, 0, 0)^T + A_1 A_0 (l, 0, 0)^T + A_2 A_1 A_0 (l, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Vektor  $(PQ)$  v afinním repéru  $\beta_0$  můžeme vyjádřit maticově jako

$$\begin{aligned} (PQ)_{\beta_0} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde  $\psi, \phi_1, \phi_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

## 2.2 Kinematické rovnice

Abychom mohli odvodit neholonomní vazby, je třeba vyjádřit také souřadnice vektorů od počátku afinního repéru  $\beta_0$  k jednotlivým kolečkům.

$$\begin{aligned}
 (PK_0)_{\beta_0} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos \psi \\ \frac{l}{2} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 (PK_1)_{\beta_0} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \cos \psi \\ l \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2}(\cos \phi_1 \cos \psi - \sin \phi_1 \sin \psi) \\ \frac{l}{2}(\sin \phi_1 \cos \psi + \cos \phi_1 \sin \psi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \cos \psi \\ l \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos(\phi_1 + \psi) \\ \frac{l}{2} \sin(\phi_1 + \psi) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 (PK_2)_{\beta_0} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \cos \psi \\ l \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \cos(\phi_1 + \psi) \\ l \sin(\phi_1 + \psi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos(\phi_2 + \phi_1 + \psi) \\ \frac{l}{2} \sin(\phi_2 + \phi_1 + \psi) \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ve výpočtech jsme využili dvou goniometrických vzorců

$$\begin{aligned}
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\
 \sin(x + y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y.
 \end{aligned}$$

Přepsáním do vektorového tvaru a vynecháním z-ové souřadnice, která je po celou

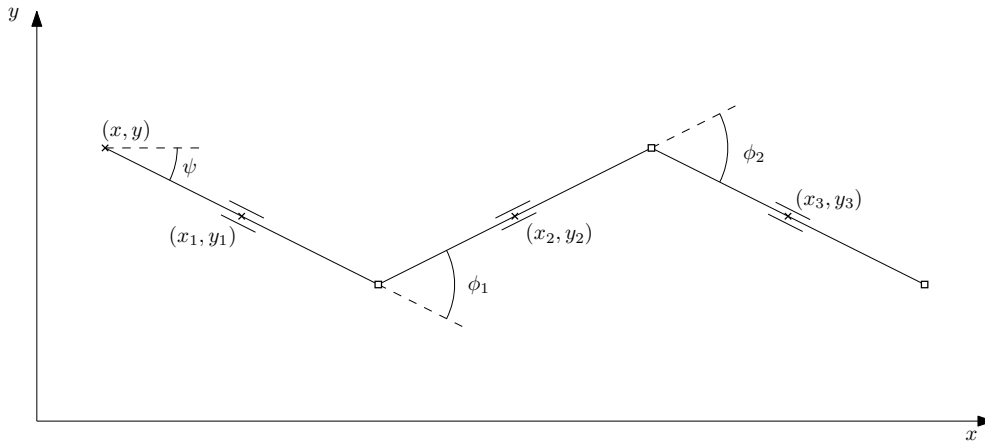
dobu pohybu hada nulová, neboť předpokládáme pouze rovinný pohyb, získáme rovnice

$$\begin{aligned}
 (PK_0)_{\beta_0} &= (x_0, y_0)^T + \frac{l}{2}(\cos \psi, \sin \psi)^T, \\
 (PK_1)_{\beta_0} &= (x_0, y_0)^T + l(\cos \psi, \sin \psi)^T + \frac{l}{2}(\cos(\phi_1 + \psi), \sin(\phi_1 + \psi))^T, \\
 (PK_1)_{\beta_0} &= (x_0, y_0)^T + l(\cos \psi, \sin \psi)^T + l(\cos(\phi_1 + \psi), \sin(\phi_1 + \psi))^T \\
 &\quad + \frac{l}{2}(\cos(\phi_2 + \phi_1 + \psi), \sin(\phi_2 + \phi_1 + \psi))^T,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

které budeme dále využívat.

## 2.3 Neholonomní podmínky

Robotického hada potřebujeme pro své účely popsat rovnicemi, z nichž dále vyvodíme pohyby, kterých je had schopen či nikoliv. Využijeme již dříve vypočítaných rovnic (2.1).



Obrázek 2.2: Matematický model tříčlankového hada

Napišeme si rovnice (2.1) a za délku článku dosadíme  $l = 2$ :

$$\begin{aligned}
 (x_1, y_1) &= (x, y) + (\cos \psi, \sin \psi), \\
 (x_2, y_2) &= (x, y) + 2(\cos \psi, \sin \psi) + (\cos(\phi_1 + \psi), \sin(\phi_1 + \psi)), \\
 (x_3, y_3) &= (x, y) + 2(\cos \psi, \sin \psi) + 2(\cos(\phi_1 + \psi), \sin(\phi_1 + \psi)) \\
 &\quad + (\cos(\phi_2 + \phi_1 + \psi), \sin(\phi_2 + \phi_1 + \psi)).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dalším krokem je určení neholonomních podmínek, které dostaneme pomocí derivace rovnic (2.2) podle času, čímž dostaneme vektory rychlosti jednotlivých koleček:

$$\begin{aligned}
 (\dot{x}_1, \dot{y}_1) &= (\dot{x}, \dot{y}) + (-\sin \psi, \cos \psi)\dot{\psi}, \\
 (\dot{x}_2, \dot{y}_2) &= (\dot{x}, \dot{y}) + 2(-\sin \psi, \cos \psi)\dot{\psi} + (-\sin(\phi_1 + \psi), \cos(\phi_1 + \psi))(\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}), \\
 (\dot{x}_3, \dot{y}_3) &= (\dot{x}, \dot{y}) + 2(-\sin \psi, \cos \psi)\dot{\psi} + 2(-\sin(\phi_1 + \psi), \cos(\phi_1 + \psi))(\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}) \\
 &\quad + (-\sin(\phi_2 + \phi_1 + \psi), \cos(\phi_2 + \phi_1 + \psi))(\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1 + \dot{\psi}).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Abychom získali neholonomní rovnice, musíme ještě vyjádřit směrové a normálové vektory jednotlivých článků s kolečky:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= (\cos \psi, \sin \psi), \\ \mathbf{n}_1 &= (-\sin \psi, \cos \psi), \\ \mathbf{s}_2 &= (\cos(\psi + \phi_1), \sin(\psi + \phi_1)), \\ \mathbf{n}_2 &= (-\sin(\psi + \phi_1), \cos(\psi + \phi_1)), \\ \mathbf{s}_3 &= (\cos(\psi + \phi_1 + \phi_2), \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)), \\ \mathbf{n}_3 &= (-\sin(\psi + \phi_1 + \phi_2), \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)).\end{aligned}$$

Stanovíme neholonomní podmínky této soustavy, které zabraňují prokluzování koleček tak, že požadujeme, aby vektor rychlosti jednotlivých koleček byl vždy kolmý na normálový vektor příslušného článku:

$$\mathbf{n}_i \cdot (\dot{x}_i, \dot{y}_i) = 0. \quad (2.4)$$

Do podmínek dosadíme vypočítané derivace z (2.3) a získáme tři rovnice

$$\begin{aligned}(-\sin \psi, \cos \psi) \cdot ((\dot{x}, \dot{y}) + (-\sin \psi, \cos \psi) \dot{\psi}) &= 0, \\ (-\sin(\psi + \phi_1), \cos(\psi + \phi_1)) \cdot ((\dot{x}, \dot{y}) + 2(-\sin \psi, \cos \psi) \dot{\psi} + \\ &(-\sin(\phi_1 + \psi), \cos(\psi_1 + \psi)) (\dot{\phi}_1 + \dot{\psi})) = 0, \\ (-\sin(\psi + \phi_1 + \phi_2), \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \cdot ((\dot{x}, \dot{y}) + 2(-\sin \psi, \cos \psi) \dot{\psi} \\ &+ 2(-\sin(\phi_1 + \psi), \cos(\phi_1 + \psi)) (\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}) \\ &+ (-\sin(\phi_2 + \phi_1 + \psi), \cos(\phi_2 + \phi_1 + \psi)) (\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1 + \dot{\psi})) = 0.\end{aligned}$$

Úpravou a využitím goniometrických vzorců pak dostaneme výsledné neholonomní podmínky

$$\begin{aligned}\dot{x} \sin \psi - \dot{\psi} - \dot{y} \cos \psi &= 0, \\ \dot{x} \sin(\psi + \phi_1) - 2\dot{\psi} \cos \phi_1 - (\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}) - \dot{y} \cos(\psi + \phi_1) &= 0, \\ \dot{x} \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) - 2\dot{\psi} \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2\dot{\phi}_1 \cos(\psi + \phi_2) \\ - \dot{\phi}_2 \cos(\psi + \phi_1) - \dot{y} \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) &= 0.\end{aligned} \quad (2.5)$$

# Kapitola 3

## Modely

Tato kapitola se zabývá konkrétními případy chybějících koleček. Budeme diskutovat situaci s chybějícími kolečky na prostředním či posledním článku. Nastíníme i stav, kdy jediná kolečka jsou umístěna na prostředním článku. Pro každý případ vypočítáme parametrické řešení a nalezneme řídicí distribuce. Na konci tohoto oddílu jsou uvedeny názorné příklady konfigurací a diskuse říditelnosti.

Výpočty byly prováděny za pomoci softwaru Maple 17. Zdrojové kódy výpočtů rovnic a řídicích distribucí (`rovnice_posledni.mw`, `rovnice_prostredni.mw`, `rovnice_jedno_kolecko.mw`) a hodnotí matic v příkladech (`hodnosti_posledni.mw`, `hodnosti_prostredni.mw`, `hodnosti_jedno_kolecko.mw`) jsou uvedeny v příloze práce.

### 3.1 Parametrické řešení

Z předchozí kapitoly vzešla soustava tří diferenciálních rovnic (2.5), kterou si volbou pro konkrétní parametry  $\psi, \phi_1, \phi_2, x$  a  $y$  můžeme představit jako soustavu tří lineárních rovnic o 5 neznámých.

Matice soustavy budeme upravovat na redukovanou trojúhelníkovou matici. Vedoucím prvkem  $i$ -tého řádku matice rozumíme jeho první nenulový prvek.

**Definice 1.** Matice  $A = [a_{ij}]$  typu  $m \times n$ ;  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ , se nazývá redukovaná trojúhelníková matice, jestliže

- a) má pouze nenulové řádky,
- b) každý vedoucí prvek je roven 1,
- c) nad každým vedoucím prvkem jsou ve sloupci pouze 0.

### Chybějící kolečka na posledním článku

V tomto případě se jedná o soustavu dvou lineárních rovnic o pěti neznámých  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}, \dot{\phi}_1$  a  $\dot{\phi}_2$ .

$$\dot{x} \sin \psi - \dot{\psi} - \dot{y} \cos \psi = 0, \quad (3.1)$$

$$\dot{x} \sin(\psi + \phi_1) - 2\dot{\psi} \cos \phi_1 - (\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}) - \dot{y} \cos(\psi + \phi_1) = 0.$$

V maticovém zápisu lze systém (3.1) vyjádřit jako

$$A \cdot \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 1 + 2 \cos(\phi_1) & 1 & 0 & -\sin(\psi + \phi_1) & \cos(\psi + \phi_1) \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních řádkových úprav matice  $A$  získáme redukovanou trojúhelníkovou matici  $\bar{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 0 & 1 & 0 & -\sin(\psi) - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_1) - \sin(\psi + \phi_1) & -\cos(\psi) - 2 \cos(\psi) \cos(\phi_1) + \cos(\psi + \phi_1) \end{pmatrix}.$$

Tento homogenní systém rovnic má nekonečně mnoho řešení podle Frobeniovy věty [4], protože hodnosti matic jsou totožné a platí  $h(A) = h(\bar{A}) < n$ , kde  $n$  je počet neznámých.

Z matice soustavy  $\bar{A}$  odvodíme přímočaře parametrické řešení jako

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= s \mathbf{g}_1 + t \mathbf{g}_2 + u \mathbf{g}_3 \\ &= s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin(\psi) \\ -\sin(\psi) - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_1) - \sin(\psi + \phi_1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + u \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) - 2 \cos(\psi) \cos(\phi_1) + \cos(\psi + \phi_1) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Chybějící kolečka na prostředním článku

Opět se jedná o soustavu dvou lineárních rovnic o 5 neznámých  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}, \dot{\phi}_1$  a  $\dot{\phi}_2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} \sin \psi - \dot{\psi} - \dot{y} \cos \psi &= 0, \\ \dot{x} \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) - 2\dot{\psi} \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2\dot{\phi}_1 \cos(\psi + \phi_2) & \\ -\dot{\phi}_2 \cos(\psi + \phi_1) - \dot{y} \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Maticově soustavu (3.2) zapíšeme jako

$$A \cdot \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 2 \cos(\phi_2 + \phi_1) + \cos(\phi_2) + 1 & 2 \cos(\phi_2) + 1 & 1 & -\sin(\phi_2 + \phi_2 + \psi) & \cos(\phi_2 + \phi_2 + \psi) \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních řádkových úprav matice  $A$  získáme redukovanou trojúhelníkovou matici  $\bar{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} & f & g \end{pmatrix},$$

$$\text{kde } f = \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2 \sin(\phi) \cos(\phi_2) + \sin(\phi_2 + \phi_2 + \psi) + \cos(\psi)}{2 \cos(\phi_2) + 1},$$

$$h = -\frac{2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) + \cos(\phi_2 + \phi_2 + \psi) + \cos(\psi)}{2 \cos(\phi_2) + 1}.$$

Tento homogenní systém rovnic má opět nekonečně mnoho řešení podle Frobeniovy věty [4], protože hodnoty matic jsou totožné a platí  $h(A) = h(\bar{A}) < n$ , kde  $n$  je počet neznámých.

Z matice soustavy  $\bar{A}$  opět přímočaře odvodíme parametrické řešení jako

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \mathbf{g}_1 + t \mathbf{g}_2 + u \mathbf{g}_3 = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ f \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ h \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Chybějící kolečka na krajních člancích

Získali jsme rovnici o pěti neznámých  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\phi}_1$  a  $\dot{\phi}_2$ . Soustavu můžeme vyjádřit maticově jako

$$\mathbf{a} \cdot \Psi = 0,$$

kde vektor  $\mathbf{a} = (1 + 2 \cos(\phi_1); 1; 0; -\sin(\psi + \phi_1); \cos(\psi + \phi_1))$  a matice

$$\Psi = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Úpravou vektoru  $\mathbf{a}$  dostaneme

$$\mathbf{a} = \left( 1; \frac{1}{1 + 2 \cos(\phi_1)}; 0; \frac{-\sin(\psi + \phi_1)}{1 + 2 \cos(\phi_1)}; \frac{\cos(\psi + \phi_1)}{1 + 2 \cos(\phi_1)} \right).$$



Naše homogenní rovnice má nekonečně mnoho řešení podle Frobeniovy věty [4]. Z vektoru  $\mathbf{a}$  přímočaře odvodíme parametrické řešení jako

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \mathbf{g}_1 + t \mathbf{g}_2 + u \mathbf{g}_3 + v \mathbf{g}_4$$

$$= s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2 \cos(\phi_1) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\sin(\psi + \phi_1) \\ 1 + 2 \cos(\phi_1) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos(\psi + \phi_1) \\ 1 + 2 \cos(\phi_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Řídící distribuce

### Chybějící kolečka na posledním článku

Z minulé podkapitoly jsme získali tři vektory popisující parametrické řešení rovnic jako

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\psi) \\ -\sin(\psi) - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_1) - \sin(\psi + \phi_1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) - 2 \cos(\psi) \cos(\phi_1) + \cos(\psi + \phi_1) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z nichž vypočítáme Lieovy závorky pomocí vzorce (1.3) jako

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(\psi)(2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1)) \\ + (2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1))(2\cos(\psi)\sin(\phi_1) \\ - \sin(\psi + \phi_1)) - \cos(\psi)(2\cos(\psi)\cos(\phi_1) + \cos(\psi) \\ - \cos(\psi + \phi_1)) - (-2\cos(\psi)\cos(\phi_1) - \cos(\psi) + \cos(\psi + \phi_1)) \\ \cdot (-2\sin(\psi)\sin(\phi_1) - \cos(\psi + \phi_1)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
[\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]] &= \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ -(2\cos(\psi)\cos(\phi_1) + \cos(\psi) - \cos(\psi + \phi_1)) \\ -(-\sin(\psi)(2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1)) \\ + (2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1))(2\cos(\psi)\sin(\phi_1) \\ - \sin(\psi + \phi_1)) - \cos(\psi)(2\cos(\psi)\cos(\phi_1) + \cos(\psi) - \cos(\psi + \phi_1)) \\ - (-2\cos(\psi)\cos(\phi_1) - \cos(\psi) + \cos(\psi + \phi_1))(-2\sin(\psi)\sin(\phi_1) \\ - \cos(\psi + \phi_1))(-2\sin(\psi)\sin(\phi_1) - \cos(\psi + \phi_1)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
[\mathbf{g}_3, [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]] &= \begin{pmatrix} \sin(\psi) \\ -(2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1)) \\ -(-\sin(\psi)(2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1)) \\ + (2\sin(\psi)\cos(\phi_1) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1))(2\cos(\psi)\sin(\phi_1) \\ - \sin(\psi + \phi_1)) - \cos(\psi)(2\cos(\psi)\cos(\phi_1) + \cos(\psi) \\ - \cos(\psi + \phi_1)) - (-2\cos(\psi)\cos(\phi_1) - \cos(\psi) \\ + \cos(\psi + \phi_1))(-2\sin(\psi)\sin(\phi_1) - \cos(\psi + \phi_1)) \\ \cdot (2\cos(\psi)\sin(\phi_1) - \sin(\psi + \phi_1)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Z výpočtů je hned vidět, že tato distribuce není obecně involutivní, neboť  $[\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] \notin \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ .

## Chybějící kolečka na prostředním článku

Z minulé podkapitoly jsme získali tři vektory popisující parametrické řešení rovnic jako

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\psi) \\ f \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ h \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{kde } f = \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2 \sin(\phi) \cos(\phi_2) + \sin(\phi_2 + \phi_2 + \psi) + \cos(\psi)}{2 \cos(\phi_2) + 1},$$

$$h = -\frac{2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) + \cos(\phi_2 + \phi_2 + \psi) + \cos(\psi)}{2 \cos(\phi_2) + 1}.$$

Z těchto vektorů vypočítáme Lieovy závorky podle vzorce (1.3)

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2 \sin(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} \\ + \frac{2(2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \sin(\psi)) \sin(\phi_2)}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} \\ + \frac{-2 \sin(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - 2 \sin(\psi) \sin(\phi_2) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)}{2 \cos(\phi_2) + 1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2 \cos(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} \\ -\frac{2(2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) + \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\psi)) \sin(\phi_2)}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} \\ -\frac{-2 \cos(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - 2 \cos(\psi) \sin(\phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)}{2 \cos(\phi_2) + 1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} (\sin(\psi) (-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) \\ - \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_2 + \phi_2)) - (\cos(\psi) (2 \cos(\psi) \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ + 2 \cos(\psi) \cos(\psi_2) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\psi))) \\ - \frac{1}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} ((2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) \\ - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \sin(\psi)) (-2 \cos(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \\ + (2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) + \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) \\ + \cos(\psi)) (-2 \sin(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2))) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
[\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]] &= \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \frac{2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) + \cos(\psi) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)}{2 \cos(\phi_2) + 1} \\ - \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} \left( \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} (\sin(\psi) (-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) - \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \right. \\ \left. - \cos(\psi) (2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) + \cos(\psi) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \right) \\ + \frac{1}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} (-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ + 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) + \sin(\psi) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)) (-2 \cos(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)) + (2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) \\ + \cos(\psi) + \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)) (-2 \sin(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \left. \right) (-2 \sin(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
[\mathbf{g}_3, [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]] &= \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \frac{-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) - \sin(\psi)}{2 \cos(\phi_2) + 1} \\ - \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} \left( \frac{1}{2 \cos(\phi_2) + 1} (\sin(\psi) (-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ - 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) - \sin(\psi)) - \cos(\psi) (2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\psi))) \right. \\ \left. + \frac{1}{(2 \cos(\phi_2) + 1)^2} (-2 \sin(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \sin(\psi) \cos(\phi_2) \right. \\ \left. - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \sin(\psi)) (-2 \cos(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) \right. \\ \left. - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)) + (2 \cos(\psi) \cos(\phi_1 + \phi_2) + 2 \cos(\psi) \cos(\phi_2) \right. \\ \left. + \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\psi)) (-2 \sin(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) \right. \\ \left. - \cos(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \left. \right) (-2 \cos(\psi) \sin(\phi_1 + \phi_2) - \sin(\psi + \phi_1 + \phi_2)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Z výpočtů je hned vidět, že tato distribuce není obecně involutivní, neboť  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \notin \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ .

## Chybějící kolečka na krajních člancích

Z vektorů

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+2\cos(\phi_1)} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\sin(\psi + \phi_1)}{1+2\cos(\phi_1)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\psi + \phi_1)}{1+2\cos(\phi_1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vypočítáme Lieovy závorky:

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_4] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3] = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(\psi + \phi_1) - 2\sin(\psi + \phi_1)\sin(\phi_1)}{(1+2\cos(\phi_1))^2} - \frac{\cos(\psi + \phi_1)}{1+2\cos(\phi_1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_4] = \begin{pmatrix} \frac{-\sin(\psi + \phi_1) + 2\cos(\psi + \phi_1)\sin(\phi_1)}{(1+2\cos(\phi_1))^2} - \frac{\sin(\psi + \phi_1)}{1+2\cos(\phi_1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4] = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+2\cos(\phi_1))^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z výpočtů je hned vidět, že tato distribuce není obecně involutivní, neboť  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3] \notin \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4\}$ .

**Poznámka 1.** V případě chybějících koleček na posledním článku můžeme konstatovat, že soustava má vždy řešení.

V případě chybějících koleček na prostředním článku se ve jmenovateli objevuje výraz  $2 \cos(\phi_2) + 1$ . Soustava tedy nemá řešení, pokud

$$2 \cos(\phi_2) + 1 = 0, \quad \text{resp. } \cos(\phi_2) = -\frac{1}{2}.$$

Takové konfiguraci říkáme *singulární stav* a v tomto případě nastává, jestliže úhel  $\phi_2$  mezi prostředním a posledním článkem je roven

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{nebo} \quad \phi_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

V případě koleček pouze na prostředním článku nastávají *singulární stavy*, pokud

$$1 + 2 \cos(\phi_1) = 0, \quad \text{resp. } \cos(\phi_1) = -\frac{1}{2}.$$

Tento stav vzniká, jestliže úhel  $\phi_1$  mezi prvním a druhým článkem je roven

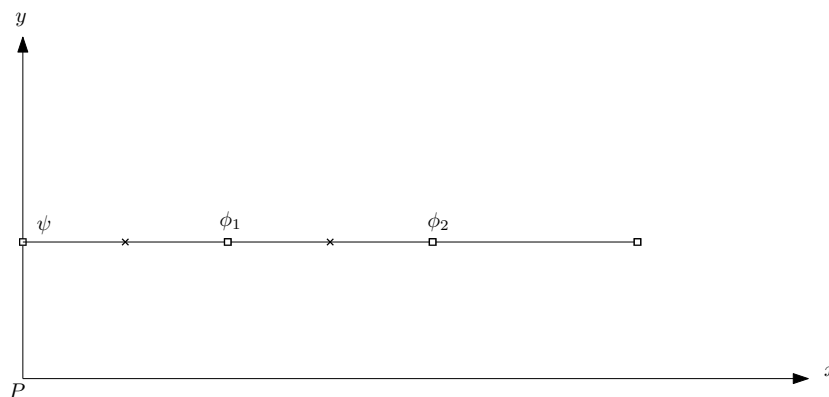
$$\phi_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{nebo} \quad \phi_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

### 3.3 Příklady

V následujícím odstavci uvedeme některé příklady konfigurací hada, které nám přijdou zajímavé. Vypočítáme parametrické řešení a vyčíslíme Lieovy závorky. Nakonec posoudíme říditelnost daného příkladu. V celé kapitole volíme  $x = y = 0$ , protože naše úvahy nejsou závislé na místě, kde se mechanismus nachází.

#### Chybějící kolečka na posledním článku

**Příklad 1.** Představme si situaci podle obrázku 3.1. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  a počáteční úhel  $\psi = 0$ .



Obrázek 3.1: Obrázek k příkladu 1

Dosazením do řešení soustavy získáme

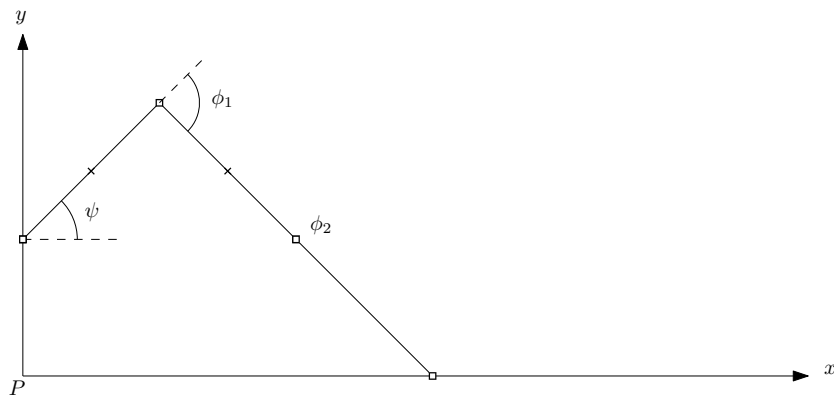
$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  a Lieovými závorkami v dané konfiguraci

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Čtvrtý, pátý a osmý sloupec nul nemá vliv na hodnotu matice  $A$ , můžeme je vyškrtnout. Získáváme matici tvořenou pěti lineárně nezávislými sloupci, tj.  $\text{rank}(A) = 5$ , matice tedy je plně řádkové hodnosti a soustava je lokálně říditelná.

**Příklad 2.** Představme si situaci podle obrázku 3.2. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  a  $\phi_2 = 0$  a počáteční úhel  $\psi = \frac{\pi}{4}$ .



Obrázek 3.2: Obrázek k příkladu 2

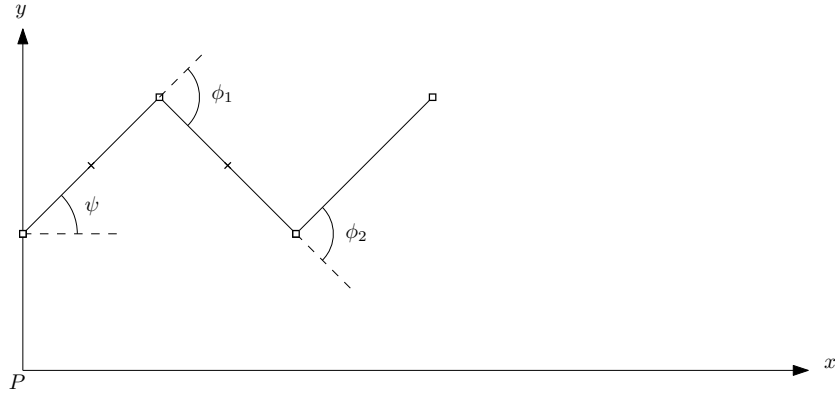
Dosažením do řešení soustavy získáme

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  a Lieovými závorkami v dané konfiguraci

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Čtvrtý a pátý sloupec jsou nulové, můžeme je vyškrtnout, aniž by se hodnota změnila. Výsledná hodnota takto upravené matice je pět, tj.  $\text{rank}(B) = 5$ , matice je plně řádkové hodnosti a soustava je v dané konfiguraci lokálně říditelná.



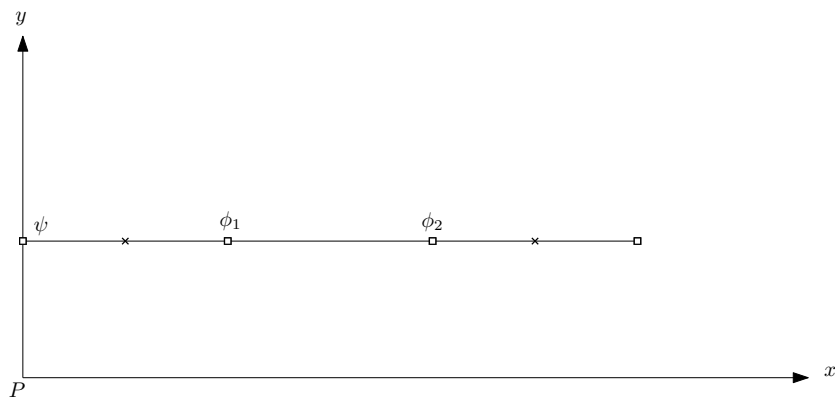
Obrázek 3.3: Obrázek k příkladu 3

**Příklad 3.** Představme si situaci podle obrázku 3.3. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$  a počáteční úhel  $\psi = \frac{\pi}{4}$ .

Z holonomních rovnic pro hada s chybějícími kolečky na posledním článku (3.1) vidíme, že nejsou závislé na velikosti úhlu  $\phi_2$ , a to stejné platí i pro řešení a Lieovy závorky. Řešení konfigurace bude totožné s řešením příkladu 2 a tak konstatujeme, že tato soustava je lokálně říditelná.

### Chybějící kolečka na prostředním článku

**Příklad 4.** Představme si robota v poloze podle obrázku 3.4. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  a počáteční úhel  $\psi = 0$ .



Obrázek 3.4: Obrázek k příkladu 4

Dosazením do řešení soustavy získáme

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

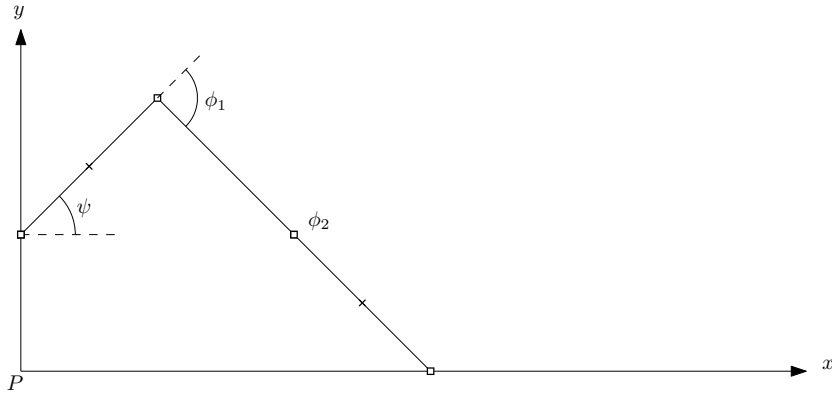


Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  a Lieovými závorkami v dané konfiguraci

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -2 & -\frac{4}{9} & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sloupce nul můžeme vynechat, neboť neovlivní výpočet hodnoti. Hodnost takto upravené matice je pět, tj.  $\text{rank}(A) = 5$ , matice je tedy plně řádkové hodnoti a soustava je lokálně říditelná.

**Příklad 5.** Představme si robota v poloze podle obrázku 3.5. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  a  $\phi_2 = 0$  a počáteční úhel  $\psi = \frac{\pi}{4}$ .



Obrázek 3.5: Obrázek k příkladu 5

Dosazením do řešení soustavy získáme

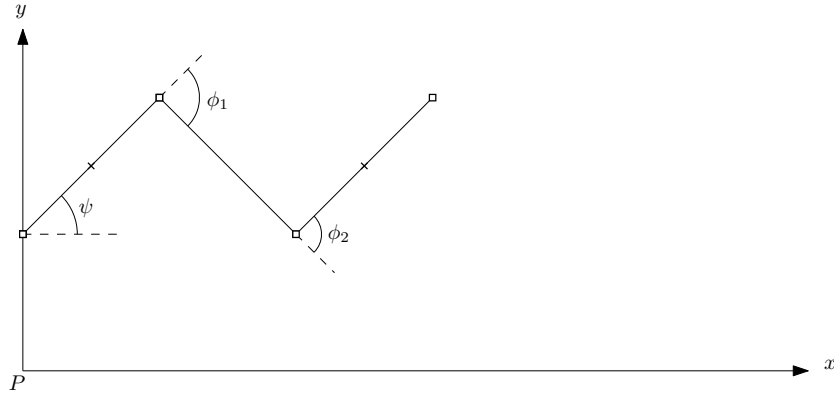
$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  a Lieovými závorkami v dané konfiguraci

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{10}{9} & 0 & -\frac{23\sqrt{2}}{27} & -\frac{\sqrt{2}}{9} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Třetí a čtvrtý sloupec matice  $B$  jsou lineárně závislé, můžeme jeden z nich škrtnout bez vlivu na výslednou hodnotu. Hodnota takto upravené matice je pět, tj.  $\text{rank}(B) = 5$ , matice je opět plně řádkové hodnosti a soustava je lokálně říditelná.

**Příklad 6.** Představme si robota v poloze podle obrázku 3.6. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  a  $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$  a počáteční úhel  $\psi = \frac{\pi}{4}$ .



Obrázek 3.6: Obrázek k příkladu 6

Dosazením do řešení soustavy získáme

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

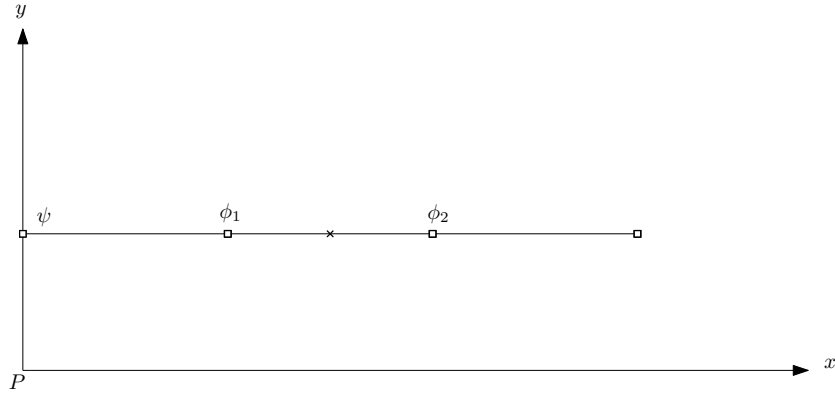
Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  a Lieovými závorkami v dané konfiguraci

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vynecháním třetího sloupce matice  $C$  tvořeného nulami neovlivníme výslednou hodnotu matice. Hodnota takto upravené matice je pět, tj.  $\text{rank}(C) = 5$ . Matice je opět plně řádkové hodnosti a soustava je říditelná.

## Chybějící kolečka na krajních člancích

**Příklad 7.** Představme si robota v poloze podle obrázku 3.7. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  a počáteční úhel  $\psi = 0$ .



Obrázek 3.7: Obrázek k příkladu 7

Dosazením do řešení soustavy získáme

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$  a Lieovými závorkami v dané konfiguraci

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

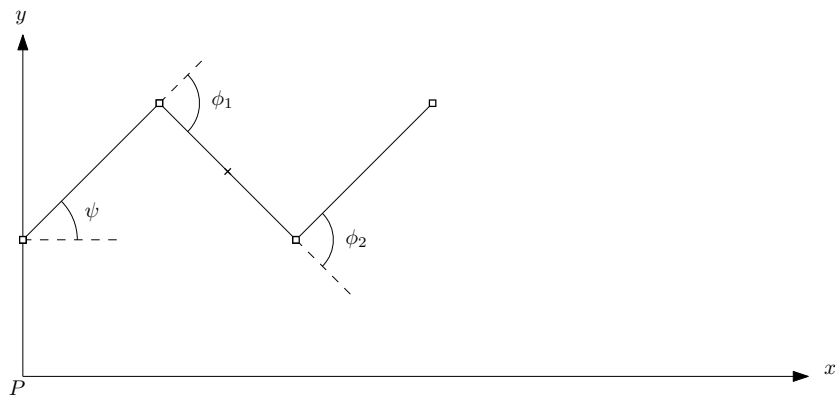
Hodnost této matice  $A$  je pět, tj.  $\text{rank}(A) = 5$ , což značí lokální říditelnost tohoto systému.

**Příklad 8.** Představme si robota v poloze podle obrázku 3.8. V tomto případě jsou úhly mezi kolečky  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$  a počáteční úhel  $\psi = \frac{\pi}{4}$ .

Dosazením do řešení soustavy získáme

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vytvoříme matici tvořenou vektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$  a Lieovými závorkami v dané confi-



Obrázek 3.8: Obrázek k příkladu 8

guraci

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice  $B$  je pět, tj.  $\text{rank}(A) = 5$ , což značí lokální říditelnost tohoto systému.

## Kapitola 4

# Řiditelnost vzhledem k aktivním prvkům

V příkladech jsme vypočítali lokální říditelnost pomocí hodnotí matic systémů v daných konfiguracích. Všechny počítané příklady nám při použití vhodných generátorů vyšly jako říditelné (hodnota příslušné matice byla 5). Nicméně vzhledem k tomu, že v našich mechanismech jsou kolečka pouze pasivní, je na první pohled vidět, že některé konfigurace chybějících koleček výrazně omezují pohyb, který můžeme realizovat, např. situace s kolečkem pouze na prostředním článku. Je to tím, že v tomto případě se jedná o říditelnost systému jako takového, tedy zda je mechanismus ze své konstrukce schopen pohybu v daném směru. Tento závěr je pro praktické využití nedostatečný, jelikož jsme nerozlišili aktivní (hnačí) a pasivní (hnané) prvky.

V následujícím oddíle zavedeme říditelnost zohledňující aktivní prvky, kterými jsou v našem případě servomotory, umístěné v kloubech mezi články, a vše opět demonstrujeme na příkladech z podkapitoly 3.3. V úvahu bereme tedy jen pohyby, při kterých se jako hnačí prvky používají úhly  $\phi_1$  a  $\phi_2$ , protože ty jediné jsme schopni měnit. V našem případě se jedná o 2. a 3. řádek matic systémů, tj. budeme sledovat, zda koeficienty na těchto pozicích jsou nebo nejsou nulové.

### Chybějící kolečka na posledním článku

**Příklad 9.** Představme si situaci podle příkladu 1. Matice systému je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Hodnota takto redukováné matice je čtyři a tedy vygenerované součiny nestačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

**Příklad 10.** Představme si situaci podle příkladu 2. Matice systému je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Je vidět, že poslední tři součiny Lieovy závorky tvoří dvoudimenzionální podprostor, jeden z nich odděláme. Hodnota takto redukované matice je čtyři a tedy vygenerované součiny nestačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

## Chybějící kolečka na prostředním článku

**Příklad 11.** Představme si situaci podle příkladu 4. Matice systému je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -2 & -\frac{4}{9} & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Vidíme, že dva součiny Lieovy závorky jsou lineárně závislé, jeden z nich vyškrtáme. Hodnota takto redukované matice je čtyři a tedy vygenerované součiny nestačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

**Příklad 12.** Představme si situaci podle příkladu 5. Matice systému je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{10}{9} & 0 & -\frac{23\sqrt{2}}{27} & -\frac{\sqrt{2}}{9} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Hodnota takto redukované matice je pět a tedy vygenerované součiny stačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

**Příklad 13.** Představme si situaci podle příkladu 6. Matice systému je

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Hodnost takto redukované matice je čtyři a tedy vygenerované součiny nestačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

## Chybějící kolečka na krajních člancích

**Příklad 14.** Představme si situaci podle příkladu 7. Matice systému je

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Hodnost takto redukované matice je dva a tedy vygenerované součiny nestačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

**Příklad 15.** Představme si situaci podle příkladu 8. Matice systému je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice odděláme sloupce mající nuly na druhém a třetím řádku. Hodnost takto redukované matice je dva a tedy vygenerované součiny nestačí pro dosažení říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům.

# Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo nastudování základů neholonomní kinematiky a aplikace na zvolený model. V našem případě se jedná o tříčlankového robotického hada pohybujícího se pomocí servomotrů, které mění úhel mezi každými dvěma články. Uprostřed každého článku jsou umístěna pasivní kolečka, která nesmí prokluzovat.

Vybrali jsme modely, kde kolečka chybí na prostředním a na posledním článku, nebo kde jsou kolečka pouze na prostředním článku, a dále je prozkoumali. Vytvořili jsme neholonomní rovnice popisující pohyb robota, určili parametrická řešení a našli řídicí distribuce. Práci jsme doplnili o názorné příklady konfigurací v prostoru.

Ve všech příkladech jsme provedli analýzu říditelnosti na základě neholonomní kinematiky a Chow-Rashevského věty. Zjistili jsme, že všechny konfigurace jsou lokálně říditelné a jejich distribuce odpovídají zaměření afinního prostoru  $Z(\mathcal{A})$ . Tato říditelnost je aparátem, který určuje, zda je systém schopen pohybu, ale nezohledňuje rozdíl mezi hnacími a hnanými prvky.

Bylo třeba zavést nový pojem a to říditelnost vzhledem k aktivním prvkům, který jsme dosud v žádné literatuře nenalezli. Obecný koncept říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům jsme v práci kvůli časovým možnostem nezaváděli, ale je to pozoruhodný problém k řešení do budoucna. Tuto vlastnost jsme pouze ověřili na příkladech z třetí kapitoly. Pro ověření jsme použili vygenerované součiny na řídicí Lieově algebře, ale nediskutovali jsme žádné další případné dodatečné součiny. Vypočetli jsme, že kromě případu hada s chybějícími kolečky pouze na prostředním článku není žádný jiný případ říditelný vzhledem k aktivním prvkům  $\phi_1$  a  $\phi_2$ , říditelná není ani žádná "rovná" konfigurace s nulovými úhly  $\psi$ ,  $\phi_1$  a  $\phi_2$ . Je vidět, že tento výsledek více odpovídá mechanické a geometrické intuici.

Práce by se mohla dále rozšířit o definici pojmu říditelnosti vzhledem k aktivním prvkům či o analýzu říditelnosti vícečlankového robotického hada s různými uspořádáními chybějících koleček a nalezení neoptimalnější, stále říditelné varianty.



# Literatura

- [1] JEAN, Frédéric. *Control of Nonholonomic Systems: From Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning*. Vyd. 1. (Paříž): Springer International Publishing, 2014, 104 s. ISBN 978-3-319-08690-3.
- [2] HORÁK, Pavel a Josef JANYŠKA. *Analytická geometrie*. Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 1997, 155 s. ISBN 80-210-1623-X.
- [3] ISHIKAWA, Masato. Trident snake robot: Locomotion analysis and control. In *IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems* [online]. Kyoto: Kyoto University, Department of Systems Science, Graduate School of Informatics, 2004 [cit. 2015-05-13]. Dostupné z: <http://www-dsc.mech.eng.osaka-u.ac.jp/ishikawa/trisnake/nolcos04>
- [4] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: Teoretická část*. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005, 179 s. ISBN 80-214-3000-1.
- [5] LILJEBÄCK, Pål, Kristin Y. PETTERSEN, Øyvind STAVDAHL a Jan Tommy GRAVDAHL. *Snake Robots: Modelling, Mechatronics, and Control*. Londýn: Springer-Verlag London, 2013, 317 s. eBook ISBN 978-1-4471-2996-7.
- [6] MURRAY, Richard M., Zexiang LI a S. Shankar SASTRY. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. USA: CRC Press, 1994, 480 s. ISBN 9780849379819. Dostupné také z: <http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki>
- [7] NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika: 1. část - Lineární algebra* [online]. [cit. 2015-14-05]. Dostupné z: <http://class.pedf.cuni.cz/STROM/dokumenty/LA.pdf>.
- [8] SAMELSON, Hans. *Notes on Lie Algebras*. 3. vyd. Stanford: Springer-Verlag New York, 1990, 162 s. eBook ISBN 978-1-4613-9014-5. Dostupné také z <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/Other/Samelson-LieAlg.pdf>

# Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{A}$	algebra
$\mathcal{A}$	afinní prostor
$Z(\mathcal{A})$	zaměření afinního prostoru
$\mathbb{V}$	vektorový prostor
$\dim(\mathbb{V})$	dimenze vektorového prostoru $\mathbb{V}$
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{H}$	množina Hamiltonových kvaternionů
$\text{rank}(A)$	hodnost matice $A$

# Přílohy

## Seznam příloh na CD

- `rovnice_posledni.mw` - Maple Worksheet s úpravou matice a výpočtem Lieových závorek pro hada s kolečky chybějícími na posledním článku
- `rovnice_prostredni.mw` - Maple Worksheet s úpravou matice a výpočtem Lieových závorek pro hada s kolečky chybějícími na prostředním článku
- `rovnice_jedno_kolecko.mw` - Maple Worksheer s výpočtem Lieových závorek pro hada s kolečky pouze na prostředním článku
- `hodnosti_posledni.mw` - Maple Worksheet s výpočtem hodnotí matic v příkladech ve druhé kapitole pro hada s kolečky chybějícími na posledním článku
- `hodnosti_prostredni.mw` - Maple Worksheet s výpočtem hodnotí matic v příkladech z druhé kapitoly pro hada s kolečky chybějícími na prostředním článku
- `hodnosti_jedno_kolecko.mw` - Maple Worksheet s výpočtem hodnotí matic v příkladech z druhé kapitoly pro hada s kolečky pouze na prostředním článku